

Отвѣт:

$$\operatorname{rot} \vec{u}(M) = \frac{(z+y)\vec{i} - (x+2z)\vec{j} + (2y-x)\vec{k}}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}},$$

$$\operatorname{rot} \vec{u}(M_0) = -\frac{1}{27}(\vec{i} + 4\vec{j} + 6\vec{k}),$$

$$\operatorname{div} \vec{u}(M) = -\frac{2x+y-z}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}},$$

$$\operatorname{div} \vec{u}(M_0) = -\frac{1}{27}.$$

В. ВАРИАНТЫ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

Вариант 1

1. Найти момент инерции относительно начала координат однородной фигуры, ограниченной линиями $xy = 2$, $y = 2x$, $2y = x$ и расположенной в первой четверти ($x \geq 0, y \geq 0$), если поверхностная плотность массы $\delta = 1$.

Ответ: $J_0 = 3$.

2. Найти площадь фигуры $2x \leq x^2 + y^2 \leq 4x, 0 \leq y \leq x\sqrt{3}$.

Ответ: $S = \pi + \frac{3\sqrt{3}}{4}$.

3. Найти электрический заряд кривой $y = \frac{x^2}{2}$, $1 \leq x \leq 2$, если плотность заряда $\lambda = \frac{y}{x}$.

Ответ: $q = \frac{1}{6}(5\sqrt{5} - 2\sqrt{2})$.

4. Найти работу поля $\vec{F} = y(x-y)\vec{i} + x\vec{j}$ при перемещении точки по эллипсу $x=2\cos t$, $y = \sin t$ из $A(2, 0)$ в $B(0, 1)$. Найти циркуляцию $\vec{F}$ по замкнутому контуру $ABDA$, где $D(-1, 1)$, BD и DA - прямые. Найти поток вектора $\vec{F}$ через дугу $\overset{\smile}{AB}$ эллипса.

Ответ: $W = \frac{\pi}{2}$; $\Gamma = \frac{\pi}{2}$; $\Pi = \frac{7}{3}$.

5. Найти координаты центра массы однородного тела, ограниченного поверхностями $x = 0$, $y = 0$, $z = 1$, $z = 3$, $2x + y = 3$.

Ответ: $C(\frac{1}{2}; 1, 2)$.

6. Найти массу части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, расположенной в первом октанте ($x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$), если поверхностная плотность массы $\delta = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Ответ: $m = \frac{1}{8}\pi^2 a^3$.

7. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a} = -(3y^2 + 2x^2)\vec{i} + 2x^2\vec{j} - (2x^2 + y^2)\vec{k}$ в точке $M(x, y, z)$ и в точке $M_0(1, 1, 1)$.

Ответ: $\text{div} \vec{a}(M_0) = -4, \text{rot} \vec{a}(M_0) = -2\vec{i} + 4\vec{j} + 10\vec{k}$.

Вариант 2

1. Найти ординату центра массы фигуры, ограниченной линиями $y = e^x, y = e^{-x}, x = 1$, если поверхностная плотность массы $\delta = e^x$.

Ответ: $y = \frac{e^3 - 3e^{-1} - 4}{3e^2 - 9}$.

2. Найти площадь фигуры, ограниченной кардиоидой $\rho = a(1 - \sin \varphi)$ и окружностью $\rho = a$ и расположенной вне кардиоиды.

Ответ: $s = \frac{a^2(8 - \pi)}{4}$.

3. Найти массу дуги параболы $y^2 = 2px, 0 \leq x \leq \frac{p}{2}$, если линейная плотность массы $\delta = |y|$.

Ответ: $m = \frac{2p^2}{3}(2\sqrt{2} - 1)$.

4. Найти работу поля $\vec{F} = -y\vec{i} + x\vec{j}$ при перемещении точки по окружности $x = 2 \cos t, y = 2 \sin t$ из $A(2,0)$ в $B(-2,0)$. Найти циркуляцию $\vec{F}$ по замкнутому контуру $ABDA$, состоящему из дуги $\overset{\cup}{AB}$ и прямых BD и DA , где $D(-2,-2)$. Найти поток вектора $\vec{F}$ через дугу $\overset{\cup}{AB}$.

Ответ: $W = 4\pi, \quad \Pi = 0, \quad \text{Ц} = 4\pi + 8$.

5. Найти момент инерции относительно оси Oz однородного тела, ограниченного поверхностями $x + y + z = a\sqrt{2}, x^2 + y^2 = a^2, z = 0$, если плотность массы $\delta = 1$.

Ответ: $J_z = \frac{\pi a^5}{\sqrt{2}}$.

6. Найти электрический заряд части поверхности $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, отсеченной плоскостью $z = 1$, если поверхностная плотность заряда $\lambda = z$.

Ответ: $q = \frac{2\pi(1 + 6\sqrt{3})}{15}$.

7. Найти дивергенцию и ротор векторного поля в точке $M(x, y, z)$ и в точке $M_0(1,2,3)$.

Ответ: $\text{div} \vec{a}(M_0) = 0, \text{rot} \vec{a}(M_0) = -2\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$.

Вариант 3

1. Найти момент инерции относительно оси ox однородной фигуры, ограниченной линиями $\frac{y}{h} - \frac{3x}{a} = 1$, $\frac{y}{h} + \frac{3x}{2a} = 1$, $y = 0$, если поверхностная плотность массы $\delta = 1$.

Ответ: $J_x = \frac{ah^3}{12}$.

2. Найти площадь фигуры, ограниченной кардиоидой $\rho = 4(1 + \sin \varphi)$ и прямой $\rho \sin \varphi = 3$ и расположенной выше прямой.

Ответ: $S = 8\pi + 9\sqrt{3}$.

3. Найти электрический заряд кривой $y = \ln \cos x$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$, если линейная плотность заряда равна $\lambda = \sin x \cdot \cos^2 x$.

Ответ: $q = \frac{1}{8}$.

4. Найти работу поля $\vec{F} = (x^2 - y^2)\vec{i} + (x^2 + y^2)\vec{j}$ при перемещении точки по дуге эллипса $x = 2 \cos t$, $y = \sin t$ от $A(2;0)$ до $B(0;1)$. Найти циркуляцию $\vec{F}$ по замкнутому контуру $ABDA$, составленному из дуги $\overset{\cup}{AB}$ и прямых BD и DA , если $D(0;-1)$. Найти поток вектора $\vec{F}$ через дугу $\overset{\cup}{AB}$.

Ответ: $W = \frac{5}{3}$; $\Pi = \frac{19}{3}$; $\Pi = \frac{14}{3}$.

5. Найти массу тела, ограниченного поверхностями $z = \sqrt{x}$, $z = 2\sqrt{x}$, $x + y = 6$, $y = 0$, если плотность массы $\delta = 2z$.

Ответ: $m = 108$.

6. Найти координаты центра массы части однородной поверхности $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, вырезанной поверхностью $x^2 + y^2 = ax$.

Ответ: $C\left(\frac{a}{2}; 0; \frac{16a}{9\pi}\right)$.

7. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}(3\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k})$ в точке $M(x, y, z)$ и в точке $M_0(1, -2, -2)$.

Ответ: $\text{div} \vec{a}(M_0) = \frac{7}{3}$; $\text{rot} \vec{a}(M_0) = \frac{1}{3}(12\vec{i} - 2\vec{j} + 8\vec{k})$.

Вариант 4

1. Найти координаты центра массы однородной фигуры, ограниченной кривыми $y = x^2, y = 2x^2, x = 1, x = 2$.

Ответ: $c\left(\frac{45}{28}, \frac{279}{70}\right)$.

2. Найти момент инерции относительно начала координат фигуры $x^2 + y^2 \leq 2Rx$, если поверхностная плотность массы $\delta = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Ответ: $J_0 = \frac{512R^5}{75}$.

3. Найти массу участка кривой $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t, 0 \leq t \leq \pi \end{cases}$, если линейная плотность массы $\delta = y$.

Ответ: $m = 2$.

4. Найти работу поля $\vec{F} = y(x - y)\vec{i} + x\vec{j}$ при перемещении точки по дуге параболы $y = 2x^2$ от $O(0,0)$ до $B(1,2)$. Найти циркуляцию вектора $\vec{F}$ по замкнутому контуру, составленному из дуги $\overset{\cup}{OB}$ параболы и прямых BD и DO , если $D(-1,2)$. Найти поток вектора $\vec{F}$ через дугу $\overset{\cup}{OB}$.

Ответ: $W = \frac{31}{30}; \quad \text{Ц} = \frac{241}{30}; \quad \text{П} = \frac{47}{30}$.

5. Найти объем тела, ограниченного поверхностями: $z = \sqrt{x}, z = 2\sqrt{x}, x + y = 6, y = 0$.

Ответ: $V = \frac{48\sqrt{6}}{5}$.

6. Найти электрический заряд части конической поверхности $z = \sqrt{y^2 + x^2}$, отсеченной цилиндром $x^2 + y^2 = 2ax$, если поверхностная плотность заряда $\lambda = -(x^2 + y^2 + z)$.

Ответ: $q = -3\sqrt{2}\pi a^4$.

7. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a} = x^2 yz\vec{i} + xy^2 z\vec{j} + xyz^2\vec{k}$ в точках $M(x, y, z)$ и $M_0(1,2,3)$.

Ответ: $\text{diva}(M_0) = 36, \text{rot}\vec{a}(M_0) = 5\vec{i} - 16\vec{j} + 9\vec{k}$.

Вариант 5

1. Найти абсциссу центра массы фигуры, ограниченной линиями $y = \ln x, y = 0, y = 1, x = 0$, если поверхностная плотность массы $\delta = e^y$.

Ответ: $\bar{x} = \frac{e}{3} + \frac{1}{3(e+1)}$.

2. Найти электрический заряд фигуры $x^2 + y^2 \leq 2Rx, y \geq 0$, если поверхностная плотность заряда $\lambda = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Ответ: $q = \frac{16}{9} R^3$.

3. Найти момент инерции первого витка однородной винтовой линии $x = a \cos t, y = a \sin t, z = \frac{h}{2\pi} t$ относительно оси oz . Линейная плотность массы $\delta = 1$.

Ответ: $J_z = a^2 \cdot \sqrt{4\pi^2 a^2 + h^2}$.

4. Найти работу поля $\vec{F} = x(y-1)\vec{i} + x^2\vec{j}$ при перемещении точки по дуге параболы $y = x^2$ от $B(-2;4)$ до $C(2,4)$. Найти циркуляцию вектора $\vec{F}$ по замкнутому контуру, составленному из дуги $\overset{\smile}{BC}$ параболы и прямой CB . Найти поток вектора $\vec{F}$ через дугу $\overset{\smile}{BC}$ параболы.

Ответ: $W = 0, \text{Ц} = 0, \text{П} = -9,6$.

5. Найти момент инерции относительно оси Oy однородного тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 = R^2, z = 0, z = H$, если масса тела равна m .

Ответ: $J_y = \frac{m}{12}(3R^2 + 4H^2)$.

6. Найти массу части поверхности $z = \sqrt{4 - x^2}$, отсеченной плоскостями $y = 0, y = 5, x = 0, z = 0$ и расположенной в первой октанте, если поверхностная плотность массы $\delta = z(x + y)$.

Ответ: $m = 70$.

7. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a}$, если $\vec{a} = \vec{b} \times \vec{c}$, где $\vec{a} = -(2x^2 + 3y^2)\vec{i} + 2x^2\vec{j} - (2x^2 + y^2)\vec{k}$, $\vec{b} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} - x^2\vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k}$ в точке $M(x, y, z)$ и в точке $M_0(1, -1, 1)$.

Ответ: $\text{div} \vec{a} = -4x, \text{rot} \vec{a} = -2y\vec{i} + 4x\vec{j} + (4x + 6y)\vec{k}$.

Вариант 6

1. Найти электрический заряд фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{x}{2}, y = \sqrt{\frac{x}{2}}$, если поверхностная плотность заряда $\lambda = -(xy^2 + 1)$.

Ответ: $q = -\frac{47}{105}$.

2. Найти массу фигуры $1 \leq x^2 + y^2 \leq 9, 0 \leq x \leq y$, если поверхностная плотность массы $\delta = \frac{x}{y}$.

Ответ: $m = 2\ln 2$.

3. Найти момент инерции линии $y = e^x, 0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ относительно оси ox , если линейная плотность массы $\delta = 1$.

Ответ: $J_x = \frac{1}{3} \left((1+e)^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{2} \right)$.

4. Найти работу поля $\vec{F} = (x+2y)\vec{i} + (x-y)\vec{j}$ при перемещении точки по дуге эллипса $x = 4\cos t, y = 3\sin t$ от $B(0,3)$ до $C(-4,0)$. Найти циркуляцию вектора $\vec{F}$ по замкнутому контуру, составленному из дуги эллипса $\overset{\cup}{BC}$ и прямых CD и DB , если $D(0;-2)$. Найти поток вектора $\vec{F}$ через дугу $\overset{\cup}{BC}$ эллипса.

Ответ: $W = \frac{25-6\pi}{2}, \quad \text{Ц} = -4-3\pi, \quad \text{П} = -17$.

5. Найти координаты центра массы однородного тела, ограниченного поверхностями $x = 3 - y^2 - z^2, x = 0$.

Ответ: $C(1,0,0)$.

6. Найти площадь части плоскости $z = 4 - x$, вырезанной поверхностями $z = 0, x = y^2$.

Ответ: $S = \frac{32\sqrt{2}}{3}$.

6. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a} = \left(3\frac{y}{x} + 2\frac{x}{y} \right)\vec{i} + 2\frac{x}{y}\vec{j} - \left(2\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right)\vec{k}$ в точке $M(x, y, z)$ и в точке $M_0(1, 1, 1)$.

Ответ: $\text{div} \vec{a}(M_0) = -1, \text{rot} \vec{a}(M_0) = \vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$.

Вариант 7

1. Найти абсциссу центра массы однородной фигуры

Ответ: $\bar{x} = \frac{(4-\pi)(\sqrt{2}+1)}{4}$.

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кардиоидой $\rho = 4(1 + \cos \varphi)$ и прямой $\rho \cos \varphi = 3$ и расположенной справа от прямой.

Ответ: $S = 8\pi + 9\sqrt{3}$.

3. Найти координаты центра массы однородной кривой $\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases}, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

Ответ: $C\left(\frac{2a}{5}; \frac{2a}{5}\right)$.

4. Найти работу поля $\vec{F} = (xy - y^2)\vec{i} + x\vec{j}$ при перемещении точки по дуге параболы $y = 2\sqrt{x}$ от $O(0,0)$ до $B(1,2)$. Найти циркуляцию вектора $\vec{F}$ по замкнутому контуру $OCBO$, состоящему из дуги BO параболы и прямых OC и CB , если $C(1; -1)$. Найти поток вектора $\vec{F}$ через дугу $\overset{\circ}{OB}$ параболы.

Ответ: $W = -\frac{8}{15}, \Pi = \frac{71}{30}, \Pi = \frac{13}{6}$.

5. Вычислить электрический заряд тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 = 1, x^2 + y^2 = 3z, x = 0, y = 0, z = 0$ и расположенного в первом октанте ($x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$), если плотность заряда $\lambda = -x$.

Ответ: $q = -\frac{1}{15}$.

6. Найти массу части плоскости $x + y + z = 4$, вырезанной цилиндром $x^2 + y^2 = 4$, если поверхностная плотность массы $\delta = (x^2 + y^2)^2 + z^2$.

Ответ: $m = \frac{280}{3}\pi\sqrt{3}$.

7. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}(2\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k})$ в точке $M(x, y, z)$ и $M_0(-2, 2, 1)$.

Ответ: $\text{div} \vec{a}(M_0) = -\frac{11}{3}; \text{rot} \vec{a}(M_0) = \frac{1}{3}(6\vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k})$.

Вариант 8

1. Найти ординату центра массы однородной фигуры $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq y \leq \sin x$.

Ответ: $\bar{y} = \frac{(\pi - 2)(2 + \sqrt{2})}{16}$.

2. Найти момент инерции однородной фигуры $x^2 + y^2 \leq 2y, y \geq 1$ относительно оси Ox , если поверхностная плотность массы $\delta = 1$.

Ответ: $J_x = \frac{15\pi + 20}{24}$.

3. Найти длину дуги астроиды $\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases}$.

Ответ: $l = 6a$.

4. Найти работу поля $\vec{F} = (x + 3y)\vec{i} + (y + 2x)\vec{j}$ при перемещении точки по дуге параболы $y = \frac{x + x^2}{2}$ от $B(-1, 0)$ до $O(0, 0)$. Найти циркуляцию вектора $\vec{F}$ по замкнутому контуру $OCBO$, состоящему из дуги BO параболы и прямых OC и CB , где $C(-1, 2)$. Найти поток вектора $\vec{F}$ через дугу $\overset{\circ}{BO}$.

Ответ: $W = -\frac{7}{12}; \quad \text{Ц} = -\frac{13}{12}; \quad \Pi = -\frac{7}{6}$.

5. Вычислить электрический заряд тела, ограниченного плоскостями $x + y + z = 2, x = 0, z = 0, x - y = 0$, если плотность заряда $\lambda = -x$.

Ответ: $q = \frac{1}{6}$.

6. Найти массу полусферы $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, если поверхностная плотность массы $\delta = z \cdot \sqrt{x^2 + y^2}$.

Ответ: $m = \frac{2}{3}\pi R^4$.

7. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a} = \arctg \frac{z}{x+y} (2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$ в точке $M(x, y, z)$ и в точке $M_0(1, 1, 1)$.

Ответ: $\text{div} \vec{a}(M_0) = -\frac{1}{5}; \quad \text{rot} \vec{a}(M_0) = \frac{1}{5}(-3\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k})$.

Вариант 9

1. Найти координаты центра массы однородной фигуры, ограниченной линиями $\sqrt{2}y = x, y = 2, x = 0$.

Ответ: $C\left(\frac{3}{4}, \frac{6}{5}\right)$.

2. Найти электрический заряд кольца $\frac{\pi^2}{4} \leq x^2 + y^2 \leq 4\pi^2$, если поверхностная плотность заряда $\lambda = \cos \sqrt{x^2 + y^2}$.

Ответ: $q = 2\pi - \pi^2$.

3. Найти электрический заряд участка кривой $\begin{cases} x = t^3 \\ y = t \\ z = t^2, \end{cases} 0 \leq t \leq 1$, если линейная плотность заряда $\lambda = \sqrt{1 + 4z + 9xy}$.

Ответ: $q = -\frac{62}{15}$.

4. Найти работу поля $\vec{F} = (2x + y)\vec{i} + (2x - y)\vec{j}$ при перемещении точки по дуге параболы $y = 2x - x^2$ от $O(0,0)$ до $B(2,0)$. Найти циркуляцию вектора $\vec{F}$ по замкнутому контуру, состоящему из дуги $\overset{\circ}{BO}$ и прямых OC и CB , если $C(2;-1)$. Найти поток вектора $\vec{F}$ через дугу $\overset{\circ}{OB}$.

Ответ: $W = \frac{8}{3}; \Pi = \frac{7}{3}; \quad \Pi = \frac{16}{3}$.

5. Найти массу тела, ограниченного поверхностями $y = \sqrt{x^2 + z^2}, y = b$, если плотность массы $\delta = y$.

Ответ: $m = \frac{\pi b^4}{4}$.

6. Найти момент инерции относительно оси Oz части однородной поверхности сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq h$, если поверхностная плотность массы $\delta = 1$.

Ответ: $J_z = \frac{2\pi R}{3}(R - h)(2R^2 - Rh - h^2)$.

7. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a} = (2y^2 - 3x^2)\vec{i} - x^2\vec{j} + (y^2 - 3x^2)\vec{k}$ в точке $M(x, y, z)$ и в точке $M_o(1, 3, -2)$.

Ответ: $\text{div} \vec{a}(M_o) = -6, \text{rot} \vec{a}(M_o) = +6\vec{i} + 6\vec{j} - 14\vec{k}$.

Вариант 10

1. Найти координаты центра массы однородной фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{2x}$, $x = 2$, $y = 0$.

Ответ: $C\left(\frac{6}{5}, \frac{3}{4}\right)$.

2. Найти момент инерции однородного круга $x^2 + y^2 \leq 2Ry$ относительно оси Ox , если поверхностная плотность массы $\delta = 1$.

Ответ: $J = \frac{5}{4}\pi R^4$.

3. Найти массу кривой $\sqrt{x} + \sqrt{y} = a$, $0 \leq x \leq a$, если линейная плотность массы $\lambda = \sqrt{\frac{x^3}{x+y}}$.

Ответ: $m = \frac{a^2}{2}$.

4. Найти работу поля $\vec{F} = (x+2y)\vec{i} + (x-y)\vec{j}$ при перемещении точки по дуге эллипса $x = \cos t$, $y = 2 \sin t$ от $B(0; -2)$ до $A(1; 0)$. Найти циркуляцию вектора $\vec{F}$ по замкнутому контуру $BACB$, состоящему из дуги $\overset{\smile}{BA}$ и прямых AC и CB , если $C(0; 1)$. Найти поток вектора $\vec{F}$ через дугу $\overset{\smile}{BA}$.

Ответ: $W = \frac{5-\pi}{2}$; $\Pi = -\frac{1+\pi}{2}$; $\Pi = \frac{9}{2}$.

5. Найти координаты центра массы однородного тела, ограниченного плоскостями $z = 0$, $z = ky$ и цилиндрической поверхностью $y = \sqrt{a^2 - x^2}$.

Ответ: $C\left(0; \frac{3}{16}\pi a; \frac{3}{32}\pi a k\right)$.

6. Найти электрический заряд части поверхности $2z = 9 - x^2 - y^2$, отсекаемой плоскостью $z = 0$, если поверхностная плотность заряда $\lambda = x^2 + y^2 + z - 2$.

Ответ: $q = \frac{\pi}{15}(500\sqrt{10} - 23)$.

7. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a} = \frac{2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}}{x^2 + y^2 + z^2}$ в произвольной точке $M(x, y, z)$ и в точке $M_0(1, 1, 1)$.

Ответ: $\text{div} \vec{a}(M_0) = -\frac{4}{9}$; $\text{rot} \vec{a}(M_0) = \frac{1}{9}(4\vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k})$;

Вариант 11

1. Вычислить массу плоской фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}$, $y = 2x$, $x = 0$, если поверхностная плотность массы $\delta = y$.

Ответ: $m = \frac{4}{\sqrt{10}}$.

2. Найти момент инерции относительно оси Oy однородной фигуры $x^2 + y^2 \leq 2x, x \geq 1$, если поверхностная плотность массы $\delta = 1$.

Ответ: $J_y = \frac{15\pi + 32}{24}$.

3. Найти массу кривой $y = \sqrt{x-x^2}$, если линейная плотность массы $\delta = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Ответ: $m = 1$.

4. Найти работу поля $\vec{F} = (x^2 + y^2)\vec{i} + (y^2 - x^2)\vec{j}$ при перемещении точки по дуге эллипса $x = 2\cos t$, $y = \sin t$ из $A(0; -1)$ в $B(2; 0)$. Найти циркуляцию вектора $\vec{F}$ по замкнутому контуру $ABCA$, состоящему из дуги AB эллипса и прямых BC и CA , если $C(-2; 0)$. Найти поток вектора $\vec{F}$ через дугу $\overset{\smile}{AB}$.

Ответ: $W = \frac{5}{3}$; $\Pi = -\frac{10}{3}$; $\Pi = -\frac{13}{3}$.

5. Найти электрический заряд тела, ограниченного поверхностями $z = x^2 + y^2, y = x^2, z = 0, y = 1$, если плотность заряда $\lambda = 3x + 4y$.

Ответ: $q = \frac{160}{63}$.

6. Найти координаты центра массы части однородной конической поверхности $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, находящейся между плоскостями $z = 0, z = h$.

Ответ: $C\left(0, 0, \frac{2h}{3}\right)$.

7. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}(3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k})$ в точке $M(x, y, z)$ и в точке $M_0(2; -2; 1)$.

Ответ: $\text{div} \vec{a}(M_0) = \frac{13}{3}$; $\text{rot} \vec{a}(M_0) = \frac{1}{3}(\vec{i} + \vec{j})$.

Вариант 12

1. Вычислить координаты центра массы однородной фигуры, ограниченной эллипсом $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ и осью абсцисс.

Ответ: $C\left(0; \frac{4b}{3\pi}\right)$.

2. Найти момент инерции относительно начала координат однородного круга $x^2 + y^2 \leq 4y$, если поверхностная плотность массы $\delta = 1$.

Ответ: $J_0 = 24\pi$.

3. Найти электрический заряд линии $\begin{cases} x = t \cos t \\ y = t \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi, \text{ если плотность заряда} \\ z = t \end{cases}$

$\lambda = -z$.

Ответ: $q = \frac{\sqrt{8}}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{(2 + 4\pi^2)^3}$.

4. Найти работу поля $\vec{F} = (2x + y)\vec{i} + (2x - 3y)\vec{j}$ при перемещении точки от $A(1, 0)$ до $B(-1, 0)$ по параболе $y = 1 - x^2$. Найти циркуляцию вектора $\vec{F}$ по замкнутому контуру, состоящему из дуги $\overset{\cup}{AB}$ параболы и прямых BC и CA , если $C(-1; -1)$. Найти поток вектора $\vec{F}$ через дугу $\overset{\cup}{BA}$.

Ответ: $W = \frac{4}{3}$; $\Pi = \frac{7}{3}$; $\Pi = -\frac{4}{3}$.

5. Найти статический момент относительно плоскости xOz однородного тела, ограниченного поверхностями $x = \sqrt{y}$, $x = 2\sqrt{y}$, $z = 0$, $y + z = 6$, если плотность массы $\delta = 1$.

Ответ: $M_{xz} = \frac{864\sqrt{6}}{35}$.

6. Найти массу части поверхности $z = \frac{x^2 + y^2}{2}$, отсеченной плоскостью $z = 1$, если поверхностная плотность массы $\delta = z$.

Ответ: $m = \frac{4\pi(6\sqrt{3} + 1)}{15}$.

7. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a} = (x^2 + 2y^2)\vec{i} - 2y^2\vec{j} + \frac{2y^2 - x^2}{z}\vec{k}$ в произвольной точке $M(x, y, z)$ и в точке $M_0(1, 1, 1)$.

Ответ: $\text{div}\vec{a}(M_0) = -3$, $\text{rot}\vec{a}(M_0) = 4\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}$.

Вариант 13

1. Найти электрический заряд треугольной пластины с вершинами $A (-2;-2)$, $B (-1;2)$, $C (-1;-\frac{3}{2})$, если поверхностная плотность заряда $\lambda = 2x + y$.

Ответ: $q = -\frac{133}{24}$.

2. Найти момент инерции однородной фигуры, ограниченной кардиоидой относительно оси ox , если поверхностная плотность массы $\delta = 1$.

Ответ: $J_x = \frac{21\pi a^4}{32}$.

3. Найти координаты центра массы кривой $\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \end{cases}, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, если линейная плотность массы $\delta = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

Ответ: $C \left(\frac{e^{\frac{\pi}{2}} - 1}{\pi}; \frac{e^{\frac{\pi}{2}} + 1}{\pi} \right)$.

4. Найти работу поля $\vec{F} = (x^2 - 2xy)\vec{i} + (y^2 - 2xy)\vec{j}$ при перемещении точки по гиперболе $y = \frac{2}{x}$ от $A (1,2)$ до $B (2,1)$. Найти циркуляцию вектора $\vec{F}$ по замкнутому контуру $ABCA$, состоящему из дуги гиперболы $\overset{\cup}{AB}$ и прямых BC и CA , если $C (2,3)$. Найти поток вектора $\vec{F}$ через дугу $\overset{\cup}{AB}$.

Ответ: $W = 0$; $\Pi = -\frac{2}{3}$; $\Pi = -4$.

5. Найти статический момент относительно плоскости uoz однородного тела, ограниченного поверхностями $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$, $z = 0$, $x + z = 6$, если плотность массы $\delta = 1$.

Ответ: $M_{yz} = \frac{864\sqrt{6}}{35}$.

6. Найти массу части конической поверхности $z = \sqrt{2xy}$, отсекаемой плоскостью $x + y = 1$, если поверхностная плотность массы $\delta = \sqrt{2xy}$.

Ответ: $m = \frac{1}{3}$.

7. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a} = (y^2 - 3x^2)\vec{i} + x^2\vec{j} + (2y^2 - 3x^2)\vec{k}$ в точках $M(x, y, z)$ и $M_0(1, -1, 1)$.

Ответ: $\text{div}(\vec{a}) = -6$, $\text{rot}\vec{a} = -4\vec{i} + 6\vec{j} + 4\vec{k}$.

Вариант 14

1. Найти момент инерции относительно оси Oy однородного треугольника с вершинами $A(1,1)$; $B(1,2)$; $C(3,3)$, если поверхностная плотность массы $\delta = 1$.

Ответ: $J_y = 3$.

2. Найти статический момент относительно оси Ox однородной фигуры $1 \leq x^2 + y^2 \leq 2y$, если поверхностная плотность массы $\delta = 1$.

Ответ: $M_x = \frac{8\pi + 3\sqrt{3}}{12}$.

3. Найти длину дуги кривой $\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \\ z = e^t \end{cases}$ при $-\infty < t \leq 0$.

Ответ: $l = \sqrt{3}$.

4. Найти работу поля $\vec{F} = (x^2 - 2xy)\vec{i} + (y^2 - 2xy)\vec{j}$ при перемещении точки по дуге гиперболы $y = \frac{2}{x}$ от $A(-2,-1)$ до $B(-1,-2)$. Найти циркуляцию вектора $\vec{F}$ по замкнутому

контур $ABCA$, состоящему из дуги гиперболы $\overset{\smile}{AB}$ и прямых BC и CA , если $C(1;-1)$.

Найти поток вектора через дугу $\overset{\smile}{AB}$.

Ответ: $W = 0$; $\Pi = 2$; $\Pi = -4$.

5. Вычислить массу тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 = 2z$, $z = 2$, если плотность массы $\delta = x^2 + y^2$.

Ответ: $m = \frac{16\pi}{3}$.

6. Найти электрический заряд части поверхности конуса $x = \sqrt{y^2 + z^2}$, вырезанной цилиндром $y^2 + z^2 = 2ay$, если поверхностная плотность заряда $\lambda = x^2 + y^2 + z^2$.

Ответ: $q = \frac{3\pi a^4}{\sqrt{2}}$.

7. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a} = \arctg \frac{z}{x+y}(\vec{i} - \vec{j} + \vec{k})$ в точках

$M(x, y, z)$ и $M_0(1,1,1)$.

Ответ: $\text{div}(M_0) = \frac{2}{5}$, $\text{rota}(M_0) = \frac{1}{5}(i + 3j + 2k)$.

Вариант 15

1. Найти координаты центра массы однородной фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 3x, y = x$, если поверхностная плотность массы $\delta = 1$.

Ответ: $C\left(\frac{6}{5}, \frac{3}{2}\right)$.

2. Найти момент инерции относительно начала координат однородной фигуры, ограниченной кривой $\rho = 2a \cos \varphi$, если плотность массы $\delta = 1$.

Ответ: $J_0 = \frac{3}{2}\pi a^4$.

3. Найти массу участка кривой $y = -\ln \cos x, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$, если линейная плотность массы $\delta = \sin^2 x \cdot \cos^2 x$.

Ответ: $m = \frac{\sqrt{2}}{12}$.

4. Найти работу поля $\vec{F} = \frac{1}{x}\vec{i} + \frac{1}{y}\vec{j}$ при перемещении точки по дуге окружности $x = 2 \cos t, y = 2 \sin t$ от $A(\sqrt{3}, 1)$ до $B(1, \sqrt{3})$. Найти циркуляцию вектора $\vec{F}$ по замкнутому контуру $ACBA$, состоящему из дуги $\overset{\cup}{BA}$ окружности и прямых AC и CB , где $C(\sqrt{3}; \sqrt{3})$. Найти поток вектора $\vec{F}$ через дугу $\overset{\cup}{AB}$ окружности.

Ответ: $W = 0, \quad \text{Ц} = 0, \quad \text{П} = \frac{\pi}{3}$.

5. Найти заряд тела, ограниченного плоскостями $x = 0, y = 0, z = 0, y = h, x + z = a$, если плотность заряда $\lambda = -x$.

Ответ: $q = -\frac{a^3 h}{6}$.

6. Вычислить массу участка поверхности $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, отсеченного плоскостью $z = 1$, если поверхностная плотность массы $\delta = x^2 + y^2 + 3z^2$.

Ответ: $m = 2\pi\sqrt{2}$.

7. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a} = (\vec{i} + 2\vec{j} + k) \ln(x + 2y + 3z)$ в произвольной точке $M(x, y, z)$ и в точке $M_1(1, 1, 1)$.

Ответ: $\text{div} \vec{a}(M_0) = \frac{4}{3}; \text{rot} \vec{a}(M_0) = \frac{-2\vec{i} + \vec{j}}{3};$

Вариант 16

1. Найти координаты центра массы фигуры, ограниченной линиями $x^2 = 3y$, $x = y$, если поверхностная плотность массы $\delta = 1$.

Ответ: $C\left(\frac{3}{2}; \frac{6}{5}\right)$.

2. Найти массу круга радиуса R , плотность массы которого в каждой точке равна расстоянию от этой точки до окружности.

Ответ: $m = \frac{\pi R^3}{3}$.

3. Найти статический момент кривой $\begin{cases} x = 4 \cos t \\ y = \sin t \end{cases}, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ относительно оси ox , если линейная плотность массы $\delta = x$.

Ответ: $M_x = 5,6$.

4. Найти работу поля $\vec{F} = \frac{x}{y}\vec{i} - \frac{y}{x}\vec{j}$ при перемещении точки по дуге гиперболы $y = -\frac{2}{x}$ от $A(1; -2)$ до $B(2; -1)$. Найти циркуляцию вектора $\vec{F}$ по замкнутому контуру $ACBA$, состоящему из дуги гиперболы $\overset{\cup}{BA}$ и прямых AC и CB , где $C(-2; -2)$. Найти поток вектора $\vec{F}$ через дугу $\overset{\cup}{AB}$ гиперболы.

Ответ: $W = 0$, $\Pi = 0$, $\Pi = 2$.

5. Найти электрический заряд тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 = 2x$, $z = 0$, $z = 3$, если плотность заряда $\lambda = -z\sqrt{x^2 + y^2}$.

Ответ: $q = -8$.

6. Найти момент инерции относительно оси oz однородной полусферы $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, если поверхностная плотность массы $\delta = 1$.

Ответ: $J_z = \frac{4}{3}\pi R^4$.

7. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a} = (y^2 + 3x^2)\vec{i} - 3x^2\vec{j} + (3x^2 - 2y^2)\vec{k}$ в точке $M(x, y, z)$ и в точке $M_0(2, 1, 1)$.

Ответ: $\text{div}\vec{a}(M_0) = 12, \text{rot}\vec{a}(M_0) = -4\vec{i} - 12\vec{j} - 14\vec{k}$.

Вариант 17

1. Найти момент инерции относительно оси Ox плоской однородной фигуры, ограниченной кривыми $y = \sqrt{2x}$, $x + y = 3$, $y = 0$, если поверхностная плотность массы $\delta = 1$.

Ответ: $J_x = 1,4$.

2. Найти массу фигуры $x^2 + y^2 \leq 4x$, если поверхностная плотность массы $\delta = x^2$.

Ответ: $m = 20\pi$.

3. Найти координаты центра массы однородной полуокружности $y = \sqrt{a^2 - x^2}$.

Ответ: $C\left(0; \frac{2a}{\pi}\right)$.

4. Найти работу поля $\vec{F} = \frac{x\vec{i} - y\vec{j}}{x^2 + y^2}$ при перемещении точки по дуге окружности $x = 3 \cos t$, $y = 3 \sin t$ от $A(3, 0)$ до $B(0, 3)$. Найти циркуляцию вектора $\vec{F}$ по замкнутому контуру $ACBA$, состоящему из дуги $\overset{\cup}{BA}$ окружности и прямых AC и CB , если $C(3, 3)$. Найти поток вектора $\vec{F}$ через дугу $\overset{\cup}{AB}$ окружности.

Ответ: $W = -1$, $\Pi = 1 - \ln 2$, $\Pi = 0$.

5. Найти статический момент относительно плоскости yoz тела, ограниченного поверхностями $z = \frac{1}{2}x^2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $3x + 2y = 12$, если плотность массы $\delta = 1$.

Ответ: $M_{yz} = \frac{192}{5}$.

6. Найти электрический заряд части поверхности $z = 1 - (x^2 + y^2)$, отсеченной плоскостью $z = 0$, если плотность заряда $\lambda = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}$.

Ответ: $q = 3\pi$.

7. Найти дивергенцию и ротор поля $\vec{a} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} (2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k})$ в точке $M(x, y, z)$ и в точке $M_0(-1; 2; 2)$.

Ответ: $\operatorname{div} \vec{a}(M_0) = 2$; $\operatorname{rot} \vec{a}(M_0) = \frac{1}{3}(4\vec{i} + 7\vec{j} - 5\vec{k})$.

Вариант 18

1. Вычислить массу четверти кольца $4 \leq x^2 + y^2 \leq 9$, $x \leq 0$, $y \geq 0$, если поверхностная плотность массы $\delta = \frac{y - 2x}{x^2 + y^2}$.

Ответ: $m = 3$.

2. Найти координаты центра массы однородной фигуры, $1 \leq x^2 + y^2 \leq 2y$, если поверхностная плотность массы $\delta = 1$.

Ответ: $C\left(0; \frac{8\pi + 3\sqrt{3}}{4\pi + 6\sqrt{3}}\right)$.

3. Найти статический момент относительно оси Oy дуги кривой $\begin{cases} x = 4 \cos t \\ y = \sin t, \end{cases}$ $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, если линейная плотность массы $\delta = y$.

Ответ: $M_y = 5,6$.

4. Найти работу поля $\vec{F} = \cos \sqrt{y} \vec{i} + (x - y) \vec{j}$ при перемещении точки по дуге $\overset{\circ}{BO}$ параболы $y = x^2$. Найти циркуляцию вектора $\vec{F}$ по замкнутому контуру, состоящему из дуги $\overset{\circ}{BOC}$ параболы $y = x^2$ и прямой CB , $B(-1, 1)$, $O(0, 0)$, $C(1, 1)$. Найти поток вектора $\vec{F}$ через дугу $\overset{\circ}{OC}$ параболы.

Ответ: $W = \frac{7}{6} + \sin 1$, $\Pi = \frac{4}{3} + 2 \sin 1 - 2 \cos 1$, $\Pi = -2(\sin 1 + \cos 1) + \frac{1}{6}$,

5. Найти момент инерции линии $y = \ln x$, $1 \leq x \leq \sqrt{e}$, относительно оси Oy , если линейная плотность $\delta = 1$.

Ответ: $J_y = \frac{1}{3} \left((1 + e)^{3/2} - 2\sqrt{2} \right)$.

6. Вычислить электрический заряд части поверхности конуса $x = \sqrt{y^2 + z^2}$, отсеченной плоскостью $x = 2$, если поверхностная плотность заряда $\lambda = -(5x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 4)$.

Ответ: $q = -80\pi\sqrt{2}$.

7. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a} = (2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}) \cos(2x + y - z)$ в произвольной точке $M(x, y, z)$ и в точке $M_0\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right)$.

Ответ: $\text{div} \vec{a}(M_0) = -3$; $\text{rot} \vec{a}(M_0) = -7\vec{i} + 10\vec{j} - 4\vec{k}$.

Вариант 19

1. Найти электрический заряд фигуры, ограниченной эллипсом $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ и осями координат, если поверхностная плотность заряда $\lambda = x$ и фигура расположена при $x \geq 0, y \geq 0$.

Ответ: $q = \frac{100}{3}$.

2. Найти координаты центра массы однородной фигуры $1 \leq x^2 + y^2 \leq 2x$, если поверхностная плотность массы $\delta = 1$.

Ответ: $C\left(\frac{8\pi + 3\sqrt{3}}{4\pi + 6\sqrt{3}}; 0\right)$.

3. Найти статический момент относительно оси ox однородной циклоиды $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi$, если линейная плотность массы $\delta = 1$.

Ответ: $M_x = \frac{32}{3}$.

4. Найти работу поля $\vec{F} = \frac{y^2 \vec{i} + x^2 \vec{j}}{xy}$ при перемещении точки по дуге кривой $y = \frac{4}{x^2}$ от $A(1, 4)$ до $B(2, 1)$. Найти циркуляцию вектора $\vec{F}$ по замкнутому контуру, состоящему из дуги $\overset{\cup}{AB}$ кривой $y = \frac{4}{x^2}$ и прямых BC и CA , если $C(8, 4)$. Найти поток вектора $\vec{F}$ через дугу $\overset{\cup}{AB}$ этой кривой.

Ответ: $W = -0,5; \Pi = 8,5 - \ln 8; \Pi = 7,1375$.

5. Вычислить момент инерции относительно оси oz однородного цилиндра $x^2 + y^2 \leq 2Ry, 0 \leq z \leq H$, если масса цилиндра равна m .

Ответ: $J_z = \frac{3}{2}mR^2$.

6. Найти массу части поверхности, $z = \sqrt{9 - x^2}$ отсеченной плоскостями $y = 0$ и $y = 3$, если поверхностная плотность массы $\delta = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$.

Ответ: $m = \frac{\pi^2}{4}$.

7. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a} = \left(\frac{y}{x} + \frac{3x}{y}\right)\vec{i} - \frac{3x}{y}\vec{j} + \left(\frac{3x}{y} - \frac{2y}{x}\right)\vec{k}$ в произвольной точке $M(x, y, z)$ и в точке $M_0(1, 1, 1)$.

Ответ: $\text{div} \vec{a}(M_0) = 5; \text{rot} \vec{a}(M_0) = -5\vec{i} - 5\vec{j} - \vec{k}$.

Вариант 20

1. Найти координаты центра массы однородной фигуры, ограниченной кривой $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ и осями координат.

Ответ: $C\left(\frac{a}{5}; \frac{a}{5}\right)$.

2. Найти статический момент относительно оси Ox однородной фигуры $x^2 + y^2 \leq 2y$, если поверхностная плотность массы $\delta = 1$.

Ответ: $M_x = \pi$.

3. Найти момент инерции относительно оси Ox одной арки однородной циклоиды $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$. Линейная плотность массы $\delta = 1$.

Ответ: $J_x = \frac{256}{15}a^3$.

4. Найти работу поля $\vec{F} = (x - y^2)\vec{i} + 2xy\vec{j}$ при перемещении точки по дуге параболы $y = 2 - x^2$ от $A(-1, 1)$ до $B(1, 1)$. Найти циркуляцию вектора $\vec{F}$ по замкнутому контуру $ACBA$, составленному из дуги $\overset{\cup}{BA}$ параболы и прямых AC и CB , где $C(-1; 0)$. Найти поток вектора $\vec{F}$ через дугу $\overset{\cup}{AB}$.

Ответ: $W = -\frac{142}{15}$; $\Gamma = \frac{152}{15}$; $\Pi = \frac{4}{3}$.

5. Найти электрический заряд тела, ограниченного поверхностями $x^2 + z^2 = 1, y = 0, y = 1$, если плотность заряда $\lambda = -(x^2 + y^2 + z^2)$.

Ответ: $q = -\frac{3}{2}\pi$.

6. Найти массу полусферы $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, если поверхностная плотность массы $\delta = \frac{z}{R}$.

Ответ: $m = \pi R^2$.

7. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a} = \arctg \frac{x+y}{z}(\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k})$ в произвольной точке $M(x, y, z)$ и в точке $M_0(1, 1, 1)$.

Ответ: $\text{div} \vec{a}(M_0) = \frac{1}{5}$; $\text{rot} \vec{a}(M_0) = \frac{1}{5}(5\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k})$.

Вариант 21

1. Найти массу фигуры, ограниченной эллипсом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, если плотность массы $\delta = |y|$.

Ответ: $m = \frac{4}{3}ab^2$.

2. Найти электрический заряд, распределенный с поверхностной плотностью $\lambda = \sqrt{1-x^2-y^2}$ в области $x^2 + y^2 \leq y$.

Ответ: $q = \frac{3\pi - 4}{9}$.

3. Найти статический момент относительно оси Ox циклоиды $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi$, если линейная плотность массы $\delta = y$.

Ответ: $M_x = \frac{512}{15}a^3$.

4. Найти работу поля $\vec{F} = \frac{y^2}{x}\vec{i} + \frac{x^2}{y}\vec{j}$ при перемещении точки по дуге параболы $y = \sqrt{x}$ от $A(1;1)$ до $B(4;2)$. Найти циркуляцию вектора $\vec{F}$ по замкнутому контуру $ABCA$, состоящему из дуги $\overset{\smile}{AB}$ параболы и прямых BC и CA , где $C(1;2)$. Найти поток вектора $\vec{F}$ через дугу $\overset{\smile}{AB}$ параболы.

Ответ: $W = 6,75$, $\Gamma = 6,75 - \ln 2 - 4 \ln 4$, $\Pi = \frac{57}{5}$.

5. Найти координаты центра массы однородного тела, ограниченного поверхностями $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}, z = 0$.

Ответ: $C\left(0;0;\frac{1}{4}\right)$.

6. Найти момент инерции относительно оси Oz , часть однородной поверхности $z = \frac{h}{a}\sqrt{x^2 + y^2}$, отсеченной плоскостью $z = h$.

Ответ: $J_z = \frac{1}{2}\pi a^3 \sqrt{a^2 + h^2}$.

7. Найти дивергенцию и ротор векторного поля вектора $\vec{a}$ в точке $M(x, y, z)$ и в точке $M_0(1,1,1)$, если $\vec{a} = \vec{b} \times \vec{c}$, где $\vec{b} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} - x^2\vec{k}, \vec{c} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$.

Ответ: $\text{div} \vec{a}(M_0) = 6, \text{rot} \vec{a}(M_0) = -4\vec{i} - 6\vec{j} - 8\vec{k}$.

Вариант 22

1. Найти электрический заряд фигуры, ограниченной линиями $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$, $x = 0$, $y = 0$, если поверхностная плотность заряда $\lambda = x$.

Ответ: $q = \frac{a^3}{30}$.

2. Найти площадь фигуры $1 \leq x^2 + y^2 \leq 2x$.

Ответ: $S = \frac{2\pi + 3\sqrt{3}}{6}$.

3. Найти моменты инерции однородной окружности $x^2 + y^2 = r^2$ относительно осей координат. Масса окружности равна m .

Ответ: $J_x = J_y = \frac{1}{2}mr^2$.

4. Найти работу поля $\vec{F} = xy\vec{i} + (y-x)\vec{j}$ при перемещении точки по дуге параболы $\begin{cases} x = t \\ y = (t+1)^2 \end{cases}$ от $A(-1;0)$ до $B(0,1)$. Найти циркуляцию вектора $\vec{F}$ по замкнутому контуру, состоящему из дуги $\overset{\cup}{AB}$ параболы и прямых BC и CA , если $C(-1;2)$. Найти поток вектора $\vec{F}$ через дугу $\overset{\cup}{AB}$.

Ответ: $W = \frac{3}{4}$; $\mathcal{C} = -\frac{5}{12}$; $\Pi = \frac{14}{15}$.

5. Вычислить массу тела, ограниченного поверхностями $2x + z = 4$, $x + z = 2$, $y = \sqrt{2x}$, если плотность $\delta = y$.

Ответ: $m = \frac{4}{3}$.

6. Найти координаты центра массы полусферы $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, если поверхностная плотность массы $\delta = x^2 + y^2$.

Ответ: $C\left(0, 0, \frac{3}{8}R\right)$.

7. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a} = \text{grad}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ в произвольной точке и в точке $M_0(2,2,1)$.

Ответ: $\text{div}\vec{a}(M_0) = \frac{2}{3}$; $\text{rot}\vec{a}(M_0) = 0$.

Вариант 23

1. Найти электрический заряд, распределенный в области, ограниченной кривыми $x=0, y=\pi, y=x$ с поверхностной плотностью $\lambda = \cos(x+y)$.

Ответ: $q = -2$.

2. Найти статический момент однородного круга $x^2 + y^2 \leq 2x$ относительно оси oy .

Ответ: $M_y = \pi$.

3. Вычислить массу участка винтовой линии $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \\ z = bt \end{cases}$, если линейная

плотность массы $\delta = xy$.

Ответ: $m = \frac{a^2}{2} \sqrt{a^2 + b^2}$.

4. Найти работу поля $\vec{F} = (y-x)\vec{i} + xy\vec{j}$ при перемещении точки по дуге параболы $y = (x+1)^2$ от $A(-2;1)$ до $B(0;1)$. Найти циркуляцию вектора $\vec{F}$ по замкнутому контуру $ABCA$, состоящему из дуги $\overset{\cup}{AB}$ параболы и прямых BC и CA , если $C(0;3)$. Найти поток вектора $\vec{F}$ через дугу $\overset{\cup}{AB}$ параболы.

Ответ: $W = \frac{52}{15}; \Pi = -\frac{8}{5}; \Pi = \frac{22}{3}$.

5. Найти центр массы однородного конуса, ограниченного поверхностями $z = \frac{h}{R} \sqrt{x^2 + y^2}, z = h$.

Ответ: $C = \left(0, 0, \frac{3}{4}h\right)$.

6. Вычислить момент инерции относительно оси Oz части однородной поверхности сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, x \geq 0, z \geq 0, y \geq 0$, если поверхностная плотность массы $\delta = 1$.

Ответ: $J_z = \frac{\pi R^4}{3}$.

7. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a} = \vec{i} \sin(y^2 + 3x^2) - \vec{j} \sin(y^2 + 3x^2) + \vec{k} \sin(3x^2 - 2y^2)$ в произвольной точке $M(x, y, z)$ и в точке $M_0\left(\sqrt{\frac{\pi}{3}}; -\sqrt{\frac{\pi}{3}}; 0\right)$.

Ответ: $\text{div} \vec{a}(M_0) = -4\sqrt{\frac{\pi}{3}}; \text{rot} \vec{a}(M_0) = \sqrt{\frac{\pi}{3}}(2\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k})$.

Вариант 24

1. Найти массу, распределенную в области, ограниченной линиями $y=1, y=2, x=0$, $y=e^x$ с поверхностной плотностью $\delta=e^x$.

Ответ: $m = \frac{1}{2}$.

2. Найти момент инерции относительно начала координат однородной фигуры, ограниченной одним лепестком лемнискаты $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}, -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.

Ответ: $J_0 = \frac{\pi a^4}{4}$.

3. Найти координаты центра массы однородной циклоиды $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi$, если линейная плотность массы $\delta = 1$.

Ответ: $C\left(\pi a, \frac{4}{3}a\right)$.

4. Найти работу поля $\vec{F} = (xy + x + y)\vec{i} + (xy + x - y)\vec{j}$ при перемещении точки по дуге параболы $x = \sqrt{y}$ от $O(0,0)$ до $A(2,4)$. Найти циркуляцию вектора $\vec{F}$ по замкнутому контуру $OACO$, состоящему из дуги OA параболы и прямых AC и CO , если $C(0,2)$. Найти поток вектора $\vec{F}$ через дугу $\overset{\circ}{OA}$ в сторону выпуклости дуги.

Ответ: $W = 18,8; \Pi = 22,8; \Pi = \frac{52}{15}$.

5. Найти электрический заряд тела, ограниченного поверхностями $y = \sqrt{x}, y = 2\sqrt{x}, z = 0, x + z = 6$, если плотность заряда $\lambda = x$.

Ответ: $q = \frac{864\sqrt{6}}{35}$.

6. Найти координаты центра массы части поверхности $z = \frac{x^2 + y^2}{2}$ при $z \leq 1$, если поверхностная плотность массы $\delta = 1$.

Ответ: $C\left(0, 0, \frac{6\sqrt{3}+1}{5(3\sqrt{3}-1)}\right)$.

7. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a}$, если $\vec{a} = \vec{b} \times \vec{c}$, где $\vec{b} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} - x^2\vec{k}, \vec{c} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ в точках $M(x, y, z)$ и $M_0(1, -1, 1)$.

Ответ: $\text{div}\vec{a}(M_0) = -2, \text{rot}\vec{a}(M_0) = 2\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$.

Вариант 25

1. Найти статический момент относительно оси Ox массы, распределенной с плотностью $\delta = \frac{1}{x}$ в области, ограниченной линиями $y = x, y = 2x, x = 1, x = 2$.

Ответ: $M_x = 2,25$.

2. Вычислить момент инерции однородного круга радиуса R массы m относительно начала координат.

Ответ: $J_0 = \frac{1}{2}mR^2$.

3. Вычислить массу участка кривой $y = 0,5x^2, 0 \leq x \leq 1$, если линейная плотность массы $\delta = \sqrt{2y}$.

Ответ: $m = \frac{1}{3}(2\sqrt{2} - 1)$.

4. Найти работу поля $\vec{F} = (x^3 - y)\vec{i} + (y^3 + x)\vec{j}$ при перемещении точки по дуге окружности $x = R \cos t, y = R \sin t$ от $A(R, 0)$ до $B(0, R)$. Найти циркуляцию вектора $\vec{F}$ по замкнутому контуру, состоящему из дуги $\overset{\cup}{BA}$ окружности и прямых AC и CB , где $C(2R, R)$. Найти поток вектора R через дугу $\overset{\cup}{AB}$ окружности.

Ответ: $W = \frac{\pi R^2}{2}$; $\Pi = R^2(3 - \frac{\pi}{2})$; $\Pi = \frac{3\pi R^4}{8}$.

5. Найти электрический заряд тела, ограниченного поверхностями $z = \sqrt{x}, z = 2\sqrt{x}, y + x = 6, y = 0$, если плотность заряда $\lambda = z$.

Ответ: $q = 54$.

6. Найти координаты центра массы части однородной полусферы $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, вырезанной плоскостями $x = 0, y = 0, x + y = R, (x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq R)$.

Ответ: $C\left(\frac{R\sqrt{2}}{4}, \frac{R\sqrt{2}}{4}, \frac{R}{\pi(\sqrt{2}-1)}\right)$.

7. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}(\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k})$ в точках $M(x, y, z)$ и $M_0(1, 1, 1)$.

Ответ: $\operatorname{div} \vec{a}(M_0) = \frac{\sqrt{3}}{3}, \operatorname{rot} \vec{a}(M_0) = \frac{1}{\sqrt{3}}(4\vec{i} - \vec{j} - 3\vec{k})$.

Вариант 26

1. Найти момент инерции относительно оси Ox однородной полукруглой пластинки $0 \leq y \leq \sqrt{R^2 - x^2}$. Поверхностная плотность массы $\delta = 1$.

Ответ: $J_{Ox} = \frac{\pi R^4}{8}$.

2. Найти координаты центра массы плоской однородной фигуры, ограниченной кривой $\rho = a(1 + \cos \varphi)$.

Ответ: $C\left(\frac{5a}{6}; 0\right)$.

3. Найти статический момент относительно оси Ox однородной дуги астроида $\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases}, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, если линейная плотность массы $\delta = 1$.

Ответ: $M_x = \frac{3a^2}{5}$.

4. Найти работу поля $\vec{F} = y^2 \ln x \vec{i} + xy \vec{j}$ при перемещении точки по дуге гиперболы $y = \frac{1}{x}$ от $A(1;1)$ до $B\left(2; \frac{1}{2}\right)$. Найти циркуляцию вектора $\vec{F}$ по замкнутому контуру, состоящему из дуги $\overset{\cup}{BA}$ гиперболы и прямых AC и CB , если $C\left(1; -\frac{1}{2}\right)$. Найти поток вектора $\vec{F}$ через дугу $\overset{\cup}{AB}$.

Ответ: $W = -\frac{\ln 2}{2}$; $\Pi = \frac{2}{3} \ln 2 - \frac{170}{72}$; $\Pi = \frac{-3 \ln 2 + 79}{72}$.

5. Найти электрический заряд тела, ограниченного поверхностями $z = \frac{1}{2}x^2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $3x + 2y = 12$, если плотность заряда $\lambda = x$.

Ответ: $q = \frac{192}{5}$.

6. Найти площадь части цилиндрической поверхности $z = \sqrt{a^2 - x^2}$, заключенной между плоскостями $y = x$ и $y = 0$.

Ответ: $S = 2a^2$.

7. Найти дивергенцию и ротор векторного поля:

$\vec{a} = y^2 \vec{i} - x^2 \vec{j} + z^2 \vec{k}$ в точках $M(x, y, z)$ и $M_0(2, 3, 1)$.

Ответ: $\operatorname{div} \vec{a}(M_0) = 0$; $\operatorname{rot} \vec{a}(M_0) = -10 \vec{k}$.

Вариант 27

1. Найти координаты центра масс однородной плоской фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}$, $y = 0$.

Ответ: $C\left(0; \frac{8}{3\pi}\right)$.

2. Найти массу, распределенную в области $2x \leq x^2 + y^2 \leq 4x$, $\frac{x}{\sqrt{3}} \leq y \leq x\sqrt{3}$, с поверхностной плотностью $\delta = \arctg \frac{y}{x}$.

Ответ: $m = \frac{\pi^2 + \pi\sqrt{3} - 6}{8}$.

3. Найти статический момент относительно оси Oy однородной дуги астроида $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = 1, 0 \leq x \leq 1$, если линейная плотность массы $\delta = 1$.

Ответ: $M_y = \frac{3}{5}$.

4. Найти работу поля $\vec{F} = x^2 y \vec{i} - xy^2 \vec{j}$ при перемещении точки по дуге окружности $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$ от $A(-2, 0)$ до $B(0, -2)$. Найти циркуляцию вектора $\vec{F}$ по замкнутому контуру, состоящему из дуги $\overset{\cup}{AB}$ окружности и прямых BC и CA , где $C(-2, 2)$. Найти поток вектора $\vec{F}$ через дугу $\overset{\cup}{AB}$.

Ответ: $W = -2\pi$; $\Pi = -\frac{6\pi + 8}{3}$; $\Pi = -2$.

5. Найти электрический заряд части шара $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$, расположенной в первом октанте ($x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$), если плотность заряда $\lambda = -z$.

Ответ: $q = -\frac{\pi R^4}{16}$.

6. Найти момент инерции относительно оси Oz части однородной поверхности $x^2 + y^2 = 2az$, $0 \leq z \leq a$, если поверхностная плотность массы $\delta = 1$.

Ответ: $J_z = \frac{4\pi(6\sqrt{3} + 1)}{15} a^4$.

7. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a} = \arctg(x - y + z)(\vec{i} - 3\vec{j} - 2\vec{k})$ в точках $M(x, y, z)$ и $M_0(1, 1, 1)$.

Ответ: $\operatorname{div} \vec{a}(M_0) = \frac{1}{2}$, $\operatorname{rot} \vec{a}(M_0) = \frac{5}{2} \vec{i} - \frac{3}{2} \vec{j} - \vec{k}$.

Вариант 28

1. Найти массу, распределенную с поверхностной плотностью $\delta = x^2 + y$ в области, ограниченной кривыми $y = x^2, y^2 = x$.

Ответ: $m = \frac{33}{140}$.

2. Найти момент инерции относительно оси Oy однородного круга $x^2 + y^2 \leq 2x$, если поверхностная плотность массы $\delta = 1$.

Ответ: $J_y = \frac{5}{4}\pi$.

3. Найти статический момент относительно оси ox однородной дуги астроида $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = 1$, расположенной в первой четверти ($0 \leq x \leq 1, y \geq 0$), если линейная плотность массы $\delta = 1$.

Ответ: $M_x = \frac{3}{5}$.

4. Найти работу поля $\vec{F} = (y^2 - x)\vec{i} + (x^2 - y)\vec{j}$ при перемещении точки по дуге окружности $x = \cos t, y = \sin t$ от $A(1,0)$ до $B(0,1)$. Найти циркуляцию вектора $\vec{F}$ по замкнутому контуру, состоящему из дуги $\overset{\cup}{AB}$ окружности и прямых BC и CA , если $C(0;-1)$. Найти поток вектора $\vec{F}$ через дугу $\overset{\cup}{AB}$.

Ответ: $W = 0; \Pi = \frac{2}{3}; \Pi = \frac{4 - 3\pi}{6}$.

5. Найти координаты центра массы однородной фигуры, ограниченной поверхностями $x + y + z = 1, x = 0, y = 0, z = 0$.

Ответ: $C\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right)$.

6. Найти электрический заряд части плоскости $x + y + z = a$, вырезанной цилиндром $x^2 + y^2 = a^2$, если плотность заряда $\lambda = z^2$.

Ответ: $q = \frac{3\sqrt{3}}{2}\pi a^4$.

8. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a} = xyz(\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$ в точках $M(x, y, z)$ и $M_0(1, 2, 3)$.

Ответ: $\text{div} \vec{a}(M_0) = 36, \text{rot} \vec{a}(M_0) = 5\vec{i} - 16\vec{j} + 9\vec{k}$.

Вариант 29

1. Найти электрический заряд фигуры, ограниченной линиями $x = 1, \sqrt{y} = x, y = -\sqrt[3]{x}$, если поверхностная плотность заряда $\lambda = xy - (xy)^3$.

Ответ: $q = -\frac{5}{64}$.

2. Найти электрический заряд, распределенный в области $x^2 + y^2 \leq 2x$ с поверхностной плотностью $\lambda = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

Ответ: $q = \frac{8}{9}(3\pi - 4)$.

3. Найти координаты центра масс дуги окружности $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t \end{cases}, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, если линейная плотность массы $\delta = xy$.

Ответ: $C\left(\frac{2a}{3}, \frac{2a}{3}\right)$.

4. Найти работу поля $\vec{F} = xy^2\vec{i} + 2x^2y\vec{j}$ при перемещении точки по дуге параболы $y = -\sqrt{x}$ от $O(0;0)$ до $B(1;-1)$. Найти циркуляцию вектора $\vec{F}$ по замкнутому контуру, состоящему из дуги $\overset{\cup}{OB}$ параболы и прямых BC и CO , если $C(1;1)$. Найти поток вектора $\vec{F}$ через дугу $\overset{\cup}{OB}$.

Ответ: $W = \frac{2}{3}; \Pi = -\frac{1}{12}; \Pi = -\frac{13}{35}$.

5. Найти ординату центра массы однородного тела, ограниченного поверхностями $z = \frac{1}{2}y^2, x = 0, y = 0, z = 0, 2x + 3y = 12$.

Ответ: $y_0 = \frac{12}{5}$.

6. Найти массу части плоскости $2x + 2y + z - 4 = 0$, расположенной в первом октанте ($x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$), если поверхностная плотность массы $\delta = z$.

Ответ: $m = \frac{8}{3}$.

7. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a} = xy\vec{i} - yz\vec{j} + yz\vec{k}$ в точках $M(x, y, z)$ и $M_0(2,1,1)$.

Ответ: $\text{div}\vec{a}(M_0) = 1, \text{rot}\vec{a}(M_0) = 2\vec{i} - 2\vec{k}$.

Вариант 30

1. Найти моменты инерции относительно осей координат фигуры, ограниченной линиями $y = 2x - x^2$, $y = x^2$, если поверхностная плотность массы в каждой точке фигуры равна ординате точки.

Ответ: $J_x = \frac{31}{420}, J_y = \frac{1}{15}$.

2. Найти объем цилиндрического тела, ограниченного плоскостями $z = 0, z = 3, x + y = 0$ и цилиндрической поверхностью $x = \sqrt{-4y - y^2}$.

Ответ: $V = 3\pi - 6$.

3. Найти электрический заряд, распределенный по кривой $\begin{cases} x = a(\cos t + t \sin t) \\ y = a(\sin t + t \cos t) \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi$ с линейной плотностью $\lambda = -(x^2 + y^2)$.

Ответ: $q = -2\pi^2 a^3 (1 + 2\pi^2)$.

4. Найти работу поля $\vec{F} = (xy + y^2)\vec{i} + x\vec{j}$ при движении точки ($m = 1$) по параболе $y = 2\sqrt{x}$ от 0 (0,0) до A (1,2). Найти циркуляцию вектора $\vec{F}$ по замкнутому контуру OACO, состоящему из дуги $\overset{\cup}{OA}$ параболы и прямых AC и CO, где C (1, -1). Найти поток вектора $\vec{F}$ через дугу $\overset{\cup}{OA}$.

Ответ: $W = \frac{52}{15}; \Pi = \frac{29}{30}; \Pi = -\frac{19}{6}$.

5. Найти центр массы однородного тела, ограниченного поверхностями $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, z = 0$.

Ответ: $C\left(0, 0, \frac{3}{8}\right)$.

6. Найти площадь части гиперболического параболоида $az = xy$, вырезанной цилиндром $x^2 + y^2 = R^2$.

Ответ: $S = \frac{2\pi}{3a}(\sqrt{(a^2 + R^2)^3} - a^3)$.

7. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a} = 2x^2 y\vec{i} - yz^2\vec{j} + \frac{x}{y}\vec{k}$ в произвольной точке и в точке $M_0(-1, 1, 2)$.

Ответ: $\text{div} \vec{a}(M_0) = -8, \text{rot} \vec{a}(M_0) = 5\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х ч. Ч. 2: учебное пособие для вузов. – 6-е изд., испр.- М.: Высш. шк., 2003. – 416 с.:ил.

Исрапилов Р. Б., Баутин С. П. Курс математики. Часть 3. Математический анализ функций нескольких переменных. – Екатеринбург: УГГГА, 1996.

Письменный Д. Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс. -13-е изд.- М.: Айрис-пресс, 2015.- 608 с.: ил.- (Высшее образование).



Министерство науки и высшего
образования РФ
ФГБОУ ВО
«Уральский государственный горный
университет»

Н. П. Жданова, Т. С. Озерова

КРАТНЫЕ, КРИВОЛИНЕЙНЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

***Методические указания и варианты
контрольных и самостоятельных работ
по разделу дисциплины «Математика»
для студентов всех
специальностей очного обучения***

**Екатеринбург
2019**

Ж 42

Рецензент: В. Я. Раевский, доцент, к.ф.-м.н., с.н.с. лаборатории теоретической физики ИФМ.

Учебное пособие рассмотрено на заседании кафедры математики 16.10. 2018 г. (протокол № 134) и рекомендовано для издания в УГГУ.

Жданова Н. П., Озерова Т. С.

Ж42 КРАТНЫЕ, КРИВОЛИНЕЙНЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ:

методические указания и варианты контрольных и самостоятельных работ. Н. П. Жданова, Т. С. Озерова; Уральский государственный горный университет. – Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2019. – 85 с.

В методических указаниях с единых позиций изложены понятия кратных криволинейных и поверхностных интегралов. Приведены решения большого количества типовых задач и варианты контрольных работ. Кратко изложены элементы теории поля.

После изучения теории и решений типовых задач, студенту рекомендуется самостоятельно решить один из вариантов контрольных работ. Все задачи снабжены ответами.

Методические указания и варианты контрольных и самостоятельных работ предназначены студентам всех специальностей очного обучения для изучения темы: «Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы».

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
I. КРАТНЫЕ И КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ	5
1. Понятие интеграла от скалярной функции	5
2. Основные свойства интегралов.	10
3. Вычисление интегралов.	10
3.1 Определенный интеграл.	10
3.2 Криволинейный интеграл.	10
3.3 Двойной интеграл.	11
3.4 Поверхностный интеграл второго рода.	14
3.5 Тройной интеграл.	15
II. ПРИМЕНЕНИЕ КРАТНЫХ И КРИВОЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ	16
1. Длина дуги кривой.	17
2. Площадь плоской области.	17
3. Площадь поверхности	17
4. Объем тела	17
5. Масса распределенная в заданной области.	18
III. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ	19
1. Понятие поля.	19
2. Векторные линии.	20
3. Работа силового поля. Криволинейный интеграл второго рода. Циркуляция вектора вдоль замкнутого контура.	20
4. Поток вектора через поверхность.	22
4.1 Вектор площадки.	22
4.2 Понятие потока вектора через поверхность	24
4.3 Гидродинамический смысл потока вектора через поверхность. Поток жидкости через поверхность.	24
4.4 Поток вектора через плоскую кривую L .	26
4.5 Свойства и вычисление потока вектора через поверхность.	26
5. Оператор Гамильтона «набла».	29
6. Дивергенция векторного поля.	29
7. Ротор (вихрь) векторного поля.	31
8. Потенциальное векторное поле.	32
8.1 Плоское потенциальное поле.	33
IV. РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ	34
1. Вычисление и применение двойного интеграла.	34
2. Вычисление и применение тройного интеграла.	45
3. Вычисление и применение поверхностного интеграла первого рода.	48
4. Вычисление и применение криволинейного интеграла.	53
V. ВАРИАНТЫ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ	60
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	90

ВВЕДЕНИЕ

Данные методические указания по теме «Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы» предназначены для самостоятельной работы студентов. Методические указания удовлетворяют всем требованиям государственного образовательного стандарта по подготовке дипломированных специалистов. В методических указаниях с единых позиций изложены понятия кратных криволинейных и поверхностных интегралов. Приведены решения большого количества типовых задач и варианты контрольных и самостоятельных работ. Кратко изложены элементы теории поля.

После изучения теории и решений типовых задач, студенту рекомендуется самостоятельно решить один из вариантов контрольных работ. Все задачи снабжены ответами.

І. КРАТНЫЕ И КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

1. Понятие интеграла от скалярной функции

Пусть Q – и замкнутая ограниченная часть пространства. Это может быть отрезок $[a, b]$ оси Ox , дуга плоской или пространственной кривой, часть плоскости или кривой поверхности, трехмерная область. Пусть в каждой точке M области Q задана непрерывная функция $u=f(M)$.

1. Мысленно разобьем область Q на n элементарных частей $\Delta Q_i, i = \overline{1, n}$ и найдем геометрическую меру каждой из частей, обозначив ее тоже ΔQ_i (это длина элементарного отрезка Δx_i оси Ox или элементарной части дуги Δl_i кривой, площадь ΔS_i элементарной части плоской области или $\Delta \sigma_i$ - площадь элементарной части поверхности: Δv_i - объем элементарной части трехмерной области).

2. На каждой элементарной части ΔQ_i возьмем произвольную точку M_i и вычислим значения функции в выбранных точках $U_i=f(M_i)$.

3. Составим произведения $(U_i \cdot \Delta Q_i = f(M_i) \cdot \Delta Q_i)$ и найдем сумму всех произведений:

$$f(M_1) \cdot \Delta Q_1 + f(M_2) \cdot \Delta Q_2 + \dots + f(M_i) \cdot \Delta Q_i + \dots + f(M_n) \cdot \Delta Q_n = \sum_{i=1}^n f(M_i) \cdot \Delta Q_i$$

– интегральная сумма функции $f(M)$ в области Q .

4. Назовем диаметром $\text{diam}(\Delta Q_i)$ элементарной области ΔQ_i наибольшее расстояние между точками ее границы. Из всех полученных диаметров $i = \overline{1, n}$ выберем максимальный и назовем его рангом λ данного разбиения:

$$\lambda = \max_i \text{diam}(\Delta Q_i).$$

Уменьшая ранг, составим последовательность интегральных сумм.

Если область Q имеет геометрическую меру (длину, площадь, объем) и функция $U_i=f(M_i)$ непрерывна в области Q , то при $\lambda \rightarrow 0$ существует предел последовательности интегральных сумм $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta Q_i$, равный числу J , независимо от

способа разбиения области Q на элементарные части и от выбора точек M_i на ка-

ждой из частей. Число J называется интегралом от функции $f(M)$ по области Q и обозначается символом $\int_Q f(M)dQ$, т. е. $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(M_i)\Delta Q_i = \int_Q f(M)dQ$, Q называется областью интегрирования; $f(M)$ – подынтегральной функцией, dQ – элементом геометрической меры области Q ; (dx – элемент длины отрезка $[a, b]$ оси Ox ; dl – элемент длины дуги плоской или пространственной кривой; ds – элемент площади плоской области; $d\sigma$ – элемент площади поверхности; dv – элемент объема).

Тип интеграла различают по типу элемента dQ :

1. Если $Q=[a, b]$ – отрезок оси Ox , получим определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$.
2. Если $Q = \overset{\frown}{AB} = L$ – дуга плоской кривой, получим $\int_L f(M)dl = \int_L f(x, y)dl$.

Если $Q = \overset{\frown}{AB} = L$ – дуга пространственной кривой, то $\int_L f(M)dl = \int_L f(x, y, z)dl$.

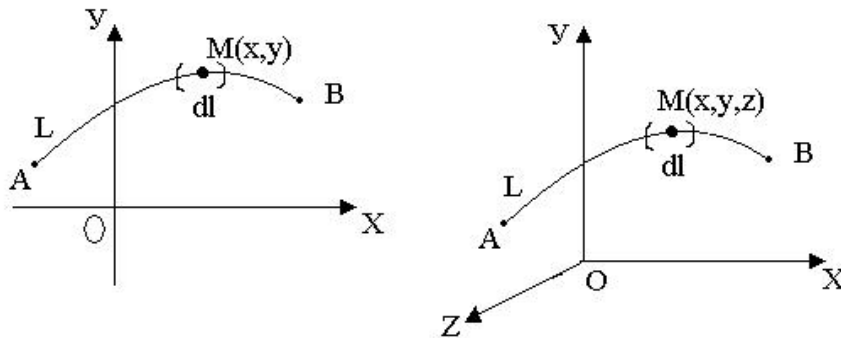


Рис. 1.1

Эти интегралы называются криволинейными интегралами первого рода или криволинейными интегралами по длине дуги кривой.

3. Q – область плоскости xOy .

$$\int_Q f(M)ds = \iint_Q f(x, y)ds = \iint_Q f(x, y)dxdy \text{ - двойной интеграл.}$$

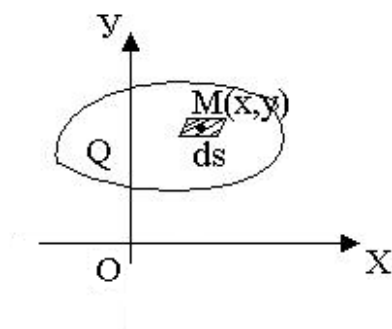


Рис. 1.2

4. Q – часть кривой поверхности

$\int_Q f(M) d\sigma = \iint_Q f(x, y, z) d\sigma$ - поверхностный интеграл первого рода (по площади поверхности).

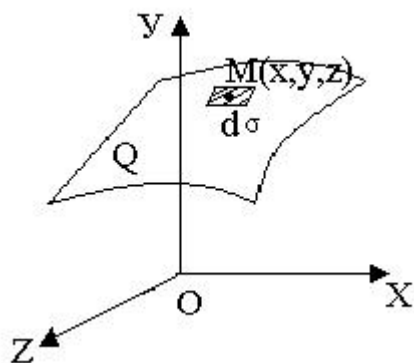


Рис. 1.3

5. Q – область в трехмерном пространстве (называется телом).

$\int_Q f(M) dv = \iiint_Q f(x, y, z) dv = \iiint_Q f(x, y, z) dx dy dz$ - тройной интеграл.

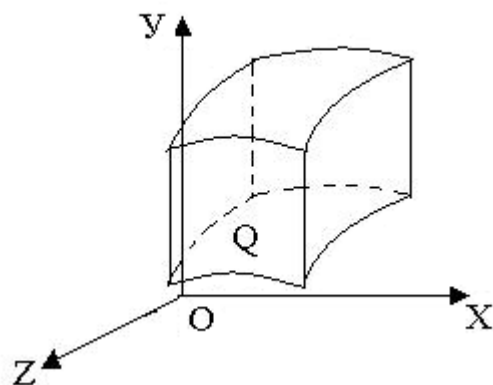


Рис. 1.4

В технических дисциплинах для обозначения интегралов используют все приведенные выше символы. Мы используем символы в правых частях равенств.

2. Основные свойства интегралов

$$1) \int_Q (U_1 \pm U_2) dQ = \int_Q U_1 dQ \pm \int_Q U_2 dQ;$$

$$2) \int_Q A U dQ = A \int_Q U dQ, \text{ если } A = \text{const};$$

$$3) \text{ Если } Q \text{ разбить на части } Q_1 \text{ и } Q_2, \text{ то } \int_Q U dQ = \int_{Q_1} U dQ + \int_{Q_2} U dQ;$$

$$4) \int_Q dQ = Q - \text{мера области } Q \text{ (длина, площадь, объем).}$$

$$5) \text{ Если } U_1 \leq U_2, \text{ то } \int_Q U_1 dQ \leq \int_Q U_2 dQ.$$

$$6) \text{ Оценка интеграла: } Q \cdot U_{\min} \leq \int_Q U dQ \leq Q \cdot U_{\max}, \text{ где } Q - \text{мера области } Q; U_{\min} \text{ и}$$

$U_{\max}$ – наименьшее и наибольшее значения функции $U=f(M)$ в области Q .

7) Средним значением функции $U=f(M)$ называют число $\bar{U} = \frac{1}{Q} \int_Q U dQ$. Непрерывная функция $U=f(M)$ принимает значение $\bar{U}$ хотя бы в одной точке M_0 области Q . $U_{\min} \leq \bar{U} \leq U_{\max}$.

3. Вычисление интегралов

3.1. Определенный интеграл

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a), \quad (1)$$

где $F(x)$ – первообразная от функции $f(x)$, т. е. $F'(x) = f(x)$.

3.2. Криволинейный интеграл

Криволинейный интеграл $\int_L f(x, y) dl$ или $\int_L f(x, y, z) dl$ преобразуют в определенный интеграл. Для этого все переменные и дифференциалы в подынтегральном выражении заменяют из уравнений кривой через одну переменную и ее

дифференциал и вычисляют получившийся интеграл по интервалу изменения выбранной переменной на дуге L .

а) Если кривая задана параметрически $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t), \alpha \leq t \leq \beta \end{cases}$

то

$$\int_L f(x, y) dl = \int_a^b f(\varphi(t), \psi(t)) \cdot \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt \quad (2)$$

б) Если L – график функции $y=g(x)$ и $a \leq x \leq b$, то

$$\int_L f(x, y) dl = \int_a^b f(x, g(x)) \cdot \sqrt{1 + (g'(x))^2} dx \quad (3)$$

в) Если $L: \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \theta(t), \alpha \leq t \leq \beta \end{cases}$, то

$$\int_L f(x, y, z) dl = \int_a^b f(\varphi(t), \psi(t), \theta(t)) \cdot \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 + (\theta'(t))^2} dt \quad (4)$$

Замечание

В определенных интегралах нижний предел нужно брать меньше верхнего.

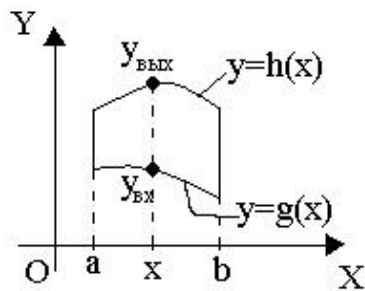
3.3. Двойной интеграл

$\iint_D f(x, y) ds$ приводим к двукратному интегралу.

1. Двойной интеграл в прямоугольных координатах.

Пусть область D ограничена прямыми $x=a$; $x=b$; ($a < b$) и графиками функций $y=g(x)$; $y=h(x)$, причем обе функции непрерывны на отрезке $[a; b]$ и, $g(x) \leq h(x)$ тогда

$$\iint_D f(x, y) ds = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy \right) dx \quad (5)$$



то

В правой части равенства двукратный интеграл. Очевидно, что сначала нужно вычислить «внутренний интеграл» $\int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy$. Рассматривая x как постоянную величину, получим функцию от x , затем эту функцию проинтегрировать по x в пределах от a до b . Если область D ограничена прямыми $y=a$; $y=b$ и графиками функций $x=g(y)$, $x=h(y)$, $g(y) \leq h(y)$,

$$\iint_D f(x, y) ds = \int_a^b \left(\int_{g(y)}^{h(y)} f(x, y) dx \right) dy. \quad (6)$$

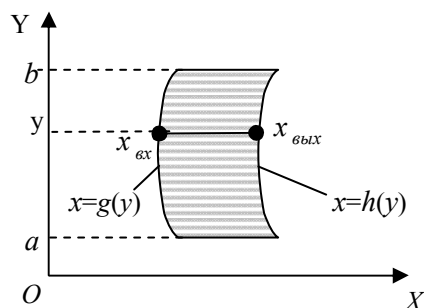


Рис. 3.2

При вычислении внутреннего интеграла в этом случае нужно считать y – постоянной величиной. Заметим, что границы «внешнего интеграла» всегда постоянны. Переход от формулы (5) к формуле (6) или от формулы (6) к формуле (5) называют изменением порядка интегрирования.

Если область D не удовлетворяет условиям формул (5) или (6), то ее разбивают на части.

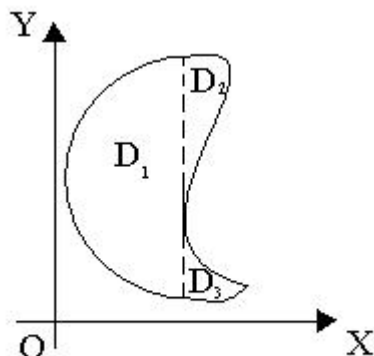


Рис. 3.3

2. Двойной интеграл в полярных координатах.

Чтобы в двойном интеграле перейти к полярным координатам нужно:

1) Совместить прямоугольную и полярную системы координат так, чтобы начало прямоугольных координат совпадало с полюсом θ , а ось Ox с полярной осью $\theta\rho$.

2) Заменить в подынтегральном выражении x , y и ds по формулам: $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, $ds=\rho d\varphi d\rho$ и получить:

$$\iint_D f(x, y) ds = \iint_D f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\varphi d\rho. \quad (7)$$

3) По этим же формулам заменить x и y на ρ и φ в уравнении каждой границы области D , потом уравнения решить относительно ρ , получив уравнение вида $\rho=g(\varphi)$. Если в уравнении границы нет ρ , решить уравнение относительно φ , получить $\varphi=\alpha$, $\varphi=\beta$.

4) Пусть область интегрирования D ограничена лучами $\varphi=\alpha$, $\varphi=\beta$, ($\alpha<\beta$) и графиками функций $\rho=g(\varphi)$, $\rho=h(\varphi)$, $g(\varphi)\leq h(\varphi)$.

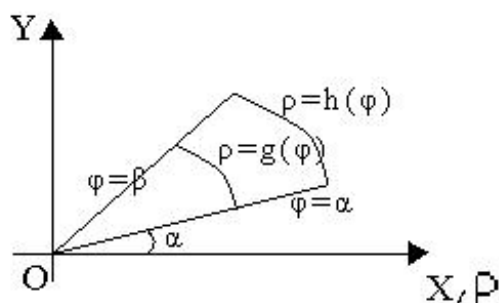


Рис. 3.4

Тогда

$$\iint_D f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\varphi d\rho = \int_{\alpha}^{\beta} \left(\int_{g(\varphi)}^{h(\varphi)} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho \right) d\varphi. \quad (8)$$

При вычислении «внутреннего» интеграла переменная φ временно считается постоянной. В частности, если полюс принадлежит границе области, получим

$$\iint_D f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\varphi d\rho = \int_{\alpha}^{\beta} \left(\int_0^{h(\varphi)} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho \right) d\varphi. \quad (8 a)$$

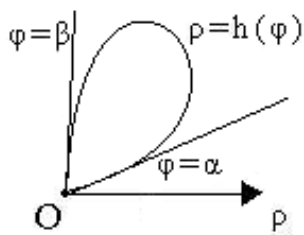


Рис. 3.5

Если полюс находится внутри области, получим:

$$\iint_D f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\varphi d\rho = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{h(\varphi)} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho \right) d\varphi \quad (8 \text{ б})$$

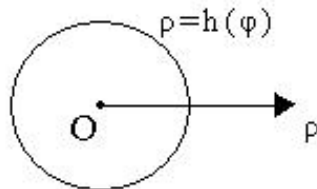


Рис. 3.6

3.4. Поверхностный интеграл первого рода

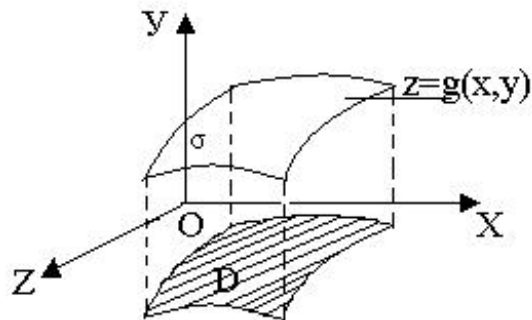


Рис. 3.7

Пусть поверхность σ задана уравнением $z=g(x,y)$. Чтобы вычислить поверхностный интеграл $\iint_{\sigma} f(x,y,z) d\sigma$, нужно:

- 1) Найти проекцию поверхности σ на координатную плоскость xOy , получить область D .

2) Заменить в подынтегральном выражении z и $d\sigma$ по формулам:

$z = g(x, y), d\sigma = \sqrt{1 + (g'_x(x, y))^2 + (g'_y(x, y))^2} ds$, получить и вычислить двойной интеграл по области D (в плоскости xOy):

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z) d\sigma = \iint_D f(x, y, g(x, y)) \cdot \sqrt{1 + (g'_x(x, y))^2 + (g'_y(x, y))^2} ds. \quad (9)$$

Если уравнение поверхности $x=g(y, z)$, то находят проекцию поверхности G на плоскость yOz . Если уравнение поверхности $y=g(x, z)$, то находят проекцию поверхности G на плоскость xOz .

3.5. Тройной интеграл

Вычисление тройного интеграла $\iiint_G f(x, y, z) dv$ сводится к последовательному вычислению «внутреннего» определенного интеграла и «внешнего» двойного интеграла по области D – проекции области G на координатную плоскость.

Пусть в трехмерном пространстве $Oxyz$ область G ограничена сверху поверхностью $z=q(x, y)$, снизу – поверхностью $z=p(x, y)$, а с боков – цилиндрической поверхностью, образующие которой параллельны оси oz (эта граница может отсутствовать). Найдём D – проекцию области G на плоскость Oxy .

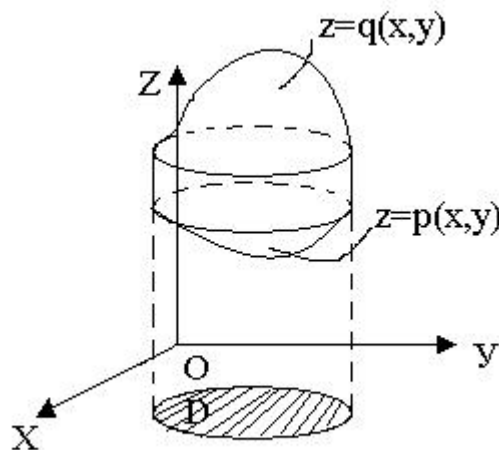


Рис. 3.8

$$\iiint_G f(x, y, z) dv = \iint_D \left(\int_{p(x,y)}^{q(x,y)} f(x, y, z) dz \right) ds. \quad (10)$$

Сначала вычисляют внутренний интеграл $\int_{p(x,y)}^{q(x,y)} f(x, y, z) dz$, считая временно x и y

постоянными величинами и получают функцию двух переменных x и y , потом от этой функции вычисляют «внешний» двойной интеграл, подобрав удобную для вычисления этого интеграла формулу. Иногда удобнее проецировать тело на плоскость Oxz или Oyz .

II. ПРИМЕНЕНИЕ КРАТНЫХ И КРИВОЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

С помощью интегралов можно найти величину T , связанную с некоторой областью Q и обладающую двумя свойствами:

1) При разбиении области Q на элементарные части ΔQ_i величина T тоже разбивается на элементарные части ΔT_i , причем $T = \sum_{i=1}^n \Delta T_i$. Такие величины называются аддитивными.

2) ΔT_i приблизительно пропорциональна мере ΔQ_i , т. е. $\Delta T_i \approx k \cdot \Delta Q_i$. Для каждого i коэффициент k постоянен и связан с ΔQ_i , т. е. $k=f(M_i)$, где $M_i \in \Delta Q_i$.

Тогда приближенные значения $T \approx \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta Q_i$ и точное значение

$$T = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta Q_i = \int_Q f(M) dQ, \quad \lambda = \max_i (\text{diam } \Delta Q_i).$$

Величину T , обладающую этими свойствами, можно найти проще, если взять элемент dQ области Q и найти формулу элемента dT величины T , т. е. получить $dT=f(M)dQ$, где $M \in dQ$. Тогда $T = \int_Q f(M) dQ$.

1. Длина дуги кривой

1) Если плоская кривая задана параметрически

$L: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \alpha \leq t \leq \beta$, то длина дуги

$$l = \int_L dl = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt. \quad (11)$$

Для пространственной кривой $L: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \alpha \leq t \leq \beta, \\ z = z(t) \end{cases}$

$$l = \int_L dl = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt. \quad (11a)$$

2) Если плоская кривая – график функции $y=g(x)$, $a \leq x \leq b$, то

$$l = \int_L dl = \int_a^b \sqrt{1 + (g'(x))^2} dx. \quad (11б)$$

2. Площадь плоской области

$$S = \iint_D dS. \quad (12)$$

В прямоугольных координатах

$$S = \iint_D dx dy. \quad (12a)$$

В полярных координатах

$$S = \iint_D \rho d\varphi d\rho. \quad (12б)$$

3. Площадь поверхности

$$S = \iint_{\sigma} d\sigma = \iint_D \sqrt{1 + \left(g'_x(x, y)\right)^2 + \left(g'_y(x, y)\right)^2} ds, \text{ где } D = \underset{oxy}{up\sigma}. \quad (13)$$

4. Объем тела

$$1. \quad V = \iiint_G dV. \quad (14)$$

2. Объем цилиндрического тела с основанием на координатной плоскости xOy , ограниченного сверху поверхностью $z=f(x,y)$, можно вычислить с помощью двойного интеграла.

$$V = \iint_D g(x,y) ds. \quad (14a)$$

5. Масса, распределенная в заданной области

Говорят, что масса непрерывно распределена в области Q , если каждой мысленно выделенной части ΔQ этой области соответствует значение массы Δm . При этом масса отдельно взятой точки равна нулю.

Пусть точка $M \in \Delta Q \subset Q$. Плотностью распределения массы в точке M области Q называют величину δ :

$$\delta = \lim_{\text{diam}(\Delta Q) \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta Q}, \quad (15)$$

причем ΔQ все время содержит точку M .

Если масса распределена на дуге кривой, получаем линейную плотность, на поверхности – поверхностную плотность, в трехмерной области – плотность. Так как масса распределена неравномерно, то плотность в точке является функцией точки $\delta=\delta(M)$.

Из определения плотности массы (15) следует, что элемент массы равен $\Delta m \approx \delta \cdot \Delta Q$ или $dm=\delta dQ$, тогда масса, распределенная в области Q с плотностью $\delta=\delta(M)$:

$$m = \int_Q \delta dQ = \int_Q \delta(M) dQ. \quad (16)$$

Аналогично вводят понятие плотности заряда в диэлектрике, плотности энергии электромагнитного поля и др. Все эти величины находят по формуле (16). Так, если электрический заряд q распределен в области Q с плотностью заряда $\lambda=\lambda(M)$, то

$$q = \int_Q \lambda(M) dQ. \quad (17)$$

Частные случаи распределения массы:

а) масса, распределенная с плотностью δ на дуге L кривой.

$$m = \int_L \delta(x, y) dl \text{ - для плоской кривой;}$$

$$m = \int_L \delta(x, y, z) dl \text{ - для пространственной кривой;} \quad (16a)$$

б) масса, распределенная с поверхностной плотностью δ по области D :

$$m = \iint_D \delta(x, y) ds; \quad (16б)$$

в) масса, распределенная с поверхностной плотностью δ по части σ кривой поверхности:

$$m = \iint_{\sigma} \delta(x, y, z) d\sigma; \quad (16в)$$

г) масса, распределенная с плотностью δ в трехмерной области G :

$$m = \iiint_G \delta(x, y, z) dv. \quad (16г)$$

III. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ

1. Понятие поля

Если с каждой точкой $M \in G$ связано определенное значение величины U , то говорят, что в области G задано поле величины U .

Поле называется скалярным, если U – скаляр (температура, плотность, электрический потенциал и др.) и векторным, если U – вектор (сила, скорость, напряженность и др.).

Поле называется стационарным (установившимся), если оно не меняется с течением времени.

Поле не зависит от системы координат, введенной в области G . Рассмотрим прямоугольную систему координат, тогда задание скалярного поля равносильно заданию в области G скалярной функции $U=f(x, y, z)$ или $U=f(x, y)$, если G – область в плоскости xOy . Задание векторного поля равносильно заданию в каждой точке $M(x, y, z) \in G$ векторной функции

$$\vec{U}(M) = P(x, y, z) \vec{i} + Q(x, y, z) \vec{j} + R(x, y, z) \vec{k}.$$

Свойства скалярного поля, его линий уровня, производной по направлению и градиента рассматривались в разделе «Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных».

В этом разделе рассмотрим свойства стационарного векторного поля. В дальнейшем функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ и их производные считаем непрерывными в области G .

2. Векторные линии

Векторной линией векторного поля называют линию, в каждой точке M которой вектор $\vec{U}(M)$ направлен по касательной к линии.

Мы не рассматриваем, как найти векторные линии.

Если $\vec{U}(M) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ и в каждой точке поля функции P, Q, R одновременно не обращаются в нуль и непрерывны вместе со всеми своими частными производными первого порядка, то через каждую точку поля проходит единственная векторная линия, т. е. вся область G заполнена векторными линиями. По виду векторных линий получают информацию о структуре поля. Если $\vec{U}(M)$ - стационарное поле текущей жидкости, то векторные линии являются траекториями частиц жидкости и называются линиями тока. Если $\vec{U}(M)$ - вектор силы, то векторные линии называются силовыми линиями и т. д. Множество всех векторных линий, проходящих через точки поверхности σ , образует векторную трубку.

3. Работа силового поля. Криволинейный интеграл второго рода

Циркуляция вектора вдоль замкнутого контура

Пусть в каждой точке плоскости xOy (или области D) определен вектор силы $\vec{F}(M) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$, образующий векторное поле. И пусть материальная точка ($m=1$) перемещается в этом поле по гладкой кривой L из начала в конец дуги L . При перемещении материальной точки сила $\vec{F}$ производит работу A .

Возьмем на дуге L произвольную точку M . При бесконечно малом перемещении из точки M по дуге кривой силу можно считать постоянной и равной $\vec{F}(M)$, поэтому соответствующая элементарная работа равна скалярному произведению $dA = \vec{F}(M) \cdot d\vec{r} = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$. Суммируя элементарные работы, получаем общую работу, производимую силой $\vec{F}$, когда материальная точка проходит путь L :

$$A = \int_L dA = \int_L \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy. \quad (18)$$

Полученный интеграл от векторной функции $\vec{F}(M)$ по кривой L называется криволинейным интегралом второго рода или криволинейным интегралом по координатам. Чтобы вычислить интеграл, нужно задать поле $\vec{F}(M)$, уравнение дуги кривой L и указать направление движения по кривой L (начало и конец пути).

Для вычисления интеграла $\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ все переменные и дифференциалы в подынтегральном выражении заменяют из уравнения кривой через одну переменную и ее дифференциал. Находят интервал изменения выбранной переменной на дуге L и вычисляют полученный определенный интеграл.

Если L задана параметрически $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ и t изменяется от α до β

(α соответствует началу пути интегрирования, β – концу), то

$$\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{\alpha}^{\beta} (P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t))dt. \quad (18a)$$

Если L – график функции $y=f(x)$ и x изменяется от a до b , то

$$\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_a^b (P(x, f(x)) + Q(x, f(x))f'(x))dx. \quad (18б)$$

При изменении направления движения по L интеграл изменяет только знак (другие свойства интеграла в разделе I). Если поле $\vec{F}(M)$ и L заданы в трехмерном пространстве, получим:

$$A = \int_L dA = \int_L \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_L P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz, \quad (19)$$

который вычисляется по тому же правилу.

Если $\vec{U}(M) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ – произвольное векторное поле, а L – замкнутый контур, то интеграл

$$\oint_L \vec{U}(M) \cdot d\vec{r} = \oint_L P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz \quad (20)$$

называется циркуляцией векторного поля $\vec{U}(M)$ или циркуляцией вектора $\vec{U}(M)$ вдоль замкнутого контура L .

Циркуляция вектора – величина скалярная, положительная, отрицательная или равная нулю.

4. Поток вектора через поверхность

4.1. Вектор площадки

Двусторонняя поверхность в пространстве называется ориентированной, если указано, какая ее сторона считается наружной, а какая внутренней. Можно рассматривать разные способы ориентации, например:



Рис. 4.1

Часто при рассмотрении элементарной части, содержащей точку M ориентированной поверхности, важна только площадь этой части, а ее форма (круг, прямоугольник и т. д.) не играет никакой роли. Тогда эту часть поверхности изображают нормальным вектором поверхности, направленным от внутренней стороны поверхности к внешней, модуль, которого равен площади этой элементарной части поверхности.

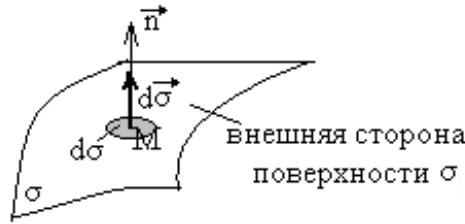


Рис. 4.2

Такой вектор называют вектором площадки (или векторной площадью площадки) в точке M . Если площадь выбранной площадки равна $d\sigma$, то вектор обозначают $\vec{d\sigma}$. Если найден единичный вектор внешней нормали поверхности $n = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, то вектор площадки

$$\vec{d\sigma} = n \cdot d\sigma = (i \cos\alpha + j \cos\beta + k \cos\gamma) d\sigma. \quad (21)$$

В частности, dl - вектор кривой в точке M направлен по нормали к кривой в выбранную сторону, причем модуль вектора равен дифференциалу длины дуги

кривой $dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$. Так как вектор $\vec{dr} = (dx, dy)$ направлен по касатель-

ной к кривой и в точке $M(x, y)$ и модуль $|\vec{dr}| = dl$, то вектор кривой $\vec{dl}$ можно

взять равным $\vec{dl} = (dy, -dx)$ или $\vec{dl} = (-dy, dx)$, потому что в этом случае скалярное

произведение $\left(\vec{dr}, \vec{dl} \right) = 0$, значит $\vec{dl} \perp \vec{dr}$, т. е. $\vec{dl}$ направлен по нормали к кри-

вой L и $|\vec{dl}| = \sqrt{(\pm dy)^2 + (\mp dx)^2} = \sqrt{(dy)^2 + (dx)^2} = dl$.

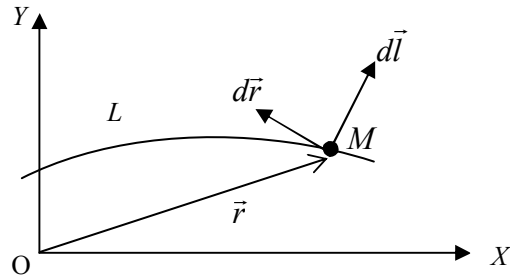


Рис. 4.3

4.2. Понятие потока вектора через поверхность

Пусть в области G задано векторное поле $\vec{U}(M)$ и ориентированная гладкая поверхность σ . Потоком векторного поля $\vec{U}(M)$ через поверхность σ называют скалярную величину, равную поверхностному интегралу

$$\Pi_{\sigma}(U) = \iint_{\sigma} (u \cdot n) d\sigma = \iint_{\sigma} u \cdot d\vec{\sigma}. \quad (22)$$

где n - единичный вектор внешней нормали; $d\vec{\sigma}$ - вектор элементарной площадки поверхности σ .

Если ориентацию поверхности изменить на противоположную, то поток изменит только знак.

Часто поток рассматривают как «количество векторных линий», пересекающих поверхность изнутри наружу. «Количество» (в кавычках, так как число не целое) понимают в алгебраическом смысле, т. е., если одна часть σ пересекается векторными линиями изнутри наружу, а другая часть – снаружи внутрь, то «количество» может быть положительным, отрицательным или равным нулю.

4.3. Гидродинамический смысл потока вектора через поверхность

Поток жидкости через поверхность

Рассмотрим стационарное течение несжимаемой жидкости (или газа) в области G . В любой точке $M \in G$ скорость частицы жидкости имеет определённое значение $V = V(M)$, т. е. в области G задано векторное поле скоростей. Помес-

тим в область G гладкую ориентированную поверхность σ и найдем объем жидкости, протекающей через поверхность σ за единицу времени изнутри наружу. Возьмем на поверхности σ элемент $d\sigma$, содержащий точку M и найдем элемент объема жидкости, протекающей через $d\sigma$ изнутри наружу за единицу времени. Он равен объему косоугольного цилиндра с основанием $d\sigma$ и образующей $|\vec{V}(M)|$.

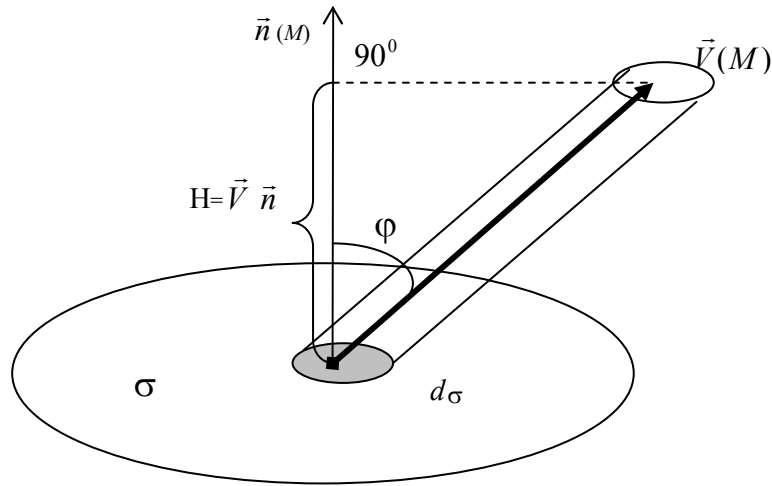


Рис. 4.4

Высота цилиндра равна проекции вектора скорости $\vec{V}(M)$ на единичный вектор внешней нормали $\vec{n}(M)$, т. е. $H = |\vec{V}| \cos \varphi = |\vec{V}| \cdot |\vec{n}| \cos \varphi = \vec{V} \cdot \vec{n}$ — скалярному произведению векторов.

Тогда объем цилиндра равен $dV = H d\sigma = (\vec{V} \cdot \vec{n}) \cdot d\sigma = \vec{V} \cdot (\vec{n} \cdot d\sigma) = \vec{V} \cdot d\vec{\sigma}$, т. е. элементарный объем жидкости равен скалярному произведению вектора скорости $\vec{V}(M)$ на вектор площадки $d\vec{\sigma}$. Суммируя элементарные объемы жидкости для всех элементов поверхности σ , получим, что за единицу времени через всю поверхность σ изнутри наружу проходит объем жидкости, равный поверхностному интегралу

$$\iint_{\sigma} (\vec{v} \cdot \vec{n}) d\sigma = \iint_{\sigma} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \Pi_{\sigma}(\vec{v}),$$

т. е. равный потоку вектора $\vec{v}$ через поверхность σ .

4.4. Поток вектора через плоскую кривую L

Пусть на плоскости xOy задано векторное поле $\vec{U}(M) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$ и ориентированная дуга L гладкой кривой. Возьмем нормальный вектор кривой $\vec{dl} = (-dy, dx)$, составляющий острый угол с Oy при возрастании x вдоль кривой и будем считать это направление внешней нормалью. Скалярное произведение

$$\vec{U} \cdot \vec{dl} = P(x, y)(-dy) + Q(x, y)(dx) = Q(x, y)dx - P(x, y)dy, \text{ тогда}$$

$$\Pi_L(\vec{U}) = \int_L \vec{U} \cdot \vec{dl} = \int_L Q(x, y)dx - P(x, y)dy - \text{поток вектора } \vec{U} \text{ через плоскую кривую } L.$$

4.5. Свойства и вычисление потока вектора через поверхность

Свойства

1) Если изменить ориентацию поверхности, то поток изменит только знак

$$\Pi_{\sigma_+}(u) = -\Pi_{\sigma_-}(u),$$

где σ_+ и σ_- - разные стороны поверхности σ .

2) Если поверхность σ состоит из частей σ_1 и σ_2 , то

$$\Pi_{\sigma}(u) = \Pi_{\sigma_1}(u) + \Pi_{\sigma_2}(u).$$

3) Если $\vec{u} = c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2$,

то

$$\Pi_{\sigma}(u) = C_1\Pi_{\sigma}(u_1) + C_2\Pi_{\sigma}(u_2) - \text{свойство линейности потока.}$$

Вычисление потока

Первый способ:

1. Найти проекцию поверхности σ на плоскость xOy – получить область D .

2. Найти единичный нормальный вектор поверхности σ . Для этого записать уравнение поверхности в виде $F(x, y, z) = 0$. Найти $\text{grad}F = F'_x\vec{i} + F'_y\vec{j} + F'_z\vec{k}$. Найти

$|\text{grad}F| = \sqrt{(F'_x)^2 + (F'_y)^2 + (F'_z)^2}$. Так как $\text{grad}F$ направлен по нормали к поверхности σ , то единичный вектор нормали

$$\vec{n} = \pm \frac{\text{grad} F}{|\text{grad} F|} = \pm \frac{F'_x i + F'_y j + F'_z k}{\sqrt{(F'_x)^2 + (F'_y)^2 + (F'_z)^2}}.$$

Знак + или – выбираем в зависимости от заданной стороны поверхности.

3. Найти $d\sigma$.

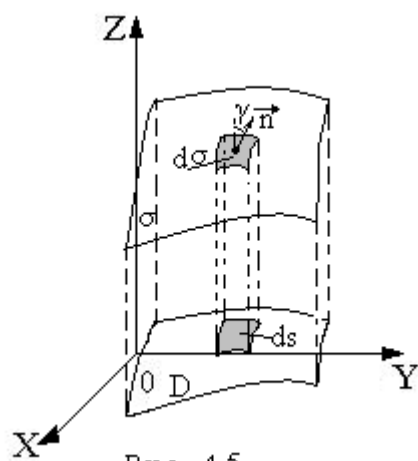


Рис. 4.5

Угол между $\vec{n}$ и осью Oz равен γ . Если считать, что в пределах площадки $d\sigma$ направление $\vec{n}$ не меняется, то угол наклона площадки $d\sigma$ к плоскости xOy (площадке ds) тоже равен γ , тогда площади этих площадок связаны соотношением

$$ds = \cos \gamma \cdot d\sigma \text{ и } d\sigma = \frac{ds}{\cos \gamma}.$$

Вектор $\vec{n} = \cos \alpha i + \cos \beta j + \cos \gamma k$,

поэтому

$$\cos \gamma = \pm \frac{F'_z}{\sqrt{(F'_x)^2 + (F'_y)^2 + (F'_z)^2}}.$$

Тогда

$$d\sigma = \frac{\sqrt{(F'_x)^2 + (F'_y)^2 + (F'_z)^2}}{|F'_z|} ds.$$

4. Уравнение поверхности σ записать в виде $z=z(x,y)$.

5. Вычислить $\Pi_\sigma(\vec{u}) = \iint_\sigma (\vec{u} \cdot \vec{n}) d\sigma = \iint_D \left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{n}}{|\cos \gamma|} \right)_{z=z(x,y)} \cdot ds$, подставив все найденные

величины в двойной интеграл по области D и вычислив полученный интеграл.

Замечание

В случае замкнутой поверхности σ , $\vec{n}$ - вектор внешней нормали.

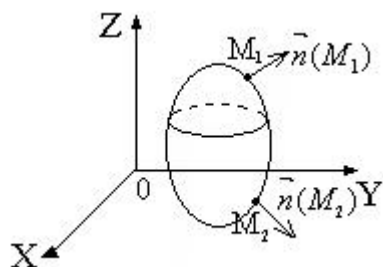


Рис. 4.6

Второй способ:

Пусть
$$u = P(x, y, z)i + Q(x, y, z)j + R(x, y, z)k$$

$$n = i \cos \alpha + j \cos \beta + k \cos \gamma$$

$$u \cdot n = P(x, y, z) \cos \alpha + Q(x, y, z) \cos \beta + R(x, y, z) \cos \gamma$$

Элемент площади ds в плоскости xOy равен $dxdy$, в плоскости xOz - $dxdz$ и в плоскости yOz - $dydz$.

Мы показали, что при проецировании поверхности σ на плоскость xOy $ds = \cos \gamma \cdot d\sigma$, т. е. $\cos \gamma d\sigma = dxdy$. (Смотри пункт 3 первого способа вычисления потока).

Тогда при проецировании поверхности σ на плоскость xOz $\cos \beta d\sigma = dxdz$, а на плоскость yOz $\cos \alpha d\sigma = dydz$.

Поток вектора $\vec{u}$ через поверхность σ равен

$$\begin{aligned} \Pi_{\sigma}(u) &= \iint_{\sigma} u \cdot n d\sigma = \iint_{\sigma} (P(x, y, z) \cos \alpha + Q(x, y, z) \cos \beta + R(x, y, z) \cos \gamma) d\sigma = \\ &= \iint_{\sigma} (P(x, y, z) dydz + Q(x, y, z) dxdz + R(x, y, z) dxdy). \end{aligned} \quad (23)$$

Полученный интеграл

$$\iint_{\sigma} P(x, y, z) dydz + Q(x, y, z) dxdz + R(x, y, z) dxdy.$$

называется поверхностным интегралом второго типа (по координатам).

Предположим, что уравнение поверхности σ можно решить относительно всех переменных

$$\sigma : \Phi(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \varphi(y, z) \\ y = \psi(x, z) \\ z = \eta(x, y) \end{cases}$$

Обозначим проекцию поверхности σ на плоскость xOy через σ_{xy} , на плоскость xOz через σ_{xz} и на плоскость yOz через σ_{yz} . Тогда поверхностный интеграл второго типа приводится к сумме двойных интегралов:

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma} P(x, y, z) dydz + Q(x, y, z) dx dz + R(x, y, z) dx dy = \iint_{\sigma_{yz}} P(\varphi(y, z), y, z) dydz + \\ + \iint_{\sigma_{xz}} Q(x, \psi(x, z), z) dx dz + \iint_{\sigma_{xy}} R(x, y, \eta(x, y)) dx dy. \end{aligned} \quad (24)$$

Замечание

Поток вектора $\vec{u}(M)$ через кривую L равен криволинейному интегралу по координатам

$$\Pi_L(\vec{u}) = \int_L Q(x, y) dx - P(x, y) dy. \quad (25)$$

5. Оператор Гамильтона «набла»

Английский математик Гамильтон (1805-1865) ввел векторно-дифференциальный оператор $\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}$, называемый «набла» (по-гречески – арфа, форму которой напоминает значок ∇). Набла действует только на множитель, который стоит непосредственно за ним. Если $u = f(x, y, z)$ скалярная функция (скалярное поле), то произведение вектора ∇ на скаляр u :

$$\nabla u = \vec{i} \frac{\partial u}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial u}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial u}{\partial z} = \text{gradu} - \text{вектор}.$$

Если $\vec{u} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ - векторная функция (векторное поле), то скалярное произведение вектора ∇ на вектор $\vec{u}$ равно сумме произведений одноименных координат векторов $\nabla \vec{u} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$ - скаляр, а векторное произведение ∇ на $\vec{u}$:

$$\nabla \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \vec{i} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) - \vec{j} \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} \right) + \vec{k} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) - \text{вектор}.$$

С помощью ∇ проще записать некоторые понятия, связанные с полями, и операции над ними.

6. Дивергенция векторного поля

Пусть в трехмерном пространстве (или в области G) определено векторное поле $\vec{U}(M)$. Возьмем произвольную точку M и окружим замкнутой поверхно-

стью σ . Вычислим поток $\Pi_{\sigma}(\vec{U})$ векторного поля через поверхность σ . Найдем объем v области, ограниченной σ . Дивергенцией (расходимостью) $div\vec{U}(M)$ векторного поля $\vec{U}(M)$ в точке M называется предел отношения потока $\Pi_{\sigma}(\vec{U})$ векторного поля через замкнутую поверхность σ к объему области, ограниченной σ , вычисленный при условии, что поверхность σ стягивается в точку M :

$$div\vec{U}(M) = \lim_{\substack{v \rightarrow 0 \\ (\sigma \rightarrow M)}} \frac{\Pi_{\sigma}(\vec{U})}{V} = \lim_{\substack{v \rightarrow 0 \\ (\sigma \rightarrow M)}} \frac{1}{v} \iint_{\sigma} \vec{u} \cdot \vec{d\sigma}. \quad (26)$$

Если в пространстве введена прямоугольная система координат $Oxyz$ и

$$\vec{U}(M) = P(x, y, z) \vec{i} + Q(x, y, z) \vec{j} + R(x, y, z) \vec{k},$$

то

$$div\vec{U}(M) = \nabla U = \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial Q(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z}$$

пишут

$$div\vec{U}(M) = \nabla U = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}. \quad (27)$$

Ранее мы говорили, что все эти частные производные существуют. Используя гидродинамическую интерпретацию, считаем поле $\vec{U}(M)$ стационарным полем скоростей несжимаемой текущей жидкости. Это течение может быть обусловлено наличием источников – точек, производящих жидкость, и стоков – точек, поглощающих жидкость. Величина $\Pi_{\sigma}(\vec{U})$ дает объем жидкости, протекающей в единицу времени с внутренней стороны σ на внешнюю. Но эта величина равна количеству жидкости, вырабатываемой всеми источниками, находящимися в области, ограниченной σ , т. е. равна суммарной мощности всех источников внутри σ . Тогда предел отношения мощности источников в области к объему области, найденный при условии, что область стягивается (сжимается) в точку M , равен плотности мощности источников жидкости в этой точке.

Итак, в гидродинамической интерпретации дивергенция $div\vec{U}(M)$ векторного поля $\vec{U}(M)$ в точке M – это плотность мощности источников жидкости в этой точке.

Есть и другие интерпретации. Так, в электрическом векторном поле напряженности, созданном электрическими зарядами, распределенными в пространстве, дивергенция вектора напряженности является плотностью распределения электрических зарядов в данной точке поля.

7. Ротор (вихрь) векторного поля

Пусть в пространстве (или в области G) определена прямоугольная система координат и задано векторное поле:

$$\vec{u}(M) = P(x, y, z) \vec{i} + Q(x, y, z) \vec{j} + R(x, y, z) \vec{k}.$$

Ротором $\text{rot} \vec{u}(M)$ поля $\vec{u}$ в точке M называют вектор

$$\text{rot} \vec{u}(M) = \nabla \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \vec{i} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) - \vec{j} \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} \right) + \vec{k} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \quad (28)$$

Этот вектор характеризует завихренность поля в точке M (тенденцию к вращению). Проведем через точку M плоскость Γ , ее ориентацию в пространстве зададим единичным нормальным вектором $\vec{n}$ в точке M .

В плоскости Γ возьмем замкнутую кривую L , обходящую точку M , и выберем направление обхода L таким, чтобы с конца $\vec{n}$ обход казался происходящим против движения часовой стрелки.

Обозначим площадь, ограниченную контуром L , через ΔS . Найдем циркуляцию векторного поля $\vec{u}(M)$ вдоль контура L : $\Pi_L(\vec{u}) = \oint_L \vec{u} \cdot d\vec{r}$.

Доказывается, что проекция ротора поля $\vec{u}(M)$ в точке M на вектор $\vec{n}$ равна пределу отношения циркуляции поля по контуру L к площади ΔS , ограниченной контуром, при условии, что контур L стягивается в точку M , а $\Delta S \rightarrow 0$.

$$\text{пр}_n(\text{rot} \vec{u}(M)) = \lim_{\substack{\Delta S \rightarrow 0 \\ (L \rightarrow M)}} \frac{1}{\Delta S} \oint_L \vec{u} \cdot d\vec{r} \quad (29)$$

8. Потенциальное векторное поле

Векторное поле $\vec{U}(M)$, заданное в односвязной области G , называется потенциальным, если существует такая скалярная функция $f(M)$, что во всех точках $M \in G$ вектор

$$\vec{U}(M) = \text{grad} f(M) \quad (30)$$

В этом случае функция $f(M) = f(x, y, z)$ называется потенциалом векторного поля $\vec{U}(M)$. (Для силовых полей $f(M)$ называется силовой функцией, потенциалом называется $(-1)f(M) = -f(M)$).

Теорема (признак потенциального поля)

Для того чтобы векторное поле $\vec{U}(M)$ было потенциальным в односвязной области G , необходимо и достаточно, чтобы в каждой точке M этой области $\text{rot} \vec{U}(M) = 0$.

Необходимость можно формально рассмотреть: $\text{rot} \vec{U}(M) = \text{rot}(\text{grad} f) = \nabla \times (\nabla f)$. «Векторы» ∇ и ∇f коллинеарны, следовательно, их векторное произведение равно нулю:

$$\text{rot} \vec{U} = 0 \quad (31)$$

Пусть $\vec{U}(M) = P(M)\vec{i} + Q(M)\vec{j} + R(M)\vec{k}$,

$$\text{rot} \vec{U}(M) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} - \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}.$$

Получим, что поле $\vec{U}(M)$ является потенциальным в том и только в том случае, когда

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}. \quad (32)$$

8.1. Плоское потенциальное поле

Если поле плоское, т. е. $\vec{U}(M) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$

$$\text{rot}\vec{U}(M) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ P & Q & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k} \quad (33)$$

- поле называется потенциальным при $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$.

В этом случае $\vec{U} = \text{grad}f(x, y) = f'_x(x, y)\vec{i} + f'_y(x, y)\vec{j}$, т.е.

$P(x, y) = f'_x(x, y)$, $Q(x, y) = f'_y(x, y)$ и

$$\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{AB} f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy = \int_{AB} df(x, y) = f(x, y)|_A^B = f(B) - f(A)$$

для всех дуг, натянутых между точками A и B .

Получили, что при $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ криволинейный интеграл не зависит от пути интегрирования. Работа силы $\vec{U} = \vec{F}$ не зависит от пути, по которому движется точка. Тогда криволинейный интеграл по любому замкнутому контуру в заданной области равен нулю:

$$\int_L P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j} = 0, \quad (34)$$

т. е. циркуляция поля вдоль любого замкнутого контура равна нулю $C_L(\vec{U}) = 0$.

Потенциал плоского поля $\vec{U}(M) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$ находят по формуле

$$f(x, y) + c = \int_{M_0 M} P(x, y)dx + Q(x, y)dy, \quad (35)$$

где $M(x, y)$, $M_0(x_0, y_0)$ взяты произвольно. Удобнее всего за дугу $M_0 M$ брать двужвенную ломаную линию, звенья которой параллельны осям координат, так как на вертикальном звене $dx = 0$, а на горизонтальном $dy = 0$.

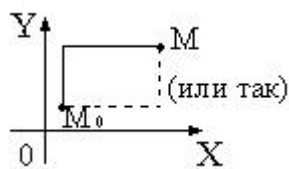


Рис. 8.1

$$f(x, y) + c = \int_{y_0}^y Q(x_0, y) dy + \int_{x_0}^x P(x, y_0) dx \quad (36)$$

$$f(x, y) + c = \int_{x_0}^x P(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x, y_0) dy$$

IV. РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

1. Вычисление и применение двойного интеграла

При решении этих задач используйте следующую схему:

- 1) сделать чертеж;
- 2) выбрать подходящие формулы (по условию задачи и по чертежу);
- 3) найти все элементы выбранных формул;
- 4) вычислить получившийся повторный интеграл.

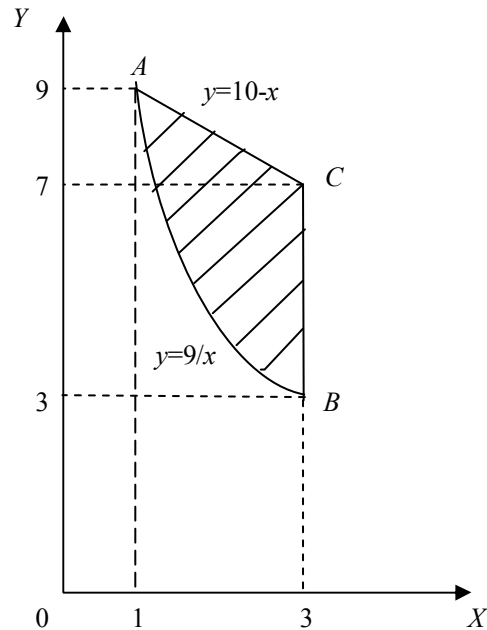
Пример 1

Вычислить $\iint_D (2x + y) dS$, если $D: \begin{cases} 1 \leq x \leq 3 \\ \frac{9}{x} \leq y \leq 10 - x \end{cases}$

Изменить порядок интегрирования в полученном повторном интеграле и еще раз вычислить интеграл

Решение

Построим чертеж:



Уравнения границ области $D: x=1, x=3, y=\frac{9}{x}, y=10-x$ (каждое неравенство, задающее D , превращаем в уравнение).

Для вычисления выберем формулу

$$\iint_D f(x, y) dS = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

Найдем элементы формулы.

Так как область расположена между прямыми $x=1$ и $x=3$, то $a=1, b=3$.

Нижняя граница области – дуга $\overset{\smile}{AB}$ задана уравнением $y=\frac{9}{x}$, следовательно,

$g(x)=\frac{9}{x}$. Верхняя граница – прямая AC задана уравнением $y=10-x$, следова-

тельно, $h(x)=10-x$. Получим повторный интеграл.

$$\iint_D (2x+y) dS = \int_1^3 \left(\int_{\frac{9}{x}}^{10-x} (2x+y) dy \right) dx.$$

Вычислим внутренний интеграл, считая x – постоянной.

$$\begin{aligned}\int_{\frac{9}{x}}^{10-x} (2x + y) dy &= \int_{\frac{9}{x}}^{10-x} 2x dy + \int_{\frac{9}{x}}^{10-x} y dy = 2x \int_{\frac{9}{x}}^{10-x} dy + \frac{y^2}{2} \Big|_{\frac{9}{x}}^{10-x} = 2xy \Big|_{\frac{9}{x}}^{10-x} + \frac{1}{2} (10-x)^2 - \frac{81}{2x^2} = \\ &= 2x(10-x) - 2x \cdot \frac{9}{x} + \frac{1}{2} (10-x)^2 - \frac{81}{2x^2} = 20x - 2x^2 - 18 + 50 - 10x + \frac{1}{2} x^2 - \frac{81}{2x^2} = \\ &= 10x - \frac{3}{2} x^2 + 32 - \frac{81}{2x^2}\end{aligned}$$

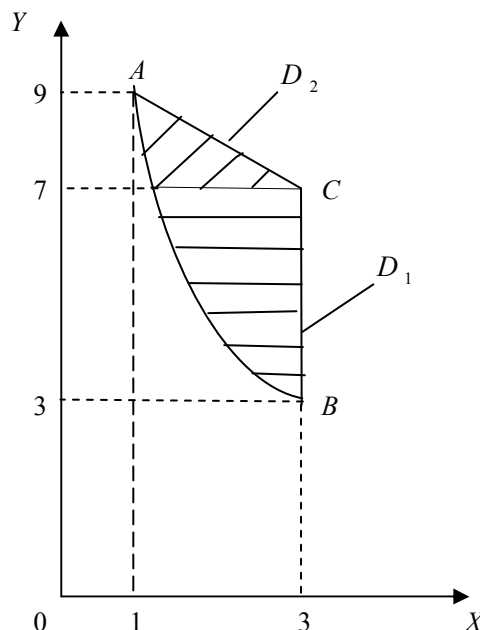
От полученной функции вычислим внешний интеграл

$$\begin{aligned}\iint_D (2x + y) dS &= \int_1^3 \left(10x - \frac{3}{2} x^2 + 32 - \frac{81}{2x^2} \right) dx = \left(5x^2 - \frac{x^3}{2} + 32x + \frac{81}{2x} \right) \Big|_1^3 = \left(45 - \frac{27}{2} + 96 + \frac{27}{2} \right) - \\ &- \left(5 - \frac{1}{2} + 32 + \frac{81}{2} \right) = 64.\end{aligned}$$

Изменить порядок интегрирования в данном случае означает, что внутренний интеграл нужно взять по x , а внешний по y и для вычисления интеграла выбрать формулу:

$$\iint_D f(x, y) dS = \int_a^b \left(\int_{g(y)}^{h(y)} f(x, y) dx \right) dy.$$

Выполним чертеж еще раз:



Найдем координаты точек A , B и C :

$$A: \begin{cases} y = \frac{9}{x} \\ y = 10 - x \end{cases}, A(1;9), \quad B: \begin{cases} x = 3 \\ y = \frac{9}{x} \end{cases}, B(3;3), \quad C: \begin{cases} x = 3 \\ y = 10 - x \end{cases}, C(3;7).$$

Правая граница области D состоит из отрезков BC и AC различных прямых, следовательно, область D нужно разбить на две части - D_1 и D_2 , тогда

$$\iint_D (2x + y) dS = \int_{D_1} (2x + y) dS + \iint_{D_2} (2x + y) dS. \text{ Уравнения границ нужно решить от-}$$

носительно x . Левая граница обеих частей – дуга $AB: y = \frac{9}{x} \Rightarrow x = \frac{9}{y}$. Правая гра-

ница области D_1 - отрезок $BC: x = 3$. Правая граница области D_2 - отрезок $AC: y = 10 - x \Rightarrow x = 10 - y$. Область D_1 расположена между прямыми $y = 3$ и $y = 7$.

Внутри области D_1 x изменяется от границы $x = \frac{9}{y}$ до границы $x = 3$. Получим

$$\iint_{D_1} (2x + y) dS = \int_3^7 \left(\int_{\frac{9}{y}}^3 (2x + y) dx \right) dy. \text{ Область } D_2 \text{ расположена между прямыми } y=7 \text{ и }$$

$y=9$. Внутри области D_2 x изменяется от границы $x = \frac{9}{y}$ до границы $x = 10 - y$.

Получим:

$$\iint_{D_2} (2x + y) dS = \int_7^9 \left(\int_{\frac{9}{y}}^{10-y} (2x + y) dx \right) dy.$$

Следовательно:

$$\iint_D (2x + y) dS = \int_3^7 \left(\int_{\frac{9}{y}}^3 (2x + y) dx \right) dy + \int_7^9 \left(\int_{\frac{9}{y}}^{10-y} (2x + y) dx \right) dy -$$

порядок интегрирования изменен.

Вычислим:

$$\iint_{D_1} (2x + y) dS = \int_3^7 \left(\int_{\frac{9}{y}}^3 (2x + y) dx \right) dy.$$

Внутренний интеграл вычисляем, считая y постоянной.

$$\int_{\frac{9}{y}}^3 (2x + y) dx = \int_{\frac{9}{y}}^3 2x dx + \int_{\frac{9}{y}}^3 y dx = 2 \int_{\frac{9}{y}}^3 x dx + y \int_{\frac{9}{y}}^3 dx = x^2 \Big|_{\frac{9}{y}}^3 + yx \Big|_{\frac{9}{y}}^3 = 3y - \frac{81}{y^2},$$

Тогда
$$\iint_{D_1} (2x + y) ds = \int_3^7 (3y - \frac{81}{y^2}) dy = (\frac{3y^2}{2} + \frac{81}{y}) \Big|_3^7 = \frac{312}{7}.$$

Вычислим:

$$\begin{aligned} \iint_{D_2} (2x + y) dS &= \int_7^9 \left(\int_{\frac{9}{y}}^{10-y} (2x + y) dx \right) dy = \int_7^9 (x^2 + xy) \Big|_{\frac{9}{y}}^{10-y} dy = \int_7^9 ((10-y)^2 + (10-y)y - \frac{81}{y^2} - 9) dy = \\ &= \int_7^9 (91 - 10y - \frac{81}{y^2}) dy = (91y - 5y^2 + \frac{81}{y}) \Big|_7^9 = \frac{136}{7}. \end{aligned}$$

Следовательно:

$$\iint_D (2x + y) dS = \frac{312}{7} + \frac{136}{7} = \frac{448}{7} = 64.$$

Мы убедились, что в данном случае проще вычислить внутренний интеграл по y , а внешний по x .

Ответ:

$$\iint_D (2x + y) dS = \int_1^3 \left(\int_{\frac{9}{x}}^{10-x} (2x + y) dy \right) dx = \int_3^7 \left(\int_{\frac{9}{y}}^3 (2x + y) dx \right) dy + \int_7^9 \left(\int_{\frac{9}{y}}^{10-y} (2x + y) dx \right) dy = 64.$$

Пример 2

Найти статические моменты относительно осей координат однородной фигуры: ограниченной линиями $4x^2 + y^2 = 4$, $2x + y = 2$ и расположенной в первой четверти, если поверхностная плотность массы $\delta = 1$.

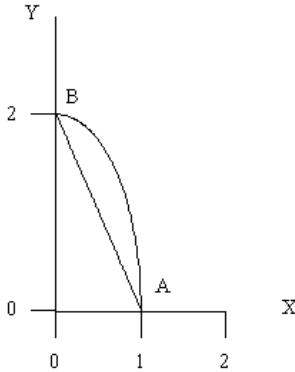
Решение

Выполним чертеж.

Линия $4x^2 + y^2 = 4$ - эллипс

$$\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

$2x + y = 2$ - прямая.



При построении получили точки пересечения линий $A(1;0)$, $B(0;2)$. По условию задачи выберем формулы вычисления статических моментов плоской области:

$$M_x = \iint_D y dS, \quad M_y = \iint_D x dS.$$

При вычислении M_x внутренний интеграл удобнее брать по y , а при вычислении M_y по x , так как в этом случае внешние интегралы получаются более простыми (проверьте это). Используем обе формулы вычисления двойного интеграла, а значит, уравнения границ области нужно решить и относительно y и относительно x .

Отрезок прямой $2x + y = 2 \Rightarrow y = 2(1 - x)$ или $x = \frac{1}{2}(2 - y)$.

Дуга эллипса $4x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow y = 2\sqrt{1 - x^2}$ или $x = \frac{1}{2}\sqrt{4 - y^2}$.

$$\begin{aligned} M_x &= \iint_D y dS = \int_0^1 \left(\int_{2(1-x)}^{2\sqrt{1-x^2}} y dy \right) dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} y^2 \Big|_{2(1-x)}^{2\sqrt{1-x^2}} \right) dx = 2 \int_0^1 (1 - x^2 - (1 - x)^2) dx = \\ &= 2 \int_0^1 (2x - 2x^2) dx = 2 \left(x^2 - \frac{2x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = 2 \left(1 - \frac{2}{3} \right) = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_y &= \iint_D x dS = \int_0^2 \left(\int_{\frac{1}{2}(2-y)}^{\frac{1}{2}\sqrt{4-y^2}} x dx \right) dy = \int_0^2 \left(\frac{1}{2} x^2 \Big|_{\frac{1}{2}(2-y)}^{\frac{1}{2}\sqrt{4-y^2}} \right) dy = \\ &= \frac{1}{8} \int_0^2 (4 - y^2 - (2 - y)^2) dy = \frac{1}{8} \int_0^2 (4y - 2y^2) dy = \frac{1}{8} \left(2y^2 - \frac{2y^3}{3} \right) \Big|_0^2 = \frac{1}{4} \left(4 - \frac{8}{3} \right) = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Ответ: $M_x = \frac{2}{3}; M_y = \frac{1}{3}$.

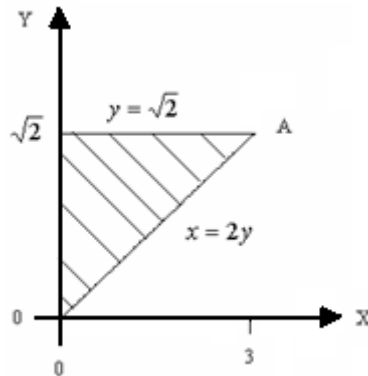
Пример 3

Найти момент инерции относительно оси Ox фигуры, ограниченной линиями

$$x = 0, y = \sqrt{2}, y = \frac{x}{2}, \text{ если поверхностная плотность массы } \delta = \exp\left(-\frac{xy}{2}\right) = e^{-\frac{xy}{2}}.$$

Решение

Выполним чертеж:



По условию задачи выберем формулу момента инерции:

$$J_x = \iint_D y^2 \delta(x, y) ds = \iint_D y^2 e^{-\frac{xy}{2}} ds.$$

Область D удобна для вычисления повторного интеграла при любом порядке интегрирования. Подынтегральная функция по x интегрируется значительно легче, чем по y , поэтому возьмем внутренний интеграл по x , а внешний по y .

Решим уравнения границ относительно x . Левая граница: $x = 0$ (задана). Правая граница: $y = \frac{x}{2} \Rightarrow x = 2y$.

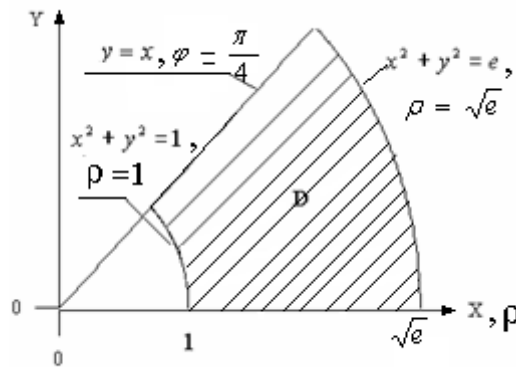
Область D расположена между прямыми $y = 0$ и $y = \sqrt{2}$. Внутри области x изменяется от границы $x = 0$ до границы $x = 2y$, значит:

$$\begin{aligned} J_x &= \int_0^{\sqrt{2}} \left(\int_0^{2y} y^2 e^{-\frac{xy}{2}} dx \right) dy = \int_0^{\sqrt{2}} \left(y^2 \int_0^{2y} e^{-\frac{xy}{2}} dx \right) dy = \int_0^{\sqrt{2}} \left(-y^2 \cdot \frac{2}{y} e^{-\frac{xy}{2}} \Big|_0^{2y} \right) dy = \int_0^{\sqrt{2}} (-2ye^{-y^2} + 2y) dy = \\ &= \int_0^{\sqrt{2}} e^{-y^2} d(-y^2) + y^2 \Big|_0^{\sqrt{2}} = e^{-y^2} \Big|_0^{\sqrt{2}} + 2 = e^{-2} - 1 + 2 = e^{-2} + 1. \end{aligned}$$

Ответ: $I_x = 1 + e^{-2}$.

Пример 4

Вычислить $I = \iint_D \ln(x^2 + y^2) ds$, если $D: \begin{cases} 1 \leq x^2 + y^2 \leq e \\ 0 \leq y \leq x \end{cases}$.



Решение

Построим область D . Границы области: $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = e$ - окружности радиусов 1 и $\sqrt{e}$ с центром в начале координат $y = 0$, $y = x$ - прямые.

Так как область интегрирования - часть кольца, перейдем к полярным координатам. В подынтегральном выражении заменим x, y и ds по формулам:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad ds = \rho d\varphi d\rho.$$

Предварительно заменим

$$x^2 + y^2 = (\rho \cos \varphi)^2 + (\rho \sin \varphi)^2 = \rho^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = \rho^2.$$

$$\text{Тогда } I = \iint_D \ln(x^2 + y^2) ds = \iint_D \ln \rho^2 \cdot \rho d\varphi d\rho = 2 \iint_D \rho \ln \rho d\varphi d\rho$$

запишем в полярных координатах уравнения границ области

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 = 1 &\Rightarrow \rho^2 = 1, \quad \rho = 1 \\ x^2 + y^2 = e &\Rightarrow \rho^2 = e, \quad \rho = \sqrt{e} \\ y = 0 &\Rightarrow \rho \sin \varphi = 0, \quad \rho \neq 0, \quad \sin \varphi = 0, \quad \varphi = 0 \\ y = x &\Rightarrow \rho \sin \varphi = \rho \cos \varphi, \quad \operatorname{tg} \varphi = 1, \quad \varphi = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

В полярных координатах внешний интеграл всегда берем по φ , а внутренний - по ρ . Область расположена в секторе между лучами $\varphi = 0$ и $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Внутри

области ρ изменяется от границы $\rho = 1$ до границы $\rho = \sqrt{e}$. Следовательно, по формуле

$$\iint_D f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\varphi d\rho = \int_{\alpha}^{\beta} \left(\int_{g(\varphi)}^{h(\varphi)} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho \right) d\varphi$$

$$I = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_1^{\sqrt{e}} \rho \ln \rho d\rho \right) d\varphi.$$

Внутренний интеграл вычислим, используя формулу интегрирования по частям:

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

$$\begin{aligned} \int_1^{\sqrt{e}} \rho \ln \rho d\rho &= \left| \begin{array}{l} u = \ln \rho, dv = \rho d\rho \\ v = \int \rho d\rho = \frac{\rho^2}{2} \\ du = (\ln \rho)' d\rho = \frac{d\rho}{\rho} \end{array} \right| = \frac{\rho^2}{2} \ln \rho \Big|_1^{\sqrt{e}} - \int_1^{\sqrt{e}} \frac{\rho^2}{2} \cdot \frac{d\rho}{\rho} = \frac{e}{2} \ln \sqrt{e} - \frac{1}{2} \int_1^{\sqrt{e}} \rho d\rho = \frac{e}{2} \cdot \frac{1}{2} \ln e - \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho^2}{2} \Big|_1^{\sqrt{e}} = \\ &= \frac{e}{4} - \frac{e}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\text{Тогда } J = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{4} d\varphi = \frac{1}{2} \varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8}$$

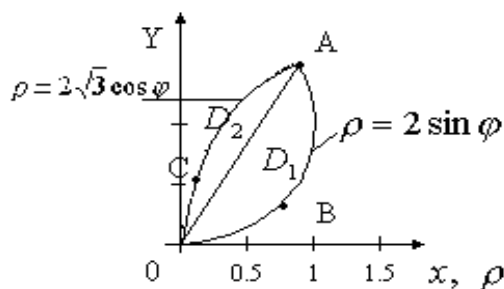
$$\text{Ответ: } I = \frac{\pi}{8}.$$

Пример 5

Вычислить площадь общей части двух кругов: $x^2 + y^2 \leq 2y, x^2 + y^2 \leq 2x\sqrt{3}$

Решение

Сделаем чертеж



$x^2 + y^2 = 2y$ - окружность $x^2 + (y-1)^2 = 1$ с центром в точке $(0;1)$ радиуса $r=1$.
 $x^2 + y^2 = 2x\sqrt{3}$ - окружность $(x-\sqrt{3})^2 + y^2 = 3$ с центром в точке $(\sqrt{3};0)$ радиуса $R=\sqrt{3}$.

Выберем формулу площади фигуры в полярных координатах, так как область ограничена окружностями

$$S = \iint_D \rho d\varphi d\rho$$

Граница области состоит из дуг $\overset{\cup}{OBA}$ и $\overset{\cup}{OCA}$ разных окружностей, разобьем область D лучом OA на две части - $OBAO = D_1$ и $OACO = D_2$.

Площадь $OBAO$ обозначим S_1 , площадь $OACO$ - S_2 .

Уравнения окружностей запишем в полярных координатах

$$\overset{\cup}{OBA} : x^2 + y^2 = 2y \Rightarrow \rho^2 = 2\rho \sin \varphi, \rho = 2 \sin \varphi,$$

$$\overset{\cup}{OCA} : x^2 + y^2 = 2x\sqrt{3} \Rightarrow \rho = 2\sqrt{3} \cos \varphi.$$

Найдем уравнение луча OA , для чего найдем полярный угол точки A пересечения окружностей.

$$A : \begin{cases} \rho = 2 \sin \varphi \\ \rho = 2\sqrt{3} \cos \varphi. \end{cases}$$

$$2 \sin \varphi = 2\sqrt{3} \cos \varphi, \operatorname{tg} \varphi = \sqrt{3}, \varphi = \frac{\pi}{3}$$

$$\text{Уравнение луча } OA: \varphi = \frac{\pi}{3}$$

Так как окружность $\overset{\circ}{OBA}$ касается оси ox , то область D_1 ограничена лучом $\varphi = 0$.

Так как окружность $\overset{\circ}{OCA}$ касается оси Oy , то область D_2 ограничена лучом

$$\varphi = \frac{\pi}{2}.$$

Область D_1 расположена в секторе между лучами $\varphi = 0$ и $\varphi = \frac{\pi}{3}$, внутри области

D_1 ρ изменяется от $\rho = 0$ до $\rho = 2 \sin \varphi$. Запишем S_1 и вычислим интеграл по формуле

$$\begin{aligned} S_1 &= \iint_{D_1} \rho d\varphi d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\int_0^{2 \sin \varphi} \rho d\rho \right) d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{\rho^2}{2} \Big|_0^{2 \sin \varphi} \right) d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{3}} 2 \sin^2 \varphi d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (1 - \cos 2\varphi) d\varphi = \\ &= \left(\varphi - \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}. \end{aligned}$$

Область D_2 расположена в секторе между лучами $\varphi = \frac{\pi}{3}$ и $\varphi = \frac{\pi}{2}$, внутри области ρ изменяется от $\rho = 0$ до $\rho = 2\sqrt{3} \cos \varphi$.

$$\begin{aligned} S_2 &= \iint_{D_2} \rho d\varphi d\rho = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2\sqrt{3} \cos \varphi} \rho d\rho \right) d\varphi = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\rho^2}{2} \Big|_0^{2\sqrt{3} \cos \varphi} \right) d\varphi = \\ &= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} 6 \cos^2 \varphi d\varphi = 3 \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2\varphi) d\varphi = 3 \left(\varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right) \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \\ &= 3 \left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \sin \pi \right) - 3 \left(\frac{\pi}{3} + \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi}{3} \right) = \frac{3\pi}{2} - \pi - \frac{3\sqrt{3}}{4} = \frac{\pi}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{4}. \end{aligned}$$

Следовательно

$$S = S_1 + S_2 = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{4} = \frac{5\pi}{6} - \sqrt{3}.$$

Ответ: $S = \frac{5\pi}{6} - \sqrt{3}.$

2. Вычисление и применение тройного интеграла

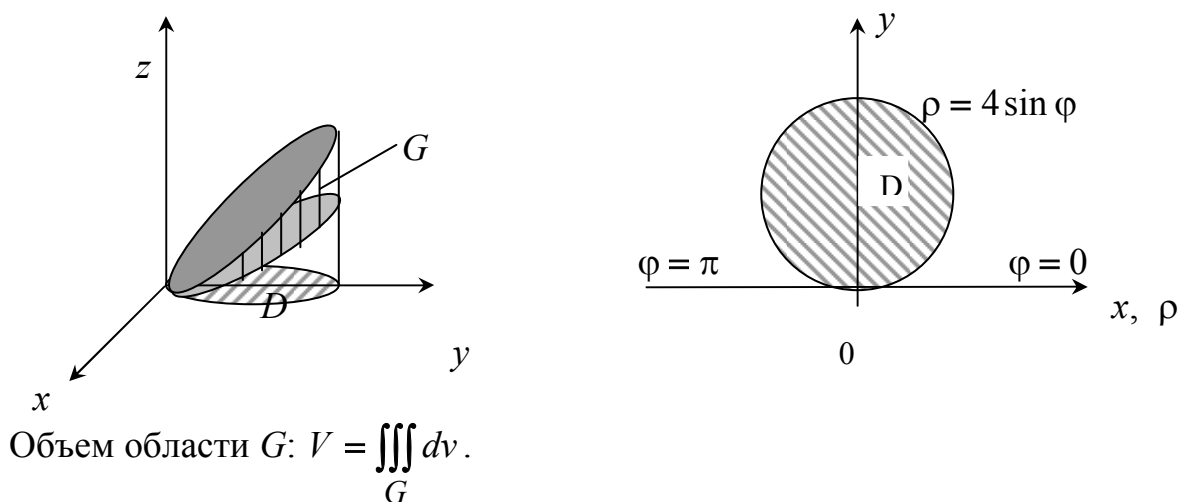
Схема применения тройного интеграла такая же, как двойного: чертеж, выбор формул, поиск всех элементов формул, вычисление полученных интегралов.

Пример 6

Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 = 4y, z = y, z = 2y$.

Решение

Выполним чертеж. Поверхность $x^2 + y^2 = 4y$ - круговой цилиндр, его образующие параллельны оси oz , направляющей служит окружность в плоскости oxy . Плоскости $z = y, z = 2y$ проходят через ось ox , но имеют разный наклон к плоскости $хоу$. Они вырезают из цилиндра слой (область G , тело), объем которого нам нужно вычислить.



Вычислим интеграл по формуле

$$V = \iiint_G dv = \iint_D \left(\int_{g(x,y)}^{h(x,y)} dz \right) ds.$$

Проекцией области G на плоскость $хоу$ является область D , ограниченная окружностью $x^2 + y^2 = 4y$. Снизу область G ограничена плоскостью $z = y$, следовательно, $g(x, y) = y$. Сверху ограничена плоскостью $z = 2y$, следовательно, $h(x, y) = 2y$.

$$\text{Тогда } V = \iint_D \left(\int_y^{2y} dz \right) ds = \iint_D \left(z \Big|_y^{2y} \right) ds = \iint_D (2y - y) ds = \iint_D y ds.$$

Полученный двойной интеграл вычислим в полярных координатах:

$$x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi, ds = \rho d\varphi d\rho,$$

$$x^2 + y^2 = 4y \Rightarrow \rho^2 = 4\rho \sin \varphi \Rightarrow \rho = 0(\text{полюс}), \rho = 4 \sin \varphi.$$

Область D расположена в секторе между лучами $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$, внутри области ρ изменяется от $\rho = 0$ до $\rho = 4 \sin \varphi$.

$$\begin{aligned} V &= \iint_D \rho \sin \varphi \cdot \rho d\varphi d\rho = \iint_D \rho^2 \sin \varphi d\varphi d\rho = \int_0^\pi \left(\int_0^{4 \sin \varphi} \rho^2 \sin \varphi d\rho \right) d\varphi = \int_0^\pi \left(\sin \varphi \int_0^{4 \sin \varphi} \rho^2 d\rho \right) d\varphi = \\ &= \int_0^\pi \left(\sin \varphi \cdot \frac{\rho^3}{3} \Big|_0^{4 \sin \varphi} \right) d\varphi = \int_0^\pi \frac{64}{3} \sin^4 \varphi d\varphi = \frac{16}{3} \int_0^\pi \left(2 \sin^2 \varphi \right)^2 d\varphi = \frac{16}{3} \int_0^\pi (1 - \cos 2\varphi)^2 d\varphi = \\ &= \frac{16}{3} \int_0^\pi (1 - 2 \cos 2\varphi + \cos^2 2\varphi) d\varphi = \frac{16}{3} \varphi \Big|_0^\pi - \frac{16}{3} \sin 2\varphi \Big|_0^\pi + \frac{8}{3} \int_0^\pi (1 + \cos 4\varphi) d\varphi = \frac{16\pi}{3} + \frac{8}{3} \varphi \Big|_0^\pi + \\ &+ \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{4} \sin 4\varphi \Big|_0^\pi = \frac{16}{3} \pi + \frac{8}{3} \pi = 8\pi. \end{aligned}$$

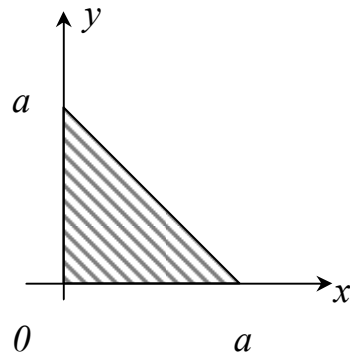
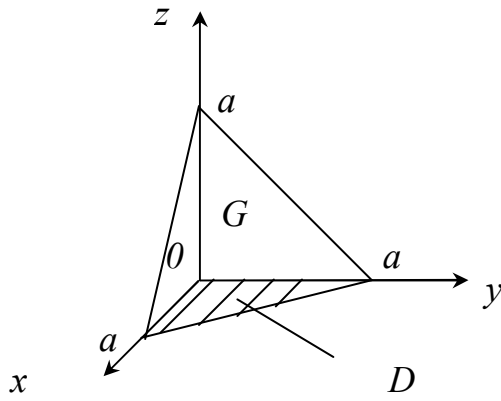
Ответ: $V = 8\pi$.

Пример 7

Найти центр массы однородной пирамиды, ограниченной плоскостями $x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = a$.

Решение

$x = 0, y = 0, z = 0$ - координатные плоскости. Найдем точки пересечения плоскости $x + y + z = a$ с осями координат. Например с Ox : $y = 0, z = 0$ подставим в уравнение плоскости $x + 0 + 0 = a$, получим точку $(a, 0, 0)$.



Проекция пирамиды на плоскость xoy – равнобедренный прямоугольный треугольник, ограниченный осями координат и линией пересечения плоскости $x+y+z=a$ с плоскостью $z=0$. Уравнение этой линии в плоскости xoy $x+y+0=a$ или $y=a-x$. Из соображений симметрии ясно, что все три координаты центра массы одинаковы. Найдем x_c по формуле

$$x_c = \frac{1}{V} \iiint_G x dv.$$

G – область, занятая пирамидой. Объем пирамиды

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} \cdot H, \quad S_{\text{осн.}} = \frac{1}{2} a \cdot a = \frac{a^2}{2}, \quad H = a, \quad V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot a = \frac{a^3}{6}.$$

Внутри пирамиды G переменная z изменяется от $z=0$ (нижняя грань) до $z=a-x-y$ (верхняя грань).

Тогда

$$\begin{aligned} \iiint_G x dv &= \iint_D \left(\int_0^{a-x-y} x dz \right) ds = \iint_D \left(xz \Big|_0^{a-x-y} \right) ds = \iint_D x(a-x-y) ds = \int_0^a \left(\int_0^{a-x} (x(a-x)-xy) dy \right) dx = \\ &= \int_0^a \left(x(a-x)y - x \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^{a-x} dx = \int_0^a \left(x(a-x)(a-x) - \frac{x(a-x)^2}{2} \right) dx = \int_0^a \frac{x(a-x)^2}{2} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^a (a^2 x - 2ax^2 + x^3) dx = \frac{1}{2} \left(a^2 \frac{x^2}{2} - 2a \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^a = \frac{1}{2} \left(\frac{a^4}{2} - \frac{2a^4}{3} + \frac{a^4}{4} \right) = \frac{a^4}{24} \\ x_c &= \frac{a^4}{24} : \frac{a^3}{6} = \frac{6a^4}{24a^3} = \frac{a}{4}, \quad \text{тогда} \quad y_c = z_c = \frac{a}{4}, \quad C\left(\frac{a}{4}; \frac{a}{4}; \frac{a}{4}\right). \end{aligned}$$

Ответ: $(\frac{a}{4}; \frac{a}{4}; \frac{a}{4})$.

3. Вычисление и применение поверхностного интеграла первого рода

Схема применения:

1. Выбрать формулу по условию задачи и получить поверхностный интеграл.
2. Найти проекцию поверхности на координатную плоскость. Сделать чертеж получившейся плоской области D .
3. Найти формулу элемента $d\sigma$ поверхности.
4. Поверхностный интеграл привести к двойному интегралу и вычислить двойной интеграл.

Пример 8

Найти массу, распределенную по части эллипсоида $z = 2\sqrt{1-x^2-y^2}$, находящейся внутри цилиндра $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$, если поверхностная плотность массы $\delta = \frac{1}{2}z$.

Решение

Масса, распределенная по поверхности σ с плотностью, $\delta = \delta(x, y, z)$ равна поверхностному интегралу:

$$m = \iint_{\sigma} \delta(x, y, z) d\sigma = \iint_{\sigma} \frac{1}{2} z d\sigma.$$

Образующие цилиндрической поверхности $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ параллельны оси oz , направляющей является окружность в плоскости xoy с уравнением $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$.

Центр окружности $O(0;0)$, радиус $R = \frac{1}{2}$. Следовательно, проекция заданной части эллипсоида на плоскость xoy – круг D , ограниченный этой окружностью.

$$m = \left(\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1+3\rho^2} \rho d\rho \right) \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi;$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi = \varphi|_0^{2\pi} = 2\pi;$$

$$\frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1+3\rho^2} \rho d\rho = \left. \begin{array}{l} \text{Сделаем подстановку} \\ \sqrt{1+3\rho^2} = t, 1+3\rho^2 = t^2, 6\rho d\rho = 2tdt, \rho d\rho = \frac{1}{3} t dt, \\ \text{при } \rho=0, t=1, \rho=\frac{1}{2}, t=\sqrt{1+\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{2} \end{array} \right| = \int_1^{\frac{\sqrt{7}}{2}} t \cdot \frac{1}{3} t dt = \frac{1}{3} \int_1^{\frac{\sqrt{7}}{2}} t^2 dt = \frac{1}{3} \cdot \frac{t^3}{3} \Big|_1^{\frac{\sqrt{7}}{2}} =$$

$$= \frac{1}{9} \left(\frac{7\sqrt{7}}{8} - 1 \right) = \frac{7\sqrt{7}-8}{72}, \quad m = 2\pi \cdot \frac{7\sqrt{7}-8}{72} = \frac{\pi(7\sqrt{7}-8)}{36}.$$

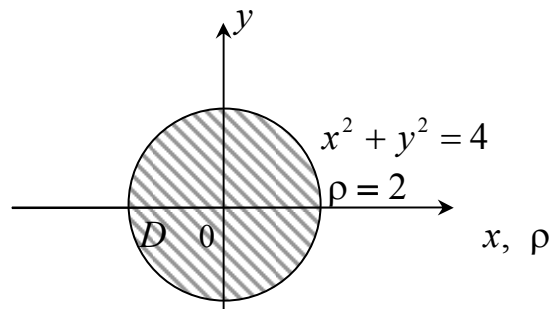
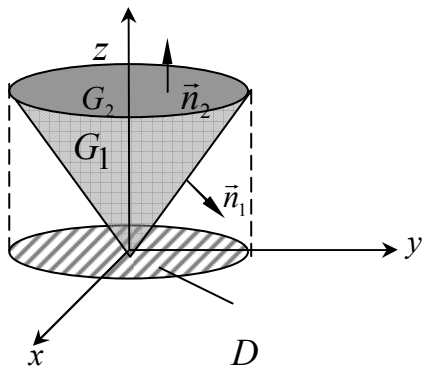
$$\text{Ответ: } m = \frac{\pi(7\sqrt{7}-8)}{36}.$$

Пример 9

Найти поток векторного поля $\vec{u} = (1-2x)\vec{i} + 2y\vec{j} + 2z\vec{k}$ через замкнутую поверхность σ , состоящую из части поверхности конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ и плоскости $z = 2$.

Решение

Выполним чертеж.



Найдем линию пересечения поверхностей:

$$\begin{cases} z = 2 \\ z = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 2 \\ \sqrt{x^2 + y^2} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 2 \\ x^2 + y^2 = 4. \end{cases}$$

В плоскости $z = 2$ получили окружность $x^2 + y^2 = 4$ с центром $C(0,0,2)$ радиуса 2.

Вершина конуса $O(0,0,0)$.

Проекцией обеих поверхностей на плоскость $хоу$ является круг D , ограниченный окружностью $x^2 + y^2 = 4$ с центром $O(0,0,0)$ радиуса $R=2$. Поверхность σ состоит из конической поверхности σ_1 и части плоскости σ_2 , поэтому $\Pi_{\sigma}(\vec{u}) = \Pi_{\sigma_1}(\vec{u}) + \Pi_{\sigma_2}(\vec{u})$.

Формула вычисления потока

$$\Pi_{\sigma}(\vec{u}) = \iint_{\sigma} (\vec{u} \cdot \vec{n}) d\sigma = \iint_D \left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{n}}{|\cos \gamma|} \right)_{z=z(x,y)} ds.$$

Для вычисления $\Pi_{\sigma_1}(\vec{u})$ потока вектора $\vec{u}$ через коническую поверхность запишем уравнение конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ в виде $F(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2} - z = 0$.

Найдем:

$$F'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; F'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}; F'_z = -1,$$

$$\text{grad}F = F'_x \vec{i} + F'_y \vec{j} + F'_z \vec{k} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \vec{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \vec{j} - \vec{k},$$

$$|\text{grad}F| = \sqrt{\frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2} + 1} = \sqrt{2}.$$

Вектор $\vec{n}_1$ составляет с oz тупой угол, т. е. $\cos \gamma < 0$, коэффициент перед $\vec{k}$ должен быть отрицательным.

Возьмем

$$\vec{n}_1 = + \frac{\text{grad}F}{|\text{grad}F|} = \frac{x}{\sqrt{2(x^2 + y^2)}} \vec{i} + \frac{y}{\sqrt{2(x^2 + y^2)}} \vec{j} - \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{k},$$

Так как $\vec{n} = \cos \alpha \cdot \vec{i} + \cos \beta \cdot \vec{j} + \cos \gamma \cdot \vec{k}$

Получим: $\cos \gamma = -\frac{1}{\sqrt{2}}, |\cos \gamma| = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Вычислим:

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = (1-2x) \frac{x}{\sqrt{2(x^2+y^2)}} + 2y \frac{y}{\sqrt{2(x^2+y^2)}} + 2z \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{x-2x^2+2y^2-2z\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{2(x^2+y^2)}}$$

Учитывая, что на поверхности $z = \sqrt{x^2+y^2}$,

$$\vec{u} \cdot \vec{n}|_{z=\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x-2x^2+2y^2-2\sqrt{x^2+y^2} \cdot \sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{2(x^2+y^2)}} = \frac{x-4x^2}{\sqrt{2(x^2+y^2)}},$$

$$\Pi_{\sigma_1}(\vec{u}) = \iint_D \left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{n}}{|\cos \gamma|} \right)_{z=\sqrt{x^2+y^2}} ds = \iint_D \frac{x-4x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} ds.$$

Полученный интеграл вычислим в полярных координатах. Заменим

$$x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi, ds = \rho d\varphi d\rho$$

$$x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow \rho^2 = 4, \rho = 2$$

$$\begin{aligned} \Pi_{\sigma_1}(u) &= \iint_D \frac{\rho \cos \varphi - 4\rho^2 \cos^2 \varphi}{\sqrt{\rho^2}} \rho d\varphi d\rho = \iint_D (\rho \cos \varphi - 4\rho^2 \cos^2 \varphi) d\varphi d\rho = \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^2 (\rho \cos \varphi - 4\rho^2 \cos^2 \varphi) d\rho \right) d\varphi = \int_0^{2\pi} \left(\cos \varphi \frac{\rho^2}{2} \Big|_0^2 - 4 \cos^2 \varphi \frac{\rho^3}{3} \Big|_0^2 \right) d\varphi = \int_0^{2\pi} \left(2 \cos \varphi - \frac{32}{3} \cos^2 \varphi \right) d\varphi = \\ &= 2 \sin \varphi \Big|_0^{2\pi} - \frac{16}{3} \int_0^{2\pi} (1 + \cos 2\varphi) d\varphi = -\frac{16}{3} \left(\varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right) \Big|_0^{2\pi} = -\frac{32\pi}{3}. \end{aligned}$$

Вычислим $\Pi_{\sigma_2}(\vec{u})$ поток вектора u через круг σ_2 в плоскости $z = 2$. Единичный вектор внешней нормали этой плоскости равен $\vec{k} = (0,0,1)$; $\vec{n} = \vec{k}$; поэтому

$$u \cdot n = (1-2x) \cdot 0 + 2y \cdot 0 + 2z \cdot 1 = 2z, \cos \gamma = \cos 0 = 1, \frac{u \cdot n}{|\cos \gamma|} \Big|_{z=2} = 2 \cdot 2 = 4.$$

$$\Pi_{\sigma_2}(\vec{u}) = \iint_D 4 ds = 4 \iint_D ds = 4 \cdot S = 4(\pi R^2) = 4\pi \cdot 2^2 = 16\pi,$$

(D – круг радиуса 2).

$$\text{Следовательно, } \Pi_{\sigma}(\bar{u}) = \Pi_{\sigma_1}(\bar{u}) + \Pi_{\sigma_2}(\bar{u}) = -\frac{32\pi}{3} + 16\pi = \frac{16\pi}{3}.$$

$$\text{Ответ: } \Pi_{\sigma} = \frac{16\pi}{3}.$$

4. Вычисление и применение криволинейного интеграла

Схема решения задач

1. По условию задачи выбрать формулу и записать искомую величину в виде криволинейного интеграла первого или второго рода.
2. Выразить из уравнения кривой все переменные и их дифференциалы через одну переменную и ее дифференциал. Всё подставить в подынтегральное выражение.
3. Найти интервал изменения этой переменной на заданной дуге кривой и вычислить полученный определенный интеграл.

Пример 10

$$\text{Вычислить } \int_L \frac{y^3 dl}{\sqrt{2-y^2}}, \text{ если } L - \text{ дуга } \overset{\cup}{OA} \text{ синусоиды } y = \sin x, O(0, 0), A\left(\frac{\pi}{2}; 1\right).$$

Решение

Для вычисления криволинейного интеграла первого рода найдем dl . Из уравнения кривой $y = \sin x$ $y' = (\sin x)' = \cos x$, $dl = \sqrt{1 + (y')^2} dx = \sqrt{1 + \cos^2 x} dx$. Так как кривая L не ориентирована, возьмем: $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, y и dl подставим в подынтегральное выражение. Получим и вычислим определенный интеграл.

$$\begin{aligned} \int_L \frac{y^3 dl}{\sqrt{2-y^2}} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x \cdot \sqrt{1 + \cos^2 x}}{\sqrt{2 - \sin^2 x}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x \sqrt{1 + \cos^2 x}}{\sqrt{1 + \cos^2 x}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cdot \sin x dx = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 x) \sin x dx = \left| \begin{array}{l} \cos x = t, -\sin x dx = dt, \sin x dx = -dt \\ x = 0, t = \cos 0 = 1, x = \frac{\pi}{2}, t = \cos \frac{\pi}{2} = 0 \end{array} \right| = \int_1^0 (1 - t^2)(-dt) = \int_0^1 (1 - t^2) dt = \end{aligned}$$

$$= (t - \frac{t^3}{3}) \Big|_0^1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Пример 11

Вычислить $\int_L x \sqrt[3]{y} dx - 6x^3 dy$ по дуге кривой $y = x^3$ от $A(1,1)$ до $B(-1,-1)$.

Решение

Для вычисления криволинейного интеграла второго рода выразим y и dy через x и dx из уравнения кривой $y = x^3, dy = 3x^2 dx$. В интегралах второго рода кривая ориентирована. При движении по кривой от A до B переменная x изменяется от 1 до -1 . Всё подставим в подынтегральное выражение.

$$\int_L x \cdot \sqrt[3]{y} dy - 6x^2 dy = \int_1^{-1} (x \cdot \sqrt[3]{x^3} dx - 6x^3 \cdot 3x^2 dx) = \int_1^{-1} (x^2 - 18x^5) dx = (\frac{x^3}{3} - 3x^6) \Big|_1^{-1} = (-\frac{1}{3} - 3) - (\frac{1}{3} - 3) = -\frac{2}{3}.$$

Пример 12

Найти массу дуги $\overset{\cup}{OA}$ кривой $y = \frac{2x\sqrt{x}}{3}$, если линейная плотность массы в точ-

ке $M(x,y)$ пропорциональна длине дуги $\left| \overset{\cup}{OM} \right|$, $O(0,0)$, $A(4, \frac{16}{3})$.

Решение

Выберем формулу $m = \int_L \delta(x,y) dl$, где $\delta = \delta(x,y)$ - линейная плотность массы.

По условию задачи $\delta = k \left| \overset{\cup}{OM} \right| = kl$. Найдем длину дуги $\overset{\cup}{OM} : l = \int_{\overset{\cup}{OM}} dl$. Уравнение

$$\overset{\cup}{OM} : y = \frac{2x\sqrt{x}}{3}, \text{ тогда } y' = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}, dl = \sqrt{1 + (y')^2} dx = \sqrt{1+x} dx.$$

$$l = \int_{\overset{\cup}{OM}} \sqrt{1+x} dx = \int_0^x \sqrt{1+x} dx = \int_0^x (1+x)^{\frac{1}{2}} d(1+x) = \frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Big|_0^x = \frac{2}{3} ((1+x)^{\frac{3}{2}} - 1).$$

$$\text{Получим } \delta = \frac{2k}{3} ((1+x)^{\frac{3}{2}} - 1),$$

$$m = \int_{\overset{\circ}{OA}} \frac{2k}{3} ((1+x)^{\frac{3}{2}} - 1) dl, \quad dl = \sqrt{1+x} dx = (1+x)^{\frac{1}{2}} dx, \quad 0 \leq x \leq 4, \quad \text{так как } \overset{\circ}{OM} \text{ и } \overset{\circ}{OA} -$$

дуги одной кривой.

$$\begin{aligned} m &= \int_0^4 \frac{2k}{3} ((1+x)^{\frac{3}{2}} - 1)(1+x)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2k}{3} \int_0^4 ((1+x)^2 - (1+x)^{\frac{1}{2}}) dx = \frac{2k}{3} \left(\frac{(1+x)^3}{3} - \frac{2}{3} (1+x)^{\frac{3}{2}} \right) \Big|_0^4 = \\ &= \frac{2k}{3} \left(\frac{5^3}{3} - \frac{2}{3} 5^{\frac{3}{2}} \right) - \frac{2k}{3} \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3} \right) = \frac{2k}{9} (125 - 10\sqrt{5} + 1) = \frac{2k}{9} (126 - 10\sqrt{5}). \end{aligned}$$

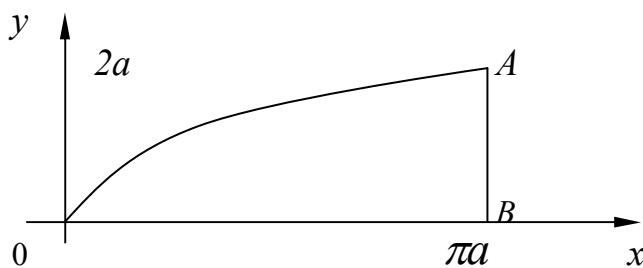
$$\text{Ответ: } m = \frac{2k}{9} (126 - 10\sqrt{5}).$$

Пример 13

Вычислить работу силового поля $\vec{F} = (2a - y)\vec{i} + (y - a)\vec{j}$ при движении точки вдоль первой арки циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ от $O(0,0)$ до $A(\pi a, 2a)$. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{F}$ вдоль замкнутого контура $OBAO$, составленного из дуги $\overset{\circ}{AO}$ циклоиды и двух прямых OB и BA , если $B(\pi a, 0)$. Найти поток вектора $\vec{F}$ через дугу $\overset{\circ}{OA}$ циклоиды.

Решение

Сделаем чертеж



- 1) Обозначим работу поля $\vec{F} = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$ через W и найдем её по формуле

$$W = \int_L \vec{F} \cdot \vec{dr} = \int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy;$$

$$W = \int_{\overset{\circ}{OA}} (2a - y) dx + (y - a) dy.$$

Из уравнения OA :

$$x = a(t - \sin t), \quad dx = a(1 - \cos t) dt$$

$$y = a(1 - \cos t), dy = a \sin t dt.$$

В точке $O(0, 0)$ $y = 0, 0 = a(1 - \cos t), \cos t = 1, t = 0$, в точке $A(\pi a; 2a)$, $y = 2a$, $2a = a(1 - \cos t), 2 = 1 - \cos t, \cos t = -1, t = \pi$ (обязательно проверяем, получаются ли значения x в этих точках при найденных значениях t).

$$\begin{aligned} W &= \int_0^\pi ((2a - a + a \cos t)a(1 - \cos t)dt + (a - a \cos t - a)a \sin t dt) = \\ &= \int_0^\pi (a^2(1 + \cos t)(1 - \cos t) - a^2 \cos t \sin t)dt = a^2 \int_0^\pi (1 - \cos^2 t - \cos t \sin t)dt = a^2 \int_0^\pi (\sin^2 t - \frac{1}{2} \sin 2t)dt = \\ &= \frac{a^2}{2} \int_0^\pi (1 - \cos 2t)dt - \frac{a^2}{2} \int_0^\pi \sin 2t dt = \frac{a^2}{2} (t - \frac{1}{2} \sin 2t)|_0^\pi + \frac{a^2}{2} \cdot \frac{1}{2} \cos 2t|_0^\pi = \frac{a^2 \pi}{2}. \end{aligned}$$

Найдем циркуляцию поля $\vec{F}$ вдоль замкнутого контура $OBAO$ по формуле

$$\mathcal{C}_L = \oint_L \vec{F} \cdot \vec{dr} = \oint_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \oint_L (2a - y)dx + (y - a)dy.$$

Контур $L = OBAO = OB + BA + AO$

$$\oint_L = \int_{OB} + \int_{BA} + \int_{AO}$$

$$\int_{OB} = \int_{OB} (2a - y)dx + (y - a)dy$$

Из уравнения OB : $y = 0$ получим $dy = 0$, x изменяется от 0 до πa .

$$\int_{OB} = \int_0^{\pi a} (2a - 0)dx = 2ax|_0^{\pi a} = 2\pi a^2$$

$$\int_{BA} = \int_{BA} (2a - y)dx + (y - a)dy$$

Из уравнения BA : $x = \pi a, dx = 0, y$ изменяется от 0 до $2a$.

$$\int_{BA} = \int_0^{2a} (y - a)dy = \left(\frac{y^2}{2} - ay \right) \Big|_0^{2a} = 2a^2 - 2a^2 = 0.$$

$$\int_{AO} = - \int_{OA} = - \int_{OA} (2a - y)dx + (y - a)dy = -W = -\frac{\pi a^2}{2}$$

$$\mathcal{C}_L(\vec{F}) = 2\pi a^2 + 0 - \frac{\pi a^2}{2} = \frac{3\pi a^2}{2}$$

2) Найдем поток поля $\vec{F}$ через кривую $\overset{\circ}{OA}$ по формуле

$$\begin{aligned}\Pi_L(\vec{F}) &= \int_L Q(x, y)dx - P(x, y)dy = \int_{\overset{\circ}{OA}} (y - a)dx - (2a - y)dy = \\ &= \int_0^\pi ((a - a \cdot \cos t - a) \cdot a \cdot (1 - \cos t)dt - (2a - a + a \cos t) a \cdot \sin t dt) = \\ &= \int_0^\pi (-a^2 \cos t \cdot (1 - \cos t) - a^2 \cdot (1 + \cos t) \cdot \sin t)dt = \\ &= a^2 \int_0^\pi (-\cos t + \cos^2 t - \sin t - \cos t \cdot \sin t) dt = \\ &= a^2 (-\sin t \Big|_0^\pi + \frac{1}{2} \int_0^\pi (1 + \cos 2t)dt + \cos t \Big|_0^\pi - \frac{1}{2} \int_0^\pi \sin 2t dt) = \\ &= a^2 (0 + \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^\pi + (-1 - 1) + \frac{1}{4} \cos 2t \Big|_0^\pi) = a^2 \left(\frac{\pi}{2} - 2 \right).\end{aligned}$$

Ответ: $W = \frac{\pi a^2}{2}$; $\Pi_L(\vec{F}) = \frac{3\pi a^2}{2}$; $\Pi_{\overset{\circ}{OA}}(\vec{F}) = a^2 \left(\frac{\pi}{2} - 2 \right)$.

Пример 14

Найти ротор и дивергенцию векторного поля $\vec{u} = \frac{2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ в произвольной

точке М (х, у, z) и в точке $M_0(2; -2; 1)$.

Решение

По формуле

$$\begin{aligned}\vec{rot u} &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} - \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}; \\ P &= \frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; Q = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; R = \frac{-1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.\end{aligned}$$

Найдем частные производные

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \left(\frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right)'_x = (2(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}})'_x = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x = -\frac{2x}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}.$$

Обозначив $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ запишем

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{2x}{r^3}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{2y}{r^3}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = -\frac{2z}{r^3};$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{x}{r^3}, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = -\frac{y}{r^3}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = -\frac{z}{r^3};$$

$$\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{x}{r^3}, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{y}{r^3}, \quad \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{z}{r^3}.$$

Подставим найденные производные в формулу ротора

$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{u}(M) &= \left(\frac{y}{r^3} + \frac{z}{r^3} \right) \vec{i} - \left(\frac{x}{r^3} + \frac{2z}{r^3} \right) \vec{j} + \left(-\frac{x}{r^3} + \frac{2y}{r^3} \right) \vec{k} = \frac{(z+y)\vec{i} - (x+2z)\vec{j} + (2y-x)\vec{k}}{r^3} = \\ &= \frac{(z+y)\vec{i} - (x+2z)\vec{j} + (2y-x)\vec{k}}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}. \end{aligned}$$

В точке $M_0 (2; -2; 1)$

$$\text{rot} \vec{u}(M_0) = \frac{(1-2)\vec{i} - (2+2)\vec{j} + (-4-2)\vec{k}}{\sqrt{(4+4+1)^3}} = \frac{-1\vec{i} - 4\vec{j} - 6\vec{k}}{27}.$$

По формуле

$$\text{div} \vec{u}(M) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

$$\text{div} \vec{u}(M) = -\frac{2x}{r^3} - \frac{y}{r^3} + \frac{z}{r^3} = -\frac{2x+y-z}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}$$

$$\text{div} \vec{u}(M_0) = -\frac{4-2-1}{27} = -\frac{1}{27}.$$

Отвеч:

$$\operatorname{rot} \vec{u}(M) = \frac{(z+y)\vec{i} - (x+2z)\vec{j} + (2y-x)\vec{k}}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}},$$

$$\operatorname{rot} \vec{u}(M_0) = -\frac{1}{27}(\vec{i} + 4\vec{j} + 6\vec{k}),$$

$$\operatorname{div} \vec{u}(M) = -\frac{2x+y-z}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}},$$

$$\operatorname{div} \vec{u}(M_0) = -\frac{1}{27}.$$

В. ВАРИАНТЫ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

Вариант 1

1. Найти момент инерции относительно начала координат однородной фигуры, ограниченной линиями $xy = 2$, $y = 2x$, $2y = x$ и расположенной в первой четверти ($x \geq 0, y \geq 0$), если поверхностная плотность массы $\delta = 1$.

Ответ: $J_0 = 3$.

2. Найти площадь фигуры $2x \leq x^2 + y^2 \leq 4x, 0 \leq y \leq x\sqrt{3}$.

Ответ: $S = \pi + \frac{3\sqrt{3}}{4}$.

3. Найти электрический заряд кривой $y = \frac{x^2}{2}$, $1 \leq x \leq 2$, если плотность заряда $\lambda = \frac{y}{x}$.

Ответ: $q = \frac{1}{6}(5\sqrt{5} - 2\sqrt{2})$.

4. Найти работу поля $\vec{F} = y(x-y)\vec{i} + x\vec{j}$ при перемещении точки по эллипсу $x=2\cos t$, $y = \sin t$ из $A(2, 0)$ в $B(0, 1)$. Найти циркуляцию $\vec{F}$ по замкнутому контуру $ABDA$, где $D(-1, 1)$, BD и DA - прямые. Найти поток вектора $\vec{F}$ через дугу $\overset{\smile}{AB}$ эллипса.

Ответ: $W = \frac{\pi}{2}$; $\Gamma = \frac{\pi}{2}$; $\Pi = \frac{7}{3}$.

5. Найти координаты центра массы однородного тела, ограниченного поверхностями $x = 0$, $y = 0$, $z = 1$, $z = 3$, $2x + y = 3$.

Ответ: $C(\frac{1}{2}; 1, 2)$.

6. Найти массу части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, расположенной в первом октанте ($x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$), если поверхностная плотность массы $\delta = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Ответ: $m = \frac{1}{8}\pi^2 a^3$.

7. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a} = -(3y^2 + 2x^2)\vec{i} + 2x^2\vec{j} - (2x^2 + y^2)\vec{k}$ в точке $M(x, y, z)$ и в точке $M_0(1, 1, 1)$.

Ответ: $\text{div} \vec{a}(M_0) = -4, \text{rot} \vec{a}(M_0) = -2\vec{i} + 4\vec{j} + 10\vec{k}$.

Вариант 2

1. Найти ординату центра массы фигуры, ограниченной линиями $y = e^x, y = e^{-x}, x = 1$, если поверхностная плотность массы $\delta = e^x$.

Ответ: $y = \frac{e^3 - 3e^{-1} - 4}{3e^2 - 9}$.

2. Найти площадь фигуры, ограниченной кардиоидой $\rho = a(1 - \sin \varphi)$ и окружностью $\rho = a$ и расположенной вне кардиоиды.

Ответ: $s = \frac{a^2(8 - \pi)}{4}$.

3. Найти массу дуги параболы $y^2 = 2px, 0 \leq x \leq \frac{p}{2}$, если линейная плотность массы $\delta = |y|$.

Ответ: $m = \frac{2p^2}{3}(2\sqrt{2} - 1)$.

4. Найти работу поля $\vec{F} = -y\vec{i} + x\vec{j}$ при перемещении точки по окружности $x = 2 \cos t, y = 2 \sin t$ из $A(2,0)$ в $B(-2,0)$. Найти циркуляцию $\vec{F}$ по замкнутому контуру $ABDA$, состоящему из дуги $\overset{\cup}{AB}$ и прямых BD и DA , где $D(-2,-2)$. Найти поток вектора $\vec{F}$ через дугу $\overset{\cup}{AB}$.

Ответ: $W = 4\pi, \quad \Pi = 0, \quad \text{Ц} = 4\pi + 8$.

5. Найти момент инерции относительно оси Oz однородного тела, ограниченного поверхностями $x + y + z = a\sqrt{2}, x^2 + y^2 = a^2, z = 0$, если плотность массы $\delta = 1$.

Ответ: $J_z = \frac{\pi a^5}{\sqrt{2}}$.

6. Найти электрический заряд части поверхности $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, отсеченной плоскостью $z = 1$, если поверхностная плотность заряда $\lambda = z$.

Ответ: $q = \frac{2\pi(1 + 6\sqrt{3})}{15}$.

7. Найти дивергенцию и ротор векторного поля в точке $M(x, y, z)$ и в точке $M_0(1,2,3)$.

Ответ: $\text{div} \vec{a}(M_0) = 0, \text{rot} \vec{a}(M_0) = -2\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$.

Вариант 3

1. Найти момент инерции относительно оси ox однородной фигуры, ограниченной линиями $\frac{y}{h} - \frac{3x}{a} = 1$, $\frac{y}{h} + \frac{3x}{2a} = 1$, $y = 0$, если поверхностная плотность массы $\delta = 1$.

Ответ: $J_x = \frac{ah^3}{12}$.

2. Найти площадь фигуры, ограниченной кардиоидой $\rho = 4(1 + \sin \varphi)$ и прямой $\rho \sin \varphi = 3$ и расположенной выше прямой.

Ответ: $S = 8\pi + 9\sqrt{3}$.

3. Найти электрический заряд кривой $y = \ln \cos x$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$, если линейная плотность заряда равна $\lambda = \sin x \cdot \cos^2 x$.

Ответ: $q = \frac{1}{8}$.

4. Найти работу поля $\vec{F} = (x^2 - y^2)\vec{i} + (x^2 + y^2)\vec{j}$ при перемещении точки по дуге эллипса $x = 2 \cos t$, $y = \sin t$ от $A(2;0)$ до $B(0;1)$. Найти циркуляцию $\vec{F}$ по замкнутому контуру $ABDA$, составленному из дуги $\overset{\cup}{AB}$ и прямых BD и DA , если $D(0;-1)$. Найти поток вектора $\vec{F}$ через дугу $\overset{\cup}{AB}$.

Ответ: $W = \frac{5}{3}$; $\Pi = \frac{19}{3}$; $\Pi = \frac{14}{3}$.

5. Найти массу тела, ограниченного поверхностями $z = \sqrt{x}$, $z = 2\sqrt{x}$, $x + y = 6$, $y = 0$, если плотность массы $\delta = 2z$.

Ответ: $m = 108$.

6. Найти координаты центра массы части однородной поверхности $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, вырезанной поверхностью $x^2 + y^2 = ax$.

Ответ: $C\left(\frac{a}{2}; 0; \frac{16a}{9\pi}\right)$.

7. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}(3\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k})$ в точке $M(x, y, z)$ и в точке $M_0(1, -2, -2)$.

Ответ: $\text{div} \vec{a}(M_0) = \frac{7}{3}$; $\text{rot} \vec{a}(M_0) = \frac{1}{3}(12\vec{i} - 2\vec{j} + 8\vec{k})$.

Вариант 4

1. Найти координаты центра массы однородной фигуры, ограниченной кривыми $y = x^2, y = 2x^2, x = 1, x = 2$.

Ответ: $c\left(\frac{45}{28}, \frac{279}{70}\right)$.

2. Найти момент инерции относительно начала координат фигуры $x^2 + y^2 \leq 2Rx$, если поверхностная плотность массы $\delta = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Ответ: $J_0 = \frac{512R^5}{75}$.

3. Найти массу участка кривой $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t, 0 \leq t \leq \pi \end{cases}$, если линейная плотность массы $\delta = y$.

Ответ: $m = 2$.

4. Найти работу поля $\vec{F} = y(x - y)\vec{i} + x\vec{j}$ при перемещении точки по дуге параболы $y = 2x^2$ от $O(0,0)$ до $B(1,2)$. Найти циркуляцию вектора $\vec{F}$ по замкнутому контуру, составленному из дуги $\overset{\cup}{OB}$ параболы и прямых BD и DO , если $D(-1,2)$. Найти поток вектора $\vec{F}$ через дугу $\overset{\cup}{OB}$.

Ответ: $W = \frac{31}{30}; \quad \text{Ц} = \frac{241}{30}; \quad \text{П} = \frac{47}{30}$.

5. Найти объем тела, ограниченного поверхностями: $z = \sqrt{x}, z = 2\sqrt{x}, x + y = 6, y = 0$.

Ответ: $V = \frac{48\sqrt{6}}{5}$.

6. Найти электрический заряд части конической поверхности $z = \sqrt{y^2 + x^2}$, отсеченной цилиндром $x^2 + y^2 = 2ax$, если поверхностная плотность заряда $\lambda = -(x^2 + y^2 + z)$.

Ответ: $q = -3\sqrt{2}\pi a^4$.

7. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a} = x^2 yz\vec{i} + xy^2 z\vec{j} + xyz^2\vec{k}$ в точках $M(x, y, z)$ и $M_0(1,2,3)$.

Ответ: $\text{div} \vec{a}(M_0) = 36, \text{rot} \vec{a}(M_0) = 5\vec{i} - 16\vec{j} + 9\vec{k}$.

Вариант 5

1. Найти абсциссу центра массы фигуры, ограниченной линиями $y = \ln x, y = 0, y = 1, x = 0$, если поверхностная плотность массы $\delta = e^y$.

Ответ: $\bar{x} = \frac{e}{3} + \frac{1}{3(e+1)}$.

2. Найти электрический заряд фигуры $x^2 + y^2 \leq 2Rx, y \geq 0$, если поверхностная плотность заряда $\lambda = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Ответ: $q = \frac{16}{9} R^3$.

3. Найти момент инерции первого витка однородной винтовой линии $x = a \cos t, y = a \sin t, z = \frac{h}{2\pi} t$ относительно оси oz . Линейная плотность массы $\delta = 1$.

Ответ: $J_z = a^2 \cdot \sqrt{4\pi^2 a^2 + h^2}$.

4. Найти работу поля $\vec{F} = x(y-1)\vec{i} + x^2\vec{j}$ при перемещении точки по дуге параболы $y = x^2$ от $B(-2;4)$ до $C(2,4)$. Найти циркуляцию вектора $\vec{F}$ по замкнутому контуру, составленному из дуги $\overset{\cup}{BC}$ параболы и прямой CB . Найти поток вектора $\vec{F}$ через дугу $\overset{\cup}{BC}$ параболы.

Ответ: $W = 0, \text{Ц} = 0, \text{П} = -9,6$.

5. Найти момент инерции относительно оси Oy однородного тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 = R^2, z = 0, z = H$, если масса тела равна m .

Ответ: $J_y = \frac{m}{12} (3R^2 + 4H^2)$.

6. Найти массу части поверхности $z = \sqrt{4 - x^2}$, отсеченной плоскостями $y = 0, y = 5, x = 0, z = 0$ и расположенной в первой октанте, если поверхностная плотность массы $\delta = z(x + y)$.

Ответ: $m = 70$.

7. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a}$, если $\vec{a} = \vec{b} \times \vec{c}$, где $\vec{a} = -(2x^2 + 3y^2)\vec{i} + 2x^2\vec{j} - (2x^2 + y^2)\vec{k}$, $\vec{b} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} - x^2\vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k}$ в точке $M(x, y, z)$ и в точке $M_0(1, -1, 1)$.

Ответ: $\text{div} \vec{a} = -4x, \text{rot} \vec{a} = -2y\vec{i} + 4x\vec{j} + (4x + 6y)\vec{k}$.

Вариант 6

1. Найти электрический заряд фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{x}{2}, y = \sqrt{\frac{x}{2}}$, если поверхностная плотность заряда $\lambda = -(xy^2 + 1)$.

Ответ: $q = -\frac{47}{105}$.

2. Найти массу фигуры $1 \leq x^2 + y^2 \leq 9, 0 \leq x \leq y$, если поверхностная плотность массы $\delta = \frac{x}{y}$.

Ответ: $m = 2\ln 2$.

3. Найти момент инерции линии $y = e^x, 0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ относительно оси ox , если линейная плотность массы $\delta = 1$.

Ответ: $J_x = \frac{1}{3} \left((1+e)^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{2} \right)$.

4. Найти работу поля $\vec{F} = (x+2y)\vec{i} + (x-y)\vec{j}$ при перемещении точки по дуге эллипса $x = 4\cos t, y = 3\sin t$ от $B(0,3)$ до $C(-4,0)$. Найти циркуляцию вектора $\vec{F}$ по замкнутому контуру, составленному из дуги эллипса $\overset{\cup}{BC}$ и прямых CD и DB , если $D(0;-2)$. Найти поток вектора $\vec{F}$ через дугу $\overset{\cup}{BC}$ эллипса.

Ответ: $W = \frac{25-6\pi}{2}, \quad \text{Ц} = -4-3\pi, \quad \text{П} = -17$.

5. Найти координаты центра массы однородного тела, ограниченного поверхностями $x = 3 - y^2 - z^2, x = 0$.

Ответ: $C(1,0,0)$.

6. Найти площадь части плоскости $z = 4 - x$, вырезанной поверхностями $z = 0, x = y^2$.

Ответ: $S = \frac{32\sqrt{2}}{3}$.

6. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a} = \left(3\frac{y}{x} + 2\frac{x}{y} \right)\vec{i} + 2\frac{x}{y}\vec{j} - \left(2\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right)\vec{k}$ в точке $M(x, y, z)$ и в точке $M_0(1,1,1)$.

Ответ: $\text{div} \vec{a}(M_0) = -1, \text{rot} \vec{a}(M_0) = \vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$.

Вариант 7

1. Найти абсциссу центра массы однородной фигуры

Ответ: $\bar{x} = \frac{(4-\pi)(\sqrt{2}+1)}{4}$.

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кардиоидой $\rho = 4(1 + \cos \varphi)$ и прямой $\rho \cos \varphi = 3$ и расположенной справа от прямой.

Ответ: $S = 8\pi + 9\sqrt{3}$.

3. Найти координаты центра массы однородной кривой $\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases}, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

Ответ: $C\left(\frac{2a}{5}; \frac{2a}{5}\right)$.

4. Найти работу поля $\vec{F} = (xy - y^2)\vec{i} + x\vec{j}$ при перемещении точки по дуге параболы $y = 2\sqrt{x}$ от $O(0,0)$ до $B(1,2)$. Найти циркуляцию вектора $\vec{F}$ по замкнутому контуру $OCBO$, состоящему из дуги BO параболы и прямых OC и CB , если $C(1; -1)$. Найти поток вектора $\vec{F}$ через дугу $\overset{\cup}{OB}$ параболы.

Ответ: $W = -\frac{8}{15}, \Pi = \frac{71}{30}, \Pi = \frac{13}{6}$.

5. Вычислить электрический заряд тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 = 1, x^2 + y^2 = 3z, x = 0, y = 0, z = 0$ и расположенного в первом октанте ($x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$), если плотность заряда $\lambda = -x$.

Ответ: $q = -\frac{1}{15}$.

6. Найти массу части плоскости $x + y + z = 4$, вырезанной цилиндром $x^2 + y^2 = 4$, если поверхностная плотность массы $\delta = (x^2 + y^2)^2 + z^2$.

Ответ: $m = \frac{280}{3}\pi\sqrt{3}$.

7. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}(2\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k})$ в точке $M(x, y, z)$ и $M_0(-2, 2, 1)$.

Ответ: $\text{div} \vec{a}(M_0) = -\frac{11}{3}; \text{rot} \vec{a}(M_0) = \frac{1}{3}(6\vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k})$.

Вариант 8

1. Найти ординату центра массы однородной фигуры $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq y \leq \sin x$.

Ответ: $\bar{y} = \frac{(\pi - 2)(2 + \sqrt{2})}{16}$.

2. Найти момент инерции однородной фигуры $x^2 + y^2 \leq 2y, y \geq 1$ относительно оси Ox , если поверхностная плотность массы $\delta = 1$.

Ответ: $J_x = \frac{15\pi + 20}{24}$.

3. Найти длину дуги астроиды $\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases}$.

Ответ: $l = 6a$.

4. Найти работу поля $\vec{F} = (x + 3y)\vec{i} + (y + 2x)\vec{j}$ при перемещении точки по дуге параболы $y = \frac{x + x^2}{2}$ от $B(-1, 0)$ до $O(0, 0)$. Найти циркуляцию вектора $\vec{F}$ по замкнутому контуру $OCBO$, состоящему из дуги BO параболы и прямых OC и CB , где $C(-1, 2)$. Найти поток вектора $\vec{F}$ через дугу $\overset{\circ}{BO}$.

Ответ: $W = -\frac{7}{12}; \quad \text{Ц} = -\frac{13}{12}; \quad \Pi = -\frac{7}{6}$.

5. Вычислить электрический заряд тела, ограниченного плоскостями $x + y + z = 2, x = 0, z = 0, x - y = 0$, если плотность заряда $\lambda = -x$.

Ответ: $q = \frac{1}{6}$.

6. Найти массу полусферы $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, если поверхностная плотность массы $\delta = z \cdot \sqrt{x^2 + y^2}$.

Ответ: $m = \frac{2}{3}\pi R^4$.

7. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a} = \arctg \frac{z}{x+y} (2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$ в точке $M(x, y, z)$ и в точке $M_0(1, 1, 1)$.

Ответ: $\text{div} \vec{a}(M_0) = -\frac{1}{5}; \quad \text{rot} \vec{a}(M_0) = \frac{1}{5}(-3\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k})$.

Вариант 9

1. Найти координаты центра массы однородной фигуры, ограниченной линиями $\sqrt{2}y = x, y = 2, x = 0$.

Ответ: $C\left(\frac{3}{4}, \frac{6}{5}\right)$.

2. Найти электрический заряд кольца $\frac{\pi^2}{4} \leq x^2 + y^2 \leq 4\pi^2$, если поверхностная плотность заряда $\lambda = \cos \sqrt{x^2 + y^2}$.

Ответ: $q = 2\pi - \pi^2$.

3. Найти электрический заряд участка кривой $\begin{cases} x = t^3 \\ y = t \\ z = t^2, \end{cases} 0 \leq t \leq 1$, если линейная плотность заряда $\lambda = \sqrt{1 + 4z + 9xy}$.

Ответ: $q = -\frac{62}{15}$.

4. Найти работу поля $\vec{F} = (2x + y)\vec{i} + (2x - y)\vec{j}$ при перемещении точки по дуге параболы $y = 2x - x^2$ от $O(0,0)$ до $B(2,0)$. Найти циркуляцию вектора $\vec{F}$ по замкнутому контуру, состоящему из дуги $\overset{\circ}{BO}$ и прямых OC и CB , если $C(2;-1)$. Найти поток вектора $\vec{F}$ через дугу $\overset{\circ}{OB}$.

Ответ: $W = \frac{8}{3}; \Pi = \frac{7}{3}; \quad \Pi = \frac{16}{3}$.

5. Найти массу тела, ограниченного поверхностями $y = \sqrt{x^2 + z^2}, y = b$, если плотность массы $\delta = y$.

Ответ: $m = \frac{\pi b^4}{4}$.

6. Найти момент инерции относительно оси Oz части однородной поверхности сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq h$, если поверхностная плотность массы $\delta = 1$.

Ответ: $J_z = \frac{2\pi R}{3}(R - h)(2R^2 - Rh - h^2)$.

7. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a} = (2y^2 - 3x^2)\vec{i} - x^2\vec{j} + (y^2 - 3x^2)\vec{k}$ в точке $M(x, y, z)$ и в точке $M_o(1, 3, -2)$.

Ответ: $\text{div} \vec{a}(M_o) = -6, \text{rot} \vec{a}(M_o) = +6\vec{i} + 6\vec{j} - 14\vec{k}$.

Вариант 10

1. Найти координаты центра массы однородной фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{2x}$, $x = 2$, $y = 0$.

Ответ: $C\left(\frac{6}{5}, \frac{3}{4}\right)$.

2. Найти момент инерции однородного круга $x^2 + y^2 \leq 2Ry$ относительно оси Ox , если поверхностная плотность массы $\delta = 1$.

Ответ: $J = \frac{5}{4}\pi R^4$.

3. Найти массу кривой $\sqrt{x} + \sqrt{y} = a$, $0 \leq x \leq a$, если линейная плотность массы $\lambda = \sqrt{\frac{x^3}{x+y}}$.

Ответ: $m = \frac{a^2}{2}$.

4. Найти работу поля $\vec{F} = (x+2y)\vec{i} + (x-y)\vec{j}$ при перемещении точки по дуге эллипса $x = \cos t$, $y = 2 \sin t$ от $B(0; -2)$ до $A(1; 0)$. Найти циркуляцию вектора $\vec{F}$ по замкнутому контуру $BACB$, состоящему из дуги $\overset{\cup}{BA}$ и прямых AC и CB , если $C(0; 1)$. Найти поток вектора $\vec{F}$ через дугу $\overset{\cup}{BA}$.

Ответ: $W = \frac{5-\pi}{2}$; $\Pi = -\frac{1+\pi}{2}$; $\Pi = \frac{9}{2}$.

5. Найти координаты центра массы однородного тела, ограниченного плоскостями $z = 0$, $z = ky$ и цилиндрической поверхностью $y = \sqrt{a^2 - x^2}$.

Ответ: $C\left(0; \frac{3}{16}\pi a; \frac{3}{32}\pi a k\right)$.

6. Найти электрический заряд части поверхности $2z = 9 - x^2 - y^2$, отсекаемой плоскостью $z = 0$, если поверхностная плотность заряда $\lambda = x^2 + y^2 + z - 2$.

Ответ: $q = \frac{\pi}{15}(500\sqrt{10} - 23)$.

7. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a} = \frac{2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}}{x^2 + y^2 + z^2}$ в произвольной точке $M(x, y, z)$ и в точке $M_0(1, 1, 1)$.

Ответ: $\text{div} \vec{a}(M_0) = -\frac{4}{9}$; $\text{rot} \vec{a}(M_0) = \frac{1}{9}(4\vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k})$;

Вариант 11

1. Вычислить массу плоской фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}$, $y = 2x$, $x = 0$, если поверхностная плотность массы $\delta = y$.

Ответ: $m = \frac{4}{\sqrt{10}}$.

2. Найти момент инерции относительно оси Oy однородной фигуры $x^2 + y^2 \leq 2x, x \geq 1$, если поверхностная плотность массы $\delta = 1$.

Ответ: $J_y = \frac{15\pi + 32}{24}$.

3. Найти массу кривой $y = \sqrt{x-x^2}$, если линейная плотность массы $\delta = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Ответ: $m = 1$.

4. Найти работу поля $\vec{F} = (x^2 + y^2)\vec{i} + (y^2 - x^2)\vec{j}$ при перемещении точки по дуге эллипса $x = 2\cos t$, $y = \sin t$ из $A(0; -1)$ в $B(2, 0)$. Найти циркуляцию вектора $\vec{F}$ по замкнутому контуру $ABCA$, состоящему из дуги AB эллипса и прямых BC и CA , если $C(-2, 0)$. Найти поток вектора $\vec{F}$ через дугу $\overset{\smile}{AB}$.

Ответ: $W = \frac{5}{3}$; $\Pi = -\frac{10}{3}$; $\Pi = -\frac{13}{3}$.

5. Найти электрический заряд тела, ограниченного поверхностями $z = x^2 + y^2, y = x^2, z = 0, y = 1$, если плотность заряда $\lambda = 3x + 4y$.

Ответ: $q = \frac{160}{63}$.

6. Найти координаты центра массы части однородной конической поверхности $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, находящейся между плоскостями $z = 0, z = h$.

Ответ: $C\left(0, 0, \frac{2h}{3}\right)$.

7. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}(3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k})$ в точке $M(x, y, z)$ и в точке $M_0(2; -2, 1)$.

Ответ: $\text{div} \vec{a}(M_0) = \frac{13}{3}$; $\text{rot} \vec{a}(M_0) = \frac{1}{3}(\vec{i} + \vec{j})$.

Вариант 12

1. Вычислить координаты центра массы однородной фигуры, ограниченной эллипсом $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ и осью абсцисс.

Ответ: $C\left(0; \frac{4b}{3\pi}\right)$.

2. Найти момент инерции относительно начала координат однородного круга $x^2 + y^2 \leq 4y$, если поверхностная плотность массы $\delta = 1$.

Ответ: $J_0 = 24\pi$.

3. Найти электрический заряд линии $\begin{cases} x = t \cos t \\ y = t \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi, \text{ если плотность заряда} \\ z = t \end{cases}$

$\lambda = -z$.

Ответ: $q = \frac{\sqrt{8}}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{(2+4\pi^2)^3}$.

4. Найти работу поля $\vec{F} = (2x+y)\vec{i} + (2x-3y)\vec{j}$ при перемещении точки от $A(1,0)$ до $B(-1,0)$ по параболе $y = 1 - x^2$. Найти циркуляцию вектора $\vec{F}$ по замкнутому контуру, состоящему из дуги $\overset{\cup}{AB}$ параболы и прямых BC и CA , если $C(-1;-1)$. Найти поток вектора $\vec{F}$ через дугу $\overset{\cup}{BA}$.

Ответ: $W = \frac{4}{3}; \quad \text{Ц} = \frac{7}{3}; \quad \Pi = -\frac{4}{3}$.

5. Найти статический момент относительно плоскости xOz однородного тела, ограниченного поверхностями $x = \sqrt{y}$, $x = 2\sqrt{y}$, $z = 0$, $y + z = 6$, если плотность массы $\delta = 1$.

Ответ: $M_{xz} = \frac{864\sqrt{6}}{35}$.

6. Найти массу части поверхности $z = \frac{x^2 + y^2}{2}$, отсеченной плоскостью $z = 1$, если поверхностная плотность массы $\delta = z$.

Ответ: $m = \frac{4\pi(6\sqrt{3}+1)}{15}$.

7. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a} = (x^2 + 2y^2)\vec{i} - 2y^2\vec{j} + \frac{2y^2 - x^2}{z}\vec{k}$ в произвольной точке $M(x, y, z)$ и в точке $M_0(1,1,1)$.

Ответ: $\text{div}\vec{a}(M_0) = -3, \text{rot}\vec{a}(M_0) = 4\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}$.

Вариант 13

1. Найти электрический заряд треугольной пластины с вершинами $A(-2;-2)$, $B(-1;2)$, $C(-1;-\frac{3}{2})$, если поверхностная плотность заряда $\lambda = 2x + y$.

Ответ: $q = -\frac{133}{24}$.

2. Найти момент инерции однородной фигуры, ограниченной кардиоидой относительно оси ox , если поверхностная плотность массы $\delta = 1$.

Ответ: $J_x = \frac{21\pi a^4}{32}$.

3. Найти координаты центра массы кривой $\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \end{cases}, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, если линейная плотность массы $\delta = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

Ответ: $C\left(\frac{e^{\frac{\pi}{2}} - 1}{\pi}; \frac{e^{\frac{\pi}{2}} + 1}{\pi}\right)$.

4. Найти работу поля $\vec{F} = (x^2 - 2xy)\vec{i} + (y^2 - 2xy)\vec{j}$ при перемещении точки по гиперболе $y = \frac{2}{x}$ от $A(1,2)$ до $B(2,1)$. Найти циркуляцию вектора $\vec{F}$ по замкнутому контуру $ABCA$, состоящему из дуги гиперболы $\overset{\cup}{AB}$ и прямых BC и CA , если $C(2,3)$. Найти поток вектора $\vec{F}$ через дугу $\overset{\cup}{AB}$.

Ответ: $W = 0$; $\Pi = -\frac{2}{3}$; $\Pi = -4$.

5. Найти статический момент относительно плоскости uoz однородного тела, ограниченного поверхностями $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$, $z = 0$, $x + z = 6$, если плотность массы $\delta = 1$.

Ответ: $M_{yz} = \frac{864\sqrt{6}}{35}$.

6. Найти массу части конической поверхности $z = \sqrt{2xy}$, отсекаемой плоскостью $x + y = 1$, если поверхностная плотность массы $\delta = \sqrt{2xy}$.

Ответ: $m = \frac{1}{3}$.

7. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a} = (y^2 - 3x^2)\vec{i} + x^2\vec{j} + (2y^2 - 3x^2)\vec{k}$ в точках $M(x, y, z)$ и $M_0(1, -1, 1)$.

Ответ: $\text{div}(\vec{a}) = -6$, $\text{rot}\vec{a} = -4\vec{i} + 6\vec{j} + 4\vec{k}$.

Вариант 14

1. Найти момент инерции относительно оси oy однородного треугольника с вершинами $A(1,1)$; $B(1,2)$; $C(3,3)$, если поверхностная плотность массы $\delta = 1$.

Ответ: $J_y = 3$.

2. Найти статический момент относительно оси Ox однородной фигуры $1 \leq x^2 + y^2 \leq 2y$, если поверхностная плотность массы $\delta = 1$.

Ответ: $M_x = \frac{8\pi + 3\sqrt{3}}{12}$.

3. Найти длину дуги кривой $\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \\ z = e^t \end{cases}$ при $-\infty < t \leq 0$.

Ответ: $l = \sqrt{3}$.

4. Найти работу поля $\vec{F} = (x^2 - 2xy)\vec{i} + (y^2 - 2xy)\vec{j}$ при перемещении точки по дуге гиперболы $y = \frac{2}{x}$ от $A(-2,-1)$ до $B(-1,-2)$. Найти циркуляцию вектора $\vec{F}$ по замкнутому

контур $ABCA$, состоящему из дуги гиперболы $\overset{\smile}{AB}$ и прямых BC и CA , если $C(1;-1)$.

Найти поток вектора через дугу $\overset{\smile}{AB}$.

Ответ: $W = 0$; $\Pi = 2$; $\Pi = -4$.

5. Вычислить массу тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 = 2z$, $z = 2$, если плотность массы $\delta = x^2 + y^2$.

Ответ: $m = \frac{16\pi}{3}$.

6. Найти электрический заряд части поверхности конуса $x = \sqrt{y^2 + z^2}$, вырезанной цилиндром $y^2 + z^2 = 2ay$, если поверхностная плотность заряда $\lambda = x^2 + y^2 + z^2$.

Ответ: $q = \frac{3\pi a^4}{\sqrt{2}}$.

7. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a} = \arctg \frac{z}{x+y}(\vec{i} - \vec{j} + \vec{k})$ в точках

$M(x, y, z)$ и $M_0(1,1,1)$.

Ответ: $\text{div}(M_0) = \frac{2}{5}$, $\text{rota}(M_0) = \frac{1}{5}(i + 3j + 2k)$.

Вариант 15

1. Найти координаты центра массы однородной фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 3x, y = x$, если поверхностная плотность массы $\delta = 1$.

Ответ: $C\left(\frac{6}{5}, \frac{3}{2}\right)$.

2. Найти момент инерции относительно начала координат однородной фигуры, ограниченной кривой $\rho = 2a \cos \varphi$, если плотность массы $\delta = 1$.

Ответ: $J_0 = \frac{3}{2}\pi a^4$.

3. Найти массу участка кривой $y = -\ln \cos x, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$, если линейная плотность массы $\delta = \sin^2 x \cdot \cos^2 x$.

Ответ: $m = \frac{\sqrt{2}}{12}$.

4. Найти работу поля $\vec{F} = \frac{1}{x}\vec{i} + \frac{1}{y}\vec{j}$ при перемещении точки по дуге окружности $x = 2 \cos t, y = 2 \sin t$ от $A(\sqrt{3}, 1)$ до $B(1, \sqrt{3})$. Найти циркуляцию вектора $\vec{F}$ по замкнутому контуру $ACBA$, состоящему из дуги $\overset{\cup}{BA}$ окружности и прямых AC и CB , где $C(\sqrt{3}; \sqrt{3})$. Найти поток вектора $\vec{F}$ через дугу $\overset{\cup}{AB}$ окружности.

Ответ: $W = 0, \quad \text{Ц} = 0, \quad \Pi = \frac{\pi}{3}$.

5. Найти заряд тела, ограниченного плоскостями $x = 0, y = 0, z = 0, y = h, x + z = a$, если плотность заряда $\lambda = -x$.

Ответ: $q = -\frac{a^3 h}{6}$.

6. Вычислить массу участка поверхности $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, отсеченного плоскостью $z = 1$, если поверхностная плотность массы $\delta = x^2 + y^2 + 3z^2$.

Ответ: $m = 2\pi\sqrt{2}$.

7. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a} = (\vec{i} + 2\vec{j} + k) \ln(x + 2y + 3z)$ в произвольной точке $M(x, y, z)$ и в точке $M_1(1, 1, 1)$.

Ответ: $\text{div} \vec{a}(M_0) = \frac{4}{3}; \text{rot} \vec{a}(M_0) = \frac{-2\vec{i} + \vec{j}}{3};$

Вариант 16

1. Найти координаты центра массы фигуры, ограниченной линиями $x^2 = 3y$, $x = y$, если поверхностная плотность массы $\delta = 1$.

Ответ: $C\left(\frac{3}{2}; \frac{6}{5}\right)$.

2. Найти массу круга радиуса R , плотность массы которого в каждой точке равна расстоянию от этой точки до окружности.

Ответ: $m = \frac{\pi R^3}{3}$.

3. Найти статический момент кривой $\begin{cases} x = 4 \cos t \\ y = \sin t \end{cases}, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ относительно оси ox , если линейная плотность массы $\delta = x$.

Ответ: $M_x = 5,6$.

4. Найти работу поля $\vec{F} = \frac{x}{y}\vec{i} - \frac{y}{x}\vec{j}$ при перемещении точки по дуге гиперболы $y = -\frac{2}{x}$ от $A(1; -2)$ до $B(2; -1)$. Найти циркуляцию вектора $\vec{F}$ по замкнутому контуру $ACBA$, состоящему из дуги гиперболы $\overset{\cup}{BA}$ и прямых AC и CB , где $C(-2; -2)$. Найти поток вектора $\vec{F}$ через дугу $\overset{\cup}{AB}$ гиперболы.

Ответ: $W = 0$, $\Pi = 0$, $\Pi = 2$.

5. Найти электрический заряд тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 = 2x$, $z = 0$, $z = 3$, если плотность заряда $\lambda = -z\sqrt{x^2 + y^2}$.

Ответ: $q = -8$.

6. Найти момент инерции относительно оси oz однородной полусферы $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, если поверхностная плотность массы $\delta = 1$.

Ответ: $J_z = \frac{4}{3}\pi R^4$.

7. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a} = (y^2 + 3x^2)\vec{i} - 3x^2\vec{j} + (3x^2 - 2y^2)\vec{k}$ в точке $M(x, y, z)$ и в точке $M_0(2, 1, 1)$.

Ответ: $\text{div}\vec{a}(M_0) = 12, \text{rot}\vec{a}(M_0) = -4\vec{i} - 12\vec{j} - 14\vec{k}$.

Вариант 17

1. Найти момент инерции относительно оси Ox плоской однородной фигуры, ограниченной кривыми $y = \sqrt{2x}$, $x + y = 3$, $y = 0$, если поверхностная плотность массы $\delta = 1$.

Ответ: $J_x = 1,4$.

2. Найти массу фигуры $x^2 + y^2 \leq 4x$, если поверхностная плотность массы $\delta = x^2$.

Ответ: $m = 20\pi$.

3. Найти координаты центра массы однородной полуокружности $y = \sqrt{a^2 - x^2}$.

Ответ: $C\left(0; \frac{2a}{\pi}\right)$.

4. Найти работу поля $\vec{F} = \frac{x\vec{i} - y\vec{j}}{x^2 + y^2}$ при перемещении точки по дуге окружности $x = 3 \cos t$, $y = 3 \sin t$ от $A(3, 0)$ до $B(0, 3)$. Найти циркуляцию вектора $\vec{F}$ по замкнутому контуру $ACBA$, состоящему из дуги $\overset{\cup}{BA}$ окружности и прямых AC и CB , если $C(3, 3)$. Найти поток вектора $\vec{F}$ через дугу $\overset{\cup}{AB}$ окружности.

Ответ: $W = -1$, $\Pi = 1 - \ln 2$, $\Pi = 0$.

5. Найти статический момент относительно плоскости yoz тела, ограниченного поверхностями $z = \frac{1}{2}x^2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $3x + 2y = 12$, если плотность массы $\delta = 1$.

Ответ: $M_{yz} = \frac{192}{5}$.

6. Найти электрический заряд части поверхности $z = 1 - (x^2 + y^2)$, отсеченной плоскостью $z = 0$, если плотность заряда $\lambda = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}$.

Ответ: $q = 3\pi$.

7. Найти дивергенцию и ротор поля $\vec{a} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} (2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k})$ в точке $M(x, y, z)$ и в точке $M_0(-1; 2; 2)$.

Ответ: $\operatorname{div} \vec{a}(M_0) = 2$; $\operatorname{rot} \vec{a}(M_0) = \frac{1}{3}(4\vec{i} + 7\vec{j} - 5\vec{k})$.

Вариант 18

1. Вычислить массу четверти кольца $4 \leq x^2 + y^2 \leq 9$, $x \leq 0$, $y \geq 0$, если поверхностная плотность массы $\delta = \frac{y - 2x}{x^2 + y^2}$.

Ответ: $m = 3$.

2. Найти координаты центра массы однородной фигуры, $1 \leq x^2 + y^2 \leq 2y$, если поверхностная плотность массы $\delta = 1$.

Ответ: $C\left(0; \frac{8\pi + 3\sqrt{3}}{4\pi + 6\sqrt{3}}\right)$.

3. Найти статический момент относительно оси Oy дуги кривой $\begin{cases} x = 4 \cos t \\ y = \sin t, \end{cases}$ $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, если линейная плотность массы $\delta = y$.

Ответ: $M_y = 5,6$.

4. Найти работу поля $\vec{F} = \cos \sqrt{y} \vec{i} + (x - y) \vec{j}$ при перемещении точки по дуге $\overset{\circ}{BO}$ параболы $y = x^2$. Найти циркуляцию вектора $\vec{F}$ по замкнутому контуру, состоящему из дуги $\overset{\circ}{BOC}$ параболы $y = x^2$ и прямой CB , $B(-1, 1)$, $O(0, 0)$, $C(1, 1)$. Найти поток вектора $\vec{F}$ через дугу $\overset{\circ}{OC}$ параболы.

Ответ: $W = \frac{7}{6} + \sin 1$, $\Pi = \frac{4}{3} + 2 \sin 1 - 2 \cos 1$, $\Pi = -2(\sin 1 + \cos 1) + \frac{1}{6}$,

5. Найти момент инерции линии $y = \ln x$, $1 \leq x \leq \sqrt{e}$, относительно оси Oy , если линейная плотность $\delta = 1$.

Ответ: $J_y = \frac{1}{3} \left((1 + e)^{3/2} - 2\sqrt{2} \right)$.

6. Вычислить электрический заряд части поверхности конуса $x = \sqrt{y^2 + z^2}$, отсеченной плоскостью $x = 2$, если поверхностная плотность заряда $\lambda = -(5x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 4)$.

Ответ: $q = -80\pi\sqrt{2}$.

7. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a} = (2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}) \cos(2x + y - z)$ в произвольной точке $M(x, y, z)$ и в точке $M_0\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right)$.

Ответ: $\text{div} \vec{a}(M_0) = -3$; $\text{rot} \vec{a}(M_0) = -7\vec{i} + 10\vec{j} - 4\vec{k}$.

Вариант 19

1. Найти электрический заряд фигуры, ограниченной эллипсом $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ и осями координат, если поверхностная плотность заряда $\lambda = x$ и фигура расположена при $x \geq 0, y \geq 0$.

Ответ: $q = \frac{100}{3}$.

2. Найти координаты центра массы однородной фигуры $1 \leq x^2 + y^2 \leq 2x$, если поверхностная плотность массы $\delta = 1$.

Ответ: $C\left(\frac{8\pi + 3\sqrt{3}}{4\pi + 6\sqrt{3}}; 0\right)$.

3. Найти статический момент относительно оси ox однородной циклоиды $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi$, если линейная плотность массы $\delta = 1$.

Ответ: $M_x = \frac{32}{3}$.

4. Найти работу поля $\vec{F} = \frac{y^2 \vec{i} + x^2 \vec{j}}{xy}$ при перемещении точки по дуге кривой $y = \frac{4}{x^2}$ от $A(1, 4)$ до $B(2, 1)$. Найти циркуляцию вектора $\vec{F}$ по замкнутому контуру, состоящему из дуги $\overset{\cup}{AB}$ кривой $y = \frac{4}{x^2}$ и прямых BC и CA , если $C(8, 4)$. Найти поток вектора $\vec{F}$ через дугу $\overset{\cup}{AB}$ этой кривой.

Ответ: $W = -0,5; \Pi = 8,5 - \ln 8; \Pi = 7,1375$.

5. Вычислить момент инерции относительно оси oz однородного цилиндра $x^2 + y^2 \leq 2Ry, 0 \leq z \leq H$, если масса цилиндра равна m .

Ответ: $J_z = \frac{3}{2}mR^2$.

6. Найти массу части поверхности, $z = \sqrt{9 - x^2}$ отсеченной плоскостями $y = 0$ и $y = 3$, если поверхностная плотность массы $\delta = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$.

Ответ: $m = \frac{\pi^2}{4}$.

7. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a} = \left(\frac{y}{x} + \frac{3x}{y}\right)\vec{i} - \frac{3x}{y}\vec{j} + \left(\frac{3x}{y} - \frac{2y}{x}\right)\vec{k}$ в произвольной точке $M(x, y, z)$ и в точке $M_0(1, 1, 1)$.

Ответ: $\text{div} \vec{a}(M_0) = 5; \text{rot} \vec{a}(M_0) = -5\vec{i} - 5\vec{j} - \vec{k}$.

Вариант 20

1. Найти координаты центра массы однородной фигуры, ограниченной кривой $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ и осями координат.

Ответ: $C\left(\frac{a}{5}; \frac{a}{5}\right)$.

2. Найти статический момент относительно оси Ox однородной фигуры $x^2 + y^2 \leq 2y$, если поверхностная плотность массы $\delta = 1$.

Ответ: $M_x = \pi$.

3. Найти момент инерции относительно оси Ox одной арки однородной циклоиды $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$. Линейная плотность массы $\delta = 1$.

Ответ: $J_x = \frac{256}{15}a^3$.

4. Найти работу поля $\vec{F} = (x - y^2)\vec{i} + 2xy\vec{j}$ при перемещении точки по дуге параболы $y = 2 - x^2$ от $A(-1, 1)$ до $B(1, 1)$. Найти циркуляцию вектора $\vec{F}$ по замкнутому контуру $ACBA$, составленному из дуги $\overset{\cup}{BA}$ параболы и прямых AC и CB , где $C(-1; 0)$. Найти поток вектора $\vec{F}$ через дугу $\overset{\cup}{AB}$.

Ответ: $W = -\frac{142}{15}$; $\Gamma = \frac{152}{15}$; $\Pi = \frac{4}{3}$.

5. Найти электрический заряд тела, ограниченного поверхностями $x^2 + z^2 = 1, y = 0, y = 1$, если плотность заряда $\lambda = -(x^2 + y^2 + z^2)$.

Ответ: $q = -\frac{3}{2}\pi$.

6. Найти массу полусферы $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, если поверхностная плотность массы $\delta = \frac{z}{R}$.

Ответ: $m = \pi R^2$.

7. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a} = \arctg \frac{x+y}{z}(\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k})$ в произвольной точке $M(x, y, z)$ и в точке $M_0(1, 1, 1)$.

Ответ: $\text{div} \vec{a}(M_0) = \frac{1}{5}$; $\text{rot} \vec{a}(M_0) = \frac{1}{5}(5\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k})$.

Вариант 21

1. Найти массу фигуры, ограниченной эллипсом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, если плотность массы $\delta = |y|$.

Ответ: $m = \frac{4}{3}ab^2$.

2. Найти электрический заряд, распределенный с поверхностной плотностью $\lambda = \sqrt{1-x^2-y^2}$ в области $x^2 + y^2 \leq y$.

Ответ: $q = \frac{3\pi - 4}{9}$.

3. Найти статический момент относительно оси Ox циклоиды $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi$, если линейная плотность массы $\delta = y$.

Ответ: $M_x = \frac{512}{15}a^3$.

4. Найти работу поля $\vec{F} = \frac{y^2}{x}\vec{i} + \frac{x^2}{y}\vec{j}$ при перемещении точки по дуге параболы $y = \sqrt{x}$ от $A(1;1)$ до $B(4;2)$. Найти циркуляцию вектора $\vec{F}$ по замкнутому контуру $ABCA$, состоящему из дуги $\overset{\smile}{AB}$ параболы и прямых BC и CA , где $C(1;2)$. Найти поток вектора $\vec{F}$ через дугу $\overset{\smile}{AB}$ параболы.

Ответ: $W = 6,75$, $\Gamma = 6,75 - \ln 2 - 4 \ln 4$, $\Pi = \frac{57}{5}$.

5. Найти координаты центра массы однородного тела, ограниченного поверхностями $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}, z = 0$.

Ответ: $C\left(0; 0; \frac{1}{4}\right)$.

6. Найти момент инерции относительно оси Oz , часть однородной поверхности $z = \frac{h}{a}\sqrt{x^2 + y^2}$, отсеченной плоскостью $z = h$.

Ответ: $J_z = \frac{1}{2}\pi a^3 \sqrt{a^2 + h^2}$.

7. Найти дивергенцию и ротор векторного поля вектора $\vec{a}$ в точке $M(x, y, z)$ и в точке $M_0(1,1,1)$, если $\vec{a} = \vec{b} \times \vec{c}$, где $\vec{b} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} - x^2\vec{k}, \vec{c} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$.

Ответ: $\text{div} \vec{a}(M_0) = 6, \text{rot} \vec{a}(M_0) = -4\vec{i} - 6\vec{j} - 8\vec{k}$.

Вариант 22

1. Найти электрический заряд фигуры, ограниченной линиями $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$, $x = 0$, $y = 0$, если поверхностная плотность заряда $\lambda = x$.

Ответ: $q = \frac{a^3}{30}$.

2. Найти площадь фигуры $1 \leq x^2 + y^2 \leq 2x$.

Ответ: $S = \frac{2\pi + 3\sqrt{3}}{6}$.

3. Найти моменты инерции однородной окружности $x^2 + y^2 = r^2$ относительно осей координат. Масса окружности равна m .

Ответ: $J_x = J_y = \frac{1}{2}mr^2$.

4. Найти работу поля $\vec{F} = xy\vec{i} + (y-x)\vec{j}$ при перемещении точки по дуге параболы $\begin{cases} x = t \\ y = (t+1)^2 \end{cases}$ от $A(-1;0)$ до $B(0,1)$. Найти циркуляцию вектора $\vec{F}$ по замкнутому контуру, состоящему из дуги $\overset{\cup}{AB}$ параболы и прямых BC и CA , если $C(-1;2)$. Найти поток вектора $\vec{F}$ через дугу $\overset{\cup}{AB}$.

Ответ: $W = \frac{3}{4}$; $\mathcal{C} = -\frac{5}{12}$; $\Pi = \frac{14}{15}$.

5. Вычислить массу тела, ограниченного поверхностями $2x + z = 4$, $x + z = 2$, $y = \sqrt{2x}$, если плотность $\delta = y$.

Ответ: $m = \frac{4}{3}$.

6. Найти координаты центра массы полусферы $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, если поверхностная плотность массы $\delta = x^2 + y^2$.

Ответ: $C\left(0, 0, \frac{3}{8}R\right)$.

7. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a} = \text{grad}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ в произвольной точке и в точке $M_0(2,2,1)$.

Ответ: $\text{div}\vec{a}(M_0) = \frac{2}{3}$; $\text{rot}\vec{a}(M_0) = 0$.

Вариант 23

1. Найти электрический заряд, распределенный в области, ограниченной кривыми $x=0, y=\pi, y=x$ с поверхностной плотностью $\lambda = \cos(x+y)$.

Ответ: $q = -2$.

2. Найти статический момент однородного круга $x^2 + y^2 \leq 2x$ относительно оси oy .

Ответ: $M_y = \pi$.

3. Вычислить массу участка винтовой линии $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \\ z = bt \end{cases}$, если линейная

плотность массы $\delta = xy$.

Ответ: $m = \frac{a^2}{2} \sqrt{a^2 + b^2}$.

4. Найти работу поля $\vec{F} = (y-x)\vec{i} + xy\vec{j}$ при перемещении точки по дуге параболы $y = (x+1)^2$ от $A(-2;1)$ до $B(0;1)$. Найти циркуляцию вектора $\vec{F}$ по замкнутому контуру $ABCA$, состоящему из дуги $\overset{\cup}{AB}$ параболы и прямых BC и CA , если $C(0;3)$. Найти поток вектора $\vec{F}$ через дугу $\overset{\cup}{AB}$ параболы.

Ответ: $W = \frac{52}{15}; \Pi = -\frac{8}{5}; \Pi = \frac{22}{3}$.

5. Найти центр массы однородного конуса, ограниченного поверхностями $z = \frac{h}{R} \sqrt{x^2 + y^2}, z = h$.

Ответ: $C = \left(0, 0, \frac{3}{4}h\right)$.

6. Вычислить момент инерции относительно оси Oz части однородной поверхности сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, x \geq 0, z \geq 0, y \geq 0$, если поверхностная плотность массы $\delta = 1$.

Ответ: $J_z = \frac{\pi R^4}{3}$.

7. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a} = \vec{i} \sin(y^2 + 3x^2) - \vec{j} \sin(y^2 + 3x^2) + \vec{k} \sin(3x^2 - 2y^2)$ в произвольной точке $M(x, y, z)$ и в точке $M_0\left(\sqrt{\frac{\pi}{3}}; -\sqrt{\frac{\pi}{3}}; 0\right)$.

Ответ: $\text{div} \vec{a}(M_0) = -4\sqrt{\frac{\pi}{3}}; \text{rot} \vec{a}(M_0) = \sqrt{\frac{\pi}{3}}(2\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k})$.

Вариант 24

1. Найти массу, распределенную в области, ограниченной линиями $y=1, y=2, x=0$, $y=e^x$ с поверхностной плотностью $\delta=e^x$.

Ответ: $m = \frac{1}{2}$.

2. Найти момент инерции относительно начала координат однородной фигуры, ограниченной одним лепестком лемнискаты $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}, -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.

Ответ: $J_0 = \frac{\pi a^4}{4}$.

3. Найти координаты центра массы однородной циклоиды $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi$, если линейная плотность массы $\delta = 1$.

Ответ: $C\left(\pi a, \frac{4}{3}a\right)$.

4. Найти работу поля $\vec{F} = (xy + x + y)\vec{i} + (xy + x - y)\vec{j}$ при перемещении точки по дуге параболы $x = \sqrt{y}$ от $O(0,0)$ до $A(2,4)$. Найти циркуляцию вектора $\vec{F}$ по замкнутому контуру $OACO$, состоящему из дуги OA параболы и прямых AC и CO , если $C(0,2)$. Найти поток вектора $\vec{F}$ через дугу $\overset{\circ}{OA}$ в сторону выпуклости дуги.

Ответ: $W = 18,8; \Pi = 22,8; \Pi = \frac{52}{15}$.

5. Найти электрический заряд тела, ограниченного поверхностями $y = \sqrt{x}, y = 2\sqrt{x}, z = 0, x + z = 6$, если плотность заряда $\lambda = x$.

Ответ: $q = \frac{864\sqrt{6}}{35}$.

6. Найти координаты центра массы части поверхности $z = \frac{x^2 + y^2}{2}$ при $z \leq 1$, если поверхностная плотность массы $\delta = 1$.

Ответ: $C\left(0, 0, \frac{6\sqrt{3}+1}{5(3\sqrt{3}-1)}\right)$.

7. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a}$, если $\vec{a} = \vec{b} \times \vec{c}$, где $\vec{b} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} - x^2\vec{k}, \vec{c} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ в точках $M(x, y, z)$ и $M_0(1, -1, 1)$.

Ответ: $\text{div}\vec{a}(M_0) = -2, \text{rot}\vec{a}(M_0) = 2\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$.

Вариант 25

1. Найти статический момент относительно оси Ox массы, распределенной с плотностью $\delta = \frac{1}{x}$ в области, ограниченной линиями $y = x, y = 2x, x = 1, x = 2$.

Ответ: $M_x = 2,25$.

2. Вычислить момент инерции однородного круга радиуса R массы m относительно начала координат.

Ответ: $J_0 = \frac{1}{2}mR^2$.

3. Вычислить массу участка кривой $y = 0,5x^2, 0 \leq x \leq 1$, если линейная плотность массы $\delta = \sqrt{2y}$.

Ответ: $m = \frac{1}{3}(2\sqrt{2} - 1)$.

4. Найти работу поля $\vec{F} = (x^3 - y)\vec{i} + (y^3 + x)\vec{j}$ при перемещении точки по дуге окружности $x = R \cos t, y = R \sin t$ от $A(R, 0)$ до $B(0, R)$. Найти циркуляцию вектора $\vec{F}$ по замкнутому контуру, состоящему из дуги $\overset{\cup}{BA}$ окружности и прямых AC и CB , где $C(2R, R)$. Найти поток вектора R через дугу $\overset{\cup}{AB}$ окружности.

Ответ: $W = \frac{\pi R^2}{2}$; $\Pi = R^2(3 - \frac{\pi}{2})$; $\Pi = \frac{3\pi R^4}{8}$.

5. Найти электрический заряд тела, ограниченного поверхностями $z = \sqrt{x}, z = 2\sqrt{x}, y + x = 6, y = 0$, если плотность заряда $\lambda = z$.

Ответ: $q = 54$.

6. Найти координаты центра массы части однородной полусферы $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, вырезанной плоскостями $x = 0, y = 0, x + y = R, (x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq R)$.

Ответ: $C\left(\frac{R\sqrt{2}}{4}, \frac{R\sqrt{2}}{4}, \frac{R}{\pi(\sqrt{2}-1)}\right)$.

7. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}(\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k})$ в точках $M(x, y, z)$ и $M_0(1, 1, 1)$.

Ответ: $\operatorname{div} \vec{a}(M_0) = \frac{\sqrt{3}}{3}, \operatorname{rot} \vec{a}(M_0) = \frac{1}{\sqrt{3}}(4\vec{i} - \vec{j} - 3\vec{k})$.

Вариант 26

1. Найти момент инерции относительно оси Ox однородной полукруглой пластинки $0 \leq y \leq \sqrt{R^2 - x^2}$. Поверхностная плотность массы $\delta = 1$.

Ответ: $J_{Ox} = \frac{\pi R^4}{8}$.

2. Найти координаты центра массы плоской однородной фигуры, ограниченной кривой $\rho = a(1 + \cos \varphi)$.

Ответ: $C\left(\frac{5a}{6}; 0\right)$.

3. Найти статический момент относительно оси Ox однородной дуги астроида $\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases}, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, если линейная плотность массы $\delta = 1$.

Ответ: $M_x = \frac{3a^2}{5}$.

4. Найти работу поля $\vec{F} = y^2 \ln x \vec{i} + xy \vec{j}$ при перемещении точки по дуге гиперболы $y = \frac{1}{x}$ от $A(1;1)$ до $B\left(2; \frac{1}{2}\right)$. Найти циркуляцию вектора $\vec{F}$ по замкнутому контуру, состоящему из дуги $\overset{\cup}{BA}$ гиперболы и прямых AC и CB , если $C\left(1; -\frac{1}{2}\right)$. Найти поток вектора $\vec{F}$ через дугу $\overset{\cup}{AB}$.

Ответ: $W = -\frac{\ln 2}{2}$; $\Pi = \frac{2}{3} \ln 2 - \frac{170}{72}$; $\Pi = \frac{-3 \ln 2 + 79}{72}$.

5. Найти электрический заряд тела, ограниченного поверхностями $z = \frac{1}{2}x^2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $3x + 2y = 12$, если плотность заряда $\lambda = x$.

Ответ: $q = \frac{192}{5}$.

6. Найти площадь части цилиндрической поверхности $z = \sqrt{a^2 - x^2}$, заключенной между плоскостями $y = x$ и $y = 0$.

Ответ: $S = 2a^2$.

7. Найти дивергенцию и ротор векторного поля:

$\vec{a} = y^2 \vec{i} - x^2 \vec{j} + z^2 \vec{k}$ в точках $M(x, y, z)$ и $M_0(2, 3, 1)$.

Ответ: $\text{div} \vec{a}(M_0) = 0$; $\text{rot} \vec{a}(M_0) = -10 \vec{k}$.

Вариант 27

1. Найти координаты центра масс однородной плоской фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}$, $y = 0$.

Ответ: $C\left(0; \frac{8}{3\pi}\right)$.

2. Найти массу, распределенную в области $2x \leq x^2 + y^2 \leq 4x$, $\frac{x}{\sqrt{3}} \leq y \leq x\sqrt{3}$, с поверхностной плотностью $\delta = \arctg \frac{y}{x}$.

Ответ: $m = \frac{\pi^2 + \pi\sqrt{3} - 6}{8}$.

3. Найти статический момент относительно оси Oy однородной дуги астроида $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = 1, 0 \leq x \leq 1$, если линейная плотность массы $\delta = 1$.

Ответ: $M_y = \frac{3}{5}$.

4. Найти работу поля $\vec{F} = x^2 y \vec{i} - xy^2 \vec{j}$ при перемещении точки по дуге окружности $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$ от $A(-2, 0)$ до $B(0, -2)$. Найти циркуляцию вектора $\vec{F}$ по замкнутому контуру, состоящему из дуги $\overset{\cup}{AB}$ окружности и прямых BC и CA , где $C(-2, 2)$. Найти поток вектора $\vec{F}$ через дугу $\overset{\cup}{AB}$.

Ответ: $W = -2\pi$; $\Pi = -\frac{6\pi + 8}{3}$; $\Pi = -2$.

5. Найти электрический заряд части шара $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$, расположенной в первом октанте ($x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$), если плотность заряда $\lambda = -z$.

Ответ: $q = -\frac{\pi R^4}{16}$.

6. Найти момент инерции относительно оси Oz части однородной поверхности $x^2 + y^2 = 2az$, $0 \leq z \leq a$, если поверхностная плотность массы $\delta = 1$.

Ответ: $J_z = \frac{4\pi(6\sqrt{3} + 1)}{15} a^4$.

7. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a} = \arctg(x - y + z)(\vec{i} - 3\vec{j} - 2\vec{k})$ в точках $M(x, y, z)$ и $M_0(1, 1, 1)$.

Ответ: $\operatorname{div} \vec{a}(M_0) = \frac{1}{2}$, $\operatorname{rot} \vec{a}(M_0) = \frac{5}{2} \vec{i} - \frac{3}{2} \vec{j} - \vec{k}$.

Вариант 28

1. Найти массу, распределенную с поверхностной плотностью $\delta = x^2 + y$ в области, ограниченной кривыми $y = x^2, y^2 = x$.

Ответ: $m = \frac{33}{140}$.

2. Найти момент инерции относительно оси Oy однородного круга $x^2 + y^2 \leq 2x$, если поверхностная плотность массы $\delta = 1$.

Ответ: $J_y = \frac{5}{4}\pi$.

3. Найти статический момент относительно оси ox однородной дуги астроида $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = 1$, расположенной в первой четверти ($0 \leq x \leq 1, y \geq 0$), если линейная плотность массы $\delta = 1$.

Ответ: $M_x = \frac{3}{5}$.

4. Найти работу поля $\vec{F} = (y^2 - x)\vec{i} + (x^2 - y)\vec{j}$ при перемещении точки по дуге окружности $x = \cos t, y = \sin t$ от $A(1,0)$ до $B(0,1)$. Найти циркуляцию вектора $\vec{F}$ по замкнутому контуру, состоящему из дуги $\overset{\cup}{AB}$ окружности и прямых BC и CA , если $C(0;-1)$. Найти поток вектора $\vec{F}$ через дугу $\overset{\cup}{AB}$.

Ответ: $W = 0; \Pi = \frac{2}{3}; \Pi = \frac{4 - 3\pi}{6}$.

5. Найти координаты центра массы однородной фигуры, ограниченной поверхностями $x + y + z = 1, x = 0, y = 0, z = 0$.

Ответ: $C\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right)$.

6. Найти электрический заряд части плоскости $x + y + z = a$, вырезанной цилиндром $x^2 + y^2 = a^2$, если плотность заряда $\lambda = z^2$.

Ответ: $q = \frac{3\sqrt{3}}{2}\pi a^4$.

8. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a} = xyz(\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$ в точках $M(x, y, z)$ и $M_0(1, 2, 3)$.

Ответ: $\operatorname{div} \vec{a}(M_0) = 36, \operatorname{rot} \vec{a}(M_0) = 5\vec{i} - 16\vec{j} + 9\vec{k}$.

Вариант 29

1. Найти электрический заряд фигуры, ограниченной линиями $x = 1, \sqrt{y} = x, y = -\sqrt[3]{x}$, если поверхностная плотность заряда $\lambda = xy - (xy)^3$.

Ответ: $q = -\frac{5}{64}$.

2. Найти электрический заряд, распределенный в области $x^2 + y^2 \leq 2x$ с поверхностной плотностью $\lambda = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

Ответ: $q = \frac{8}{9}(3\pi - 4)$.

3. Найти координаты центра масс дуги окружности $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t \end{cases}, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, если линейная плотность массы $\delta = xy$.

Ответ: $C\left(\frac{2a}{3}, \frac{2a}{3}\right)$.

4. Найти работу поля $\vec{F} = xy^2\vec{i} + 2x^2y\vec{j}$ при перемещении точки по дуге параболы $y = -\sqrt{x}$ от $O(0;0)$ до $B(1;-1)$. Найти циркуляцию вектора $\vec{F}$ по замкнутому контуру, состоящему из дуги $\overset{\cup}{OB}$ параболы и прямых BC и CO , если $C(1;1)$. Найти поток вектора $\vec{F}$ через дугу $\overset{\cup}{OB}$.

Ответ: $W = \frac{2}{3}; \Pi = -\frac{1}{12}; \Pi = -\frac{13}{35}$.

5. Найти ординату центра массы однородного тела, ограниченного поверхностями $z = \frac{1}{2}y^2, x = 0, y = 0, z = 0, 2x + 3y = 12$.

Ответ: $y_0 = \frac{12}{5}$.

6. Найти массу части плоскости $2x + 2y + z - 4 = 0$, расположенной в первом октанте ($x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$), если поверхностная плотность массы $\delta = z$.

Ответ: $m = \frac{8}{3}$.

7. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a} = xy\vec{i} - yz\vec{j} + yz\vec{k}$ в точках $M(x, y, z)$ и $M_0(2,1,1)$.

Ответ: $\text{div}\vec{a}(M_0) = 1, \text{rot}\vec{a}(M_0) = 2\vec{i} - 2\vec{k}$.

Вариант 30

1. Найти моменты инерции относительно осей координат фигуры, ограниченной линиями $y = 2x - x^2$, $y = x^2$, если поверхностная плотность массы в каждой точке фигуры равна ординате точки.

Ответ: $J_x = \frac{31}{420}, J_y = \frac{1}{15}$.

2. Найти объем цилиндрического тела, ограниченного плоскостями $z = 0, z = 3, x + y = 0$ и цилиндрической поверхностью $x = \sqrt{-4y - y^2}$.

Ответ: $V = 3\pi - 6$.

3. Найти электрический заряд, распределенный по кривой $\begin{cases} x = a(\cos t + t \sin t) \\ y = a(\sin t + t \cos t) \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi$ с линейной плотностью $\lambda = -(x^2 + y^2)$.

Ответ: $q = -2\pi^2 a^3 (1 + 2\pi^2)$.

4. Найти работу поля $\vec{F} = (xy + y^2)\vec{i} + x\vec{j}$ при движении точки ($m = 1$) по параболе $y = 2\sqrt{x}$ от 0 (0,0) до A (1,2). Найти циркуляцию вектора $\vec{F}$ по замкнутому контуру OACO, состоящему из дуги $\overset{\cup}{OA}$ параболы и прямых AC и CO, где C (1, -1). Найти поток вектора $\vec{F}$ через дугу $\overset{\cup}{OA}$.

Ответ: $W = \frac{52}{15}; \Pi = \frac{29}{30}; \Pi = -\frac{19}{6}$.

5. Найти центр массы однородного тела, ограниченного поверхностями $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, z = 0$.

Ответ: $C\left(0, 0, \frac{3}{8}\right)$.

6. Найти площадь части гиперболического параболоида $az = xy$, вырезанной цилиндром $x^2 + y^2 = R^2$.

Ответ: $S = \frac{2\pi}{3a}(\sqrt{(a^2 + R^2)^3} - a^3)$.

7. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a} = 2x^2 y\vec{i} - yz^2\vec{j} + \frac{x}{y}\vec{k}$ в произвольной точке и в точке $M_0(-1, 1, 2)$.

Ответ: $\operatorname{div} \vec{a}(M_0) = -8, \operatorname{rot} \vec{a}(M_0) = 5\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х ч. Ч. 2: учебное пособие для вузов. – 6-е изд., испр.- М.: Высш. шк., 2003. – 416 с.:ил.

Исрапилов Р. Б., Баутин С. П. Курс математики. Часть 3. Математический анализ функций нескольких переменных. – Екатеринбург: УГГГА, 1996.

Письменный Д. Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс. -13-е изд.- М.: Айрис-пресс, 2015.- 608 с.: ил.- (Высшее образование).

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»



МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

по выполнению самостоятельной работы по дисциплине

Б1.О.12 МАТЕМАТИКА

Специальность
21.05.04 Горное дело

Направленность (профиль) подготовки
Горные машины и оборудование

Форма обучения: **очная, заочная**

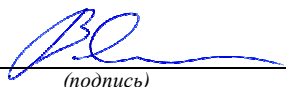
Год набора: **2022**

Автор: Заславская С. В., доцент, к. т. н.

Одобрены на заседании кафедры

Математики
(название кафедры)

Зав. кафедрой


(подпись)

Сурнев В. Б.
(Фамилия И.О.)

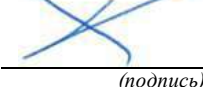
Протокол № 1 от 27.09.2021

(Дата)

Рассмотрены методической комиссией

горно-механического факультета
(название факультета)

Председатель


(подпись)

Осипов П. А.
(Фамилия И.О.)

Протокол № 2 от 12.10.2021

(Дата)

Екатеринбург

БИЛЕТ №1

№	Задание	Балл
1	Решить систему уравнений: $AX=B$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$	0,5
2	Вычислить площадь треугольника ABC, где A(2,3,-1), B(4,4,2), C(0,1,3)	0,5
3	Определение производной. Основные формулы дифференцирования. Найти производные: $\ln \frac{(x^2 + 1)}{\sqrt[3]{x^3 + 2x}}$	1
4	Определенный интеграл, геометрический смысл. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 0, y = x^2, y = 3$	1
5	Найти первообразные: $\int (x + 1) \sin x dx, \quad \int \frac{x^3 - 3x^2}{2x} dx$	1
6	Функции нескольких переменных. Найти частные производные первого порядка функции: $z = x * \sin xy$	1
7	Дифференциальные уравнения первого порядка. Найти общее решение уравнений: $\sin^2 xy' = y^2, \quad y' e^{2x} = y$	2
8	Решить задачу Коши для уравнений второго порядка: $y'' + 6y' + 9y = 2x, y(0)=1, y'(0) = 0$	1
9	Степенные ряды. Разложить в ряд функцию: $y = e^{x^2}$	1
10	Нормальный закон распределения случайной величины. Найти вероятность P ($1 < x \leq 3$), $a=4$ – математическое ожидание. $\sigma=3$ средне-квадратичное отклонение.	1

БИЛЕТ № 2

№	Задание	Балл
1	Найти длины и углы треугольника ABC, где A(3,1,2), B(4,0,2), C(2,-1,3)	1
2	Первый замечательный предел. Найти: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{3x}$	0,5
3	Исследовать функцию. $y = e^{x^2}$. Экстремум возрастания, убывания. Точки перегиба	1
4	Определенный интеграл, геометрический смысл. Вычислить объем тела вращения вокруг оси OX фигуры: $y = 3, y = x^2, x = 0$	0.5
5	Функции нескольких переменных. Найти производную $\frac{\partial z}{\partial u}$, если $z(x, y) = 2xy^2, x(u, v) = \sin(2u - v), y(u, v) = u^2$	1
6	Дифференциальные уравнения первого порядка. Найти общее решение уравнений: $y' = \sin x * y, \quad yy' = \frac{1 - 2x}{y^2}$	2
7	Найти частные решения уравнений: $y'' + 4y' - 5y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 1$	1
8	Числовые ряды. Область сходимости. Найти область сходимости ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^3 + 1)x^n}{3^n}$	1
9	Найти координаты центра тяжести плоской однородной пластины: $y = 0, \quad y = x, \quad x = 3$	1
10	Закон распределения дискретной случайной величины. Биномиальный закон распределения. Привести пример.	1

№	Задание	Балл
1	Решить систему уравнений Методом Крамера: $AX=B$	1
2	Матричным методом: $AX=B$, $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$	1
3	Найти площадь треугольника ABC, A(3,2,1), B(-1,4,3), C(1,2,4)	1
4	Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{6x}$	1
5	Найти расстояние от точки A до прямой BC, где A(1,3), B(5,0), C(2,1)	1

Билет 2

№	Задание	Балл
1	Найти обратную матрицу A^{-1} , матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$	1
2	Написать уравнение плоскости M_1 , M_2 , M_3 , где M_1 (1,-1,2), M_2 (3,2,1), M_3 (0,1,2)	1
3	Найти пересечение прямых $2x - 3y = 1$, $3x + 5y = -2$	1
4	Вычислить предел: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{1000x^2 - 2}$	1
5	Построить кривую: $x^2 + 2y^2 - 4y + 4 = 0$	1

Контрольная 2

Билет 1

№	Задание	Балл

1	Найти первообразные $\int x + \frac{2}{x} dx, \quad \int \frac{\ln^4 x}{x} dx, \quad \int e^{-2x} x dx$	2
2	Определенный интеграл. Вычислить площадь фигуры: $y = 2x - x^2, y = -x + 2$	0.5
3	Решить дифференциальное уравнение: $y'' + 6y' + 9y = 7xe^{-3x}$	1
4	Найти $\text{grad}U$, где $U = x^2y + z^2x + x$ в точке P (1,0,1)	0.5
5	Решить задачу Коши: $y'' = \sin \frac{x}{5}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$	1

Билет 2

№	Задание	Балл
1	Найти первообразные $\int \sin^2 x dx, \quad \int \frac{dx}{x^2 + 2x}, \quad \int \frac{dx}{\sin^2 4x}$	1
2	Определенный интеграл. Найти объем тела вращения плоской фигуры: $y = 0, y = x^2, x = 1$ вокруг оси OX	1
3	Решить дифференциальное уравнение: $yy' = \frac{1 - 2x}{y}$	1
4	Найти частное решение уравнения: $y'' + 4y' - 5y = 0, y(0)=1, y'(0) = 0$	1
5	Найти частные производные функции: $z = x^2y + \sin(xy)$	1

Контрольная 3

Билет 1

№	Задание	Балл
1	Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n^2}$	1

2	Разложить в ряд функцию: $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{3}}$	1
3	Найти область сходимости: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{n9^n}$	1
4	Вычислить: $\iint_D x^2 + y^2 dx dy$ D: $y = x^3, y = 0, x = 2$	1
5	Вычислить работу силы $\vec{F}\{xy, x^2y^2\}$ вдоль кривой $y = x^3$ от точки (1,1) до точки (2,8)	1

Билет 2

№	Задание	Балл
1	Признак Коши сходимости степенного ряда. Исследовать сходимость по Коши $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$	1
2	Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n(x-2)^{2n}}{n}$	1
3	Разложить в ряд по степеням $x-1$ функцию $f(x) = \ln x$	1
4	Найти объем тела, ограниченного поверхностями: $y = x^2, y = 0, 2y + x - 1 = 0$	1
5	Найти центр масс плоской однородной пластины: $y^2 = x, y = x^2$	1

Типовые контрольные задания и материалы
зачеты

Зачет 1
Билет 1

№	Задание	Балл
1	Решить систему уравнений матричным методом: $AX=B$ $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$	1
2	Векторы. Найти площадь треугольника ABC, где A(3,2,1), B(-1,4,2), C(0,1,3)	1
3	Первый замечательный предел. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{3x^2}$	1
4	Производная, определение. Найти производные функций $\cos^2 x * 3^{x^2}, \frac{\ln^2 x}{x^2 + 2x}$	1
5	Найти асимптоты функции $f(x) = \frac{x}{x+2}$	1

Билет 2

№	Задание	Балл
1	Написать уравнение плоскости M_1, M_2, M_3 , где $M_1(3,0,4)$, $M_2(1,2,3)$, $M_3(-1,4,5)$	1
2	Вычислить предел: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + x^2}{x^3 - 3x + 1}$ Правило нахождения пределов частного двух многочленов при $x \rightarrow \infty$	1
3	Построить функцию: $x^2 + y^2 + 2x + 3y - 4 = 0$	1
4	Определение производной. Найти производные: $x^3 * \ln(x^2 + 1), \frac{\sin^2 x}{x^3 + 1}$	1
5	Исследовать функцию и построить график $y = x^4 - 4x^2$	1

Зачет 2

Билет 1

№	Задание	Балл

1	Найти первообразные: $\int \frac{dx}{3-2x}, \quad \int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x}, \quad \int \frac{x}{x^2+x+1} dx$	1
2	Определенный интеграл. Вычислить площадь фигуры, ограниченной $\begin{cases} x = 5(t - \sin t) \\ y = 5(1 - \cos t) \end{cases}$ – параметрическое уравнение арки циклоида	1
3	Найти экстремум функции двух переменных: $z = x^2 - xy - y^2 + x + y$	1
4	Найти общее решение дифференциального уравнения: $(1+x^2)y' + (1+y)y = 0$	1
5	Найти частное решение уравнения $y'' + 4y' + 5y = 0, y(0)=1, y'(0) = 0$	1

Билет 2

№	Задание	Балл
1	Найти первообразные: $\int (x+5)^2 dx, \quad \int (x+1) \sin x dx, \quad \int \frac{dx}{2x^2+2x-1}$	1
2	Определенный интеграл. Найти объем тела вращения вокруг оси ОХ фигуры $y=0, y=x^2-1, x=0$	1
3	Найти производную функции $U = x * \ln(x^2 + y^2) + 2z^2$ по направлению $\overrightarrow{PQ}$, где P (1,0,1), Q (-1,3,7)	1
4	Найти общее решение дифференциального уравнения: $xy'' = 2$	1
5	Найти частное решение дифференциального уравнения: $y'' + 2(y')^3 = 0, y(0)=0, y'(0) = 1$	1



Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации
ФГБОУ ВО
«Уральский государственный горный
университет»

**Д. В. Исламгалиев
Г. В. Петровских, В. Б. Пяткова**

МАТРИЦЫ. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

***Методические указания
и варианты контрольных и
самостоятельных работ
по разделу дисциплины «Математика»
для студентов всех специальностей
очного обучения***

Екатеринбург

2019

П

Рецензент: В. Я. Раевский, доцент, к.ф.-м.н., с.н.с. лаборатории теоретической физики ИФМ.

Учебное пособие рассмотрено на заседании кафедры математики 28.05.2019 г. (протокол № 141) и рекомендовано для издания в УГГУ.

Исламгалиев Д. В., Петровских Г. В., Пяткова В. Б.,

П МАТРИЦЫ. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ: методические указания и варианты контрольных и самостоятельных работ по разделу дисциплины «Математика» для студентов всех специальности очного обучения”

– Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2019. – с.

Учебно-методическое пособие предназначено студентам всех специальностей для изучения темы: «Матрицы. Определители. Системы линейных алгебраических уравнений».

© Исламгалиев Д. А., Петровских Г.В., Пяткова В.Б., 2019

© Уральский государственный горный университет, 2019

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
1. МАТРИЦЫ	5
1.1. Действия над матрицами	6
1.2. Определители	8
1.3. Обратная матрица	11
2.4. Ранг матрицы	12
2. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ (СЛАУ)	13
2.1. Методы решений определенной неоднородной СЛАУ	16
2.2. Метод решения неопределенных неоднородных СЛАУ	23
2.3. Методы решений определенной однородной СЛАУ	25
2.4. Методы решений неопределенной однородной СЛАУ	27
3. ВАРИАНТЫ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ	29
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	59

ВВЕДЕНИЕ

Данные методические указания по теме «Матрицы. Определители. Системы линейных алгебраических уравнений» могут быть использованы как для проведения контрольных работ, так и для самостоятельной работы студентов. Они удовлетворяют всем требованиям государственного образовательного стандарта по подготовке дипломированных специалистов всех специальностей.

В методических указаниях представлены основные теоретические сведения и разобраны примеры решения задач по теме «Матрицы. Определители. Системы линейных алгебраических уравнений» для студентов всех специальностей. Приведены решения большого количества типовых задач и варианты контрольных работ.

После изучения теории и решений типовых задач студенту рекомендуется самостоятельно решить один из вариантов контрольных работ.

МАТРИЦЫ

Матрица – это прямоугольная таблица чисел, расположенных в m строках и n столбцах. Матрицы обозначаются большими латинскими буквами: A , B , C и т.д.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

Числа ,входящие в таблицу называются ее элементами и обозначаются символом a_{ij} , где первый индекс i определяет номер строки, второй индекс j – номер столбца. Выражение $m \times n$ и называют размерностью матриц.

Например, матрица A имеет размерность 2×3 :

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 8 \\ 5 & 9 \\ -1 & 3 \end{pmatrix},$$

а матрица B имеет размерность 3×2 :

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -3 \\ 7 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Если в матрице число строк совпадает с числом столбцов, то матрица называется квадратной. Понятие размерности матрицы для квадратной матрицы заменяют понятием порядок матрицы. Порядок квадратной матрицы равен числу строк или столбцов этой матрицы.

Для квадратной матрицы вводятся понятия главной и побочной диагоналей. Главная диагональ состоит из элементов a_{ij} с одинаковыми индексами, побочная диагональ состоит из элементов a_{ij} сумма индексов которых равна $n+1$. Если элементы квадратной матрицы, стоящей на главной диагонали, равны единице, а все остальные равны нулю, то матрица называется единичной и обозначается

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

1.1. ДЕЙСТВИЯ НАД МАТРИЦАМИ

Сложение матриц

Операция сложения вводится только для матриц, имеющих одинаковые размерности. Суммой двух матриц называют такую матрицу, у которой каждый элемент равен сумме соответствующих элементов исходных матриц.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & a_{13} \pm b_{13} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & a_{23} \pm b_{23} \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

Пример 1.1. Даны матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 4 & -5 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Найти $A + B$; $B - A$.

$$\text{Решение: } A + B = \begin{pmatrix} 10 & 7 \\ 6 & -4 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}; \quad B - A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & -6 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Умножение матрицы на число

Для того чтобы умножить матрицу на число следует каждый элемент матрицы умножить на это число.

$$\lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

Пример 1.2. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -3 \\ 7 & 5 & -1 \end{pmatrix}$. Найти матрицу $-3A \cdot A \cdot B$

Решение:

$$-3 \cdot A = -3 \cdot \begin{pmatrix} 4 & 5 & -3 \\ 7 & 5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & -15 & 9 \\ -21 & -15 & 3 \end{pmatrix}.$$

Умножение матриц

Произведение двух матриц определяется тогда, когда количество столбцов первой матрицы совпадает с количеством строк второй матрицы. Элемент c_{ij} матрицы произведения, стоящий на пересечении i -той строки и j -того столбца равен сумме произведений элементов i -той строки первой матрицы на элементы j -того столбца второй матрицы, т.е. по формуле $c_{ij} = \sum_k a_{ik} \cdot b_{kj}$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

Пример 1.3. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$. Найти произведение матриц: $A \cdot B$ и $B \cdot A$.

Решение:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 3 + 5 \cdot (-1) + 1 \cdot 7 & 4 \cdot 0 + 5 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \\ 3 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 7 & 3 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 11 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 4 + 0 \cdot 3 & 3 \cdot 5 + 0 \cdot 2 & 3 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) \\ -1 \cdot 4 + 2 \cdot 3 & -1 \cdot 5 + 2 \cdot 2 & -1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) \\ 7 \cdot 4 + 1 \cdot 3 & 7 \cdot 5 + 1 \cdot 2 & 7 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 15 & 3 \\ 2 & -1 & -3 \\ 31 & 37 & 6 \end{pmatrix}$$

Отметим, что произведение матриц некоммутативное, т.е. $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Транспонирование матрицы

Транспонированной к матрице A называется матрица, полученная из матрицы A путем замены строки на столбец с такими же индексами. Транспонированная матрица обозначается A^T .

Если $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$, то $A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{pmatrix}$ (1.5)

Пример 1.4. Найти транспонированную матрицу, к матрице $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение:

$$A^T = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 7 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.2. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

Определитель – это числовая характеристика квадратной матрицы. Определители в литературе обозначаются $\det A$, ΔA , $|A|$.

Определитель первого порядка

Определителем матрицы первого порядка, составленной из числа a_{11} , называется само число a_{11}

$$\det A = a_{11} \quad (1.6)$$

Определитель второго порядка

Определителем матрицы второго порядка, составленной из чисел $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$, называется число, определяемое равенством

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad (1.7)$$

Числа $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ называются элементами определителя, причем элементы a_{11}, a_{22} образуют главную диагональ, а элементы a_{12}, a_{21} – побочную диагональ. Таким образом, определитель второго порядка равен произведению элементов главной диагонали минус произведение элементов побочной диагонали.

Пример 1.5. Вычислить определитель $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}$.

Решение:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-2) - 3 \cdot 4 = -14$$

Пример 1.6. Вычислить определитель $\det A = \begin{vmatrix} -5 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$.

Решение:

$$\det A = \begin{vmatrix} -5 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -5 \cdot 1 - (-3) \cdot 4 = 7.$$

Определитель третьего порядка

Рассмотрим определитель третьего порядка:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Минором M_{ij} элемента a_{ij} называется определитель, который получается вычеркиванием из данного определителя i -той строки и j -того столбца.

Алгебраическое дополнение A_{ij} элемента a_{ij} определяется по формуле

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij},$$

где M_{ij} – минор для элемента со строкой i и столбцом j .

Определителем третьего порядка, составленным из чисел $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33}$, называется число:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^3 a_{ik} \cdot A_{ik}; \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^3 a_{kj} \cdot A_{kj} \quad (1.8)$$

для фиксированного значения i -той строки или j -того столбца.

Такие равенства называют разложением определителя по элементам строки или столбца.

Тогда разложение определителя третьего порядка по первой строке примет вид:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \\ + (-1)^{1+3} \cdot a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}, \quad (1.9)$$

а разложение по второму столбцу принимает вид:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+2} \cdot a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} \cdot a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \\ + (-1)^{3+2} \cdot a_{32} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}. \quad (1.10)$$

Пример 1.7. Вычислить определитель $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$.

а) разложением по элементам первой строки;

б) разложением по элементам третьего столбца

Решение:

$$\begin{aligned} \text{а) } \det A &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 1 \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 2 \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot 3 \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = \\ &= 1(5 \cdot 9 - 6 \cdot 8) - 2(4 \cdot 9 - 6 \cdot 7) + 3(4 \cdot 8 - 5 \cdot 7) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 б) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} &= (-1)^{1+3} \cdot 3 \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} \cdot 6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3} \cdot 9 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = \\
 &= 3 \cdot (4 \cdot 8 - 5 \cdot 7) - 6 \cdot (1 \cdot 8 - 2 \cdot 7) + 9(1 \cdot 5 - 2 \cdot 4) = \\
 &= 3 \cdot (-3) - 6(-6) + 9 \cdot (-3) = 0
 \end{aligned}$$

Пример 1.8. Вычислить определитель $\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 2 & 7 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix}$.

Решение: Так как наибольшее количество нулей в третьем столбце, то воспользуемся разложением по третьему столбцу (при этом второе и третье слагаемые будут равны нулю):

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 2 & 7 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3} \cdot 5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + 0 + 0 = 5(-2 - 21) = -115.$$

1.3. ОБРАТНАЯ МАТРИЦА

Рассмотрим квадратную матрицу A порядка n . Если существует квадратная матрица B такая, что $AB = BA = E$, то матрица B называется обратной к матрице A и обозначается A^{-1} . Обратную матрицу A^{-1} можно найти по формуле:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (A^*)^T \quad (\det A \neq 0), \quad (1.11)$$

где A^* – матрица алгебраических дополнений A_{ij} :

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}, \quad A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$$

M_{ij} – миноры для элементов a_{ij} со строкой i и столбцом j .

После нахождения обратной матрицы можно воспользоваться проверкой,

$$A \cdot A^{-1} = E, \text{ т.е.} \quad (1.12)$$

должна получиться единичная матрица Е.

Пример 1.9. Найти обратную матрицу для матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 \\ -1 & 4 & 3 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение:

1) Найдем определитель матрицы

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 4 \\ -1 & 4 & 3 \\ -3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 4$$

2) Найдем алгебраические дополнения:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -6 \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 8 \quad A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -4$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = -9 \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = 12 \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -4$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 10 \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = -12 \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 4$$

$$A^* = \begin{pmatrix} -6 & -9 & 10 \\ 8 & 12 & -12 \\ -4 & -4 & 4 \end{pmatrix}, \quad (A^*)^T = \begin{pmatrix} -6 & 8 & -4 \\ -9 & 12 & -4 \\ 10 & -12 & 4 \end{pmatrix},$$

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -6 & 8 & -4 \\ -9 & 12 & -4 \\ 10 & -12 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.5 & 2 & -1 \\ -2.25 & 3 & -1 \\ 2.5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Проверка:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 \\ -1 & 4 & 3 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1.5 & 2 & -1 \\ -2.25 & 3 & -1 \\ 2.5 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.4. РАНГ МАТРИЦЫ

Рассмотрим матрицу размерности $m \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Рангом матрицы $\text{rang}(A)$ называют наибольший из порядков миноров данной матрицы, отличных от нуля.

Пример 1.10. Найти ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

Решение:

Для большего понимания миноры будем обозначать M_k , где k – количество строк и столбцов для выбранного минора.

$$M_1 = |1| = 1, \text{ то } \text{rang}(A) \geq 1$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 - 2 \cdot 4 = -3, \text{ то } \text{rang}(A) \geq 2$$

$$\begin{aligned} M_3 &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} 1 \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} 2 \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} 3 \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = \\ &= 1(5 \cdot 9 - 6 \cdot 8) - 2(4 \cdot 9 - 6 \cdot 7) + 3(4 \cdot 8 - 5 \cdot 7) = 0 \end{aligned}$$

Так как больше нет M_3 , то $\text{rang}(A) = 2$.

1. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ (СЛАУ)

Системой линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), содержащей m уравнений и n неизвестных, называется система вида

$$(2.1)$$

$i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$. Такую систему удобно записывать в матричной форме:

$$(2.2)$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} - \text{основная матрица}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} - \text{матрица-столбец из}$$

неизвестных, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$ – матрица-столбец из свободных членов.

Расширенной матрицей $\overline{A}$ называют матрицу A с присоединенной матрицей B :

(2.3)

Система уравнений называется совместной, если она имеет хотя бы одно решение, в противном случае – система несовместна.

Теорема 2.1: СЛАУ совместна тогда и только тогда, когда ранг расширенной матрицы равен рангу основной матрицы.

Пример 2.1. Дана расширенная матрица СЛАУ: $\bar{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{array} \right)$. Найти ранг основной и расширенных матриц. Определить совместна ли соответствующая СЛАУ.

Решение:

1) Найдем ранг основной матрицы СЛАУ:

$$M_1 = |1| = 1, \text{ то } \text{rang}(A) \geq 1.$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0, \text{ то } \text{rang}(A) = 1.$$

2) Так как все миноры основной матрицы включаются в расширенную, то найдем оставшиеся миноры для расширенной:

$$\bar{M}_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -1, \text{ то } \text{rang}(\bar{A}) = 2.$$

Так как $\text{rang}(\bar{A}) = 2$ и $\text{rang}(A) = 1$, то СЛАУ несовместна и не имеет решения.

Пример 2.2. Дана расширенная матрица СЛАУ: $\bar{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{array} \right)$. Найти ранг основной и расширенных матриц. Определить совместна ли СЛАУ.

Решение:

1) Найдем ранг основной матрицы СЛАУ:

$$M_1 = |1| = 1, \text{ то } \text{rang}(A) \geq 1.$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0, \text{ то } \text{rang}(A) = 1.$$

2) Так как все миноры основной матрицы включаются в расширенную, то найдем оставшиеся миноры для расширенной:

$$\bar{M}_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 0, \bar{M}_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 0, \text{ то } \text{rang}(\bar{A}) = 1.$$

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \det A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \dots, \det A_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix}$$

3) Найти решение определенной неоднородной СЛАУ:

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A}, x_2 = \frac{\det A_2}{\det A}, \dots, x_n = \frac{\det A_n}{\det A}.$$

Пример 2.3. Решить СЛАУ, используя метод Крамера:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = -4 \\ -x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

Решение:

1) Вычисляем определитель матрицы СЛАУ:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - (-3) \cdot (-1) = -1 \neq 0.$$

Система имеет единственное решение.

2) Найдем определители $\det A_1$, $\det A_2$:

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} -4 & -3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1, \det A_2 = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2.$$

3) Найдем решение определенной неоднородной СЛАУ:

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{-1}{-1} = 1; x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{-2}{-1} = 2.$$

Ответ: $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$

Пример 2.4. Решить СЛАУ, используя метод Крамера:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11. \end{cases}$$

Решение:

1) Вычисляем определитель матрицы СЛАУ:

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 12.$$

Так как $\det A \neq 0$, то система уравнений совместна и определённа.

2) Для нахождения её решения используем формулы Крамера:

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 11 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 24, \det A_2 = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 11 & 3 \end{vmatrix} = -24, \det A_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 11 \end{vmatrix} = 36.$$

3) Найдем решение определенной неоднородной СЛАУ:

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{24}{12} = 2, \quad x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{-24}{12} = -2, \quad x_3 = \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{36}{12} = 3.$$

$$\text{Ответ: } X = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Матричный метод (метод обратной матрицы)

1) Найти определитель основной матрицы A неоднородной СЛАУ:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Если определитель основной матрицы A неоднородной СЛАУ отличен от нуля, то СЛАУ является определенной (имеет единственное решение).

2) Найдем обратную матрицу A^{-1} .

3) Решение находится в виде

$$X = A^{-1}B.$$

Пример 2.5. Решить СЛАУ, используя матричный метод :

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = -4 \\ -x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

Решение: Представим СЛАУ в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1) Вычисляем определитель матрицы СЛАУ:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - (-3) \cdot (-1) = -1 \neq 0,$$

то система имеет единственное решение.

2) Найдем обратную матрицу:

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

3) Тогда решение находим в виде:

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$

Пример 2.6. Решить СЛАУ, используя матричный метод:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11. \end{cases}$$

Решение: Представим СЛАУ в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

1) Вычисляем определитель матрицы СЛАУ:

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 12.$$

Так как $\det A \neq 0$, то система уравнений является совместной и определенной.

2) Найдем обратную матрицу:

$$A^{-1} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 8 & -4 & -4 \\ -5 & 7 & 1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 8 & -5 & -1 \\ -4 & 7 & -1 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

3) Тогда решение находим в виде:

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 8 & -5 & -1 \\ -4 & 7 & -1 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $X = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$

Метод Гаусса

1) Найти определитель основной матрицы A неоднородной СЛАУ:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Если определитель основной матрицы A неоднородной СЛАУ отличен от нуля, то СЛАУ является определенной (имеет единственное решение).

2) Запишем СЛАУ в расширенном матричном виде:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array} \right) \sim .$$

3) Преобразуем вторую, третью и т.д. строки, чтобы получить нули вместо

a_{21}, a_{31}, a_{n1} , то есть по формуле $\bar{a}_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{ij}}{a_{1j}} a_{1j}$ и $\bar{b}_j = b_j - \frac{b_j}{a_{1j}} a_{1j}$:

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & \bar{a}_{22} & \dots & \bar{a}_{2n} & \bar{b}_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \bar{a}_{n2} & \dots & \bar{a}_{nn} & \bar{b}_n \end{array} \right) \sim.$$

4) Продолжая данные преобразования, получим со второй, третьей и т.д. строками, получим

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & \bar{a}_{22} & \dots & \bar{a}_{2n} & \bar{b}_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \bar{a}_{nn} & \bar{b}_n \end{array} \right) \sim.$$

5) После чего можно найти x_n , т.е. требуется разделить последнюю строку на $\bar{a}_{nn}$, тогда

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & \bar{a}_{22} & \dots & \bar{a}_{2n} & \bar{b}_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \bar{b}_n \end{array} \right) \sim.$$

6) Тогда преобразуя элементы a_{ij} , если $i \neq j$, и преобразуя a_{ii} в единицы, получим решение СЛАУ:

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & \bar{b}_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \bar{b}_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \bar{b}_n \end{array} \right).$$

Пример 2.7. Решить СЛАУ, используя метод Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = -4 \\ -x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

Решение: Представим СЛАУ в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1) Вычисляем определитель матрицы СЛАУ:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - (-3) \cdot (-1) = -1 \neq 0,$$

то система имеет единственное решение.

2) Запишем СЛАУ в виде расширенной матрицы и получим решение:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{1c \cdot (-1)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{2c - 2 \cdot 1c} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{2c \cdot (-1)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{1c + 2c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

или

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{1c + 3 \cdot 2c} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{1c \cdot (-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{2c + 1c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$

Пример 2.8. Решить СЛАУ, используя метод Гаусса:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11. \end{cases}$$

Решение: Представим СЛАУ в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

1) Вычисляем определитель матрицы СЛАУ:

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 12.$$

2) Запишем СЛАУ в виде расширенной матрицы и получим решение:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 11 \end{array} \right) \begin{array}{c} 2c-1c \\ \sim \\ 3c-3 \cdot 1c \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & 0 & -4 \\ -7 & -5 & 0 & -4 \end{array} \right) \begin{array}{c} 3c+5 \cdot 2c \\ \sim \\ 1c \cdot (-12) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & 0 & -4 \\ -12 & 0 & 0 & -24 \end{array} \right) \\ & \begin{array}{c} 1c \cdot (-12) \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{c} 2c+3c \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{c} 1c-2 \cdot 2c-3 \cdot 3c \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right) \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Ответ: $X = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Теорема 2.3. Если ранг совместной системы меньше числа неизвестных, то система имеет бесчисленное множество решений.

Пусть имеется система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), содержащая m уравнений и n неизвестных:

[illegible]

1) Найдем ранг основной матрицы для неоднородной СЛАУ.

2) Найдем ранг расширенной матрицы для неоднородной СЛАУ. Проверим СЛАУ на совместность и на неопределенность. Будем обозначать найденные миноры n -ого порядка расширенной матрицы $\tilde{M}_n$.

3) Если СЛАУ совместно и неопределенно решим СЛАУ, например, методом Гаусса.

Решение неопределенных неоднородных СЛАУ называют общим решением.

Пример 2.9. Дано СЛАУ $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \end{cases}$. Найти решение СЛАУ.

Решение: Представим СЛАУ в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ или } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \end{array} \right).$$

1) Найдем ранг основной матрицы:

$$M_1 = |1| = 1, \text{ то } \text{rang}(A) \geq 1$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1, \text{ то } \text{rang}(A) = 2.$$

2) Так как строк в основной и расширенной матриц две, то и ранг расширенной матрицы $\text{rang}(\bar{A}) = 2$. СЛАУ совместна и неопределенна.

3) Найдем общее решение СЛАУ. Так как $\text{rang}(\bar{A}) = 2$, требуется две строки (два уравнения):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \end{array} \right) \sim |x_3 = a| \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1+3a & 2c-1c \\ 1 & 2 & 4+a & \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1+3a & 1c-2c \\ 0 & 1 & 3-2a & \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -2+5a \\ 0 & 1 & 3-2a \end{array} \right).$$

Тогда общее решение

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+5a \\ 3-2a \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} a, \quad a \in R.$$

Пример 2.10. Дано СЛАУ
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 6 \end{cases}$$
. Найти решение СЛАУ.

Решение: Представим СЛАУ в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ или } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 2 & 2 & 2 & | & 4 \\ 3 & 3 & 3 & | & 6 \end{pmatrix}.$$

1) Найдем ранг основной матрицы:

$$M_1 = |1| = 1, \text{ то } \text{rang}(A) \geq 1$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0, M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 0, M_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 0, \text{ то } \text{rang}(A) = 1.$$

2) Найдем ранг расширенной матрицы:

$$\bar{M}_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0, \bar{M}_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 0, \bar{M}_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 0, \text{ то } \text{rang}(\bar{A}) = 1.$$

СЛАУ совместна и неопределенна.

3) Найдем общее решение СЛАУ. Так как $\text{rang}(\bar{A}) = 1$, требуется одна любая строчка (любое уравнение):

$$(1 \ 1 \ 1 | 2) \sim \begin{vmatrix} x_1 = a \\ x_2 = b \end{vmatrix} \sim (1 | 2 - a - b).$$

Тогда общее решение

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 2 - a - b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} a + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} b; \ a, b \in R.$$

2.3. МЕТОДЫ РЕШЕНИЙ ОПРЕДЕЛЕННОЙ ОДНОРОДНОЙ СЛАУ

Пусть имеется система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), содержащая m уравнений и n неизвестных:

[illegible]

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{или } AX = B.$$

Воспользовавшись теоремой 3.2, если

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

то однородное СЛАУ имеет единственное нулевое решение. Такое решение называют тривиальным.

Пример 2.11. Решить СЛАУ, используя матричный метод:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение: Представим СЛАУ в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1) Вычисляем определитель матрицы СЛАУ:

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 12 \neq 0.$$

СЛАУ имеет тривиальное решение, т.е. $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2.4. МЕТОДЫ РЕШЕНИЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОЙ ОДНОРОДНОЙ СЛАУ

Пусть имеется система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), содержащая t уравнений и n неизвестных:

[illegible]

Заметим, что ранги основной и расширенной матриц в однородной СЛАУ всегда совпадают, то есть однородная СЛАУ всегда совместна.

Теорема 2.4. Если в совместной системе ранг основной матрицы меньше числа неизвестных, то система имеет бесчисленное множество решений.

1) Найдем ранг основной и расширенной матриц для однородной СЛАУ. Проверим СЛАУ на неопределенность.

2) Если СЛАУ совместна и неопределенна решим СЛАУ, например, методом Гаусса.

Решение неопределенных однородных СЛАУ называют фундаментальной системой решений.

Пример 2.12. Дана СЛАУ
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$
. Найти решение СЛАУ.

Решение: Представим СЛАУ в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ или } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 2 & 2 & 2 & | & 0 \\ 3 & 3 & 3 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

1) Найдем ранг основной матрицы:

$$M_1 = |1| = 1, \text{ то } \text{rang}(A) \geq 1$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 0, \quad M_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 0, \text{ то } \text{rang}(A) = 1 \text{ и } \text{rang}(\bar{A}) = 1.$$

СЛАУ неопределенна.

2) Найдем фундаментальную систему для однородной СЛАУ. Так как $\text{rang}(\bar{A}) = 1$, требуется одна любая строчка (любое уравнение):

$$(1 \quad 1 \quad 1 | 0) \sim \begin{cases} x_1 = a \\ x_2 = b \end{cases} \sim (1 | -a - b).$$

Тогда общее решение

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ -a - b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} a + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} b; a, b \in R.$$

Классификация систем линейных алгебраических уравнений.

СЛАУ				
ОДНОРОДНАЯ СЛАУ		НЕОДНОДНАЯ СЛАУ		
СОВМЕСТИНАЯ СЛАУ		СОВМЕСТИНАЯ СЛАУ		НЕСОВМЕСТИНАЯ СЛАУ
ОПРЕДЕЛЕННАЯ СЛАУ	НЕОПРЕДЕЛЕННАЯ СЛАУ	ОПРЕДЕЛЕННАЯ СЛАУ	НЕОПРЕДЕЛЕННАЯ СЛАУ	_____
ТРИВИАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ	ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ СИСТЕМА	ЕДИНСТВЕННОЕ РЕШЕНИЕ	ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ	НЕТ РЕШЕНИЯ

2. ВАРИАНТЫ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

Вариант 1

1. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Найти матрицу $C = (A + 3A^T) \cdot B$.

2. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -2 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

4. Решить систему уравнений $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8 \\ 2x_1 - 4x_2 - 3x_3 = -1 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

а) матричным методом;

б) методом Крамера;

в) методом Гаусса.

5. Дана система линейных уравнений $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_5 = 6 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 - x_5 = 5 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 - 10x_5 = 14 \end{cases}$

а) проверить, является ли система уравнений совместной;

б) если система уравнений совместна, то найти её общее решение;

в) найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.

Вариант 2

1. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Найти матрицу $B = A^2 - 3A^T$.

2. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -7 & -6 \\ 3 & 16 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 0 & -3 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

4. Решить систему уравнений $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 9 \\ 5x_1 + 8x_2 - x_3 = 7 \end{cases}$

а) матричным методом;

б) методом Крамера;

в) методом Гаусса.

5. Дана система линейных уравнений $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = -3 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = -1 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 6 \end{cases}$

а) проверить, является ли система уравнений совместной;

б) если система уравнений совместна, то найти её общее решение;

в) найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.

Вариант 3

1. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Найти матрицу $B = A \cdot A^T - 2E$.

2. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 5 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$.

4. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 21 \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -16 \\ 3x_1 - 5x_2 - 6x_3 = -41 \end{cases}$$

а) матричным методом;

б) методом Крамера;

в) методом Гаусса.

5. Дана система линейных уравнений
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 4 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 6 \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 6 \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 14 \end{cases}$$

а) проверить, является ли система уравнений совместной;

б) если система уравнений совместна, то найти её общее решение;

в) найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.

Вариант 4

1. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Найти матрицу $C = A \cdot A^T + 2B$.

2. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 10 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$.

4. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 4 \\ 5x_1 + 2x_2 + 13x_3 = 2 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$$

а) матричным методом;

б) методом Крамера;

в) методом Гаусса.

5. Дана система линейных уравнений
$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 1 \\ 4x_1 - 10x_2 + 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 1 \\ 2x_1 - 14x_2 + 7x_3 - 7x_4 + 11x_5 = -1 \end{cases}$$

а) проверить, является ли система уравнений совместной;

б) если система уравнений совместна, то найти её общее решение;

в) найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.

Вариант 5

1. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$. Найти матрицу $X = A^T \cdot A - 4B$.

2. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & -3 \end{vmatrix}$.

4. Решить систему уравнений $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -2 \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$

а) матричным методом;

б) методом Крамера;

в) методом Гаусса.

5. Дана система линейных уравнений $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 1 \\ 13x_1 + 8x_2 + 4x_3 - 3x_4 + 6x_5 = 9 \\ 5x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 6x_5 = 3 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 2 \end{cases}$

а) проверить, является ли система уравнений совместной;

б) если система уравнений совместна, то найти её общее решение;

в) найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.

Вариант 6

1. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} -4 & 5 & 6 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Найти матрицу $C = A^T \cdot A + 5E$.

2. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ -10 & 8 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 0 & -3 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 5 & 1 \end{vmatrix}$.

4. Решить систему уравнений $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 8 \end{cases}$

а) матричным методом;

б) методом Крамера;

в) методом Гаусса.

5. Дана система линейных уравнений $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 6x_4 + 9x_5 = 2 \\ x_2 - 2x_3 + 2x_4 + 3x_5 = -7 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 3 \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 6x_5 = 1 \end{cases}$

а) проверить, является ли система уравнений совместной;

б) если система уравнений совместна, то найти её общее решение;

в) найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.

Вариант 7

1. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

Найти матрицу $C = (2A^T - B) \cdot A$

2. Решить матричное уравнение $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & 3 \\ 4 & 0 & 5 & 4 \end{vmatrix}$.

4. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 2 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 3 \end{cases}$$

а) матричным методом;

б) методом Крамера;

в) методом Гаусса.

5. Дана система линейных уравнений
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 + 2x_5 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 - x_5 = -1 \\ 5x_1 - 5x_2 + 12x_3 + 11x_4 - 4x_5 = -4 \\ x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 3x_5 = -2 \end{cases}$$

а) проверить, является ли система уравнений совместной;

б) если система уравнений совместна, то найти её общее решение;

в) найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.

Вариант 8

1. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

Найти матрицу $C = B - 3A \cdot A^T$

2. Решить матричное уравнение $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 5 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$.

4. Решить систему уравнений $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 20 \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 6 \end{cases}$

а) матричным методом;

б) методом Крамера;

в) методом Гаусса.

5. Дана система линейных уравнений $\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 3x_3 - 4x_4 - 5x_5 = -7 \\ 6x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = -2 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 - 3x_5 = -5 \\ 11x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = -5 \end{cases}$

а) проверить, является ли система уравнений совместной;

б) если система уравнений совместна, то найти её общее решение;

в) найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.

Вариант 9

1. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 5 \\ 6 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$.

Найти матрицу $C = B \cdot (A^T + 2A)$.

2. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 14 \\ 5 & 2 & 22 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -4 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -4 & 0 \\ 3 & 5 & 2 & 5 \end{vmatrix}$.

4. Решить систему уравнений $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 8 \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 11 \\ 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 13 \end{cases}$

а) матричным методом;

б) методом Крамера;

в) методом Гаусса.

5. Дана система линейных уравнений $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 - x_5 = -2 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 7 \\ 2x_1 - 4x_2 - 2x_3 + 4x_4 - 7x_5 = 1 \end{cases}$

а) проверить, является ли система уравнений совместной;

б) если система уравнений совместна, то найти её общее решение;

в) найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.

Вариант 10

1. Дана матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 5 & 0 & 7 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$. Найти матрицу $B = A^2 + 2A^T$.

2. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -7 & 11 & 2 \\ 7 & -6 & -3 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 & 5 \\ 5 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$.

4. Решить систему уравнений $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1 \\ 5x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$

а) матричным методом;

б) методом Крамера;

в) методом Гаусса.

5. Дана система линейных уравнений $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 5x_4 - 7x_5 = 2 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + 7x_3 - 3x_4 + 5x_5 = 6 \\ 3x_1 - 2x_2 + 7x_3 - 5x_4 + 8x_5 = 5 \end{cases}$

а) проверить, является ли система уравнений совместной;

б) если система уравнений совместна, то найти её общее решение;

в) найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.

Вариант 11

1. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} -5 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$. Найти матрицу $B = A^T \cdot A + 3E$.

2. Решить матричное уравнение $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & -7 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}$.

4. Решить систему уравнений $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ 5x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}$

а) матричным методом;

б) методом Крамера;

в) методом Гаусса.

5. Дана система линейных уравнений $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 4 \\ 3x_1 + 6x_2 + 5x_3 - 4x_4 + 3x_5 = 5 \\ x_1 + 2x_2 + 7x_3 - 4x_4 + x_5 = 11 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 3x_5 = 6 \end{cases}$

а) проверить, является ли система уравнений совместной;

б) если система уравнений совместна, то найти её общее решение;

в) найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.

Вариант 12

1. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Найти матрицу $C = A^T \cdot A - 2B$.

2. Решить матричное уравнение $X \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ 8 & -7 \\ -8 & 6 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 0 & 1 & -3 & 1 \\ 4 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$.

4. Решить систему уравнений $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4 \\ 3x_1 + 5x_2 - 3x_3 = -1 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = -1 \end{cases}$

а) матричным методом;

б) методом Крамера;

в) методом Гаусса.

5. Дана система линейных уравнений $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_5 = 2 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 - 4x_4 - 3x_5 = -4 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 5x_4 + 2x_5 = 1 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 - 5x_5 = -7 \end{cases}$

а) проверить, является ли система уравнений совместной;

б) если система уравнений совместна, то найти её общее решение;

в) найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.

Вариант 13

1. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 0 & 6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Найти матрицу $C = B^T \cdot A + 4E$.

2. Решить матричное уравнение $X \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 3 \\ 9 & 16 & -2 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 & -4 \\ 2 & 0 & -2 & 3 \\ 3 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}$.

4. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} 7x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 10 \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 1 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 = -4 \end{cases}$$

а) матричным методом;

б) методом Крамера;

в) методом Гаусса.

5. Дана система линейных уравнений
$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 4 \\ 6x_1 + x_2 - 3x_3 + 9x_4 + 5x_5 = 0 \\ 6x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 9x_4 + 7x_5 = 6 \\ 4x_1 + 7x_2 - 2x_3 + 6x_4 + 5x_5 = 8 \end{cases}$$

а) проверить, является ли система уравнений совместной;

б) если система уравнений совместна, то найти её общее решение;

в) найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.

Вариант 14

1. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. Найти матрицу $B = A^T \cdot A + 7E$.

2. Решить матричное уравнение $X \cdot \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 7 \\ 9 & 4 \\ 24 & 18 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 & 3 \\ 5 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{vmatrix}$.

4. Решить систему уравнений $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 10 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 15 \end{cases}$

а) матричным методом;

б) методом Крамера;

в) методом Гаусса.

5. Дана система линейных уравнений $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 8 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 + x_5 = 3 \\ 3x_1 + 7x_2 + 8x_3 - 11x_4 - 3x_5 = -2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 + x_5 = 3 \end{cases}$

а) проверить, является ли система уравнений совместной;

б) если система уравнений совместна, то найти её общее решение;

в) найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.

Вариант 15

1. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$. Найти матрицу $C = A \cdot A^T - 3A$.

2. Решить матричное уравнение $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 9 \\ 4 & 7 \\ 36 & -7 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -7 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 7 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$.

4. Решить систему уравнений $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 9 \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases}$

а) матричным методом;

б) методом Крамера;

в) методом Гаусса.

5. Дана система линейных уравнений $\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 4x_3 + x_4 - 3x_5 = -3 \\ x_1 + 7x_2 + 6x_3 - 2x_4 + 6x_5 = 2 \\ 9x_1 + 8x_2 + 4x_3 - 3x_4 + 9x_5 = -7 \\ 7x_1 + 5x_2 + 2x_3 - 2x_4 + 6x_5 = -6 \end{cases}$

а) проверить, является ли система уравнений совместной;

б) если система уравнений совместна, то найти её общее решение;

в) найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.

Вариант 16

1. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ -2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$.

Найти матрицу $C = 3B - A \cdot A^T$

2. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -4 & 5 & 7 \\ -3 & 6 & 12 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 4 & 0 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$.

4. Решить систему уравнений $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 11 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 11 \end{cases}$

а) матричным методом;

б) методом Крамера;

в) методом Гаусса.

5. Дана система линейных уравнений $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 7x_4 + 11x_5 = 8 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 1 \\ 8x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 6x_4 + 8x_5 = 5 \\ 10x_1 - 5x_2 + 5x_3 + 9x_4 + 15x_5 = 10 \end{cases}$

а) проверить, является ли система уравнений совместной;

б) если система уравнений совместна, то найти её общее решение;

в) найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.

Вариант 17

1. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. Найти матрицу $B = 3E - A \cdot A^T$

2. Решить матричное уравнение $X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -23 & -3 \\ 12 & 0 \\ -7 & -3 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$.

4. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 6 \\ 5x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 4 \\ 5x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 7 \end{cases}$$

а) матричным методом;

б) методом Крамера;

в) методом Гаусса.

5. Дана система линейных уравнений
$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 - x_5 = -2 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 3 \\ 4x_1 - 7x_2 + 5x_3 - x_4 - 2x_5 = -1 \\ x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = -2 \end{cases}$$

а) проверить, является ли система уравнений совместной;

б) если система уравнений совместна, то найти её общее решение;

в) найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.

Вариант 18

1. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Найти матрицу $C = A \cdot B + 2E$.

2. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & -9 & 11 \\ -2 & -6 & 14 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$.

4. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 3 \\ 4x_1 + 6x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 = 10 \end{cases}$$

а) матричным методом;

б) методом Крамера;

в) методом Гаусса.

5. Дана система линейных уравнений
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 17x_4 + 10x_5 = -7 \end{cases}$$

а) проверить, является ли система уравнений совместной;

б) если система уравнений совместна, то найти её общее решение;

в) найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.

Вариант 19

1. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Найти матрицу $C = (3B - A^T) \cdot B$.

2. Решить матричное уравнение $X \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 1 & -6 \\ 10 & 21 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$.

4. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 - x_3 = -17 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 - 5x_3 = -8 \end{cases}$$

а) матричным методом;

б) методом Крамера;

в) методом Гаусса.

5. Дана система линейных уравнений
$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 6x_5 = 5 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 3 \\ 4x_1 - 4x_2 - 2x_4 - 3x_5 = -1 \end{cases}$$

а) проверить, является ли система уравнений совместной;

б) если система уравнений совместна, то найти её общее решение;

в) найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.

Вариант 20

1. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$.

Найти матрицу $C = 3E - A \cdot A^T \cdot A$.

2. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 10 & -13 \\ 3 & -22 & 27 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{vmatrix}$.

4. Решить систему уравнений $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -3 \\ 2x_1 - 6x_2 - 9x_3 = 11 \\ 4x_1 + 3x_2 - 8x_3 = 2 \end{cases}$

а) матричным методом;

б) методом Крамера;

в) методом Гаусса.

5. Дана система линейных уравнений $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = -2 \\ x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = -2 \\ 3x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 - x_5 = 1 \end{cases}$

а) проверить, является ли система уравнений совместной;

б) если система уравнений совместна, то найти её общее решение;

в) найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.

Вариант 21

1. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

Найти матрицу $X = A^T \cdot A - 2E$.

2. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 7 \end{vmatrix}$.

4. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 9 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 14 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 16 \end{cases}$$

а) матричным методом;

б) методом Крамера;

в) методом Гаусса.

5. Дана система линейных уравнений
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_4 + 2x_5 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 4 \\ 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 7 \\ 5x_2 - x_3 + 5x_4 + 3x_5 = -4 \end{cases}$$

а) проверить, является ли система уравнений совместной;

б) если система уравнений совместна, то найти её общее решение;

в) найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.

Вариант 22

1. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Найти матрицу $C = 3B - A^T \cdot A$.

2. Решить матричное уравнение $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 10 & 0 & 5 & -2 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$.

4. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -9 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \\ 3x_1 - 6x_2 - x_3 = 25 \end{cases}$$

а) матричным методом;

б) методом Крамера;

в) методом Гаусса.

5. Дана система линейных уравнений
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2 \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 3 \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 13x_5 = 9 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 1 \end{cases}$$

а) проверить, является ли система уравнений совместной;

б) если система уравнений совместна, то найти её общее решение;

в) найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.

Вариант 23

1. Дана матрица $B = \begin{pmatrix} -4 & 5 & 6 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Найти матрицу $A = 3E - B^T \cdot B$.

2. Решить матричное уравнение $X \cdot \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 5 \\ 24 & 11 \\ -28 & -8 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & -3 & 1 \end{vmatrix}$.

4. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 5x_2 - 4x_3 = -5 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = -4 \end{cases}$$

а) матричным методом;

б) методом Крамера;

в) методом Гаусса.

5. Дана система линейных уравнений
$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 + 2x_5 = 3 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = -7 \\ 9x_1 + 6x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 2 \end{cases}$$

а) проверить, является ли система уравнений совместной;

б) если система уравнений совместна, то найти её общее решение;

в) найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.

Вариант 24

1. Даны матрицы $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ и $Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Найти матрицу $A = Y - 2X^T \cdot X$.

2. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 14 & 13 & 38 \\ 8 & 9 & 14 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ -3 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

4. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -3 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

а) матричным методом

б) методом Крамера;

в) методом Гаусса.

5. Дана система линейных уравнений
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 2 \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 6 \end{cases}$$

а) проверить, является ли система уравнений совместной;

б) если система уравнений совместна, то найти её общее решение;

в) найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.

Вариант 25

1. Дана матрица $X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Найти матрицу $Y = X - 3X \cdot X^T$.

2. Решить матричное уравнение $X \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 15 & 7 \\ 14 & 10 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 9 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$.

4. Решить систему уравнений $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -3 \\ 3x_1 + 10x_2 + 8x_3 = -8 \end{cases}$

а) матричным методом;

б) методом Крамера;

в) методом Гаусса.

5. Дана система линейных уравнений $\begin{cases} 6x_1 + x_2 - 3x_3 + 9x_4 + 5x_5 = 0 \\ 6x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 9x_4 + 7x_5 = 6 \\ 4x_1 + 7x_2 - 2x_3 + 6x_4 + 5x_5 = 8 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 4 \end{cases}$

а) проверить, является ли система уравнений совместной;

б) если система уравнений совместна, то найти её общее решение;

в) найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.

Вариант 26

1. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Найти матрицу $B = 3A^T - A^2$.

2. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 8 & 9 & 8 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & -2 & 5 \end{vmatrix}$.

4. Решить систему уравнений $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$

а) матричным методом;

б) методом Крамера;

в) методом Гаусса.

5. Дана система линейных уравнений $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = -1 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 = -2 \end{cases}$

а) проверить, является ли система уравнений совместной;

б) если система уравнений совместна, то найти её общее решение;

в) найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.

Вариант 27

1. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Найти матрицу $X = 3E - A \cdot A^T$.

2. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 5 \\ -4 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$.

4. Решить систему уравнений $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -5 \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 = 6 \end{cases}$

а) матричным методом;

б) методом Крамера;

в) методом Гаусса.

5. Дана система линейных уравнений $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 + x_4 + 2x_5 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 4 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 6x_5 = 5 \end{cases}$

а) проверить, является ли система уравнений совместной;

б) если система уравнений совместна, то найти её общее решение;

в) найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.

Вариант 28

1. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Найти матрицу $C = A \cdot A^T + 2B$.

2. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 4 & 18 & -2 \\ -2 & 12 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 3 \\ 3 & -3 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 0 & -3 \end{vmatrix}$.

4. Решить систему уравнений $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 9 \\ 7x_1 + 8x_2 + 4x_3 = 2 \end{cases}$

а) матричным методом;

б) методом Крамера;

в) методом Гаусса.

5. Дана система линейных уравнений $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 1 \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 2 \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 3 \end{cases}$

а) проверить, является ли система уравнений совместной;

б) если система уравнений совместна, то найти её общее решение;

в) найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.

Вариант 29

1. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 0 & -9 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Найти матрицу $C = 5B - A^T \cdot A$.

2. Решить матричное уравнение $X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -6 \\ 10 & 33 \\ 1 & -17 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$.

4. Решить систему уравнений $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = -11 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = -2 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$

а) матричным методом;

б) методом Крамера;

в) методом Гаусса.

5. Дана система линейных уравнений $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_5 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = -1 \\ x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = -1 \end{cases}$

а) проверить, является ли система уравнений совместной;

б) если система уравнений совместна, то найти её общее решение;

в) найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.

Вариант 30

1. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$. Найти матрицу $B = 3E - A \cdot A^T$.

2. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

4. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 5 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 19 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$$

а) матричным методом;

б) методом Крамера;

в) методом Гаусса.

5. Дана система линейных уравнений
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 - 4x_5 = -5 \\ 2x_1 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 = -1 \\ 2x_1 - 6x_2 - 4x_3 - x_4 - 2x_5 = -9 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 - 3x_5 = 4 \end{cases}$$

а) проверить, является ли система уравнений совместной;

б) если система уравнений совместна, то найти её общее решение;

в) найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная литература

1. Письменный Д. Т. Конспект лекций по математике. Часть 1. / Д. Т. Письменный // – М.: Изд.-во Айрис-пресс, 2015. – 281 с.

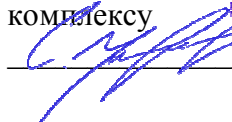
Дополнительная литература

2. Красс М. С. Математика для экономистов. / М. С. Красс, Б. П. Чупрынов // –СПб.; Питер. 2005. – 464 е.: ил. – (Серия «Учебное пособие»).
3. Сурнев В.Б. Алгебра и аналитическая геометрия :учеб. пособие /В.Б. Сурнев// Екатеринбург, УГГГА. 2003 – 656 с.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебно-методическому комплексу



МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

*по выполнению самостоятельных и контрольных работ
по дисциплине*

Б1.О.13 ФИЗИКА

Специальность

21.05.04 Горное дело

Направленность (профиль) подготовки

Горные машины и оборудование

Форма обучения: **очная, заочная**

Год набора: **2022**

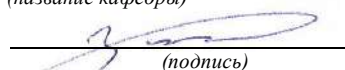
Авторы: Коршунов И. Г., д.ф.-м.н., профессор;
Житова Л. П., к.т.н., доцент

Одобрены на заседании кафедры

Физики

(название кафедры)

Зав.кафедрой



(подпись)

Зайцев Д. В.

(Фамилия И.О.)

Протокол № 2 от 14.09.2021

(Дата)

Рассмотрены методической комиссией

Горно-механического факультета

(название факультета)

Председатель



(подпись)

Осипов П. А.

(Фамилия И.О.)

Протокол № 2 от 12.10.2021

(Дата)

Екатеринбург

Тест:

Перед началом выполнения тестов следует внимательно изучить теоретический материал и ответить на вопросы, имеющиеся в учебниках и учебных пособиях по дисциплине Физика. В тестах нужно выбрать только один правильный ответ из числа предложенных.

Тест 1

1. Какие утверждения справедливы для идеального газа?

1. Взаимодействие молекул на расстоянии отсутствует.
 2. Уравнение Менделеева-Клапейрона описывает состояние газа.
 3. Молекулы газа взаимодействуют на расстоянии.
 2. Внутренняя энергия равна сумме кинетической и потенциальной энергии взаимодействия молекул газа.
 3. Собственным объемом молекул можно пренебречь по сравнению с объемом сосуда, в котором газ находится.
- 1) 4; 2) 1; 3) 2;
4) 5; 5) 1, 2, 5.

2. Воздух в комнате состоит из смеси газов: кислорода, азота, углекислого газа, паров воды и др. Какие из физических параметров этих газов обязательно одинаковы при тепловом равновесии?

- 1) парциальное давление; 2) температура;
3) концентрация; 4) объем.

3. Абсолютная температура газа уменьшилась в 4 раза. Во сколько раз изменилась средняя квадратичная скорость молекул?

1. Уменьшилась в 2 раза.
2. Не изменилась.
3. Уменьшилась в $\sqrt{2}$ раз.
4. Увеличилась в 2 раза.
5. Уменьшилась в 4 раза.

4. Укажите численное значение универсальной газовой постоянной.

- 1) $8,31 \cdot 10^{23}$ Дж/(моль К); 2) $1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К; 3) $6,02 \cdot 10^{23}$ моль⁻¹;
4) 8, 31 Дж/(моль); 5) 8, 31 Дж/(моль К).

5. Молекулы какого газа обладают наименьшим числом степеней свободы?

1. Водорода; 2. Азота; 3. Гелия; 4. Кислорода; 5. Углекислого газа.

6. Какие утверждения могут служить формулировкой второго начала термодинамики?

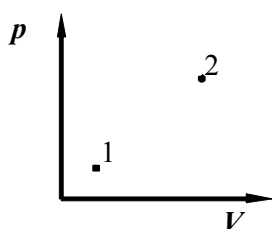
1. Энтропия – скалярная физическая величина, характеризующая состояние системы, приращение которой при обратимом процессе равно количеству приведенного тепла, полученному системой в этом процессе
2. На круговом процессе система не может совершать работу без подвода энергии извне или совершать работу, большую, чем подводимая извне энергия.
3. Невозможно периодически действующее устройство, которое превращало бы тепло в работу полностью

4. Невозможно периодически действующее устройство, которое совершало бы работу бóльшую, чем подводимое тепло
- 1) 1; 2) 2; 3) 2, 3, 4;
4) 3; 5) 4.

7. Что называется молярной теплоемкостью идеального газа?

1. Работа, совершаемая одним молем газа при нагревании на 1 К.
2. Изменение внутренней энергии газа при нагревании моля на 1 К.
3. Количество теплоты для нагревания одного моля газа на 1 К.
4. Количество теплоты для нагревания 1 кг газа на 1 К.
5. Изменение внутренней энергии газа при нагревании 1 кг на 1 К.

8. Газ переходит из состояния 1 в состояние 2. В первом случае сначала по изохоре, а затем по изобаре, а в другом случае, наоборот, сначала по изобаре, а затем по изохоре. Сравните работу, совершаемую системой в двух случаях, и сообщаемое системе количество теплоты.



- 1) одинаковое;
- 2) в первом случае работа больше и количество теплоты больше;
- 3) во втором случае работа больше и количество теплоты больше;
- 4) в первом случае работа меньше, а количество теплоты больше.

9. Первый закон термодинамики в дифференциальной форме записывается так:

- 1) $\delta Q = \delta A + dV$;
- 2) $\delta Q = A + dU$;
- 3) $Q = A + \Delta U$;
- 4) $\delta Q = \delta A + dU$;
- 5) $dQ = dA + dU$.

10. Тепловая машина с КПД 60 % получает за цикл от нагревателя 100 Дж. Какое количество теплоты машина отдает за цикл холодильнику?

- 1) 40 Дж; 2) 60 Дж; 3) 100 Дж; 4) 160 Дж.

Тест 2

1. Укажите формулу для расчета периода колебаний пружинного маятника:

- 1) $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$;
- 2) $T = \sqrt{\frac{g}{l}}$;
- 3) $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$;
- 4) $T = 2\pi \sqrt{LC}$;
- 5) $T = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

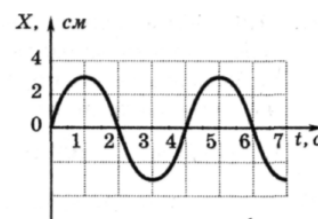
2. При свободных колебаниях за одно и то же время первый математический маятник совершает одно колебание, а второй — три. Нить первого маятника в...

- 1) 9 раз длиннее; 2) 3 раза длиннее; 3) $\sqrt{3}$ раз длиннее;
4) $\sqrt{3}$ раз короче.

3. На рисунке дан график зависимости координаты тела от времени.

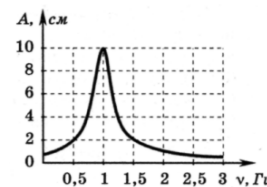
Частота колебаний тела равна

- 1) 0,12 Гц; 2) 0,5 Гц; 3) 0,25 Гц; 4) 4 Гц.



4. На рисунке изображена зависимость амплитуды установившихся колебаний маятника от частоты вынуждающей силы (резонансная кривая). Отношение амплитуды установившихся колебаний маятника на резонансной частоте к амплитуде колебаний на частоте 0,5 Гц равно

- 1) 10; 2) 2; 3) 5; 4) 4.



5. Полная механическая энергия пружинного маятника увеличилась в 2 раза. Как изменилась амплитуда колебаний?

- 1) увеличилась в $\sqrt{2}$ раз 2) уменьшилась в 2 раза
3) увеличилась в 2 раза 4) уменьшилась в $\sqrt{2}$ раз

6. Укажите уравнение затухающих колебаний.

- 1) $x = A e^{-\beta t} \sin \omega t$; 2) $x = A \sin (\omega t + \varphi)$;
3) $x = A \cos (\omega t + \varphi)$; 4) $x = A \sin (\omega t + \pi)$;
5) $x = A \cos (\omega t + \pi/2)$.

7. Выберите определение вынужденных колебаний. Вынужденными называются такие колебания, в процессе которых колеблющаяся система...

- 1) совершает колебания по закону синуса;
2) подвергается воздействию внешней периодически изменяющейся силы;
3) предоставлена самой себе;
4) подвергается воздействию постоянной внешней силы;
5) совершает колебания по закону косинуса.

8. Складываются два гармонических колебания одного направления с одинаковыми периодами. Амплитуда результирующего колебания минимальна при разности фаз складываемых колебаний равной...

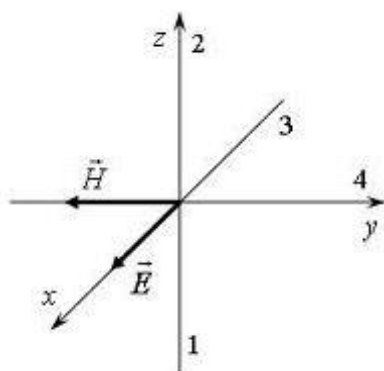
- 1) 0; 2) кратной четному числу π ; 3) кратной нечетному числу π .

9. По участку цепи сопротивлением R идет переменный ток, меняющийся по гармоническому закону. В некоторый момент времени действующее значение напряжения на этом участке цепи уменьшили в 2 раза, а его сопротивление уменьшили в 4 раза. При этом мощность тока

- 1) уменьшилась в 4 раза
2) уменьшилась в 8 раз
3) не изменилась
4) увеличилась в 2 раза

10. На рисунке показана ориентация векторов напряженности электрического (E) и магнитного (H) полей в электромагнитной волне. Вектор плотности потока энергии электромагнитного поля ориентирован в направлении...

- 1) 3; 2) 4; 3) 1; 4) 2.



Тест 3

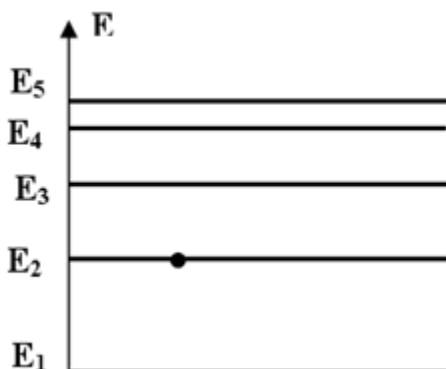
1. Несостоятельность планетарной модели атомов по Резерфорду заключается в следующем:

А. Силы притяжения между электроном и ядром настолько велики, что электроны должны упасть на ядро.

Б. Спектр излучения атомов должен быть сплошным, а не линейчатым.

- 1) только А; 2) только Б; 3) А и Б; 4) ни А, ни Б.

2. На рисунке приведена диаграмма энергетических уровней некоторого атома. Электрон находится на втором стационарном уровне. Сколько спектральных линий могут наблюдаться в спектре поглощения этого атома?



- 1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4; 5) 5.

3. В таблице приведены значения энергии для первых четырех энергетических уровней атома водорода. Излучение с наибольшей длиной волны, наблюдаемое как отдельная линия в спектре испускания водорода, может быть получено при переходе между энергетическими уровнями

- 1) с $n = 4$ на $n = 1$
 2) с $n = 1$ на $n = 4$
 3) с $n = 4$ на $n = 3$
 4) с $n = 3$ на $n = 4$

n	Энергия, 10^{-19} Дж
1	-21,8
2	-5,3
3	-2,4
4	-1,3

4. Согласно постулатам Бора, частота электромагнитного излучения, возникающего при переходе атома из возбужденного состояния с энергией E_1 в основное состояние с энергией E_0 , вычисляется по формуле (c — скорость света, h — постоянная Планка)

$$1) \frac{E_1 + E_0}{h} \quad 2) \frac{E_1 - E_0}{h} \quad 3) \frac{ch}{E_1 - E_0} \quad 4) \frac{ch}{E_0 + E_1}$$

5. Групповая скорость длины волны де Бройля...

- 1) больше скорости света в вакууме;
- 2) равна скорости частиц;
- 3) зависит от квадрата длины волны;
- 4) равна скорости света в вакууме;
- 5) не имеет смысла как физическая величина.

6. Какие утверждения справедливы в случае соотношения неопределенностей для энергии и времени?

- А. Частота излученного фотона имеет неопределенность $\Delta\nu = \Delta E/h$, т.е. линии спектра характеризуются частотой $\nu \pm \Delta E/h$ и должны быть размыты;
- В. Невозможно с бесконечной точностью знать энергию частицы и время ее пребывания в этом энергетическом состоянии⁴
- С. Если частица существует в каком то состоянии бесконечно долго, то энергия этого состояния известна точно;
- Д. Зная ширину спектральной линии, можно оценить порядок времени пребывания атома в возбужденном состоянии.

- 1) А,В, С. 2) В, С, Д. 3) В,Д. 4) А,В,С,Д.

7. Стационарным уравнением Шредингера для линейного гармонического осциллятора является уравнение ...

$$1) \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E \psi = 0 \quad 2) \Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2} E \psi = 0$$

$$3) \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E - \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} \right) \psi = 0 \quad 4) \Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E + \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) \psi = 0$$

8. Какие утверждения справедливы при описании состояния электрона?

А. Если орбитальное квантовое число ($l = 0$), то состояние электрона называется s - состоянием; ($l = 1$) - p - состоянием; ($l = 2$) - d - состоянием.

В. Значение главного квантового числа n указывается перед условным обозначением орбитального квантового числа и определяет энергетические уровни электрона в атоме: 3s ($n = 3, l = 0$).

С. Орбитальное квантовое число (l) определяет момент импульса электрона в атоме: ($l = 0, 1, 2, \dots$).

Д. Квантовые числа n и l характеризуют ориентацию электронного облака в пространстве.

- 1) А,В,Д; 2) А,В,С,Д; 3) В,С; 4) А,В,С.

9. Фазовая скорость фотона равна...

- 1) скорости света в вакууме c ; 2) c^2 / v ; 3) v ; 4) $d\omega / dk$.

10. Частица в потенциальной яме шириной l находится в низшем возбужденном состоянии. Определить вероятность нахождения частицы в интервале $l/4$, равноудаленном от стенок ямы.

- 1) 0,091; 1) 0,027; 3) 0,5; 4) 0,91.

Контрольная работа:

1. Шахтная клеть поднимается со скоростью 12 м/с. После выключения двигателя, двигаясь с отрицательным ускорением $1,2 \text{ м/с}^2$, останавливается у верхней приемной площадки. На каком расстоянии от нее находилась клеть в момент выключения двигателя и сколько времени двигалась до остановки? /60 м; 10 с/

2. Сжатый воздух в баллоне имеет температуру 15°C . Во время пожара температура воздуха в баллоне поднялась до 450°C . Взорвется ли баллон, если известно, что при этой температуре он может выдержать давление не более 9,8 МПа? Начальное давление в баллоне 4,8 МПа. /Да/

3. Найти силу, действующую на точечный заряд $1,7 \cdot 10^{-9}$ Кл, если он помещен в поле бесконечной плоскости, заряженной с поверхностной плотностью заряда $3 \cdot 10^{-8}$ Кл/см². Диэлектрическая проницаемость среды равна 5. / $5,7 \cdot 10^{-3}$ Н/

4. По двум бесконечно длинным прямым параллельным проводам текут токи 50 А и 100 А в противоположных направлениях. Расстояние между проводами 20 см. Определить магнитную индукцию в точке, удаленной на 25 см от первого и на 40 см от второго проводов. /21 мкТл/

5. Решето рудообогатительного грохота совершает вертикальное колебательное движение с амплитудой 5 см. Найти наименьшую частоту колебаний, при которой куски руды, лежащие на решете, будут отделяться от него и подбрасываться вверх. / $2,2 \text{ с}^{-1}$ /

Лабораторные работы

Лабораторная работа № 1:

“Определение плотности твердого тела правильной геометрической формы”

Цель работы: определение плотности твердого тела правильной геометрической формы, ознакомление с устройством и правилами работы с измерительными инструментами.

Краткая теория

Плотность определяется отношением массы однородного тела к его объему :

$$D = \frac{m}{V}, \quad (1.1)$$

т.е. плотность численно равна массе единицы объема тела.

В данной работе исследуемое тело имеет форму цилиндра, следовательно, объем его выразится формулой

$$V = \frac{\pi d^2}{4} h, \quad (1.2)$$

где d – диаметр,

h – высота цилиндра.

Подставляя это значение в уравнение (1.1.), получим выражение для вычисления плотности :

$$D = \frac{4m}{\pi d^2 h}, \quad (1.3)$$

Из полученного соотношения (1.3) следует, что для определения D нужно измерить значения m, d, h .

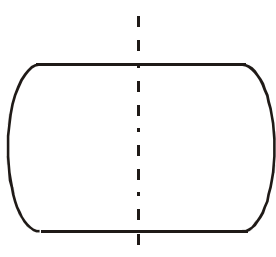
Выполнение работы.

Приборы и материалы: весы, штангенциркуль, микрометр, исследуемое тело (цилиндрической формы).

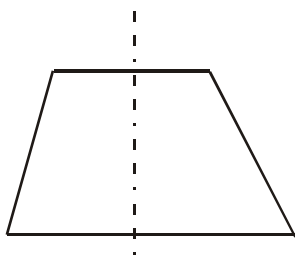
Порядок выполнения работы.

1. Взвешивают тело на весах. Правила взвешивания приложены к весам. Результат записывают в таблицу 1.1.

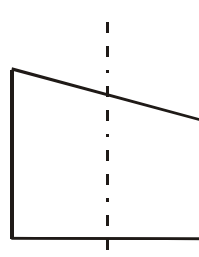
2. Известно, что исследуемое тело вращения (цилиндр) , невозможно изготовить идеальной формы. При механической обработке детали возникают погрешности формы, например :



Бочкообразность



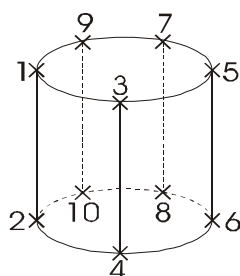
Конусность



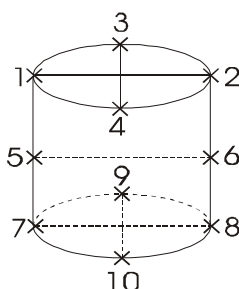
Не параллельность оснований

Поэтому для точного определения объема образца V , при планировании эксперимента важно правильно выбрать сечения для снятия размеров d и h .

Например : при определении h рекомендуется последовательно поворачивая образец проводить измерения длин образующих 1-2, 3-4, 5-6, 7-8, 9-10 .



При определении диаметра d рекомендуется проводить измерения в следующем порядке 1-2, 3-4, 5-6, 7-8, 9-10 :



При дальнейшей обработке результатов измерений, средняя арифметическая величина размеров h и d считается наиболее близкой к истинной

Штангенциркуль

Штангенциркули позволяют производить отсчет линейных размеров с точностью до 0,05 мм. Штангенциркулем измеряют высоту тела. Для этого зажимают цилиндр между ножками штангенциркуля и по положению нуля нониуса отсчитывают по линейке – (масштабу) целое число миллиметров. Далее смотрят, какое деление нониуса совпадет с каким делением масштаба.

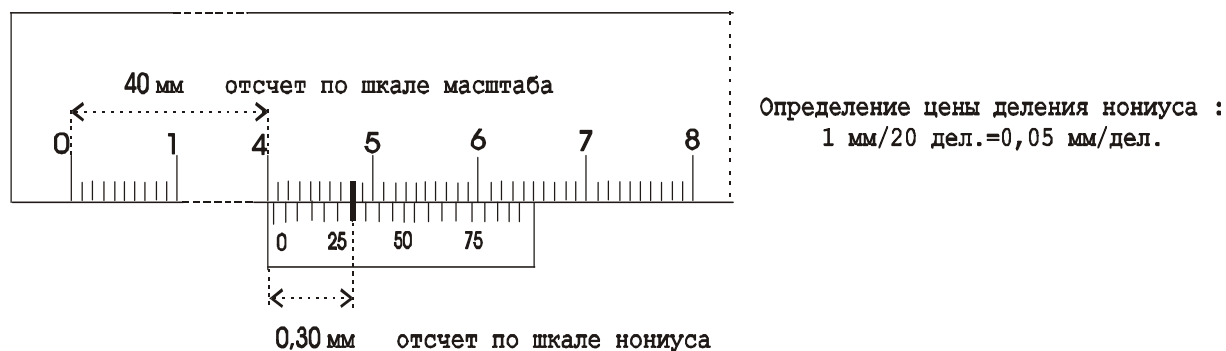


Рис.1.1. Штангенциркуль

Пример: на рис.1.1 нуль нониуса перешел за 40 мм масштаба и 6 деление нониуса совпадает с одним из делений масштаба. Следовательно, высота цилиндра 40,30 мм.

Микрометр

Прибор для измерения линейных размеров. На барабане микрометра нанесено 50 делений, следовательно для получения значения точности измерений указанной на приборе (0,01 мм) каждый миллиметр нижней шкалы поделен пополам рисками верхней шкалы :
$$\frac{0,5\text{мм}}{50\text{дел.}} = 0,01\text{мм}.$$

При проведении измерений :

- Если кромка барабана не перешла за риску верхней шкалы , то размер = число делений нижней шкалы + число делений шкалы барабана.
- Если кромка барабана перешла за риску верхней шкалы ,то размер = число делений нижней шкалы + 0,5 мм + число делений шкалы барабана. Пример (рис.1.2). Микромет-

ром измеряют диаметр тела. Измеряемое тело зажимают между опорной пятой и винтом (рис.1.2) . На головке винта находится трещетка, за которую и следует вращать винт. По линейной шкале отсчитывают деление, за которое перешла кромка барабана. На рис.1.2 это 11,50 мм.



Рис.1.2 Микрометр

Затем определяют деление барабана, которое совпало с продольным штрихом линейной шкалы (35 деление на рис.1.2)

Следовательно, так как каждое деление барабана равно 0,01 мм, диаметр цилиндра будет : 11,50 мм + 0,35 мм = 11,85 мм.

2. Высоту и диаметр цилиндра измеряют пять раз. Из пяти результатов измерений находят среднее значения величины и вычисляют погрешности. Результаты измерений и вычислений записываются в таблицу 1.1.

При подсчете средней величины погрешности, значения погрешностей берутся по модулю , т.к. согласно нормальному распределению Гаусса равновероятно получение положительной либо отрицательной погрешности. При последующем суммировании с учетом знака результат будет равен 0 , что не соответствует действительности.

При записи окончательного результата следует учитывать, что точность не может превышать точность результатов, полученных при измерениях.

Таблица 1.1

Результаты измерений

Измерения	h , мм	Δh , мм	d , мм	Δd , мм	m , г	Δm , г
1						
2						
3						
4						
5						
средние значения	$\bar{h} =$	$\overline{\Delta h} =$	$\bar{d} =$	$\overline{\Delta d} =$		

Плотность тела рассчитывается по формуле (1.3), в которой для величин диаметра и высоты берутся средние значения из таблицы 1.1.

Вычисление погрешностей и окончательный результат

Относительная погрешность определения плотности:

$$E_D = \frac{\overline{\Delta D}}{\overline{D}} = \frac{\Delta m}{m} + 2 \frac{\overline{\Delta d}}{\overline{d}} + \frac{\overline{\Delta h}}{\overline{h}} . \quad (1.4)$$

Абсолютная погрешность:

$$\overline{\Delta D} = E_D \overline{D} . \quad (1.5)$$

Окончательный результат :

$$D = \overline{D} \pm \overline{\Delta D} . \quad (1.6)$$

Сравнением полученного результата с табличными значениями плотности твердых тел определяют материал из которого изготовлен цилиндр.

Записывают выводы.

Контрольные вопросы

1. Что называется плотностью тела?
2. Вывести расчетную формулу определения плотности цилиндра.
3. Пояснить порядок выполнения работы.
4. Какие измерения в данной работе относятся к прямым , какие к косвенным?
5. Как вычисляются абсолютная и относительная погрешности при многократных и однократных измерениях?
6. Вывести формулу для относительной погрешности при определении плотности тела в данной работе.
7. Сравните относительные погрешности прямых измерений в данной работе. Неточность измерений какой величины (m , h или d) дает наибольший вклад в погрешность определения плотности ?

Литература

1. Трофимова Т.И., Фирсов А. В. Курс физики с примерами решения задач. В 2 томах. Т.1. - М.: Изд-во: "КноРус", 2016.- 570 с.
2. Трофимова Т.И., Фирсов А. В. Курс физики с примерами решения задач. В 2 томах. Т.2. - М.: Изд-во: "КноРус", 2015.- 384 с.
3. Савельев И.В. Курс общей физики. В 3 томах. Т.1: Механика. Молекулярная физика. -СПб.: "Лань", 2016.- 432 с.

Лабораторная работа № 2:

“Определение скорости распространения электромагнитных волн с помощью двухпроводной линии ”

Цель работы

Целью данной работы является изучение процесса распространения электромагнитных волн и экспериментальное измерение скорости их распространения в воздухе методом стоячих волн.

Краткая теория

Ещё до того, как электромагнитные волны были впервые получены практически, Максвелл на основе своей теории электромагнитного поля вычислил их скорость. В диэлектрике скорость распространения электромагнитных волн

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\epsilon_0\mu\mu_0}}, \quad (2.11.1)$$

где ϵ и μ – диэлектрическая и магнитная проницаемость среды;

$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м – электрическая постоянная;

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м – магнитная постоянная.

В соответствии с формулой (2.11.1) скорости распространения электромагнитных волн в различных средах, в том числе в горных породах, различны, т. к. различны их ϵ и μ . Поэтому при распространении электромагнитных волн в неоднородной среде, какой является, например, земная кора, возникают разнообразные явления (отражение, преломление, интерференция, дифракция волн) на границах геологических объектов. Изучение связанных с этими явлениями вторичных электромагнитных волн составляет предмет обширной группы методов геофизической разведки – высокочастотной электроразведки. Вторичные электромагнитные волны при этом позволяют получить информацию о форме и взаимном расположении геологических объектов, глубине их залегания и т. д.

В вакууме $\epsilon = 1$, $\mu = 1$ и, согласно (2.11.1),

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}}} = 3,00 \cdot 10^8 \text{ м/с} \quad (2.11.2)$$

Практически таким же является значение скорости распространения электромагнитных волн в воздухе. Поэтому результат, полученный в данной работе, должен с учётом допущенных при измерениях погрешностей совпадать со значением, рассчитанным в (2.11.2).

Электромагнитные волны – это распространяющиеся колебания электрического и магнитного полей. Если в точке 0 бесконечной однопроводной линии ОХ (рис. 13) электрическое поле изменяется по гармоническому закону, то вдоль оси ОХ с конечной скоростью будет распространяться («побежит») волна напряжённости электрического поля. Согласно законам, выраженным в уравнениях Максвелла, переменное электрическое поле $\vec{E}$ в каждой точке оси ОХ будет порождать магнитное поле $\vec{H}$, которое также будет меняться по гармоническому закону. При этом колебания векторов напряженностей электрического поля $\vec{E}$ и магнитного поля $\vec{H}$ происходят во взаимно перпендикулярных плоскостях. Из решения уравнений Максвелла также следует, что колебания $\vec{E}$ и $\vec{H}$ будут происходить в одной фазе, так что в данный момент времени электрическое и магнитное поля будут достигать максимальных значений в одних и тех же точках пространства на оси ОХ.

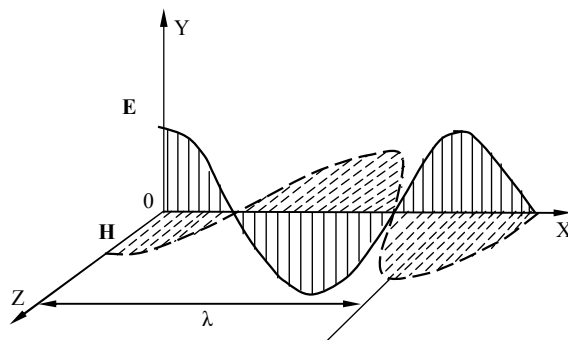


Рис. 13. Бегущая электромагнитная волна

Расстояние между двумя ближайшими точками среды, колебания в которых отличаются по фазе на 2π , называется *длиной волны* λ (рис. 13).

Электромагнитные колебания можно возбудить и в двухпроводной линии, в так называемой схеме Лехера, представляющей собой два длинных провода, натянутых параллельно друг другу, в которые через индуктивную связь L_1 - L_2 (рис. 14) передаётся энергия колебаний генератора.

При включении генератора высокой частоты G вдоль линии начинает распростра-

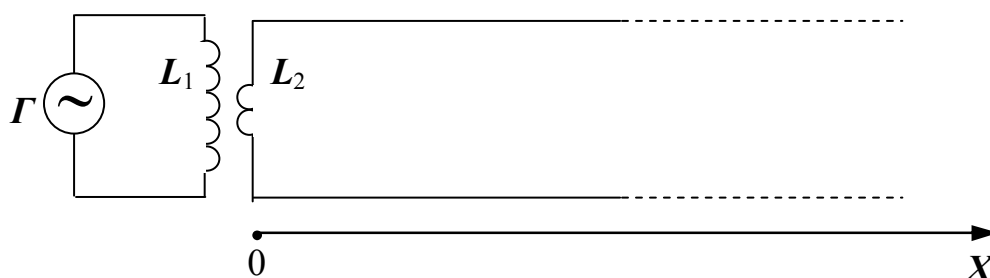


Рис. 14. Схема Лехера.

няться электромагнитная волна. При этом в пространстве между проводами вектор напряжённости электрического поля волны направлен от одного провода к другому (плоскость $\vec{E}$) и периодически (с частотой генератора) меняет своё направление на обратное. Вектор напряжённости магнитного поля волны колеблется в плоскости, перпендикулярной плоскости, в которой расположены провода (плоскость $\vec{H}$), и также периодически изменяет своё направление.

Векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ перпендикулярны направлению скорости $\vec{v}$ распространения волны и образуют с ним правовинтовую систему.

Внутри проводов течёт переменный ток. Если частота генератора достаточно высока, этот ток вследствие скин-эффекта сосредоточен в тонком цилиндрическом слое на поверхности каждого провода. Пренебрегая потерями энергии на джоулево тепло, выделяющееся в проводах, опишем процесс распространения колебаний $\vec{E}$ и $\vec{H}$ уравнениями плоской волны. Рассмотрим прямую бегущую волну $\vec{E}_1$ и $\vec{H}_1$, распространяющуюся вдоль оси OX (рис. 14). Для проекций векторов $\vec{E}_1$ и $\vec{H}_1$ на плоскости E и H соответственно запишем

$$\begin{aligned} E_1 &= E_0 \sin \left[\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) \right], \\ H_1 &= H_0 \sin \left[\omega \cdot \left(t - \frac{x}{v} \right) \right], \end{aligned} \quad (2.11.3)$$

где E_0 и H_0 – амплитудные значения проекций напряжённостей электрического и магнитного полей; ω – циклическая частота колебаний; x – расстояние данной точки от источника колебаний;

v – скорость распространения волны.

При этом x/v – время, на которое запаздывают колебания в точке с координатой x по отношению к колебаниям в точке 0.

Неоднородность среды является причиной появления отражённой волны. В данном опыте отражение возникает от дальней границы линии.

При возникновении отражённой волны один из векторов, $\vec{E}$ или $\vec{H}$, меняет направление колебаний на противоположное (рис. 15). Фазовые соотношения между колебаниями $\vec{E}$ и $\vec{H}$ в падающей и отражённой волнах зависят от условий на границе. В частности, для разомкнутой линии отражение $\vec{E}$ происходит в той же фазе, что и в падающей волне, а отражение $\vec{H}$ – в противофазе (рис. 15, б). Если линия замкнута на конце, то отражение $\vec{E}$ будет происходить в противофазе, а отражение $\vec{H}$ в той же фазе (рис. 15, в).

Явление изменения фазы при отражении можно строго обосновать при помощи уравнений Максвелла, мы же ограничимся простыми качественными рассуждениями.

В нашем случае линия на конце разомкнута. Переменные токи, возникающие в

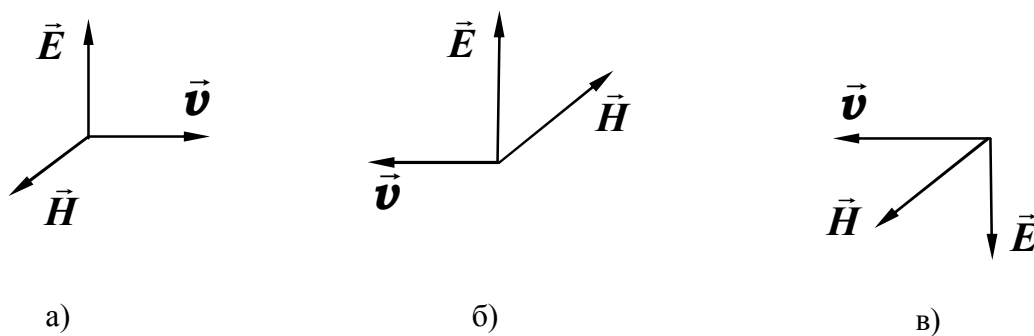


Рис. 15. Взаимная ориентация векторов напряжённости электрического и магнитного поля до (а) и после (б и в) отражения электромагнитной волны

проводах, будут вызывать на конце линии, граничащей с диэлектриком, наибольшие колебания зарядов. Здесь амплитуда колебаний вектора напряжённости электрического поля максимальна. Это значит, что электрическое поле в отражённой волне направлено так же, как и в падающей, т. е. оно не изменяет фазы колебаний при отражении. При этих же условиях амплитуда тока будет равна нулю. Это означает, что магнитное поле в отражённой волне направлено противоположно полю падающей волны или меняет фазу на π . Для проекций векторов напряжённостей электрического E_2 и магнитного H_2 полей в отражённой волне можно записать:

$$E_2 = E_0 \sin \left[\omega \cdot \left(t + \frac{x}{v} \right) \right]$$

$$H_2 = -H_0 \sin \left[\omega \cdot \left(t + \frac{x}{v} \right) \right] \quad (2.11.4)$$

Знак «плюс» в круглых скобках означает, что отражённая волна распространяется в отрицательном направлении оси OX .

Для вычисления результирующих векторов напряжённости электрического $\vec{E}$ и магнитного $\vec{H}$ поля достаточно сложить соответствующие величины в прямой и отражённой волнах. Так, проекция вектора напряжённости результирующего электрического поля будет равна:

$$\begin{aligned} E &= E_1 + E_2 = E_0 \left\{ \sin \left[\omega \cdot \left(t - \frac{x}{v} \right) \right] + \sin \left[\omega \cdot \left(t + \frac{x}{v} \right) \right] \right\} = \\ &= 2E_0 \cos \left(\omega \frac{x}{v} \right) \cdot \sin \omega t \end{aligned} \quad (2.15.5)$$

Это уравнение стоячей волны – уравнение гармонических колебаний напряжённости результирующего электрического поля с амплитудой, зависящей от координаты точки наблюдения

$$2E_0 \cos \left(\omega \frac{x}{v} \right). \quad (2.11.6)$$

Проекция вектора напряжённости результирующего магнитного поля получается аналогично

$$\begin{aligned} H &= H_1 + H_2 = H_0 \left\{ \sin \left[\omega \cdot \left(t - \frac{x}{v} \right) \right] - \sin \left[\omega \cdot \left(t + \frac{x}{v} \right) \right] \right\} = \\ &= -2H_0 \cos \left(\omega \frac{x}{v} \right) \cdot \sin \omega t \end{aligned}, \quad (2.11.7)$$

где $2H_0 \cos \left(\omega \frac{x}{v} \right)$ – амплитуда колебаний напряжённости результирующего магнитного поля.

В определённых точках двухпроводной линии амплитуда напряжённости электрического поля стоячей волны достигает максимума. Такие точки называются пучностями стоячей волны, а точки, в которых амплитуда колебаний равна нулю, называются узлами стоячей волны. Согласно (2.11.6), координаты x пучностей электрического поля определяются из условия:

$$\frac{\omega}{v} \cdot X = \pi \cdot n, \quad (2.11.8)$$

где n – целое число.

Учитывая, что $\omega = 2\pi f$, а $\frac{v}{f} = \lambda$, где f – частота, а λ – длина волны, получим

для координат пучностей выражение:

$$X = n \cdot \frac{\lambda}{2}. \quad (2.11.9)$$

Из этого выражения видно, что расстояние между соседними пучностями равно половине длины волны $\lambda/2$.

Координаты узлов электрического поля определяются, согласно (2.15.6), условием

$$\frac{\omega}{v} \cdot X = (2n + 1) \cdot \frac{\pi}{2}, \quad (2.11.10)$$

где n – целое число.

Расстояние между соседними узлами также равно $\lambda/2$. Напряжённость магнитного поля в этих точках максимальная. Таким образом, в стоячей электромагнитной волне узлы электрического поля совпадают с пучностями магнитного поля и наоборот (рис. 16).

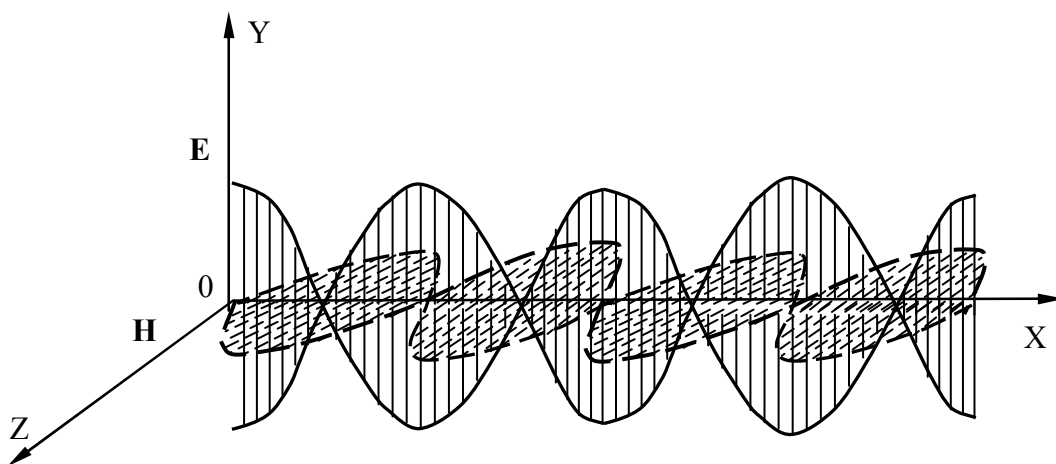


Рис. 16. Стоячие электромагнитные волны

Для экспериментального определения скорости v распространения электромагнитной волны в воздухе с помощью двухпроводной линии достаточно измерить расстояние ΔX между соседними пучностями (или узлами) электрического (или магнитного) поля, вычислить, согласно (2.15.9), длину волны $\lambda = 2 \cdot \Delta X$ и найти скорость v .

В данной работе индикатором пучностей электрического поля служит неоновая лампочка L , укрепленная на мостике M . Мостик устанавливается на двухпроводную линию перпендикулярно проводам. При перемещении мостика вдоль линии, в местах пучностей лампочка ярко загорается. Вместо неоновой лампочки можно воспользоваться обыкновенной лампочкой накаливания (например, от карманного фонаря), но тогда при перемещении мостика вдоль линии, лампочка накаливания будет загораться в местах узлов стоячей волны электрического поля. Расстояние между пучностями (узлами) измеряется с помощью мерной ленты, натянутой вдоль двухпроводной линии.

Выполнение работы

Необходимые приборы: генератор высокой частоты с датчиком, двухпроводная линия с мерной лентой, частотомер.

Схема экспериментальной установки приведена на рис. 17.

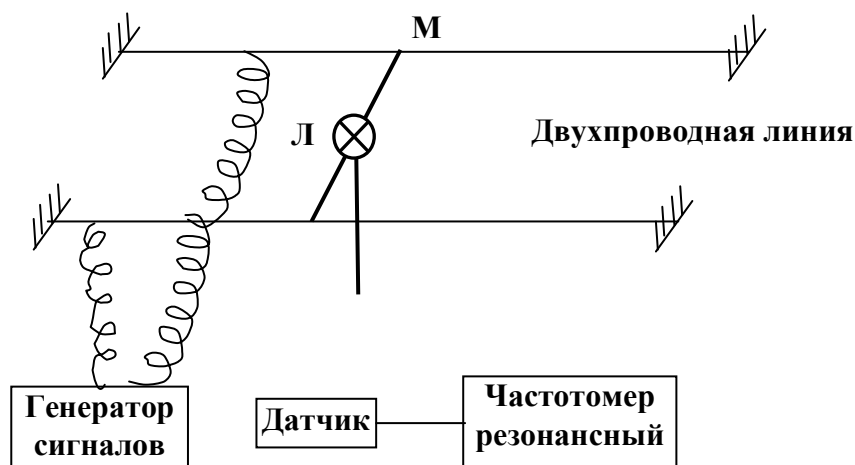


Рис. 17. Схема экспериментальной установки

Порядок выполнения работы

Включите генератор G в сеть и дайте ему прогреться.

Мостик M с неоновой лампочкой L подвесьте на провода у начала двухпроводной линии. Передвигая мостик вдоль линии, найдите пучности электрического поля по свечению лампочки. Запишите их координаты в нижнюю часть табл. 11.1.

По разности отсчётов определите расстояние между *соседними* пучностями ΔX . Опыт повторить столько раз, чтобы получилось не менее трёх значений ΔX , каждый раз вычисляя длину волны $\lambda = 2 \cdot \Delta X$. Затем найдите среднее значение длины волны $\bar{\lambda}$.

С помощью резонансного частотомера $Ч$ с индукционным датчиком $Д$ измерьте частоту f генератора. Для этого необходимо:

1. Поднести датчик вплотную к генератору.
2. Вращать ручку частотомера до тех пор, пока стрелка амперметра не будет максимально отклоняться. Это означает, что его частота совпала с частотой генератора.
3. Снимите отсчёт по верхней шкале частотомера и запишите в табл. 11.1.

Измерение частоты необходимо провести 3 раза и найти среднее значение $\bar{f}$. По результатам измерений вычислите среднее значение скорости распространения электромагнитных волн по формуле:

$$\bar{v} = \bar{\lambda} \cdot \bar{f}$$

Таблица 11.1

Результаты измерений

Номер опыта	ΔX , м	λ , м	$\Delta \lambda$, м	f , МГц	Δf , МГц
1					
2					
3					
Средние значения	$\Delta \bar{X} =$	$\bar{\lambda} =$	$\Delta \bar{\lambda} =$	$\bar{f} =$	$\Delta \bar{f} =$
Координаты пучностей	$X_1 =$	$X_2 =$	$X_3 =$	$X_4 =$	

По результатам измерений вычислите среднее значение скорости распространения электромагнитных волн по формуле:

$$\bar{v} = \bar{\lambda} \cdot \bar{f}$$

Вычислите относительную и абсолютную погрешности определения скорости электромагнитных волн

$$E_v = \frac{\Delta \lambda}{\lambda} + \frac{\Delta f}{f}$$

$$\Delta v = E_v \cdot v$$

Окончательный результат запишите в виде:

$$v = v \pm \Delta v$$

Сравните с (2.11.2) и сделайте вывод.

Контрольные вопросы

1. От каких характеристик среды зависит скорость распространения электромагнитных волн?
2. Как образуется стоячая электромагнитная волна в двухпроводной линии?
3. Записать и пояснить уравнение стоячей волны.
4. Что называется пучностью и узлом стоячей волны?
5. . Каким образом проводится определение длины волны?
6. Расскажите о порядке выполнения работы.

Литература

1. Трофимова Т.И., Фирсов А. В. Курс физики с примерами решения задач. В 2 томах. Т.1. - М.: Изд-во: "КноРус", 2016.- 570 с.
2. Трофимова Т.И., Фирсов А. В. Курс физики с примерами решения задач. В 2 томах. Т.2. - М.: Изд-во: "КноРус", 2015.- 384 с.
3. Савельев И.В. Курс общей физики. В 3 томах. Т.1: Механика. Молекулярная физика. -СПб.: "Лань", 2016.- 432 с.
4. Савельев И.В. Курс общей физики. В 3 томах. Т.3: Квантовая оптика. Атомная физика. Физика твердого тела. Физика атомного ядра и элементарных частиц -СПб. : Лань, 2016.- 406

Методические

Тема 1: Механика

1. Скорость пули при вылете из ствола пистолета равна 250 м/с. Длина ствола 0,1 м. Определите примерно ускорение пули внутри ствола, если считать ее движение равноускоренным.

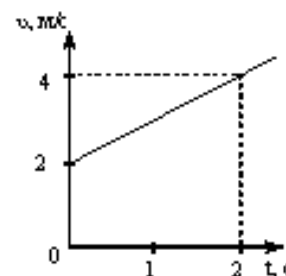
- 1) 312 км/с² 2) 114 км/с² 3) 1248 м/с² 4) 100 м/с²

2. К боковой поверхности цилиндра, вращающегося вокруг своей оси, прижимают второй цилиндр с осью, параллельной оси первого, и радиусом, вдвое превосходящим радиус первого. При совместном вращении двух цилиндров без проскальзывания у них совпадают

- 1) периоды вращения
- 2) частоты вращения
- 3) линейные скорости точек на поверхности
- 4) центростремительные ускорения точек на поверхности

3. На графике приведен график зависимости скорости тела от времени. Масса тела 10 г. Сила, действующая на тело, равна...

- 1) 0 Н
- 2) 5 Н
- 3) 30 Н
- 4) 10 Н

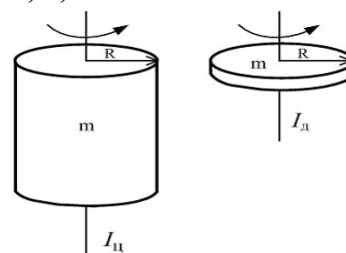


4. На тело действует постоянный вращающий момент. Какая из перечисленных ниже величин при вращательном движении тела не изменяется с течением времени?

1. Угловая скорость. 2. Угловое ускорение. 3. Кинетическая энергия вращения.
 4. Момент импульса тела. 5. Момент инерции.
- 1) 1 2) 3 3) 2, 5 4) 4 5) 1, 3, 5.

5. Диск и цилиндр имеют одинаковые массы и радиусы. Для их моментов инерции справедливо соотношение...

- 1) $I_{\text{ц}} = I_{\text{д}}$; 2) $I_{\text{ц}} > I_{\text{д}}$; 3) $I_{\text{ц}} < I_{\text{д}}$; 4) $I_{\text{ц}} \gg I_{\text{д}}$.



6. Какое утверждение ошибочно?

- 1) Механическая система называется замкнутой, если на нее не действуют внешние силы или действие всех внешних сил на эту систему полностью скомпенсировано.
- 2) Результирующий импульс замкнутой системы тел с течением времени не изменяется.
- 3) Если система замкнута, то ее результирующий импульс всегда равен нулю.
- 4) В замкнутой консервативной системе полная механическая энергия с течением времени не изменяется.
- 5) Работа консервативной силы на замкнутой траектории равна нулю.

7. Сплошной цилиндр катится по горизонтальной плоскости. Какую часть энергии поступательного движения каждого тела составляет от общей кинетической энергии?

- 1) 5/7 2) 3/4 3) 2/3 4) 1/2

8. Укажите формулировку закона сохранения импульса.

- 1) В замкнутой системе тел суммарный импульс системы постоянен.
- 2) В замкнутой системе тел суммарный импульс системы равен нулю.
- 3) Импульс тела равен произведению массы тела на его скорость.
- 4) Сумма внешних сил, приложенных к телу, равна нулю.
- 5) Суммарная кинетическая энергия замкнутой системы равна нулю

9. Момент инерции тонкого обруча массой m , радиусом R относительно оси, проходящей через центр обруча перпендикулярно плоскости, в которой лежит обруч, равен $I = mR^2$. Если ось вращения перенести параллельно в точку на обруче, то момент инерции обруча...

- 1) увеличится в 1,5 раза
- 2) увеличится в 2 раза
- 3) не изменится

4) уменьшится в 2 раза

10. Зависимость пути от времени для прямолинейно движущегося тела имеет вид: $S(t) = 2t + 3t^2$, где все величины выражены в СИ. Ускорение тела равно

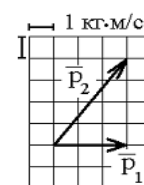
- 1) 1 м/с^2 2) 2 м/с^2 3) 3 м/с^2 4) 6 м/с^2

11. Точка М движется по спирали с постоянной по величине скоростью в направлении, указанном стрелкой. При этом величина полного ускорения....

- 1) уменьшается;
2) не изменяется;
3) увеличивается.
4) увеличивается и уменьшается



12. Теннисный мяч летел с импульсом P_1 (масштаб и направления указаны на рисунке). Теннисист произвел по мячу резкий удар с средней силой 80 Н . Изменившийся импульс мяча стал равным P_2 . Сила действовала на мяч в течении...

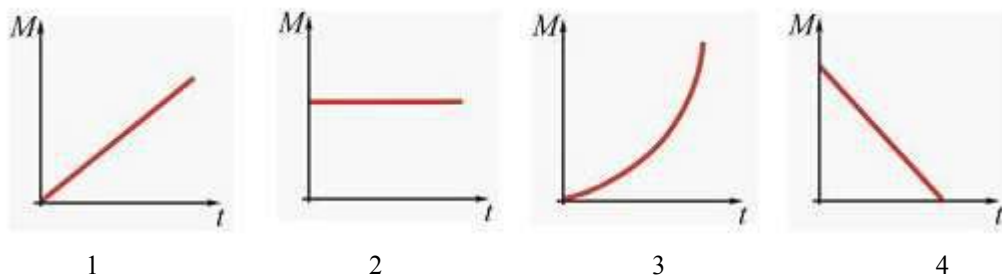


- 1) $0,05 \text{ с}$
2) $0,5 \text{ с}$
3) $0,3 \text{ с}$
4) $0,1 \text{ с}$

13. Если тело движется по окружности с постоянной по величине скоростью, следовательно, равнодействующая всех сил, действующих на тело....

- 1) равна нулю.
2) постоянна по величине и совпадает с направлением скорости.
3) постоянна по величине и направлена по радиусу к центру окружности.
4) постоянна по величине и направлена по касательной к окружности.
5) переменна по величине и направлена к центру окружности.

14. Момент импульса вращающегося тела изменяется по закону $L = at^3$, где a – некоторая положительная константа. Зависимость от времени момента сил, действующих на тело, определяется графиком ...



15. Найти приращение энергии тела, если $E_1 = 10 \text{ Дж}$, $E_2 = 7 \text{ Дж}$?

- 1) 17 Дж . 2) 3 Дж . 3) -3 Дж . 4) $8,5 \text{ Дж}$. 5) $1,5 \text{ Дж}$.

16. Шар катится по горизонтальной плоскости. Какую часть энергии поступательного движения каждого тела составляет от общей кинетической энергии?

- 1) $5/7$ 2) $3/4$ 3) $2/3$ 4) $1/2$

17. Чтобы уменьшить отдачу при выстреле из винтовки, необходимо:

- 1) увеличить массу винтовки; 2) уменьшить массу винтовки; 3) увеличить скорость пули;
 4) уменьшить массу пули; 5) уменьшить скорость пули.
 1) 1, 4, 5. 2) 2, 3. 3) 1, 2. 4) 1, 3. 5) 2, 5.

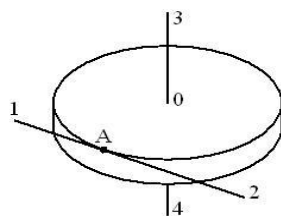
18. Тело брошено вертикально вверх с начальной скоростью 16 м/с. На высоте h кинетическая энергия равна потенциальной. Определить эту высоту.

- 1) 10 м 2) 7,3 м 3) 6,4 м 4) 16 м

19. Зависимость координаты от времени для некоторого тела описывается уравнением $X=8t-t^2$, где все величины выражены в СИ. В какой момент времени скорость тела равна нулю?

- 1) 8 с 2) 4 с 3) 3 с 4) 0 с

20. Диск радиуса R вращается вокруг вертикальной оси равноускоренно по часовой стрелке. Укажите направление вектора углового ускорения.



- 1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4.

21. К потолку лифта, поднимающегося вверх тормозясь, на нити подвешено тело массой 10 кг. Модуль вектора скорости изменения импульса тела равен 50 кг•м/с. Сила натяжения нити равна

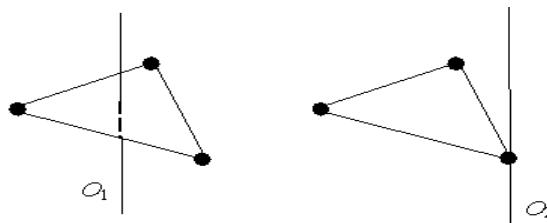
- 1) 150 кг•м/с; 2) 50 кг•м/с; 3) 100 кг•м/с; 4) 0 кг•м/с

22. Укажите правильные утверждения. Момент инерции тела:

- 1) зависит от пространственного распределения массы тела;
 2) является коэффициентом пропорциональности между угловым ускорением тела и моментом сил;
 3) зависит от суммы моментов сил, приложенных к телу;
 4) зависит от положения оси вращения тела;
 5) зависит от суммы сил, действующих на тело.

- 1) 1, 2, 4 2) 2 3) 5 4) 2, 3, 5. 5) Все правильные.

23. Три маленьких шарика расположены в вершинах правильного треугольника. Момент инерции этой системы относительно оси O_1 , перпендикулярной плоскости треугольника и проходящей через его центр – I_1 . Момент инерции этой же системы относительно оси O_2 , перпендикулярной плоскости треугольника и проходящей через один из шаров – I_2 . Справедливо утверждение...



- 1) $I_1 = I_2$ 2) $I_1 > I_2$ 3) $I_1 < I_2$ 4) 2) $I_1 > I_2$

24. Якорь двигателя вращается с частотой 40 с^{-1} , развиваемая им мощность 3 кВт. Найти вращающий момент якоря.

- 1) 10 Н•м 2) 12 Н•м 3) 15 Н•м 4) 23 Н•м

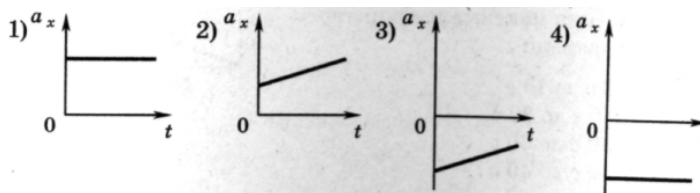
25. Закон сохранения импульса формулируется так.

- 1) Результирующий момент импульса изолированной (замкнутой) системы с течением времени не изменяется.
- 2) Изменение импульса тела за некоторый промежуток времени равно импульсу силы, действующей на это тело за этот же промежуток времени.
- 3) Импульс тела равен произведению массы тела на его скорость.
- 4) Результирующий импульс изолированной (замкнутой) системы с течением времени не изменяется.
- 5) Результирующая всех сил, действующих на тело, равна скорости изменения импульса.

26. Обруч массой $m = 0,3 \text{ кг}$ и $R = 0,5 \text{ м}$ привели во вращение, сообщив ему энергию вращательного движения 1200 Дж и опустили на пол так, что его ось вращения оказалась параллельной плоскости пола. Если обруч начал двигаться без проскальзывания, имея кинетическую энергию поступательного движения 200 Дж , то сила трения совершила работу, равную...

- 1) 1400 Дж ; 2) 1000 Дж ; 3) 600 Дж ; 4) 800 Дж .

27. Тело, двигаясь вдоль оси Ox прямолинейно и равноускоренно, за некоторое время уменьшило свою скорость в 2 раза. Какой из графиков зависимости проекции ускорения от времени соответствует такому движению?

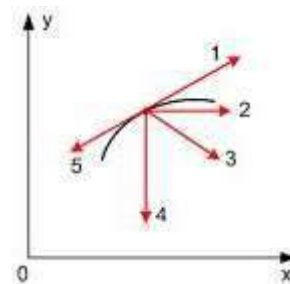


- 1) 1 2) 2 3) 3 4) 4

28. Тело брошено под углом к горизонту и движется в поле силы тяжести Земли. На рисунке изображен восходящий участок траектории данного тела.

Правильно изображает полное ускорение вектор ...

- 1) 5; 2) 2; 3) 3; 4) 4; 5) 1.



29. Самолет летит в горизонтальной плоскости по окружности с постоянной скоростью 360 км/ч . Подъемная сила всегда перпендикулярна плоскости крыльев самолета. Если эта плоскость составляет угол в 45° с горизонтом, то радиус окружности виража самолета равен

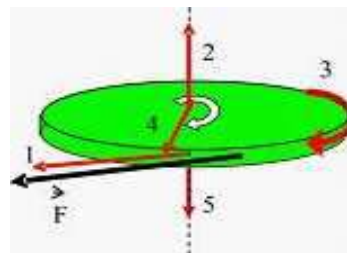
- 1) 400 м 2) 600 м 3) 800 м 4) 1000 м

30. Укажите верный вариант ответов. Выражение для кинетической энергии вращающегося вокруг неподвижной оси тела содержит:

- 1) момент импульса тела; 2) момент инерции тела; 3) угловую скорость; 4) угловое ускорение; 5) массу тела.

- 1) 1 2) 2, 3. 3) 4 4) 5 5) 4, 5.

31. Колесо вращается так, как показано на рисунке стрелкой. К ободу колеса приложена сила, направленная по касательной. Правильно изображает угловое перемещение колеса вектор ...



1) 5; 2) 2; 3) 3; 4) 4; 5) 1.

32. Мальчик подбросил футбольный мяч с поверхности Земли на некоторую высоту. Какое из утверждений будет справедливо в этом случае?

- 1) Величина потенциальной энергии мяча будет равна нулю.
- 2) Величина потенциальной энергии мяча зависит от высоты и массы мяча.
- 3) Кинетическая энергия мяча всегда равна потенциальной.
- 4) Полная энергия мяча будет состоять только из кинетической энергии.
- 5) Величина потенциальной энергии мяча зависит от скорости и массы мяча.

33. Двигатель мощностью 3 кВт за 12 с разогнал маховик до 10 об/с. Найти момент инерции маховика.

- 1) $15 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ 2) $21 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ 3) $18 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ 4) $27 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$

34. Неподвижная лодка вместе с находящимся в ней охотником имеет массу 250 кг. Охотник выстреливает из ружья в горизонтальном направлении. Какую скорость получит лодка после выстрела? Масса пули 5 г, а ее скорость при вылете равна 1000 м/с.

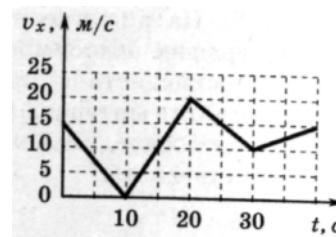
- 1) 22,4 м/с. 2) 0,05 м/с. 3) 0,02 м/с. 4) 700 м/с. 5) 0 м/с.

35. Человек сидит в центре вращающейся по инерции вокруг вертикальной оси карусели и держит в руках вертикально тяжелый шест за его середину. Если он сместит шест, оставляя его в вертикальном положении, в направлении от центра карусели, то частота вращения в конечном состоянии

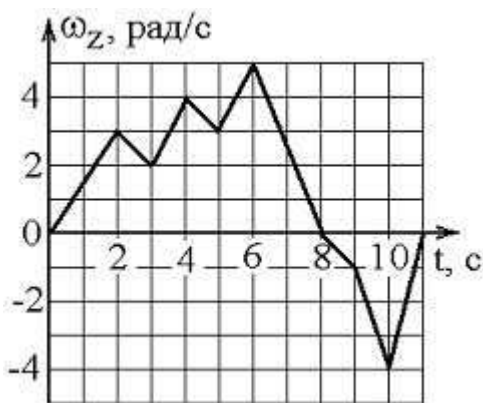
- 1) уменьшится; 2) не изменится; 3) увеличится; 4) будет равна нулю

36. Автомобиль движется по прямой улице. На графике представлена зависимость скорости автомобиля от времени. Модуль ускорения максимален в интервале времени

- 1) от 0 с до 10 с
- 2) от 10 с до 20 с
- 3) от 20 с до 30 с
- 4) от 30 с до 40 с



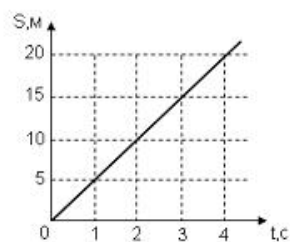
37. Твердое тело начинает вращаться вокруг оси Z с угловой скоростью, проекция которой изменяется во времени, как показано на графике. Угол поворота тела относительно начального положения будет максимальным в момент времени, равный ...



- 1) 11 c 2) 6 c; 3) 8 c; 4) 10 c.

38. Зависимость перемещения тела массой 4 кг от времени представлена на рисунке
Кинетическая энергия тела в момент времени $t=3$ с равна...

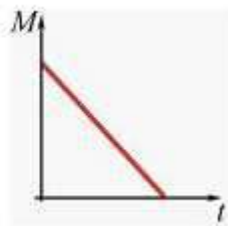
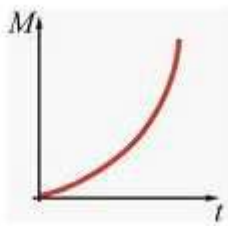
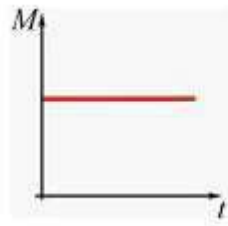
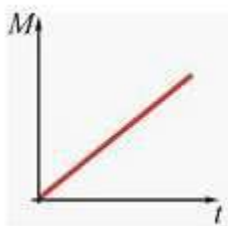
- 1) 40 Дж
2) 20 Дж
3) 50 Дж
4) 15 Дж



39. Маховик, приведенный в равноускоренное вращение, сделав 40 полных оборотов, стал вращаться с частотой 480 мин^{-1} . Определить угловое ускорение маховика

- 1) 5 рад/с^2 2) 6 рад/с^2 3) 2 рад/с^2 4) $3,5 \text{ рад/с}^2$

40. Момент импульса вращающегося тела изменяется по закону $L = at^2$, где a – некоторая положительная константа. Зависимость от времени момента сил, действующих на тело, определяется графиком ...



1

2

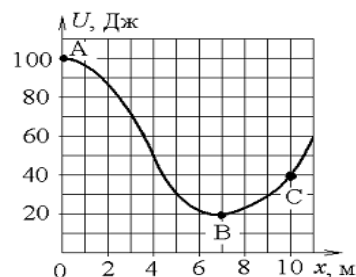
3

4

41. Небольшая шайба начинает движение без начальной скорости по гладкой горке из точки А. Сопротивление воздуха пренебрежимо мало. Зависимость потенциальной энергии шайбы от координаты изображено на графике $U(x)$

Кинетическая энергия шайбы в точке С...

- 1) в 2 раза меньше, чем в точке В
2) в 1,33 раза меньше, чем в точке В
3) в 2 раза больше, чем в точке В
4) в 1,33 раза больше, чем в точке В



42. Якорь двигателя делает 240 об/мин. Определить вращающий момент, если мощность двигателя 1 кВт.

- 1) 40 Н·м 2) 50 Н·м 3) 25 Н·м 4) 30 Н·м

43. Тело массой 2 кг поднято над Землей. Его потенциальная энергия 400 Дж. Если на поверхности Земли потенциальная энергия равна нулю и силами сопротивления воздуха можно пренебречь, скорость, с которой тело упадет на Землю, составит...

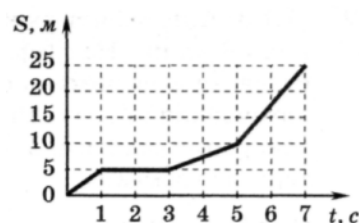
- 1) 14 м/с; 2) 10 м/с; 3) 20 м/с; 4) 40 м/с.

44. Шар имеет массу 5 кг и катится со скоростью 10 м/с по горизонтальной плоскости. Найти кинетическую энергию тела.

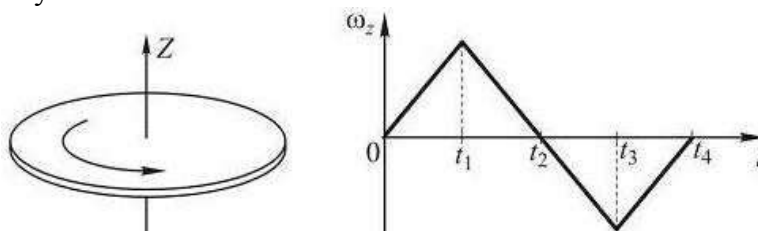
- 1) 350 Дж 2) 400 Дж 3) 250 Дж 4) 500 Дж

45. Автомобиль движется по прямой улице. На графике представлена зависимость скорости автомобиля от времени. Модуль скорости максимален в интервале времени

- 1) от 0 с до 1 с
2) от 1 с до 3 с
3) от 3 с до 5 с
4) от 5 с до 7 с



46. Диск вращается вокруг своей оси, изменяя проекцию своей угловой скорости $\omega_z(t)$ так, как показано на рисунке.



Векторы угловой скорости ω и ускорения ϵ сонаправлены в интервалы времени

- 1) от t_1 до t_2 и от t_2 до t_3 ; 2) от 0 до t_1 и от t_1 до t_2 ; 3) от 0 до t_1 и от t_2 до t_3 ;
4) от t_1 до t_2 и от t_3 до t_4 .

47. Выберите формулировку третьего закона Ньютона.

- 1) Силы взаимодействия между материальными точками пропорциональны произведению масс точек и обратно пропорциональны квадрату расстояния между ними.
2) Силы взаимодействия точечных зарядов пропорциональны произведению величин зарядов и обратно пропорциональны квадрату расстояния между ними.
3) Силы, с которыми действуют друг на друга взаимодействующие тела, равны по величине и противоположны по направлению.
4) Момент силы пропорционален угловому ускорению тела.
5) Сила, действующая на тело равна скорости изменения импульса тела.

48. Маховик, приведенный в равноускоренное вращение, сделав 40 полных оборотов, стал вращаться с частотой 480 мин⁻¹. Определить угловое ускорение маховика

- 1) 5 рад/с² 2) 6 рад/с² 3) 2 рад/с² 4) 3,5 рад/с²

49. Две материальные точки одинаковой массы движутся с одинаковой угловой скоростью по окружностям радиусами $R_1 = 2R_2$. При этом отношение моментов импульса точек L_1/L_2 равно...

- 1) 1/2; 2) 2; 3) 4; 4) 1/4.

1.6.6. Укажите формулу для расчета кинетической энергии тела.

- 1) $kx^2/2$; 2) mgh ; 3) $mv^2/2$; 4) $F_{\text{тр}} \cdot S$; 5) mv .

50. Какую работу надо произвести, чтобы раскрутить маховик массой 80 кг до 180 об/мин? Массу маховика считать равномерно распределенной по ободу с диаметром 1 м.

- 1) 1 кДж 2) 2,1 кДж 3) 3,6 кДж 4) 5 кДж

51. Тело массой 1 кг разгоняется под действием постоянной силы из состояния покоя до скорости 4 м/с. При этом сила совершает работу.

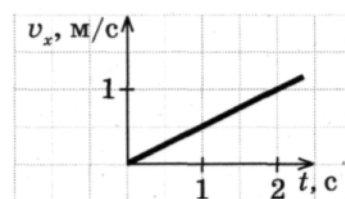
- 1) 16 Дж; 2) 8 Дж; 3) 4 Дж; 4) 2 Дж.

52. Какую линейную скорость приобретет центр шара, если шар скатится с наклонной плоскости высотой 1 м?

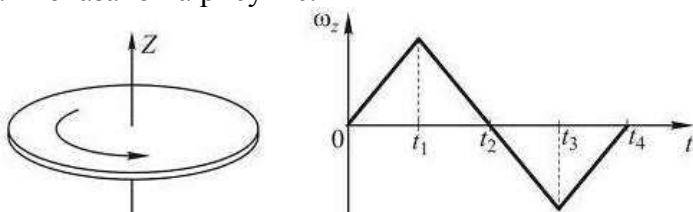
- 1) 2 м/с 2) 4,5 м/с 3) 3,7 м/с 4) 5,9 м/с

53. Тело движется по оси ОХ. Проекция его скорости $v_x(t)$ меняется по закону, приведенному на графике. Путь, пройденный телом за 1 с, равен

- 1) 0,25 м
2) 0,5 м
3) 1 м
4) 2 м



1. Диск вращается вокруг своей оси, изменяя проекцию своей угловой скорости $\omega_z(t)$ так, как показано на рисунке.



Вектор угловой скорости ω направлен по оси z в интервалы времени

- 1) от t_1 до t_2 и от t_2 до t_3 ; 2) от 0 до t_1 и от t_1 до t_2 ; 3) от 0 до t_1 и от t_3 до t_4 ;
4) от t_1 до t_2 и от t_3 до t_4 .

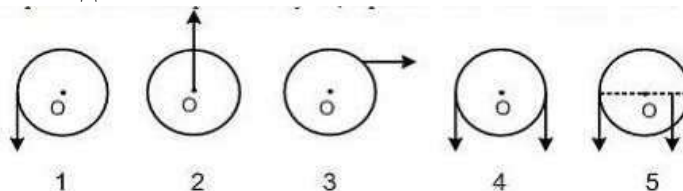
55. Тело массой m равномерно вращается по окружности со скоростью v . Изменение импульса тела при повороте его на пол-оборота равно...

- 1) 0. 2) $2mv$. 3) mv . 4) $0,5 mv$. 5) $-0,5 mv$.

56. Маховик вращался, делая 8 оборотов в секунду. Под действием постоянного тормозящего момента 100 Н·м он остановился через 50 с. Момент инерции маховика...

- 1) 50 кг·м² 2) 100 кг·м² 3) 150 кг·м² 4) 200 кг·м²

57. На рисунке к диску, который может свободно вращаться вокруг оси, проходящей через точку О, прикладывают одинаковые по величине силы.



Момент сил будет максимальным в положении...

- 1) 4; 2) 2; 3) 5; 4) 3; 5) 1.

58. Какие из перечисленных ниже величин являются векторными?

1. Угловая скорость. 2. Момент инерции тела. 3. Кинетическая энергия вращательного движения. 4. Работа силы, действующей на вращающееся тело. 5. Угловое ускорение.

- 1) 1, 5. 2) 2 3) 3 4) 4 5) 2, 3, 4.

59. Была произведена работа в 1 кДж, чтобы из состояния покоя привести маховик во вращение с частотой 8 с^{-1} . Какой момент импульса (количества движения) приобрел маховик?

- 1) 10 Дж·с 2) 20 Дж·с 3) 30 Дж·с 4) 40 Дж·с

60. Человек сидит в центре вращающейся по инерции вокруг вертикальной оси карусели и держит в руках длинный шест за его середину. Если он повернет шест из вертикального положения в горизонтальное, то частота вращения в конечном состоянии

- 1) уменьшится; 2) увеличится; 3) станет равна нулю 4) не изменится.

61. Какую линейную скорость приобретет центр шара, если шар скатится с наклонной плоскости высотой 1 м?

- 1) 2 м/с 2) 4,5 м/с 3) 3,7 м/с 4) 5,9 м/с

62. Зависимость координаты от времени для некоторого тела описывается уравнением $x = 12t - 2t^2$. В какой момент времени проекция скорости тела на ось равна нулю?

- 1) 6 с 2) 3 с 3) 2 с 4) 0 с

63. Материальная точка М движется по окружности со скоростью V. На рис. 1 показан график зависимости проекции скорости V_τ от времени (τ — единичный вектор положительного направления, V_τ — проекция V на это направление). При этом вектор полного ускорения на рис. 2 имеет направление...

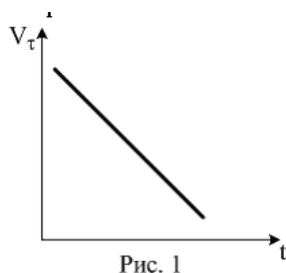


Рис. 1

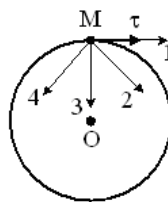
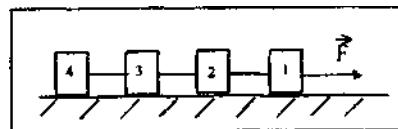


Рис. 2

- 1) 3; 2) 2; 3) 4; 4) 1.

64. Четыре одинаковых кубика, связанные невесомыми нитями, движутся по гладкому горизонтальному столу под действием горизонтальной силы F, приложенной к первому кубику. Чему равна сила натяжения нити, связывающей третий и четвертый кубики?



- 1) 0 2) $1/4F$ 3) $1/2F$ 4) $3/4F$

65. Тонкостенный цилиндр массой 12 кг с диаметром основания 30 см вращается, согласно уравнению $\varphi = A + Bt + Ct^3$, где $A = 4 \text{ рад}$; $B = -2 \text{ рад/с}$; $C = 0,2 \text{ рад/с}^3$. Определить действующий на цилиндр момент сил в момент времени $t = 3 \text{ с}$.

- 1) $0,1 \text{ Н} \cdot \text{м}$ 2) $0,5 \text{ Н} \cdot \text{м}$ 3) $1 \text{ Н} \cdot \text{м}$ 4) $1,5 \text{ Н} \cdot \text{м}$

66. Если момент инерции тела увеличить в 2 раза и скорость его вращения увеличить в 2 раза, то момент импульса тела...

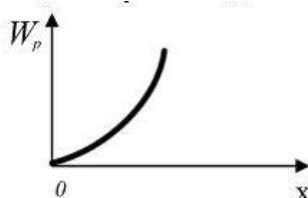
- 1) увеличится в 8 раз
2) увеличится в 4 раза
3) не изменится
4) уменьшится в 8 раз

67. Какие из перечисленных ниже величин являются векторными?

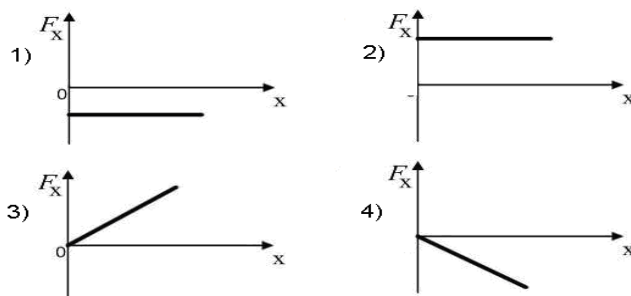
1. Угловая скорость. 2. Момент инерции тела. 3. Кинетическая энергия вращательного движения. 4. Работа силы, действующей на вращающееся тело. 5. Угловое ускорение.

- 1) 1, 5. 2) 2 3) 3 4) 4 5) 2, 3, 4.

68. В потенциальном поле сила F пропорциональна градиенту потенциальной энергии W_p . Если график зависимости потенциальной энергии W_p от координаты x имеет вид, представленный на рисунке,



то зависимость проекции силы F_x на ось x будет...



69. Сплошной цилиндр имеет массу 5 кг и катится со скоростью 10 м/с по горизонтальной плоскости. Найти кинетическую энергию тела.

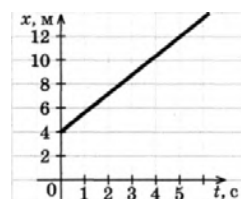
- 1) 350 Дж 2) 375 Дж 3) 400 Дж 4) 500 Дж

70. Тело массой 2 кг поднято над Землей. Его потенциальная энергия 400 Дж. Если на поверхности Земли потенциальная энергия равна нулю и силами сопротивления воздуха можно пренебречь, скорость, с которой тело упадет на Землю, составит...

- 1) 14 м/с; 2) 10 м/с; 3) 20 м/с; 4) 40 м/с.

71. На рисунке показан график движения тела. Определите значение его координаты и скорости движения в момент времени 5 с.

- 1) 4 м; 1,6 м/с
2) 12 м; 2,4 м/с
3) 12 м; 1,6 м/с
4) 4 м; 2,4 м/с



72. Два спутника движутся по разным круговым орбитам вокруг Земли. Скорость первого из них в 2 раза больше, а радиус орбиты в 4 раза меньше, чем второго. Центробежное ускорение первого спутника a_1 , второго — a_2 ? Чему равно отношение a_1/a_2 ?

- 1) 1
- 2) 2
- 3) 4
- 4) 16

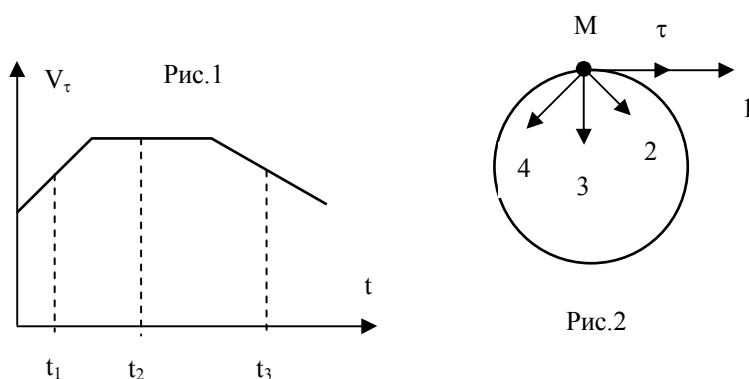
73. Как относятся друг к другу силы Q_1 и Q_2 , с которыми автомобиль давит на середину выпуклого и вогнутого мостов. Радиус кривизны моста в обоих случаях равен 80м, а скорость автомобиля 72км/ч ?

- 1) $Q_1/Q_2 \approx 0,3$
- 2) $Q_1/Q_2 \approx 0,5$
- 3) $Q_1/Q_2 \approx 0,7$
- 4) $Q_1/Q_2 \approx 0,9$

74. Линейная скорость точек на окружности вращающегося диска равна 3 м/с. Точки, расположенные на 10 см ближе к оси, имеют скорость 2 м/с. Чему равна частота вращения диска?

- 1) $1,6 \text{ с}^{-1}$
- 2) 2 с^{-1}
- 3) $0,7 \text{ с}^{-1}$
- 4) 5 с^{-1}

75. Точка М движется по окружности со скоростью V . На рис.1 показан график скорости V_τ от времени (τ — единичный вектор положительного направления; V_τ — проекция V на это направление). На рис.2 укажите направление силы, действующей на точку М в момент времени t_1 .



- 1) 4;
- 2) 1;
- 3) 3;
- 4) 2.

76. Для того, чтобы раскрутить диск радиуса R_1 вокруг своей оси до угловой скорости ω , необходимо совершить работу A_1 . Под прессом диск становится тоньше, но радиус его возрастает до $R_2=2R_1$.

Для того, чтобы раскрутить его до той же угловой скорости, необходимо совершить работу...

- 1) $A_2=1/2 A_1$
- 2) $A_2=4A_1$
- 3) $A_2=2 A_1$
- 4) $A_2=1/4 A_1$

77. Укажите формулу для расчета потенциальной энергии тела, поднятого над Землей

- 1) $kx^2/2$;
- 2) mgh ;
- 3) $mv^2/2$;
- 4) $F_{\text{тр}} \cdot S$;
- 5) mv .

78. На неподвижный бильярдный шар налетел другой такой же с импульсом $P=0,5 \text{ кг}\cdot\text{м/с}$. После удара шары разлетелись под прямым углом так, что импульс первого шара стал $P_1=0,3 \text{ кг}\cdot\text{м/с}$. Импульс второго шара после удара...

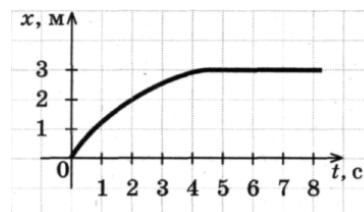
- 1) 0,4 кг•м/с
- 2) 0,3 кг•м/с
- 3) 0,2 кг•м/с
- 4) 0,5 кг•м/с

79. Какую линейную скорость приобретет центр шара, если шар скатится с наклонной плоскости высотой 1 м?

- 1) 2 м/с
- 2) 4,5 м/с
- 3) 3,7 м/с
- 4) 5,9 м/с

1.10.1. На рисунке изображен график изменения координаты тела с течением времени. Как изменялась скорость в промежуток времени от 0 до 5 с?

- 1) Не изменялась
- 2) Увеличивалась
- 3) Уменьшалась
- 4) Для ответа на вопрос не хватает данных



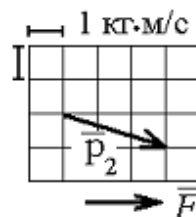
80. Диск радиусом 20 см равномерно вращается вокруг своей оси. Скорость точки, находящейся на расстоянии 15 см от центра диска, равна 1,5 м/с. Скорость крайних точек диска равна

- 1) 4 м/с
- 2) 0,2 м/с
- 3) 2 м/с
- 4) 1,5 м/с

81. На теннисный мяч, который летел с импульсом p_1 , на короткое время $t=0,01$ с подействовал порыв ветра с постоянной силой $F=300$ Н и импульс мяча стал равным p_2 (масштаб и направление указаны на рисунке)

Величина импульса p_1 была равна...

- 1) 1 кг•м/с
- 2) 6,1 кг•м/с
- 3) 33,2 кг•м/с
- 4) 6,2 кг•м/с
- 5) 5 кг•м/с

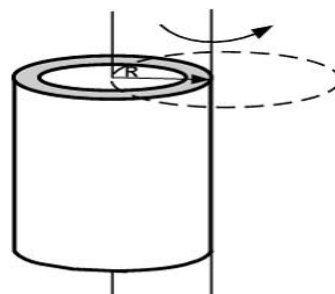


82. Момент импульса тела L изменяется со временем по закону $L(t) = t^2 - 6t + 8$. Момент действующих на тело сил станет равным нулю через ...

- 1) 1 с
- 2) 2 с
- 3) 4 с
- 4) 3 с

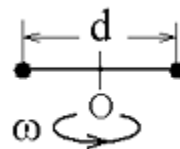
83. При расчете моментов инерции тела относительно осей, не проходящих через центр масс, используют теорему Штейнера. Если ось вращения тонкостенной трубки перенести из центра масс на образующую, то момент инерции относительно новой оси увеличится в...

- 1) 4 раза
- 2) 3 раза
- 3) 2 раза
- 4) 1,5 раза



84. Два маленьких массивных шарика закреплены на концах невесомого стержня длины d . Стержень может вращаться в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси, проходящей через середину стержня. Стержень раскрутили до угловой скорости ω_1 . Под действием трения стержень остановился, при этом выделилось тепло Q_1 . Если стержень раскручен до угловой скорости $\omega_2 = 3\omega_1$, то при остановке стержня выделится тепло...

- 1) $Q_2 = 1/9 Q_1$
- 2) $Q_2 = 9 Q_1$
- 3) $Q_2 = 1/3 Q_1$
- 4) $Q_2 = 3 Q_1$



85. Какую физическую величину определяют по формуле $N = A/t$, где A - работа, t - время?

- 1) Импульс тела.
- 2) Мощность.
- 3) Энергия.
- 4) Силу реакции опоры.

86. Сплошной и полый цилиндры, имеющие одинаковые массы и радиусы, вкатываются без проскальзывания на горку. Если начальные скорости тел одинаковы, то...

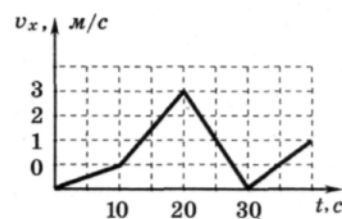
- 1) выше поднимется сплошной цилиндр;
- 2) выше поднимется полый цилиндр;
- 3) оба тела поднимутся на одну и ту же высоту.

87. Навстречу друг другу летят шарики из пластилина. Модули их импульсов равны соответственно $4 \cdot 10^{-2}$ кг м/с и $3 \cdot 10^{-2}$ кг м/с. Столкнувшись, шарики слипаются. Импульс слипшихся шариков равен...

- 1) $2 \cdot 10^{-2}$ кг·м/с;
- 2) 10^{-2} кг·м/с;
- 3) $5 \cdot 10^{-2}$ кг·м/с;
- 4) $7 \cdot 10^{-2}$ кг·м/с.

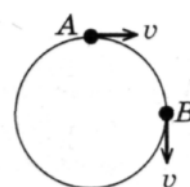
88. Автомобиль движется по прямой улице. На графике представлена зависимость скорости автомобиля от времени. Модуль ускорения минимален в интервале времени

- 1) от 0 до 10 с
- 2) от 10 с до 20 с
- 3) от 20 с до 30 с
- 4) от 30 до 40 с



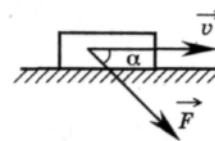
89. При равномерном движении по окружности модуль вектора изменения скорости при перемещении из точки А в точку В (см. рис.) равен

- 1) 0
- 2) $v\sqrt{2}$
- 3) $2v$
- 4) v



90. Тело массой 1 кг движется по горизонтальной плоскости. На тело действует сила $F = 10$ Н под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту. Коэффициент трения между телом и плоскостью равен 0,4. Каков модуль силы трения, действующей на тело?

- 1) 3,4 Н
- 2) 0,6 Н
- 3) 0 Н
- 4) 6 Н



91. Момент импульса тела направлен...

- 1) по касательной к траектории движения.

- 2) в произвольную сторону.
- 3) по нормали к линейной скорости движения.
- 4) по оси вращения.
- 5) перпендикулярно оси вращения.

92. Какое утверждение ошибочно?

- 1) Механическая система называется замкнутой, если на нее не действуют внешние силы или действие всех внешних сил на эту систему полностью скомпенсировано.
- 2) Результирующий импульс замкнутой системы тел с течением времени не изменяется.
- 3) Если система замкнута, то ее результирующий импульс всегда равен нулю.
- 4) В замкнутой консервативной системе полная механическая энергия с течением времени не изменяется.
- 5) Работа консервативной силы на замкнутой траектории равна нулю.

93. Какую работу надо произвести, чтобы раскрутить маховик массой 80 кг до 180 об/мин? Массу маховика считать равномерно распределенной по ободу с диаметром 1 м.

- 1) 1 кДж 2) 2,1 кДж 3) 3,6 кДж 4) 5 кДж

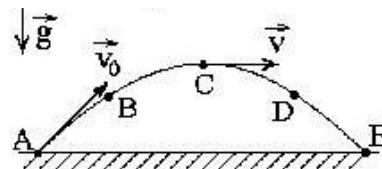
94. Неподвижная лодка вместе с находящимся в ней охотником имеет массу 250 кг. Охотник выстреливает из ружья в горизонтальном направлении. Какую скорость получит лодка после выстрела? Масса пули 5 г, а ее скорость при вылете равна 1000 м/с.

- 1) 22,4 м/с. 2) 0,05 м/с. 3) 0,02 м/с. 4) 700 м/с. 5) 0 м/с.

95. Камень бросили под углом к горизонту со скоростью v_0 . Его траектория в однородном поле силы тяжести Земли изображена на рисунке. Сопротивления воздуха нет.

Модуль тангенциального ускорения a_t на участке А-В-С ...

- 1) не изменяется; 2) уменьшается; 3) увеличивается.



96. Какие точки Земли имеют нулевые линейные и угловые скорости?

- 1) Точки на оси вращения Земли.
- 2) Точки на экваторе.
- 3) Точки на полюсах.
- 4) Точки на широте 45 градусов.
- 5) Точки на широте 90 градусов.

97. После удара клюшкой шайба массой 0,15 кг скользит по ледяной площадке. Ее скорость при этом меняется в соответствии с уравнением $v = 20 - 3t$, где все величины выражены в СИ. Коэффициент трения шайбы о лед равен

- 1) 0,15 2) 0,2 3) 3 4) 0,3

98. Если момент инерции тела увеличить в 2 раза и скорость его вращения увеличить в 2 раза, то момент импульса тела...

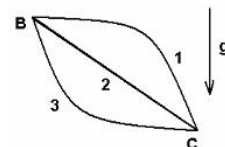
- 1) увеличится в 8 раз
- 2) увеличится в 4 раза
- 3) не изменится
- 4) уменьшится в 8 раз

99. Якорь двигателя делает 240 об/мин. Определить вращающий момент, если мощность двигателя 1 кВт.

- 1) 40 Н·м 2) 50 Н·м 3) 25 Н·м 4) 30 Н·м

100. Соотношение работ силы тяжести при движении тела из точки В в точку С по разным траекториям имеет вид

- 1) $A_1 > A_2 > A_3$
 2) $A_1 = A_2 > A_3$
 3) $A_1 = A_2 = A_3 \neq 0$
 4) $A_1 = A_2 = A_3 = 0$



101. Закон сохранения импульса формулируется так.

- 1) Результирующий момент импульса изолированной (замкнутой) системы с течением времени не изменяется.
- 2) Изменение импульса тела за некоторый промежуток времени равно импульсу силы, действующей на это тело за этот же промежуток времени.
- 3) Импульс тела равен произведению массы тела на его скорость.
- 4) Результирующий импульс изолированной (замкнутой) системы с течением времени не изменяется.
- 5) Результирующая всех сил, действующих на тело, равна скорости изменения импульса.

102. Тело брошено вертикально вверх с начальной скоростью 16 м/с. На высоте h кинетическая энергия равна потенциальной. Определить эту высоту.

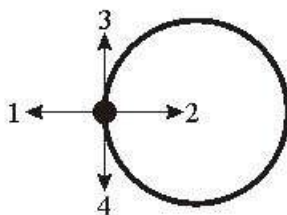
- 1) 10 м 2) 7,3 м 3) 6,4 м 4) 16 м

103. Тело брошено горизонтально с высоты $h = 20$ м. Траектория его описывается уравнением $y = 20 - 0,05x^2$. Максимальная дальность полета тела равна

- 1) 40 м; 2) 30 м; 3) 20 м; 4) 10 м.

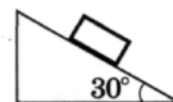
104. Тело движется равномерно по окружности в направлении против часовой стрелки. Как направлены векторы нормального и тангенциального ускорений при таком движении?

- 1) $a_n - 2$, $a_\tau - 4$.
- 2) $a_n - 2$, $a_\tau - 3$.
- 3) $a_n - 3$, $a_\tau - 1$.
- 4) $a_n - 4$, $a_\tau - 2$.
- 5) $a_n - 1$, $a_\tau - 4$.

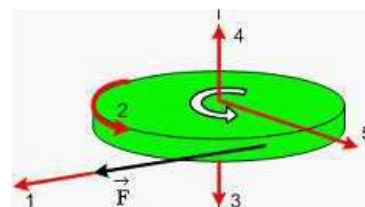


105. Брусок массой 0,2 кг покоится на наклонной плоскости. Коэффициент трения между поверхностями бруска и плоскости равен 0,6. Сила трения равна

- 1) 0,5 Н 2) 1 Н 3) 1,7 Н 4) 2 Н



106. Колесо вращается так, как показано на рисунке белой стрелкой. К ободу колеса приложена сила, направленная по касательной. Правильно изображает угловое ускорение колеса вектор...



- 1) 2; 2) 3; 3) 5; 4) 1; 5) 4.

107. Маховик, приведенный в равноускоренное вращение, сделав 40 полных оборотов, стал вращаться с частотой 480 мин^{-1} . Определить угловое ускорение маховика

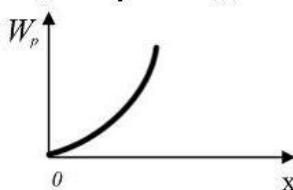
- 1) 5 рад/с^2 2) 6 рад/с^2 3) 2 рад/с^2 4) $3,5 \text{ рад/с}^2$

108. Для того, чтобы раскрутить диск радиуса R_1 вокруг своей оси до угловой скорости ω , необходимо совершить работу A_1 . Под прессом диск становится тоньше, но радиус его возрастает до $R_2=2R_1$.

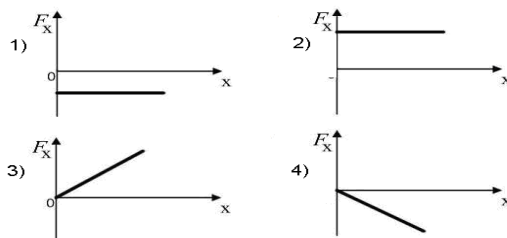
Для того, чтобы раскрутить его до той же угловой скорости, необходимо совершить работу...

- 1) $A_2=1/2 A_1$
 2) $A_2=4A_1$
 3) $A_2=2 A_1$
 4) $A_2=1/4 A_1$

109. В потенциальном поле сила F пропорциональна градиенту потенциальной энергии W_p . Если график зависимости потенциальной энергии W_p от координаты x имеет вид, представленный на рисунке,



то зависимость проекции силы F_x на ось x будет...



110. Человек сидит в центре вращающейся по инерции вокруг вертикальной оси карусели и держит в руках вертикально тяжелый шест за его середину. Если он сместит шест, оставив его в вертикальном положении, в направлении от центра карусели, то частота вращения в конечном состоянии

- 1) уменьшится; 2) не изменится; 3) увеличится; 4) станет равной нулю

111. Тело массой 2 кг поднято над Землей. Его потенциальная энергия 400 Дж . Если на поверхности Земли потенциальная энергия равна нулю и силами сопротивления воздуха можно пренебречь, скорость, с которой тело упадет на Землю, составит...

- 1) 14 м/с ; 2) 10 м/с ; 3) 20 м/с ; 4) 40 м/с .

112. Для того, чтобы время полета было максимальным при данном модуле начальной скорости, тело следует бросить под углом ... к горизонту.

- 1) 30° ; 2) 90° ; 3) 45° ; 4) 60° .

113. Две материальные точки движутся по окружностям радиусами R_1 и R_2 , причем $R_2 = 2R_1$. При условии равенства линейных скоростей точек их центростремительные ускорения связаны соотношением

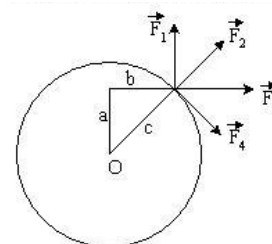
- 1) $a_1 = 2a_2$ 2) $a_1 = a_2$ 3) $a_1 = 0,5a_2$ 4) $a_1 = 4a_2$

113. Планета имеет радиус в 2 раза меньше радиуса Земли. Известно, что ускорение свободного падения на этой планете равно $9,8 \text{ м/с}^2$. Чему равно отношение массы планеты к массе Земли?

- 1) 0,25 2) 0,5 3) 1 4) 2

114. К точке, лежащей на внешней поверхности диска, приложены 4 силы. Если ось вращения проходит через центр O диска перпендикулярно плоскости рисунка, то плечо силы F_1 равно...

- 1) b ; 2) a ; 3) 0; 4) c .



115. Маховое колесо, вращающееся с частотой 240 мин^{-1} , останавливается в течение 0,5 мин. Сколько оборотов оно сделало до остановки, если его движение равнозамедленное?

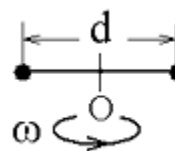
- 1) 20 2) 30 3) 45 4) 60

116. Двигатель мощностью 3 кВт за 12 с разогнал маховик до 10 об/с. Найти момент инерции маховика.

- 1) $15 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ 2) $21 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ 3) $18 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ 4) $27 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$

117. Два маленьких массивных шарика закреплены на концах невесомого стержня длины d . Стержень может вращаться в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси, проходящей через середину стержня. Стержень раскрутили до угловой скорости ω_1 . Под действием трения стержень остановился, при этом выделилось тепло Q_1 . Если стержень раскручен до угловой скорости $\omega_2 = 3\omega_1$, то при остановке стержня выделится тепло...

- 1) $Q_2 = 1/9 Q_1$
2) $Q_2 = 9 Q_1$
3) $Q_2 = 1/3 Q_1$
4) $Q_2 = 3 Q_1$



118. На неподвижный бильярдный шар налетел другой такой же с импульсом $P = 0,5 \text{ кг} \cdot \text{м/с}$. После удара шары разлетелись под прямым углом так, что импульс первого шара стал $P_1 = 0,3 \text{ кг} \cdot \text{м/с}$. Импульс второго шара после удара...

- 1) $0,4 \text{ кг} \cdot \text{м/с}$
2) $0,3 \text{ кг} \cdot \text{м/с}$
3) $0,2 \text{ кг} \cdot \text{м/с}$
4) $0,5 \text{ кг} \cdot \text{м/с}$

119. Обруч массой $m = 0,3 \text{ кг}$ и $R = 0,5 \text{ м}$ привели во вращение, сообщив ему энергию вращательного движения 1200 Дж и опустили на пол так, что его ось вращения оказалась параллельной плоскости пола. Если обруч начал двигаться без проскальзывания, имея кинетическую энергию поступательного движения 200 Дж, то сила трения совершила работу, равную...

- 1) 1400 Дж; 2) 1000 Дж; 3) 600 Дж; 4) 800 Дж.

120. Первый камень массой $m = 0,1 \text{ кг}$ брошен под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту с начальной скоростью $v_0 = 10 \text{ м/с}$. Второй такой же камень брошен вертикально вверх с начальной скоростью $v_0 = 10 \text{ м/с}$.

ростью 5 м/с из того же начального положения. Максимальная высота подъема второго камня ...

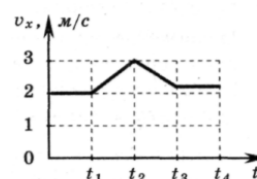
- 1) больше высоты подъема первого камня;
- 2) равна высоте подъема первого камня;
- 3) может быть как больше, так и меньше высоты первого камня;
- 4) меньше высоты подъема первого камня.

121. Если a_τ и a_n – тангенциальная и нормальная составляющие ускорения, то соотношения: $a_\tau \neq 0$, $a_n \neq 0$ справедливы для...

- 1) прямолинейного равноускоренного движения;
- 2) прямолинейного равномерного движения;
- 3) равнопеременного криволинейного движения;
- 4) равномерного движения по окружности

122. На рисунке изображен график зависимости модуля скорости вагона от времени в инерциальной системе отсчета. В течение каких промежутков времени суммарная сила, действующая на вагон со стороны других тел, равнялась нулю, если вагон двигался прямолинейно?

- 1) $0-t_1$, t_3-t_4
- 2) $0-t_4$
- 3) t_1-t_2 , t_2-t_3
- 4) таких промежутков времени нет



123. Маховик вращался, делая 8 оборотов в секунду. Под действием постоянного тормозящего момента 100 Н·м он остановился через 50 с. Момент инерции маховика...

- 1) $50 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$
- 2) $100 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$
- 3) $150 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$
- 4) $200 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$

124. Шар катится по горизонтальной плоскости. Какую часть энергии поступательного движения каждого тела составляет от общей кинетической энергии?

- 1) $5/7$
- 2) $3/4$
- 3) $2/3$
- 4) $1/2$

125. Какую линейную скорость приобретет центр шара, если шар скатится с наклонной плоскости высотой 1 м?

- 1) 2 м/с
- 2) 4,5 м/с
- 3) 3,7 м/с
- 4) 5,9 м/с

Тема 2: Молекулярная физика и термодинамика

1. Идеальный газ это система, состоящая из...

- 1) молекул кислорода;
- 2) молекул различных газов;
- 3) многоатомных молекул;
- 4) взаимодействующих атомов;
- 5) невзаимодействующих материальных точек.

2. Выберите уравнение Менделеева-Клапейрона.

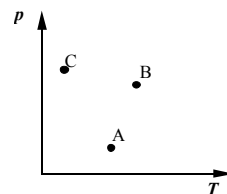
- 1) $p = p_0(1 + \alpha T)$.
- 2) $pV = \text{const.}$
- 3) $V = V_0 \alpha T$.
- 4) $M/\mu = \nu$.
- 5) $pV = \nu RT$.

3. При увеличении абсолютной температуры идеального газа в 2 раза средняя квадратичная скорость движения его молекул:

- 1) увеличится в 2 раза;
- 2) увеличится в 6 раз;
- 3) уменьшится в 8 раз;
- 4) увеличится в 4 раза.

4. Объемы трех состояний одной и той же массы идеального газа, обозначенных на графике точками А, В и С на диаграмме $p - T$, связаны между собой соотношением:

- 1) $V_A > V_B > V_C$;
- 2) $V_A < V_B < V_C$;
- 3) $V_C > V_B < V_A$;
- 4) $V_A < V_B$, $V_B > V_C$;



5. В 1 кг воды содержится...

- 1) 55,5 моль ($3,3 \cdot 10^{25}$ молекул);
- 2) 100 моль ($6 \cdot 10^{23}$ молекул);
- 3) 18 моль ($18 \cdot 10^{23}$ молекул);
- 4) 1 моль (10^{23} молекул).

6. Укажите утверждение, с которым Вы согласны.

Количество теплоты – это...

- 1) энергия, передаваемая телу в процессе совершения работы;
- 2) энергия, передаваемая и получаемая телом в процессе теплопередачи;
- 3) сумма кинетической и потенциальной энергий молекул тела;
- 4) энергия, передаваемая телу в процессе упорядоченного движения.

7. Укажите верную запись I начала термодинамики.

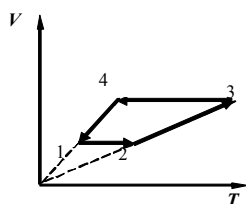
1) $Q = m \cdot C (T_2 - T_1)$.

2) $Q = \Delta U + A$.

3) $Q = I^2 R t$.

4) $\eta = \frac{A}{Q}$.

8. На рисунке представлен график изменения состояния идеального газа. На каком участке работа имеет максимальное по модулю значение?



1) 1 – 2;

2) 2 – 3;

3) 3 – 4;

4) 4 – 1.

9. Чему равно число степеней свободы молекул двухатомного газа?

- 1) $i = 2$;
- 2) $i = 3$;
- 3) $i = 4$;
- 4) $i = 5$;
- 5) $i = 6$.

10. Какое количество теплоты нужно передать двум молям идеального одноатомного газа, чтобы увеличить его объем в 3 раза при постоянном давлении? Начальная температура газа T_0 .

- 1) $2RT_0$; 2) $4RT_0$; 3) $10RT_0$; 4) $6RT_0$; 5) $5RT_0$.

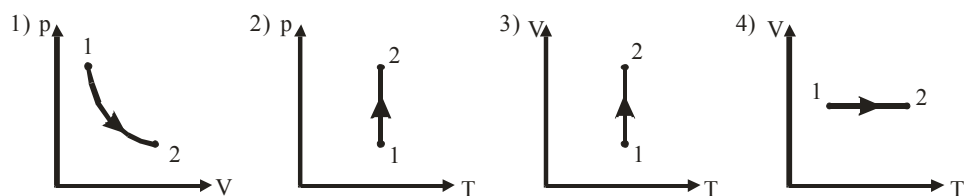
11. Давление газа при его нагревании в закрытом сосуде увеличивается. Это можно объяснить увеличением...

- 1) концентрации молекул;
- 2) расстояний между молекулами;
- 3) средней кинетической энергии молекул;
- 4) средней потенциальной энергии молекул.

12. Объем одного моля идеального газа при нормальных условиях ($t=0^\circ\text{C}$; $p = 101 \text{ кПа}$) равен...

- 1) 8,31 л; 2) 22,4 л; 3) 10^3 м^3 ; 4) зависит от природы газа

13. Какой график соответствует процессу изотермического сжатия системы?

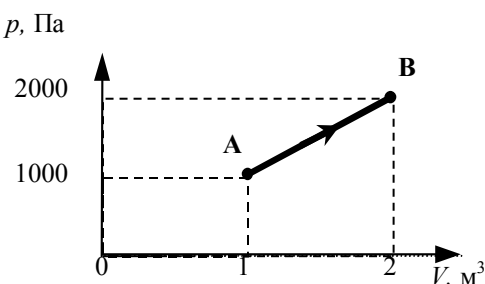


14. Абсолютная температура газа возросла в 2 раза. Во сколько раз изменилась наиболее вероятная скорость молекул?

- 1) Не изменилась.
- 2) Увеличилась в 1,41 раза.
- 3) Уменьшилась в 2 раза.
- 4) Увеличилась в 2 раза.
- 5) Увеличилась в 4 раза.

15. При переходе из состояния А в состояние В температура идеального газа

- 1) увеличилась в 2 раза;
- 2) увеличилась в 4 раза;
- 3) уменьшилась в 2 раза;
- 4) уменьшилась в 4 раза.



16. Какие из перечисленных видов энергии входят в состав внутренней энергии тела?

- а) кинетическая энергия хаотического (теплового) движения молекул;
- б) потенциальная энергия взаимодействия молекул;
- в) кинетическая энергия тела как целого относительно других тел;
- г) механическая энергия;

- 1) в; 2) а, б; 3) г; 4) а, в.

17. Газ совершает наименьшую работу, если его расширение от объема V_1 до V_2 происходит...

- 1) адиабатически;
- 2) изохорически;
- 3) изотермически;
- 4) изобарически;
- 5) сначала изохорически, затем адиабатно.

18. Укажите формулу для расчета коэффициента полезного действия цикла Карно.

- 1) $\frac{T_2 - T_1}{T_2}$;
- 2) $Q_1 - Q_2$;
- 3) $\frac{T_1 + T_2}{T_1}$;
- 4) $\frac{A}{Q_1}$;
- 5) $\frac{Q_1}{A}$.

19. Верно ли, что...

- 1) при любом круговом процессе система не может совершать работу большую, чем количество тепла, подведенное к ней извне;
- 2) тепло, подведенное к системе, затрачивается на изменение ее внутренней энергии и на совершение ею работы над внешними телами;
- 3) невозможно такое периодически движущееся устройство, единственным и конечным результатом которого было бы превращение внутренней энергии в механическую?;
- 4) механическая энергия может превращаться во внутреннюю полностью, а внутренняя в механическую - лишь частично переведена во внутреннюю.

- 1) 1;
- 2) 1, 2, 3, 4;
- 3) 2, 3;
- 4) 1, 3;
- 5) 3, 4.

20. Гелий, находящийся при нормальных условиях, изотермически расширяется от 1 л до 2 л. Найти количество теплоты, сообщенное газу.

- 1) 69 Дж;
- 2) 100 Дж
- 3) 690 Дж;
- 4) 1000 Дж.

21. Какие утверждения справедливы для идеального газа?

- 1) Взаимодействие молекул на расстоянии отсутствует.
 - 2) Уравнение Менделеева-Клапейрона описывает состояние газа.
 - 3) Молекулы газа взаимодействуют на расстоянии.
 - 4) Внутренняя энергия равна сумме кинетической и потенциальной энергии взаимодействия молекул газа.
 - 5) Собственным объемом молекул можно пренебречь по сравнению с объемом сосуда, в котором газ находится.
- 1) 4;
 - 2) 1;
 - 3) 2;
 - 4) 5;
 - 5) 1, 2, 5.

22. Воздух в комнате состоит из смеси газов: кислорода, азота, углекислого газа, паров воды и др. Какие из физических параметров этих газов обязательно одинаковы при тепловом равновесии?

- 1) парциальное давление;
- 2) температура;
- 3) концентрация;
- 4) объем.

23. Абсолютная температура газа уменьшилась в 4 раза. Во сколько раз изменилась средняя квадратичная скорость молекул?

- 1) Уменьшилась в 2 раза.
- 2) Не изменилась.
- 3) Уменьшилась в $\sqrt{2}$ раз.
- 4) Увеличилась в 2 раза.
- 5) Уменьшилась в 4 раза.

24. Укажите численное значение универсальной газовой постоянной.

- 1) $8,31 \cdot 10^{23}$ Дж/(моль К);
- 2) $1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К;
- 3) $6,02 \cdot 10^{23}$ моль⁻¹;
- 4) 8,31 Дж/(моль);
- 5) 8,31 Дж/(моль К).

25. Молекулы какого газа обладают наименьшим числом степеней свободы?

- 1) водорода; 2) азота; 3) гелия; 4) кислорода; 5) углекислого газа.

26. Какие утверждения могут служить формулировкой второго начала термодинамики?

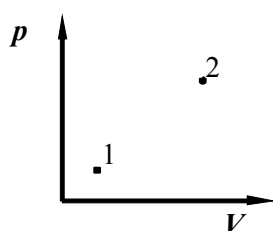
- 1) Энтропия – скалярная физическая величина, характеризующая состояние системы, приращение которой при обратимом процессе равно количеству приведенного тепла, полученному системой в этом процессе
- 2) На круговом процессе система не может совершать работу без подвода энергии извне или совершать работу, большую, чем подводимая извне энергия.
- 3) Невозможно периодически действующее устройство, которое превращало бы тепло в работу полностью
- 4) Невозможно периодически действующее устройство, которое совершало бы работу бóльшую, чем подводимое тепло

- 1) 1; 2) 2; 3) 2, 3, 4; 4) 3; 5) 4.

27. Что называется молярной теплоемкостью идеального газа?

- 1) Работа, совершенная одним молем газа при нагревании на 1 К.
- 2) Изменение внутренней энергии газа при нагревании моля на 1 К.
- 3) Количество теплоты для нагревания одного моля моля газа на 1 К.
- 4) Количество теплоты для нагревания 1 кг газа на 1 К.
- 5) Изменение внутренней энергии газа при нагревании 1 кг на 1 К.

28. Газ переходит из состояния 1 в состояние 2. В первом случае сначала по изохоре, а затем по изобаре, а в другом случае, наоборот, сначала по изобаре, а затем по изохоре. Сравните работу, совершаемую системой в двух случаях, и сообщаемое системе количество теплоты.



- 1) одинаковое;
- 2) в первом случае работа больше и количество теплоты больше;
- 3) во втором случае работа больше и количество теплоты больше;
- 4) в первом случае работа меньше, а количество теплоты больше.

29. Первый закон термодинамики в дифференциальной форме записывается так:

- 1) $\delta Q = \delta A + dV$;
- 2) $\delta Q = A + dU$;
- 3) $Q = A + \Delta U$;
- 4) $\delta Q = \delta A + dU$;
- 5) $dQ = dA + dU$.

30. Тепловая машина с КПД 60 % получает за цикл от нагревателя 100 Дж. Какое количество теплоты машина отдает за цикл холодильнику?

- 1) 40 Дж; 2) 60 Дж; 3) 100 Дж; 4) 160 Дж.

31. Укажите уравнение Менделеева-Клапейрона для 1 моля газа.

- 1) $pV = \frac{m}{\mu} RT$; 2) $pV^\gamma = \text{const}$; 3) $pV_m = RT$;
 4) $\frac{pV}{T} = \text{const}$; 5) $\left(p + \frac{a}{V_m^2}\right)(V_m - b) = RT$.

32. Изменение на 100 °С температуры газа с 300 °С до 400 °С соответствует изменению температуры по шкале Кельвина на...

- 1) 573 К; 2) 673 К; 3) 273 К; 4) 100 К.

33. Действия каких сил компенсируются когда подводная лодка покоится в толще воды ?

- 1) силы тяжести и силы Архимеда;
 2) Силы тяжести и суммы сил упругости дна и силы Архимеда, если под дном лодки есть вода;
 3) силы тяжести , силы давления воды и силы упругости дна, если под дном лодки совершенно нет воды;
 4) силы тяжести и силы давления воды

34. При некотором процессе, проведенном с идеальным газом, соотношение между давлением и объемом газа $P \cdot V = \text{const}$. Как изменится температура газа, если давление увеличится в 4 раза?

- 1) Увеличится в 2 раза. 2) Увеличится в 4 раза.
 3) Уменьшится в 4 раза. 4) Останется без изменений.

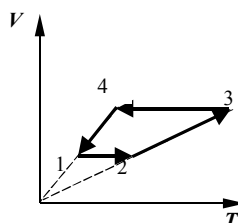
35. Какое число молекул находится в комнате объемом 80 м³ при температуре 17 °С и давлении 100 кПа?

- 1) $4 \cdot 10^{27}$; 2) $2 \cdot 10^{26}$ 3) $2 \cdot 10^{27}$; 4) $2 \cdot 10^{28}$.

36. Какой физический смысл имеет универсальная газовая постоянная?

- 1) Равна работе, которую совершает 1 моль газа при нагревании на 1 К при адиабатическом процессе.
 2) Равна работе, которую совершает 1 моль идеального газа при нагревании на 1 К при изобарическом процессе.
 3) Равна работе, которую совершает 1 моль газа при нагревании на 1 К при изохорном процессе.
 4) Равна изменению внутренней энергии 1 моля идеального газа при изобарном нагревании на 1 К.
 5) Равна изменению внутренней энергии 1 моля идеального газа при адиабатном процессе.

37. На рисунке представлен график изменения состояния идеального газа. На каком участке работа газа имеет максимальное по модулю значение?



- 1) 1 – 2; 2) 2 – 3;
3) 3 – 4; 4) 4 – 1.

38. Укажите формулу для расчета коэффициента полезного действия цикла Карно.

- 1) $\frac{T_1 - T_2}{T_1}$; 2) $Q_1 - Q_2$; 3) $\frac{T_1 + T_2}{T_1}$; 4) $\frac{Q_2}{Q_1}$; 5) $\frac{Q_1}{A}$.

39. Система совершает работу только за счет убыли своей внутренней энергии. Какой процесс при этом происходит?

- 1) Изотермический
2) Изохорический
3) Адиабатический
4) Изобарический
5) Политропический

40. При изотермическом расширении 10 г азота, находящегося при температуре 17 °С, была совершена работа 860 Дж. Во сколько раз изменилось давление при расширении?

- 1) Уменьшилось в 2 раза.
2) Увеличилось в 2,7 раза.
3) Уменьшилось в 2,7 раза.
4) Увеличилось в 2 раза.

41. От каких термодинамических параметров зависит энергия молекулы газа?

- 1) От P , V , T . 2) От P . 3) От V . 4) От T .

P - давление газа, V - объем газа, T – абсолютная температура газа

42. Абсолютная температура газа уменьшилась в 2 раза. Во сколько раз изменилась наиболее вероятная скорость молекул?

- 1) Уменьшилась в 4 раза.
2) Увеличилась в 1,41 раза.
3) Уменьшилась в 2 раза.
4) Уменьшилась в $\sqrt{2}$ раз.
5) Не изменилась.

43. Укажите уравнение Ван-дер-Ваальса для 1 моля газа.

- 1) $pV = \frac{m}{\mu}RT$; 7) $pV^\gamma = \text{const}$; 3) $pV_m = RT$;
4) $\left(p + \frac{a}{V_m^2}\right)(V_m - b) = RT$; 5) $\frac{pV}{T} = \text{const}$.

2.5.5. При температуре T_0 и давлении p_0 один моль идеального газа занимает объем V_0 . Каков объем двух молей этого газа при давлении $2p_0$ и температуре $2T_0$?

- 1) $4V_0$; 2) $2V_0$; 3) V_0 ; 4) $8V_0$.

44. Укажите верную формулировку I закона термодинамики.

- 1) Количество теплоты, подведенное к системе, расходуется на работу системы против внутренних сил и изменение полной энергии системы.
2) Количество теплоты, подведенное к системе, расходуется на работу системы против внешних сил и изменение внутренней энергии системы.

- 3) Количество теплоты, подведенное к системе, расходуется на изменение работы системы и повышение внутренней энергии системы.
- 4) Количество теплоты, подведенное к системе, расходуется на работу системы против внешних сил.
- 5) Количество теплоты, подведенное к системе, расходуется на изменение внутренней энергии системы.

45. Укажите утверждение, с которым Вы согласны.

Количество теплоты – это...

- 1) энергия, передаваемая телу в процессе совершения работы;
- 2) энергия, передаваемая и получаемая телом в процессе теплопередачи;
- 3) сумма кинетической и потенциальной энергий молекул тела;
- 4) энергия, передаваемая телу в процессе упорядоченного движения.

46. Что называется удельной теплоемкостью?

- 1) Количество теплоты, необходимое для нагревания 1 кг вещества на 1 К.
- 2) Количество теплоты, необходимое для нагревания 1 моля вещества на 1 К.
- 3) Количество теплоты, необходимое для нагревания всей массы вещества.
- 4) Работа, совершаемая газом, при изменении его объема.
- 5) Изменение внутренней энергии.

47. Найдите уравнение Пуассона.

- 1) $pV^\gamma = \text{const}$;
- 2) $\frac{C_p}{C_v}$;
- 3) $pV = \text{const}$;
- 4) $A = -\Delta U$;
- 5) $\frac{i+2}{i}$.

48. 10 г кислорода находятся в сосуде под давлением 300 кПа и температуре 10 °С. После изобарического нагревания газ занял объем 10 л. Работа, совершенная газом при расширении равна...

- 1) 2,3 кДж;
- 2) 3,2 кДж;
- 3) 5 кДж;
- 4) 32 кДж.

49. Укажите запись закона Шарля.

- 1) $pV = \frac{m}{\mu} RT$.
- 2) $pV = \text{const}$.
- 3) $\frac{p}{T} = \text{const}$.
- 4) $\frac{pV}{T} = \text{const}$.
- 5) $p = \frac{2}{3} n \langle E \rangle$.

49. При изотермическом процессе в газе не изменяются...

- 1) давление;
- 2) объем;
- 3) температура;
- 4) масса и объем;
- 5) масса и температура.

50. Как изменяется давление идеального газа с высотой?

- 1) увеличивается по линейному закону;
- 2) уменьшается по линейному закону;
- 3) уменьшается по экспоненциальному закону;
- 4) увеличивается по экспоненциальному закону.

51. При неизменной концентрации частиц идеального газа средняя кинетическая энергия теплового движения его молекул увеличилась в 3 раза. При этом давление газа

- 1) уменьшилось в 3 раза;
- 2) увеличилось в 3 раза;
- 3) увеличилось в 9 раз;
- 4) не изменилось.

52. В 1 кг спирта C_2H_5OH содержится...

- 1) 55,5 моль ($3,3 \cdot 10^{25}$ молекул);
- 2) 100 моль ($6 \cdot 10^{23}$ молекул);
- 3) 21,7 моль ($1,3 \cdot 10^{25}$ молекул);
- 4) 1 моль (10^{23} молекул).

53. Первый закон термодинамики в дифференциальной форме для адиабатического процесса записывается так:

- 1) $A = dU$;
- 2) $A = -\Delta U$;
- 3) $Q = A + \Delta U$;
- 4) $\delta A = -dU$;
- 5) $\delta Q = \delta A + dU$.

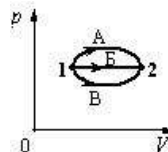
54. Какой цикл называется прямым?

- 1) Круговой процесс, состоящий из двух изотермических и двух адиабатических процессов.
- 2) Процесс, происходящий без теплообмена с окружающей средой.
- 3) Круговой процесс, в котором рабочее тело совершает положительную работу.
- 4) Круговой процесс, в котором рабочее тело совершает отрицательную работу.
- 5) Круговой процесс, происходящий в идеальном газе.

55. Чему равно число степеней свободы молекул одноатомного газа?

- 1) $i = 2$.
- 2) $i = 3$.
- 3) $i = 4$.
- 4) $i = 5$.
- 5) $i = 6$.

56. В каком из процессов перехода идеального газа из состояния 1 в состояние 2, изображенном на pV -диаграмме (см. рис.), газ совершает наибольшую работу?



- 1) A;
- 2) B;
- 3) B;
- 4) во всех трех процессах газ совершает одинаковую работу.

57. Тепловой двигатель за цикл получает от нагревателя количество теплоты, равное 3 кДж и отдает холодильнику количество теплоты, равное 2,4 кДж. КПД двигателя равен...

- 1) 20 %;
- 2) 25 %;
- 3) 80 %;
- 4) 120 %.

58. Найдите выражение закона Дальтона.

- 1) $pV = \text{const.}$
- 2) $p = nkT$.
- 3) $p = p_1 + p_2 + \dots + p_N$.
- 4) $\Delta p = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$.
- 5) $h = \frac{2\alpha \cos \theta}{\rho g r}$.

58. Что такое число степеней свободы?

- 1) Максимальное количество независимых координат, необходимых для однозначного описания положения молекулы в пространстве.
- 2) Минимальное количество независимых координат, необходимых для описания положения молекулы в пространстве.
- 3) Минимальное количество координат, необходимых для однозначного описания положения молекулы в атоме.
- 4) Количество координат, необходимых для однозначного описания положения молекулы в кристаллической решетке.
- 5) Минимальное количество независимых координат, необходимых для однозначного описания положения молекулы в пространстве.

59. Укажите численное значение постоянной Больцмана.

- 1) $1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К;
- 2) $1,38 \cdot 10^{23}$ Дж/К;
- 3) $6,02 \cdot 10^{23}$ моль⁻¹;
- 4) 8, 31 Дж/(моль);
- 5) 8, 31 Дж/(моль К).

60. Абсолютная температура газа возросла в 2 раза. Во сколько раз изменилась средняя арифметическая скорость молекул?

- 1) Не изменилась.
- 2) Уменьшилась в 1, 41 раза.
- 3) Увеличилась в $\sqrt{2}$ раз.
- 4) Увеличилась в 2 раза.
- 5) Увеличилась в 4 раза.

61. Первый закон термодинамики в интегральной форме для изохорического процесса записывается так:

- 1) $Q = \Delta U$;
- 2) $Q = A$;
- 3) $Q = A + \Delta U$;
- 4) $A = -\Delta U$;
- 5) $\delta Q = \delta A + dU$.

62. Что называется молярной теплоемкостью идеального газа?

- 1) Работа, совершенная одним молем газа при его нагревании на 1 К
- 2) Изменение внутренней энергии газа при нагревании моля на 1 К
- 3) Количество теплоты, необходимое для нагревания одного моля газа на 1 К
- 4) Изменение внутренней энергии газа при нагревании 1 кг газа на 1 К
- 5) Работа, совершаемая одним молем газа при его охлаждении на 1 К?

63. Как изменится КПД цикла Карно, если уменьшить температуру холодильника в 2 раза?

- 1) уменьшится в 2 раза;
- 2) не изменится;
- 3) увеличится;
- 4) уменьшится;
- 5) увеличится в 2 раза.

64. Какое утверждение может служить формулировкой второго начала термодинамики?

- 1) Любая тепловая машина имеет холодильник и нагреватель.

- 2) Термодинамическая вероятность какого-либо макросостояния системы, состоящей из невзаимодействующих частей, равна произведению термодинамических вероятностей соответствующих макросостояний этих частей.
- 3) Наиболее вероятным направлением изменения энтропии замкнутой неравновесной системы является ее возрастание.
- 4) Равновесный процесс обратим.

65. Двухатомный газ, находящийся при давлении 2 МПа и температуре 27 °С, сжимается адиабатически в 2 раза. Давление газа после сжатия равно...

- 1) 53 МПа; 2) 4 МПа; 3) 5,3 МПа; 4) 40 МПа.

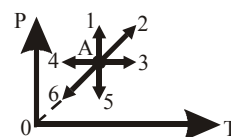
66. Какие утверждения справедливы для идеального газа?

- А) Молекулы газа – очень маленькие упругие шарики, обладающие массой.
 Б) Учитывается только силы притяжения между молекулами газа.
 В) Потенциальной энергией молекул газа пренебрегают, учитывается только их средняя кинетическая энергия поступательного движения.
 1) только А; 2) только Б; 3) только В; 4) А и В.

67. При кипении воды...

- А) увеличивается ее внутренняя энергия;
 Б) увеличивается ее температура
 Выберите верное утверждение:
 1) только А; 2) только Б; 3) А и Б; 4) Ни А, ни Б.

68. На графике изображены процессы в координатах давление P – температура T , имеющие одинаковое исходное состояние А. Какие из графиков являются изохорой идеального газа? Укажите номера.



- 1) 1,5
 2) 2,61
 3) 4,3
 4) 1
 5) 4

69. Уравнение Ван-дер-Ваальса хорошо описывает состояние...

- 1) реального газа.
 2) разреженного газа.
 3) одноатомного газа
 4) идеального газа.
 5) многоатомного газа.

70. Укажите формулу для расчета наиболее вероятной скорости.

- 1) $\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}$; 2) $\sqrt{\frac{3RT}{\mu}}$; 3) $\sqrt{\frac{2RT}{\mu}}$; 4) $\sqrt{\frac{8RT}{\mu}}$; 5) $\sqrt{\frac{2kT}{\mu}}$.

71. Укажите верную запись I начала термодинамики.

1. $Q = m \cdot C (T_2 - T_1)$.
 2. $Q = \Delta U + A$.
 3. $Q = I^2 R t$

4. $\eta = \frac{A}{Q}$

5. $\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}$

72. Молекулы какого газа обладают наименьшим числом степеней свободы?

- 1) H_2 . 2) N_2 . 3) He. 4) O_2 . 5) CO_2 .

73. Верно ли, что?

- 1) Теплопередача зависит от характера процесса.
 - 2) Количество тепла – это энергия хаотического движения частиц, которую передают тела друг другу в процессе теплообмена.
 - 3) За счет тепла может изменяться внутренняя энергия тел и совершаться работа.
 - 4) Все тепло может быть полностью без потерь превращено в работу.
 - 5) Механическая энергия может быть полностью переведена во внутреннюю.
- 1) 2,3,5 2) 1 3) 2 4) 5 5) 4

74. Абсолютная температура нагревателя тепловой машины в 2 раза больше абсолютной температуры холодильника. Чему равен КПД тепловой машины?

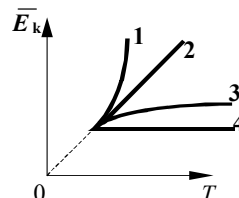
- 1) 25 %; 2) 50 %; 3) 75 %; 4) 100 %.

75. При изотермическом сжатии от 4 м^3 до 1 м^3 газ передал окружающей среде 25 кДж теплоты? Начальное давление газа равно...

- 1) 6, 25 кПа; 2) 4,6 кПа; 3) 3 кПа; 4) 25 кПа.

76. Какой график верно изображает зависимость средней кинетической энергии частиц идеального газа от абсолютной температуры?

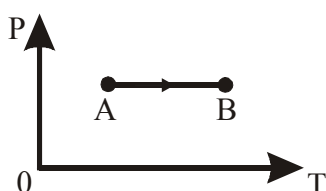
- 1) 1; 2) 2;
3) 3; 4) 4.



77. Что характеризует функция распределения Максвелла?

- 1) Относительное число молекул, которые в данный момент времени имеют значения скорости, лежащие в интервале 5 м/с вблизи заданной скорости.
- 2) Точное число молекул, которые в данный момент времени имеют значения скорости, лежащие в единичном интервале скоростей вблизи заданной скорости.
- 3) Относительное число молекул, которые в данный момент времени имеют заданную скорость.
- 4) Общее число молекул, которые в данный момент времени имеют заданную скорость.
- 5) Вероятность того, что молекулы в данный момент времени имеют значения скорости, лежащие в единичном интервале скоростей вблизи заданной скорости.

78. На рисунке в координатах давление P – температура T стрелкой указано направление изопроцесса идеального газа. Что это за процесс?



- 1) Изохорическое нагревание.
2) Изобарическое охлаждение.

- 3) Изотермическое расширение.
- 4) Изобарическое нагревание.
- 5) Изохорическое охлаждение.

79. В закрытом сосуде температура газа увеличилась от 10 до 50 °С. Как изменилось давление газа?

- 1) Увеличилось в 5 раз;
- 2) Уменьшилось в 5 раз;
- 3) Не изменилась;
- 4) Среди ответов 1)- 3) нет правильного.

80. Система совершает работу только за счет убыли своей внутренней энергии. Какой процесс при этом происходит?

- 1) Изотермический.
- 2) Изохорический.
- 3) Адиабатический.
- 4) Изобарический.
- 5) Политропический.

81. Выберите правильные утверждения.

- 1) Теплопередача зависит от характера процесса.
 - 2) Количество тепла – это энергия хаотического движения частиц, которую передают тела друг другу в процессе теплообмена.
 - 3) За счет тепла может изменяться внутренняя энергия тел и совершаться работа.
 - 4) Все тепло может быть полностью без потерь превращено в работу.
 - 5) Механическая энергия может быть полностью переведена во внутреннюю.
- 1) 2 2) 3 3) 2,3,5 4) 5 5) 4

82. Сколько степеней свободы имеет трехатомная молекула?

- 1) 5; 2) 3; 3) 6; 4) 4; 5) 2.

83. Первый закон термодинамики в интегральной форме для изотермического процесса записывается так:

- 1) $Q = \Delta U$;
- 2) $Q = A$;
- 3) $Q = A + \Delta U$;
- 4) $A = -\Delta U$;
- 5) $\delta Q = \delta A + dU$.

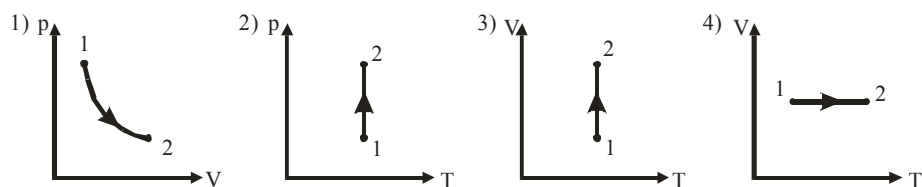
84. Одноатомный газ нагревают при постоянном давлении. Какая доля сообщенного газу тепла Q идет на совершение работы?

- 1) 0,2 Q ; 2) 0,4 Q ; 3) 0,6 Q ; 4) 0,8 Q ; 5) 0,

85. Выберите уравнение состояния идеального газа.

- 1) $p = p_0(1 + \alpha t)$; 2) $pV = \text{const}$; 3) $V = V_0 \alpha t$;
 4) $M/\mu = \nu$; 5) $pV = \nu RT$.

86. Какой график характеризует процесс изобарического сжатия?



87. Ацетилен из баллона с давлением P поступает через редуктор в газовую горелку. При этом его давление уменьшается в десять раз, а температура T убывает вдвое. Как изменится его молярная масса?

- 1) Увеличится в 5 раз.
- 2) Уменьшится в 5 раз.
- 3) Увеличится в 10 раз.
- 4) Не изменится.
- 5) Уменьшится в 10 раз.

88. Какая постоянная характеризует число молекул, содержащихся в одном моле различных веществ?

- 1) Постоянная Больцмана;
- 2) Универсальная газовая постоянная;
- 3) Число Авогадро;
- 4) Гравитационная постоянная;
- 5) Постоянная Планка.

89. Укажите верную запись I начала термодинамики.

1. $Q = m \cdot C (T_2 - T_1)$. 2. $Q = \Delta U + A$. 3. $\eta = \frac{A}{Q}$.
 4. $Q = I^2 R t$. 5. $\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}$

90. Как изменяется внутренняя энергия вещества при его переходе из жидкого состояния в газообразное при постоянной температуре?

- 1) Увеличится или уменьшится в зависимости от внешних условий.
- 2) Останется постоянной.
- 3) Изменяется по-разному в зависимости от природы вещества.
- 4) Уменьшается.
- 5) Увеличивается.

91. Укажите вариант верного утверждения.

Количество теплоты – это ...

- 1) энергия, передаваемая телу в процессе совершения работы;
- 2) энергия, которой обменивается тело с другими телами в процессе теплопередачи;
- 3) сумма кинетической и потенциальной энергий молекул тела;
- 4) процесс передачи энергии от одного тела к другому без совершения работы;
- 5) энергия, передаваемая телу в процессе упорядоченного движения.

92. Молекулы какого газа обладают наименьшим числом степеней свободы?

- 1) H_2

- 2) N_2
- 3) He
- 4) O_2
- 5) CO_2

93. Укажите запись объединенного газового закона.

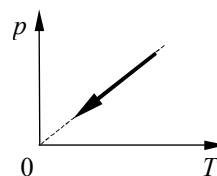
- 1. $pV = \frac{m}{\mu}RT$.
- 2. $pV = \text{const.}$
- 3. $v = \frac{N}{N_A}$.
- 4. $\frac{pV}{T} = \text{const.}$
- 5. $p = \frac{2}{3}n \langle E \rangle$.

94. Что характеризует функция распределения Максвелла?

- 1) Относительное число молекул, которые в данный момент времени имеют заданную скорость.
- 2) Точное число молекул, которые в данный момент времени имеют значения скорости, лежащие в единичном интервале скоростей вблизи заданной скорости.
- 3) Вероятность того, что молекулы в данный момент времени имеют значения скорости, лежащие в единичном интервале скоростей вблизи заданной скорости.
- 4) Общее число молекул, которые в данный момент времени имеют заданную скорость.
- 5) Относительное число молекул, которые в данный момент времени имеют значения скорости, лежащие в интервале 5 м/с вблизи заданной скорости.

95. На рисунке изображен график зависимости давления газа на стенки сосуда от температуры. Какой процесс изменения состояния газа изображен?

- 1) изобарное нагревание;
- 2) изохорное охлаждение;
- 3) изотермическое сжатие;
- 4) изохорное нагревание.



96. Молярная теплоемкость двухатомных газов при постоянном объеме равна...

- 1) 0,5 R; 2) 1,5 R; 3) 2,5 R; 4) 3 R; 5) 3,5 R.

97. Абсолютную температуру газа и его объем одновременно увеличили в 2 раза. Как при этом изменится давление газа?

- 1) увеличится в 2 раза; 2) увеличится в 4 раза;
- 3) уменьшится в 2 раза; 4) уменьшится в 4 раза;
- 5) не изменится.

98. Укажите верную запись первого начала термодинамики.

- 1) $Q = mc(T_2 - T_1)$; 2) $Q = \Delta U + A$;
- 3) $Q = I^2 R t$; 4) $\eta = \frac{A}{Q}$.

99. Какие из перечисленных видов энергии входят в состав внутренней энергии тела?

- 1) Кинетическая энергия хаотического (теплового) движения молекул.
- 2) Потенциальная энергия взаимодействия молекул.
- 3) Кинетическая энергия тела как целого относительно других тел.
- 4) Механическая энергия.
- 5) Атомная энергия.

1) 3; 2) 1, 2; 3) 4; 4) 1, 3; 5) 5.

100. Какое утверждение может служить формулировкой второго начала термодинамики?

- 1) Энтропия – мера атомного (молекулярного) беспорядка в системе.
- 2) Количество тепла, подведенное к системе, затрачивается на изменение ее внутренней энергии и на совершение системой работы против внешних сил.
- 3) В адиабатически замкнутой системе энтропия при любом процессе (обратимом и необратимом) не может убывать.
- 4) Прибора для измерения энтропии не существует.
- 5) КПД тепловой машины < 1 .

101. Чему равен коэффициент Пуассона для трехатомного газа?

1) 1,4; 2) 1,33; 3) 3; 4) 6; 5) 1,67.

102. При адиабатическом охлаждении 2 молей одноатомного газа его температура уменьшилась на величину ΔT . Какая работа A была совершена газом при этом?

- 1) $A = -\frac{3}{2} R \Delta T$; 2) $A = \frac{3}{2} R \Delta T$;
3) $A = \frac{5}{2} R \Delta T$; 4) $A = -3 R \Delta T$; 5) $A = 3 R \Delta T$.

103. Нагреватель и холодильник идеальной тепловой машины имеют температуры 100°C и 20°C . КПД такой машины равен...

1) 80 %; 2) 21,5 %; 3) 27,3 %; 4) 4 %.

104. Какие утверждения справедливы для идеального газа?

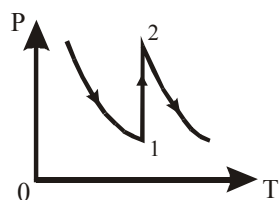
- 1) Взаимодействие молекул на расстоянии отсутствует.
- 2) Уравнение Менделеева-Клапейрона описывает состояние газа.
- 3) Молекулы газа взаимодействуют на расстоянии.
- 4) Внутренняя энергия равна сумме кинетической и потенциальной энергии взаимодействия молекул газа.
- 5) Собственным объемом молекул можно пренебречь по сравнению с объемом сосуда, в котором газ находится.

1) 3; 2) 1, 2, 5; 3) 4; 4) 3, 4.

105. Укажите формулу для расчета средней арифметической скорости.

- 1) $\sqrt{\frac{8RT}{\mu}}$; 2) $\sqrt{\frac{3RT}{\mu}}$; 3) $\sqrt{\frac{2RT}{\mu}}$; 4) $\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}$; 5) $\sqrt{\frac{3kT}{\mu}}$.

106. Для данной массы идеального газа изменение давления P в зависимости от объема V



представлено на рисунке. Какой процесс соответствует переходу газа из состояния 1 в состояние 2?

- 1) Изотермическое увеличение давления.
- 2) Изохорическое уменьшение температуры.
- 3) Изохорическое увеличение давления.
- 4) Изобарическое увеличение температуры.
- 5) Изохорическое уменьшение давления.

107. При взвешивании груза в воздухе показание динамометра равно 2 Н. При опускании груза в воду показание динамометра уменьшается до 1,5 Н. Выталкивающая сила равна...

- 1) 0,5 Н; 2) 1,5 Н; 3) 2 Н; 4) 3,5 Н.

108. При осуществлении какого изопроцесса увеличение давления в 2 раза приведет к увеличению температуры тоже в 2 раза?

- 1) Изотермического.
- 2) Изобарного.
- 3) Изохорного.
- 4) Такого процесса не может быть в принципе.

109. Какое утверждение ошибочно?

- 1) Изменение внутренней энергии системы равно работе системы против внешних сил.
- 2) Энтропия замкнутой системы стремится к максимуму.
- 3) Невозможен круговой процесс, единственным результатом которого является передача теплоты от менее нагретого тела к более нагретому.
- 4) Невозможен вечный двигатель второго рода.
- 5) Количество теплоты, подведенное к системе, расходуется на работу системы против внешних сил и изменение внутренней энергии системы.

110. Какой физический смысл имеет универсальная газовая постоянная?

- 1) Равна работе, которую совершает 1 моль газа при нагревании на 1 К при адиабатическом процессе.
- 2) Равна работе, которую совершает 1 моль идеального газа при нагревании на 1 К при изобарическом процессе.
- 3) Равна работе, которую совершает 1 моль газа при нагревании на 1 К при изохорном процессе.
- 4) Равна изменению внутренней энергии 1 моля идеального газа при изобарном нагревании на 1 К.
- 5) Равна изменению внутренней энергии 1 моля идеального газа при адиабатном процессе.

111. Найдите уравнение адиабатного процесса.

- 1) $A = -\Delta U$; 2) $\frac{C_p}{C_v}$; 3) $pV = \text{const}$; 4) $pV^\gamma = \text{const}$; 5) $\frac{i+2}{i}$.

112. Газ совершает наибольшую работу, если его расширение от объема V_1 до V_2 происходит...

- 1) адиабатически;
- 2) изохорически;
- 3) изотермически;
- 4) изобарически;
- 5) сначала изохорически, затем адиабатно.

113. Тепловая машина с КПД 40 % за цикл получает от нагревателя 100 Дж. Какое количество теплоты машина отдает за цикл холодильнику?

- 1) 40 Дж.
- 2) 60 Дж.
- 3) 100 Дж.
- 4) 160 Дж.
- 5) 140 Дж.

114. Приведите верную запись закона Бойля-Мариотта.

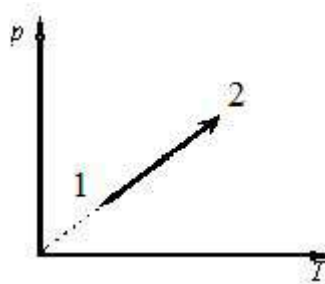
- 1) $pV = \frac{m}{\mu}RT$.
- 2) $p = nkT$.
- 3) $p = F/S$.
- 4) $pV = \text{const}$.
- 5) $p/V = \text{const}$.

115. Как изменяется характер кривой распределения Максвелла при увеличении температуры?

- 1) Максимальное значение увеличивается, максимум смещается вправо.
- 2) Максимальное значение уменьшается, максимум смещается влево.
- 3) Максимальное значение уменьшается, максимум смещается вправо.
- 4) Максимальное значение увеличивается, максимум смещается влево.
- 5) Не изменяется.

116. Какой процесс соответствует переходу идеального газа из состояния 1 в состояние 2?

- 1) Изотермический.
- 2) Изобарический.
- 3) Изохорический.
- 4) Адиабатический.
- 5) Политропический.



117. Найти плотность водорода при температуре 15 °С и давлении 97,3 кПа.

- 1) 0,1 кг/м³;
- 2) 0,08 кг/м³;
- 3) 0,05 кг/м³;
- 4) 0,2 кг/м³.

118. Что называется молярной теплоемкостью идеального газа?

- 1) Работа, совершенная одним молем газа при его нагревании на 1 К.
- 2) Изменение внутренней энергии газа при нагревании моля на 1 К.
- 3) Количество теплоты, необходимое для нагревания одного моля газа на 1 К.
- 4) Изменение внутренней энергии газа при нагревании 1 кг газа на 1 К.
- 5) Работа, совершаемая одним молем газа при его охлаждении на 1 К.

119. Укажите верные утверждения.

- 1) Теплопередача зависит от характера процесса.
 - 2) Количество тепла – это энергия хаотического движения частиц, которую передают тела друг другу в процессе теплообмена.
 - 3) За счет тепла может изменяться внутренняя энергия тел и совершаться работа.
 - 4) Все тепло может быть полностью без потерь превращено в работу.
 - 5) Механическая энергия может быть полностью переведена во внутреннюю.
- 1) 1, 2, 3;
 - 2) 4;
 - 3) 5;
 - 4) 4, 5;
 - 5) 3, 5.

120. Идеальному газу сообщили количество теплоты 400 Дж. Газ расширился, совершив работу 600 Дж. Внутренняя энергия газа при этом

- 1) увеличилась на 1000 Дж; 2) увеличилась на 200 Дж;
- 3) уменьшилась на 1000 Дж; 4) уменьшилась на 200 Дж.

121. Как изменится КПД цикла Карно, если увеличить температуру нагревателя в 2 раза?

- 1) уменьшится; 2) не изменится;
- 3) уменьшится в 2 раза; 4) увеличится;
- 5) увеличится в 2 раза.

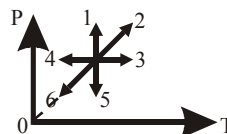
122. Сколько вращательных степеней свободы имеет двухатомная молекулы?

- 1) 5; 2) 6; 3) 3; 4) 7; 5) 2.

123. Выберите закон Гей-Люссака.

- 1) $p = p_0(1 + \alpha T)$.
- 2) $pV = \text{const.}$
- 3) $V/T = \text{const.}$
- 4) $M/\mu = \nu$.
- 5) $pV = \nu RT$.

124. На графике изображены процессы в координатах давление P – температура T , имеющие одинаковое исходное состояние. Какие из графиков являются изохорой идеального газа?



- 1) 1 2) 2,6 3) 3,4
- 4) 1,5 5) 2

125. При увеличении абсолютной температуры идеального газа в 4 раза средняя квадратичная скорость движения его молекул:

- 1) увеличится в 2 раза; 2) увеличится в $\sqrt{2}$ раз;
- 3) уменьшится в $\sqrt{2}$ раз; 4) увеличится в 4 раза.

126. Какое число частиц находится в 16 г кислорода?

- 1) $5 \cdot 10^{23}$; 2) $2 \cdot 10^{23}$; 3) $3 \cdot 10^{23}$; 4) $6 \cdot 10^{23}$.

127. Что называется удельной теплоемкостью?

- 1) Количество теплоты, необходимое для нагревания 1 кг вещества на 1 К.
- 2) Количество теплоты, необходимое для нагревания 1 моля вещества на 1 К.
- 3) Количество теплоты, необходимое для нагревания всей массы вещества.
- 4) Работа, совершаемая газом, при изменении его объема.
- 5) Изменение внутренней энергии.

128. Укажите верную формулировку I закона термодинамики для адиабатического процесса.

- 1) За счет изменения внутренней энергии система совершает работу против внешних сил.
- 2) Количество теплоты, подведенное к системе, расходуется на работу системы против внешних сил.
- 3) Количество теплоты, подведенное к системе, расходуется на изменение работы системы и повышение внутренней энергии системы.

- 4) Количество теплоты, подведенное к системе, расходуется на работу системы против внешних сил и изменение внутренней энергии системы.
- 5) Количество теплоты, подведенное к системе, расходуется на изменение внутренней энергии системы.

129. Что называется циклом Карно?

- 1) Круговой процесс, состоящий из двух изобарических и двух адиабатических процессов.
- 2) Круговой процесс, состоящий из двух изотермических и двух адиабатических процессов.
- 3) Процесс, происходящий без теплообмена с окружающей средой.
- 4) Обратный процесс, состоящий из двух изотермических и двух адиабатических процессов.
- 5) Круговой процесс, происходящий в идеальном газе.

130. Укажите формулу для расчета показателя адиабаты.

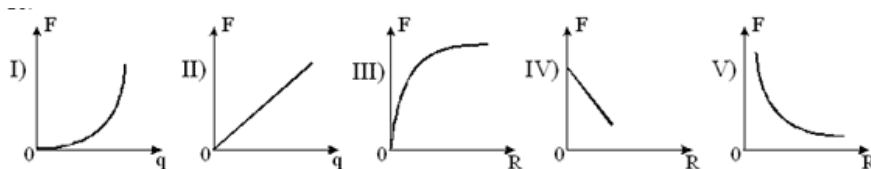
- 1) $\frac{i}{i+2}$;
- 2) $\frac{C_p}{C_v}$;
- 3) $pV^\gamma = \text{const}$;
- 4) $\frac{C_v}{C_p}$;
- 5) $\frac{i+2}{2}$.

131. До какой температуры охладится воздух, находящийся при 0°C , если он расширяется адиабатически в 2 раза?

- 1) 250 K;
- 2) 200 K;
- 3) 207 K;
- 4) 220 K.

Тема 3: Электричество и магнетизм

1. Какие из нижеприведенных графиков наиболее точно отражают зависимость кулоновской силы F от величины одного из зарядов q и расстояния между ними R ?

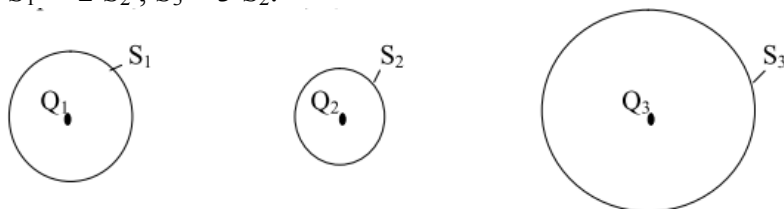


- 1) I, III ;
- 2) I, III, V ;
- 3) II, III, V ;
- 4) II, V .

2. По какой из приведенных ниже формул можно рассчитать в СИ модуль напряженности электростатического поля точечного заряда q , находящегося в однородном изотропном диэлектрике?

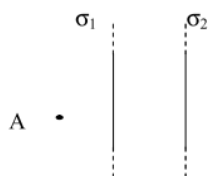
- 1) $E = \frac{q}{r}$;
- 2) $E = \frac{kq}{r}$;
- 3) $E = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2}$;
- 4) $E = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r}$.

3. Сферические поверхности охватывают точечные заряды $Q_1 = 3Q$, $Q_2 = 6Q$, $Q_3 = 2Q$. Сравните потоки вектора напряженности поля зарядов сквозь эти поверхности, если $S_1 = 2 \cdot S_2$, $S_3 = 3 \cdot S_2$.

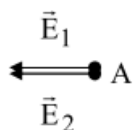


- 1) $\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_3$;
- 2) $\Phi_1 > \Phi_2 > \Phi_3$;
- 3) $\Phi_3 > \Phi_1 > \Phi_2$;
- 4) $\Phi_1 < \Phi_2 < \Phi_3$.

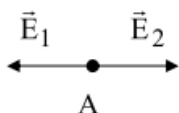
4. Поле создано двумя параллельными бесконечными равномерно заряженными плоскостями. Поверхностные плотности заряда плоскостей σ_1 и σ_2 , причем $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ (см.рис.).



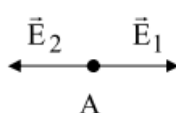
Укажите рисунок векторов $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ в точке А, где $\vec{E}_1$ — напряженность поля первой плоскости, $\vec{E}_2$ — напряженность поля второй плоскости.



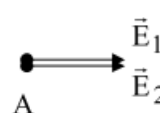
1)



2)



3)



4)

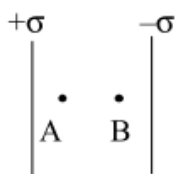
5. По какой из приведенных ниже формул можно рассчитать в СИ потенциал электростатического поля точечного заряда q , находящегося в однородном изотропном диэлектрике?

1) $\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r}$; 2) $\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$; 3) $\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2}$; 4) $\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$.

6. Емкость батареи, состоящей из двух конденсаторов, соединенных параллельно, определяется по формуле:

1) $C = C_1 + C_2$; 2) $C = C_1 - C_2$; 3) $C = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}$; 4) $C = \frac{C_1 + C_2}{C_1 \cdot C_2}$.

7. Сравните в точках А и В объемные плотности энергий электростатического поля заряженного плоского конденсатора.

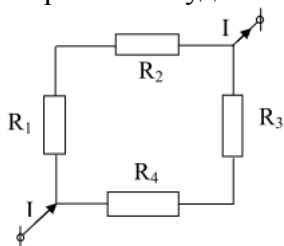


1) $w_A = w_B$; 2) $w_A > w_B$; 3) $w_A < w_B$; 4) $w_A = w_B = 0$.

8. Какая из приведенных ниже формул является математическим выражением закона Ома для однородного участка цепи?

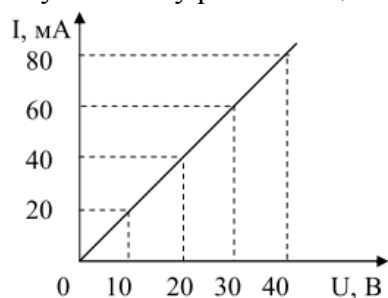
1) $I = \frac{U}{R}$; 2) $I = \frac{\epsilon}{R + r}$; 3) $I = \frac{\epsilon}{r}$; 4) $I = \sum_{i=1}^n I_i$.

9. При пропускании тока по участку цепи, состоящему из сопротивлений $R_1 = 5$ Ом, $R_2 = 1$ Ом, $R_3 = 8$ Ом, $R_4 = 4$ Ом, соединенных как показано на схеме, наибольшее падение напряжения будет на сопротивлении...



1) R_1 ; 2) R_2 ; 3) R_3 ; 4) R_4 ;

10. Зависимость тока I , протекающего через сопротивление R от напряжения U , дана на рисунке. Чему равна мощность, выделяемая на сопротивлении R при $U = 40$ В?



- 1) 1,6 Вт; 2) 2,1 Вт; 3) 2,8 Вт; 4) 3,2 Вт.

11. Из предложенных формулировок выберите формулировку закона Кулона:

- 1) Сила взаимодействия двух зарядов прямо пропорциональна их величинам, обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними;
- 2) Сила взаимодействия двух точечных зарядов прямо пропорциональна их величинам, обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними и направлена вдоль прямой, соединяющей эти заряды;
- 3) Сила взаимодействия двух точечных зарядов пропорциональна их величинам и пропорциональна квадрату расстояния между ними и направлена вдоль прямой, соединяющей эти заряды;
- 4) Сила взаимодействия двух точечных зарядов обратно пропорциональна их величинам, прямо пропорциональна квадрату расстояния между ними и направлена вдоль прямой, соединяющей эти заряды.

12. Точечный заряд $+q$ находится в центре сферической поверхности. Если добавить заряд $+q$ за пределами сферы, то поток вектора напряженности электростатического поля $\vec{E}$ через поверхность сферы...

- 1) увеличится; 2) уменьшится; 3) не изменится; 4) станет равным нулю.

13. Какое из нижеприведенных утверждений несправедливо?

- 1) Потенциал электрического поля является его энергетической характеристикой.
- 2) При переносе заряда из одной точки поля в другую, работа, совершаемая полем, не зависит от траектории.
- 3) Работа сил электростатического поля при перемещении заряда перпендикулярно силовым линиям поля равна нулю.
- 4) Потенциальная энергия взаимодействия заряда с однородным электростатическим полем не зависит от места расположения заряда в этом поле.

14. Емкость плоского конденсатора, пространство между обкладками которого заполнено диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ϵ , в СИ определяется по формуле:

- 1) $C = \frac{2q}{U}$; 2) $C = \epsilon\epsilon_0 \frac{S}{d}$; 3) $C = \epsilon \frac{S}{d}$; 4) $C = \epsilon\epsilon_0 \frac{d}{S}$.

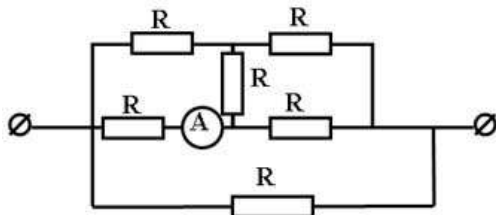
15. По какой из приведенных ниже формул можно рассчитать плотность энергии электростатического поля w заряженного конденсатора?

- 1) $w = \frac{q^2}{2\epsilon\epsilon_0 S^2}$; 2) $w = \frac{2qE}{S}$; 3) $w = \frac{1}{2}\epsilon\epsilon_0 E^2$; 4) $w = \frac{E^2}{2\epsilon\epsilon_0}$.

16. Из предложенных формулировок выберите формулировку закона Ома для однородного участка цепи

- 1) Сила тока на однородном участке цепи прямо пропорциональна напряжению на концах этого участка и обратно пропорциональна его сопротивлению
- 2) Сила тока на однородном участке цепи пропорциональна напряжению на концах этого участка и пропорциональна его сопротивлению
- 3) Сила тока на однородном участке цепи пропорциональна напряжению на концах этого участка и обратно пропорциональна его сопротивлению
- 4) Сила тока на участке цепи обратно пропорциональна напряжению на концах этого участка и обратно пропорциональна его сопротивлению

17. К концам цепи изображенной на рисунке, подведено напряжение 270 В. Какой ток показывает амперметр, приведенный на рисунке, если сопротивления резисторов 135 Ом?



- 1) 1А; 2) 4А; 3) 2А; 4) 0,5 А.

18. По какой из приведенных ниже формул можно рассчитать тепловую мощность тока P на внешнем участке цепи?

- 1) $P = I \cdot r$; 2) $P = I^2 \cdot R$; 3) $P = I\varepsilon - I^2 \cdot R$; 4) $P = I \cdot R$.

19. Два неподвижных шара, заряды которых соответственно равны $-4,8 \cdot 10^{-18}$ Кл и $9,6 \cdot 10^{-18}$ Кл, находятся на некотором расстоянии друг от друга. Во сколько раз изменится кулоновская сила взаимодействия между ними, если на первый шар поместить еще 30 электронов ($e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл)?

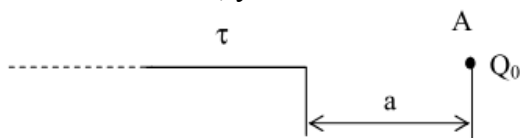
- 1) уменьшится в 2 раза. 2) увеличится в 2 раза.
- 3) уменьшится в 30 раз. 4) увеличится в 30 раз.

20. За направление вектора напряженности электростатического поля принято:

- 1) направление вектора силы, действующей на точечный положительный заряд, помещенный в поле;
- 2) направление вектора силы, действующей на точечный отрицательный заряд, помещенный в поле;
- 3) направление вектора скорости положительного точечного заряда, который перемещается под действием поля;
- 4) направление вектора скорости отрицательного точечного заряда, который перемещается под действием поля.

21. Полубесконечная нить имеет линейную плотность заряда $\tau = 10^{-7}$ Кл/м.

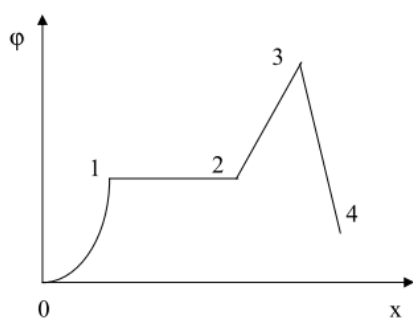
Сила, действующую со стороны поля нити на точечный заряд $Q_0 = 3 \cdot 10^{-9}$ Кл, находящийся в точке А, удаленной от конца нити на расстояние, равное $a = 0,2$ м, равна...



- 1) 13,5 Н; 2) $26 \cdot 10^{-4}$ Н; 3) $56 \cdot 10^{-4}$ Н; 4) $13,5 \cdot 10^{-6}$ Н.

22. На рисунке дана зависимость потенциала электростатического поля от координаты. На каких участках поля вектор напряженности направлен в противоположном направлении оси x ?

- 1) 0–1, 1–2, 2–3; 2) 1–2; 3) 0–1, 2–3. 4) 3–4;



23. Какое из нижеприведенных утверждений не справедливо?

- 1) Увеличение диэлектрической проницаемости среды между обкладками плоского конденсатора приводит к увеличению его емкости.
- 2) Изменение емкости конденсатора при подключенном источнике тока не изменяет напряжение между его обкладками.
- 3) Работа по изменению емкости конденсатора, равна изменению энергии поля этого конденсатора.
- 4) Емкость конденсатора зависит от величины заряда на его обкладках.

24. Заряд сферы увеличили в 3 раза. Как изменилась энергия сферы?

- 1) увеличилась в 3 раза;
- 2) уменьшилась в 3 раза;
- 3) увеличилась в 9 раз;
- 4) уменьшилась в 9 раз.

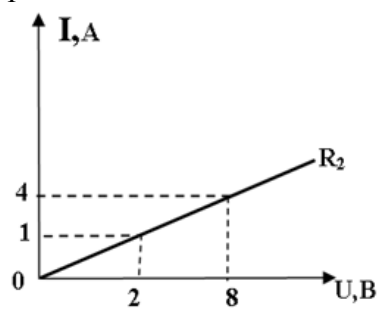
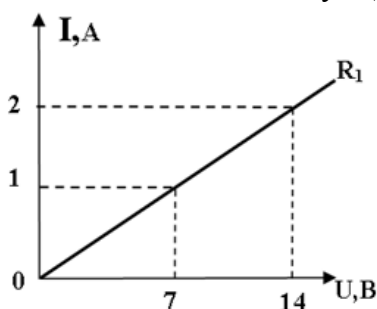
25. Дополните утверждение: циркуляция вектора напряженности поля сторонних сил по замкнутой электрической цепи $\oint \vec{E}_{\text{ст}} d\vec{l} =$

- 1) ... = 0; 2) ... = ϵ ; 3) ... = U; 4) ... = I
- где ϵ – ЭДС источника, U – напряжение; I – сила тока.

26. ЭДС источника тока 8 В, его внутреннее сопротивление 1/8 Ом. К источнику подключены параллельно два сопротивления 1,5 Ом и 0,5 Ом. Полный ток в цепи равен ...

- 1) 16 А; 2) 8 А; 3) 4 А; 4) 2 А; 5) 1 А.

27. На рисунках представлены вольт-амперные характеристики двух резисторов. Какую мощность потребляют эти резисторы, если их соединить последовательно и подсоединить к источнику ЭДС равным 36 В ?

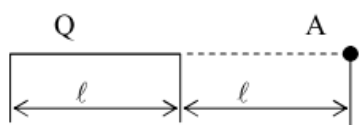


- 1) 18 Вт; 2) 9 Вт; 3) 36 Вт; 4) 0,5 Вт.

28. Из предложенных формулировок выберите формулировку закона сохранения электрического заряда:

- 1) В любой системе сумма зарядов остается постоянной при любых взаимодействиях внутри нее.
- 2) В любой системе зарядов их сумма остается постоянной при любых взаимодействиях между ними.
- 3) В любой замкнутой системе алгебраическая сумма зарядов остается постоянной при любых взаимодействиях внутри нее.
- 4) В любой замкнутой системе сохраняется постоянным количество заряда при любых взаимодействиях.

29. Тонкий прямой стержень длиной $l = 0,1$ м несет равномерно распределенный заряд $Q = 3,0 \cdot 10^{-7}$ Кл. Напряженность поля, создаваемого этим зарядом в точке А, расположенной на продолжении оси стержня и удаленной от ближнего конца стержня на расстояние, равное длине стержня, будет равна



- 1) 0 2) 3 В/м 3) 135 кВ/м 4) 96 кВ/м.

30. Точечный заряд $+q$ находится в центре сферической поверхности. Если заряд сместить из центра сферы, оставляя его внутри нее, то поток вектора напряженности электростатического поля через поверхность:

- 1) увеличится; 2) не изменится; 3) уменьшится 4) станет равным нулю.

31. Напряженность поля в точке, удаленной на расстояние r от центра заряженного шара радиуса R ($r > R$) равна E . ($S_{\text{шара}} = 4\pi R^2$). Поверхностная плотность заряда на шаре равна

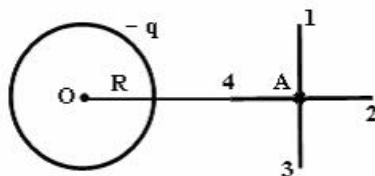
1) $\sigma = \frac{E\epsilon_0\epsilon r^2}{R^2}$;

2) $\sigma = \frac{E\epsilon_0\epsilon R^2}{r^2}$;

3) $\sigma = \frac{E\epsilon_0\epsilon R}{r}$;

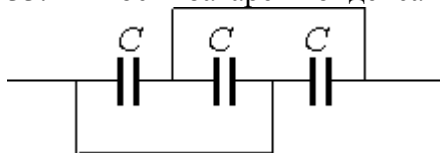
4) $\sigma = \frac{E\epsilon_0\epsilon r}{R^2}$.

32. Поле создано равномерно заряженной сферической поверхностью с зарядом $-q$. Укажите направление вектора градиента потенциала в точке А.



- 1) А – 3; 2) А – 1; 3) А – 2; 4) А – 4.

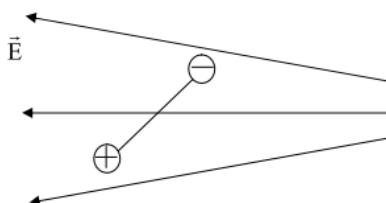
33. Емкость батареи конденсаторов, соединенных как показано на рисунке, равна:



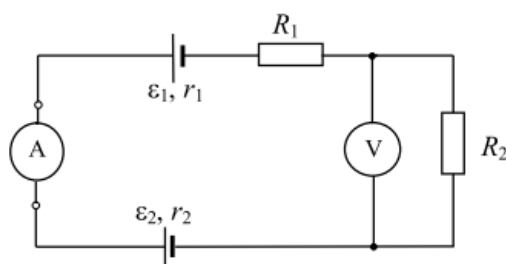
- 1) $C/3$; 2) $3C$; 3) $2C$; 4) C .

34. Что будет происходить с диполем, помещенным в неоднородное электрическое поле, как показано на рисунке

- 1) Диполь повернется по часовой стрелке, и будет втягиваться в область сильного поля;
- 2) диполь повернется против часовой стрелки, и будет выталкиваться из области сильного поля;
- 3) диполь повернется по часовой стрелке, и будет выталкиваться из области сильного поля;
- 4) диполь повернется против часовой стрелки, и будет втягиваться в область сильного поля;



35. В цепи на рисунке с параметрами $\varepsilon_1 = 10$ В, $\varepsilon_2 = 5$ В, $r_1 = 2$ Ом, $r_2 = 1$ Ом, $R_1 = 10$ Ом, $R_2 = 20$ Ом, $R_A = 1$ Ом, $R_V = 100$ Ом, показание амперметра составляет...

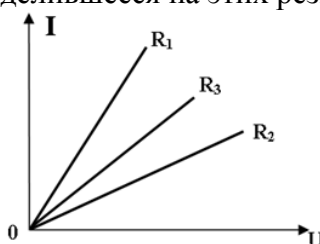


- 1) 3,2 А;
- 2) 0,425 А;
- 3) 1 А;
- 4) 0,16 А.

36. Электродвижущей силой на данном участке цепи называется скалярная величина, равная работе ...

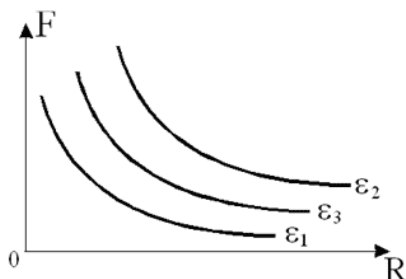
- а) ... сторонних сил;
 - б) ... электростатических сил;
 - в) ... сторонних и электростатических сил по перемещению вдоль участка электрической цепи;
 - г) ... электрона;
 - д) ... положительного заряда;
 - е) ... единичного положительного заряда.
- 1) б, г;
 - 2) а, е;
 - 3) в, д;
 - 4) а, г.

37. На рисунке показан график зависимости силы тока от напряжения для трех резисторов соединенных последовательно. В каком из нижеприведенных соотношений находятся между собой мощности, выделившиеся на этих резисторах?



- 1) $P_1 > P_2 > P_3$ 2) $P_1 < P_2 < P_3$ 3) $P_1 > P_3 > P_2$ 4) $P_1 < P_3 < P_2$.

38. На рисунке показана зависимость кулоновских сил взаимодействия двух точечных зарядов от расстояний между ними для трех различных диэлектрических сред. В каком соотношении из нижеприведенных находятся диэлектрические проницаемости этих сред?

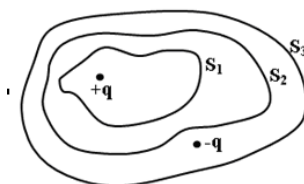


- 1) $\epsilon_3 < \epsilon_2 < \epsilon_1$; 2) $\epsilon_3 > \epsilon_2 > \epsilon_1$; 3) $\epsilon_2 < \epsilon_3 < \epsilon_1$; 4) $\epsilon_2 = \epsilon_3 = \epsilon_1$.

39. В точке A напряженность поля точечного заряда 36 В/м , а в точке C , лежащей на прямой соединяющей заряд и точку A со стороны точки A , напряженность равна 9 В/м . Найти напряженность в точке O лежащей посередине между точками A и C .

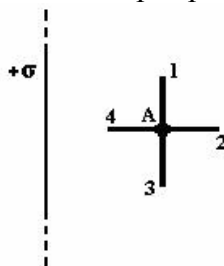
- 1) 600 В/м ; 2) 16 В/м ; 3) 1430 В/м ; 4) 1000 В/м .

40. Дана система точечных зарядов в вакууме и замкнутые поверхности S_1, S_2, S_3 . Поток вектора напряженности электростатического поля равен нулю через поверхность



- 1) S_1 ; 2) S_2 ; 3) S_3 ; 4) q .

41. Поле создано бесконечной равномерно заряженной плоскостью с поверхностной плотностью заряда $+\sigma$. Укажите направление вектора градиента потенциала в точке A .



- 1) $A - 2$; 2) $A - 1$; 3) $A - 3$; 4) $A - 4$.

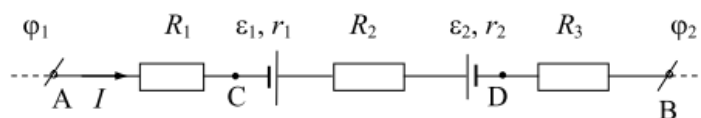
42. Плоский конденсатор емкостью $0,3 \text{ мкФ}$ полностью заполнен слюдяными пластинами, с относительной диэлектрической проницаемостью 6 , толщина каждой из которых равна 5 нм . Сколько слюдяных пластин находится между пластинами, если площадь каждой обкладки равна 50 см^2 ?

- 1) 880 ; 2) 2046 ; 3) 5310 ; 4) 1760 .

43. На сколько процентов изменилась энергия конденсатора, если величину заряда на обкладках увеличить на 20% ?

- 1) увеличилась на 44% . 2) уменьшилась на 40% . 3) увеличилась на 144% .
4) уменьшилась на 20% .

44. На рисунке изображен участок электрической цепи. Параметры цепи: $\varepsilon_1 = 7 \text{ В}$, $\varepsilon_2 = 2 \text{ В}$, $r_1 = r_2 = 1 \text{ Ом}$, $R_1 = 3 \text{ Ом}$, $R_2 = R_3 = 5 \text{ Ом}$, $\varphi_1 - \varphi_2 = 10 \text{ В}$. Сила тока равна...



- 1) 1 А; 2) 2 А; 3) 3 А; 4) 6 А.

45. Из формул, приведенных ниже, выберите ту, по которой определяется сила постоянного тока.

- 1) $\dots = \frac{Q}{\Delta t}$; 2) $\dots = \frac{dQ}{dt}$; 3) $\dots = \frac{dQ}{dt dS}$; 4) $\dots = \frac{Q}{S}$.

46. На двух одинаковых резисторах, соединенных параллельно за время t , выделилось некоторое количество теплоты. За какое время на этих резисторах, соединенных последовательно, выделится такое же количество теплоты? (Напряжение на концах цепи постоянно.)

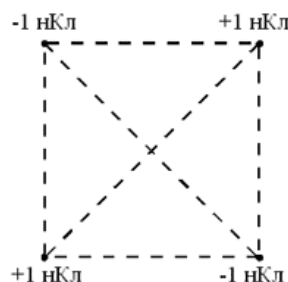
- 1) $2t$ 2) t 3) $t/2$ 4) $4t$

47. Какие из нижеприведенных утверждений справедливы?

- 1) При увеличении расстояния в два раза, напряженность поля создаваемого точечным зарядом уменьшится в четыре раза.
- 2) При переносе точечного заряда из вакуума в диэлектрическую среду, его напряженность в каждой точке уменьшится в ε раз.
- 3) При переносе точечного заряда из вакуума в среду с диэлектрической проницаемостью ε , число силовых линий наносимых на единицу площади увеличится в ε раз.
- 4) Скорость распространения электрических взаимодействий зависит от среды в которой происходят эти взаимодействия.
- 5) Силовые линии электростатического поля начинаются на отрицательных зарядах и кончаются на положительных.

- 1) 2,3,4 2) 2,3, 5 3) 3,5 4) 1,2,4

48. На сколько изменится величина напряженности электростатического поля в центре квадрата в вершинах которого расположены точечные заряды, если знак одного из зарядов изменить на противоположный. Расстояние от центра квадрата до каждого из зарядов равно 1 м.



- 1) 3 В/м 2) 6 В/м 3) 9 В/м 4) 15 В/м

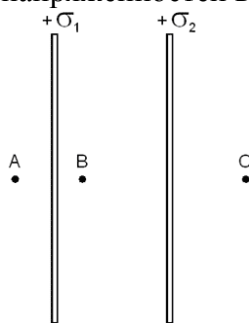
49. Из предложенных формулировок выберите формулировку теоремы Гаусса:

- 1) Поток вектора напряженности суммарного электрического поля сквозь любую поверхность произвольной конфигурации равен алгебраической сумме зарядов внутри этой поверхности, деленной на ϵ_0 .
- 2) Поток вектора напряженности суммарного электрического поля сквозь замкнутую поверхность произвольной конфигурации равен алгебраической сумме зарядов внутри этой поверхности, деленной на ϵ_0 .
- 3) Модуль вектора напряженности суммарного электрического поля равен алгебраической сумме зарядов, деленной на ϵ_0 .
- 4) Поток вектора напряженности суммарного электрического поля сквозь замкнутую поверхность произвольной конфигурации равен алгебраической сумме зарядов внутри этой поверхности.

50. Заряды $q_1 = 1 \text{ мкКл}$ и $q_2 = -1 \text{ мкКл}$ находятся на расстоянии $d = 10 \text{ см}$. Определить напряженность E и потенциал ϕ поля в точке, удаленной на расстояние $r = 10 \text{ см}$ от первого заряда и лежащей на линии, проходящей через первый заряд перпендикулярно направлению от q_1 к q_2 .

- 1) 664 кВ/м , 26 кВ ; 2) 0 , 664 кВ ; 3) 664 В/м , 26 В ; 4) 332 кВ/м , 0 .

51. Две плоскопараллельные пластины имеющие поверхностную плотность зарядов σ_1 и σ_2 расположены так, как показано на рисунке. В каком из нижеприведенных соотношений между собой находятся модули напряженностей в указанных точках?



- 1) $E_C > E_A > E_B$; 2) $E_A > E_B > E_C$; 3) $E_A = E_C < E_B$; 4) $E_A = E_C > E_B$.

52. Плоский воздушный конденсатор емкостью $17,6 \text{ пФ}$ образуют квадратные пластины, расположенные на расстоянии $0,4 \text{ мм}$ друг от друга. Определить длину одной из сторон этих пластин.

- 1) $4 \cdot 10^{-2} \text{ см}$ 2) $2 \cdot 10^{-2} \text{ см}$ 3) $2,8 \text{ см}$ 4) 4 см

53. Дополните утверждение: циркуляция вектора напряженности поля электростатических сил по замкнутой цепи $\oint \vec{E}_{\text{эл}} d\vec{l} = \dots$

- 1) $\dots = I$; 2) $\dots = C$; 3) $\dots = 0$; 4) $\dots = q$.

где I – сила тока в замкнутой цепи, R – электросопротивление замкнутой цепи; q – заряд, прошедший по замкнутой цепи.

54. Каким уравнением описывается первый закон Кирхгофа?

- 1) $\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$ 2) $\sum_{i=1}^n I_i = 0$ 3) $I = \frac{\epsilon}{R + r}$ 4) $\sum_{i=1}^n I_i R_i = \sum_j^m \epsilon_j$

55. Сопротивление внешней цепи увеличилось на 20%. Как должно измениться внутреннее сопротивление источника тока, чтобы КПД цепи осталось прежним?

- 1) Уменьшится на 20%. 2) Увеличится на 20%. 3) Уменьшится на 80%.
4) Увеличится на 80%. 5) Увеличится на 40%.

56. Найти силу притяжения между ядром атома водорода и электроном. Радиус атома водорода $r=0,5 \cdot 10^{-10}$ м; заряд ядра равен по модулю и противоположен по знаку заряду электрона ($e=1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл).

- 1) 0 Н; 2) $92,3 \cdot 10^{-9}$ Н; 3) $e=1,6 \cdot 10^{-19}$ Н; 4) $92,3 \cdot 10^{-9}$ Дж.

57. Физическая векторная величина, определяемая отношением силы, с которой электростатическое поле действует на положительный электрический заряд, к величине этого заряда, называется:

- 1) напряженностью электростатического поля;
2) потенциалом электростатического поля;
3) напряжением электростатического поля;
4) плотностью энергии электростатического поля.

58. Приведите в соответствие формулы и их названия:

- 1) Закон Кулона;
2) Вектор напряженности электрического поля;
3) Принцип суперпозиции электрических полей;
4) Теорема Гаусса для вектора напряженности электрического поля.

А) $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$; Б) $F = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2}$ В) $\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i$ Г) $\vec{E} = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i$.

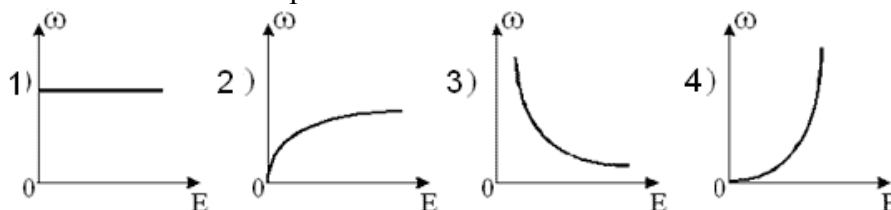
59.) Какую работу необходимо совершить при перемещении заряда 2 мкКл из бесконечности в точку, потенциал которой 10 В?

- 1) $5 \cdot 10^{-6}$ Дж; В) $2 \cdot 10^{-5}$ Дж; С) 20 Дж; Д) $-5 \cdot 10^{-6}$ Дж; Е) $-2 \cdot 10^{-5}$ Дж

60. Какой заряд необходимо сообщить плоскому конденсатору, чтобы пылинка массой 3,2 нг, потерявшая 40 электронов, находилась бы в равновесии между пластинами этого конденсатора? Емкость конденсатора 0,6 мкФ, расстояние между его пластинами 4 мм.

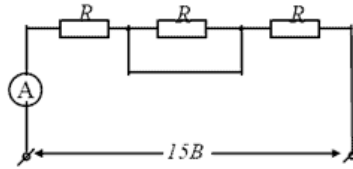
- 1) 24 нКл 2) 6 нКл 3) 6 мкКл 4) 12 мКл 5) 12 мкКл

61. Какой из нижеприведенных графиков отражает зависимость плотности энергии электростатического поля от напряженности?



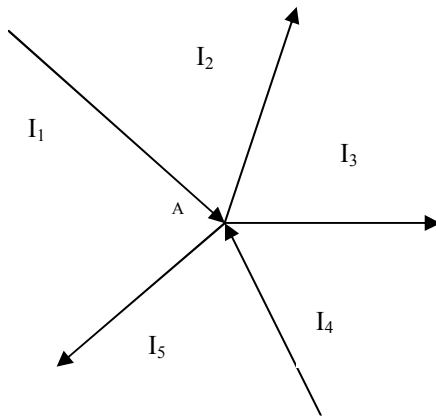
62. Какой ток покажет идеальный амперметр в цепи, изображенной на рисунке. Сопротивление каждого из резисторов 5 Ом, сопротивлением соединительных проводов пренебрегаем.

небредь.



- 1) 15A 2) 2 A 3) 1,5 A 4) 1 A 5) 0,15 A

63. Какое из соотношений выражает 1-й закон Кирхгофа для узла A?



- 1) $I_4 - I_2 + I_1 - I_5 - I_3 = 0$; 2) $I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 = 0$;
3) $I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0$; 4) $I_4 + I_2 + I_1 + I_5 + I_3 = 0$

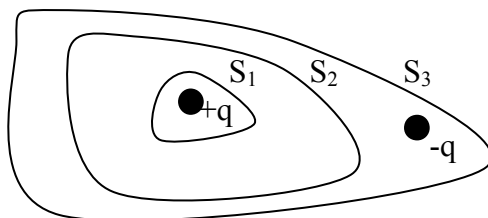
64. Источник с эдс 6 В замкнут на внешнее сопротивление. Наибольшая мощность, выделяющаяся во внешней цепи 9 Вт, при этом в цепи течет ток 3 А. Внутреннее сопротивление источника эдс равно...

- 1) 0 Ом; 2) 2 Ом; 3) 1 Ом; 4) 1 А.

65. Сила взаимодействия двух отрицательно заряженных частиц, находящихся на расстоянии r друг от друга равна F . Заряд одной из частиц увеличили по модулю в 2 раза. Как необходимо изменить расстояние между двумя точечными электрическими зарядами, чтобы сила их взаимодействия не изменилась?

- 1) увеличить в 2 раза; 2) уменьшить в $\sqrt{2}$ раз
3) уменьшить в 2 раза; 4) увеличить в $\sqrt{2}$ раз

66. Дана система точечных зарядов и замкнутые поверхности S_1 , S_2 , S_3 . Поток напряженности электростатического поля отличен от нуля через поверхности



- 1) S_1
2) S_2
3) S_3
4) S_1 и S_3

67. Формула для вычисления напряженности равномерно заряженной бесконечной плоскости в вакууме имеет вид:

- 1) $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$; 2) $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$; 3) $E = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2}$; 4) $E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r}$.

68. Физическая скалярная величина, определяемая отношением работы электростатических сил при перемещении электрического заряда из одной точки поля в другую к числовому значению этого заряда, называется:

- 1) напряженностью электростатического поля;
- 2) потенциалом электростатического поля;
- 3) разностью потенциалов между точками электростатического поля;
- 4) плотностью энергии электростатического поля;

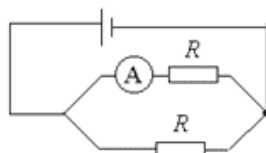
69. Напряженность электростатического поля между пластинами плоского воздушного конденсатора, подключенного к источнику постоянного напряжения равна $6 \cdot 10^4$ В/м. Какой станет напряженность этого поля, если увеличить расстояние между пластинами конденсатора вдвое?

- 1) $1,5 \cdot 10^4$ В/м
- 2) $3 \cdot 10^4$ В/м
- 3) $4,5 \cdot 10^4$ В/м
- 4) $12 \cdot 10^4$ В/м

70. Найти потенциал металлического шара, если на расстоянии 50 см от его центра потенциал поля равен 400 В, а на расстоянии 40 см от поверхности шара - равен 250 В.

- 1) 300 В;
- 2) 650 В;
- 3) 500 В
- 4) 300 Дж

71. Амперметр, изображенный на рисунке показывает 2 А. Определить сопротивление внешнего участка цепи, если ЭДС источника тока 12 В, а падение напряжения внутри него 4 В.



- 1) 4 Ом
- 2) 8 Ом
- 3) 2 Ом
- 4) 6 Ом

72. Укажите верную формулировку Первого правила Кирхгофа:

- 1) алгебраическая сумма зарядов в замкнутой системе есть величина постоянная
- 2) сила, действующая между двумя точечными зарядами пропорциональна их величинам и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними
- 3) алгебраическая сумма токов в ветвях, сходящихся к любому узлу электрической цепи, равна нулю
- 4) сумма токов в ветвях, сходящихся к любому узлу электрической цепи, равна нулю

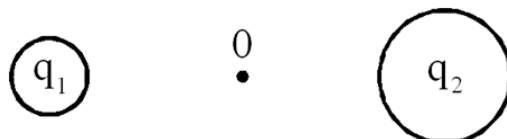
73. При каком значении внешнего сопротивления R , мощность выделяемая на внешнем участке, будет максимальной, если внутреннее сопротивление источника равна r ?

- 1) $R = r$;
- 2) $R = (1/2)r$
- 3) $R = 2r$;
- 4) $R = 4r$;
- 5) $R = (1/4)r$.

74. Сколько избыточных электронов содержит пылинка в электростатическом поле с напряженностью $1,5 \cdot 10^5$ В/м, если на нее действует сила $2,4 \cdot 10^{-10}$ Н?

- 1) 10^2 ;
- 2) $1,6 \cdot 10^5$;
- 3) $1,6 \cdot 10^4$;
- 4) 10^4

75. Два проводящих заряженных шара диаметры которых 1 см и 3 см находятся на некотором расстоянии друг от друга. Определить напряженность поля в точке 0, отстоящей от поверхности каждого шара на 3,5 см. Заряды шаров соответственно равны 16 мкКл и 25 мкКл.



- 1) $18 \cdot 10^7$ В/м;
- 2) 0 В/м;
- 3) $6,6 \cdot 10^7$ В/м ;
- 4) $6,6 \cdot 10^3$ В/м

76. Во сколько раз напряженность поля в точке, отстоящей от поверхности заряженного проводящего шара на расстоянии равном радиусу, отличается от напряженности в точке, отстоящей на расстоянии равном двум радиусам?

- 1) В 2 раза больше. 2) В 2 раза меньше. 3) В 2,25 раз больше. 4) В 2,25 раз меньше.

77. В двух вершинах равностороннего треугольника со стороной 6 см находятся два точечных заряда, заряд каждого из которых 12 нКл. Определить потенциал поля в третьей вершине.

- 1) 3,6 кВ; 2) 36 кВ 3) 0 4) 4 кВ 5) 0,4 кВ

78. Три одинаковых конденсатора емкостью 9 мкФ соединены параллельно и подключены к источнику тока, напряжение на зажимах которого 2 кВ. Чему равен заряд этой батареи конденсаторов?

- 1) 54 мКл; 2) 6 мКл 3) 162 мКл 4) 18 мКл 5) 4,5 мКл

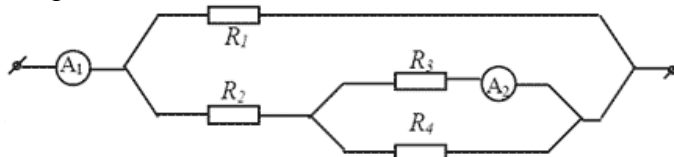
79. На отрезке тонкого прямого проводника равномерно распределен заряд с линейной плотностью $\tau = 10 \text{ нКл/м}$. Вычислить потенциал ϕ , создаваемый этим зарядом в точке, расположенной на оси проводника и удаленной от ближайшего конца отрезка на расстоянии, равной длине этого отрезка.

- 1) 32 В; 2) 62,4В; 3) 16 В; 4) 3,2 В.

80. При последовательном подключении к сети двух проводников сила тока в 6,25 раз меньше, чем при параллельном подключении этих проводников. Во сколько раз отличаются сопротивления проводников?

- 1) 2; 2) 4; 3) 6; 4) 8.

9) Идеальный амперметр A_1 показывает 6 А (см. рис.). Определить показания второго амперметра, если: $R_1=20 \text{ Ом}$; $R_2=10 \text{ Ом}$; $R_3=15 \text{ Ом}$; $R_4=30 \text{ Ом}$.



- 1) 1,5 А 2) 0,5 А 3) 3 А 4) 2 А

81. Источник тока ЭДС которого 6В, дает максимальную силу тока 3А. Сколько теплоты выделится на сопротивлении 10 Ом, при подсоединении к этому источнику тока за 2 мин?

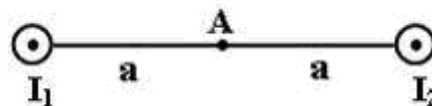
- 1) 300 кДж ; 2) 5 кДж ; 3) 0,15 кДж ; 4) 0,3 кДж .

82. Вокруг металлического проводника возникает магнитное поле в случае...

- 1) Движения проводника;
- 2) Нагрева проводника;
- 3) Вращения проводника;
- 4) Помещения проводника в электрическое поле;
- 5) Пропускания по проводнику электрического тока.

2. Магнитное поле создано двумя параллельными длинными проводниками с токами I_1 и I_2 , расположенными перпендикулярно плоскости рисунка. Если $I_1 = 2I_2$, то вектор индукции результирующего поля в точке А направлен...

- 1) Вверх;

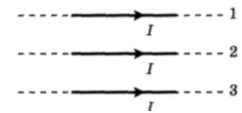


- 2) Влево;
- 3) Вниз;
- 4) Вправо.

83. В магнитном поле B на прямой проводник длиной L с током I действует сила Ампера, которая равна $F = IBL\sin\alpha$, где α - угол между...

- 1) I и B ;
- 2) B и L ;
- 3) B и нормалью к L ;
- 4) I и L ;
- 5) I и нормалью к L .

84. На проводник №2 со стороны двух других проводников действует сила Ампера (см. рисунок). Все проводники тонкие, лежат в одной плоскости, параллельны друг другу, и расстояния между соседними проводниками одинаковы, I — сила тока. Сила Ампера в этом случае...



- 1) Направлена вверх $\uparrow$;
- 2) Направлена вниз $\downarrow$;
- 3) Направлена от нас;
- 4) Равна нулю.

85. Два первоначально покоящихся электрона ускоряются в электрическом поле: первый в поле с разностью потенциалов U , второй — $4U$. Ускорившиеся электроны попадают в однородное магнитное поле, линии индукции которого перпендикулярны скорости движения электронов. Отношение радиусов кривизны траекторий первого и второго электронов в магнитном поле равно...

- 1) 0,25;
- 2) 0,5;
- 3) $0,5\sqrt{2}$;
- 4) $\sqrt{2}$.

86. Возникающая в замкнутом контуре электродвижущая сила индукции зависит от...

- 1) Величины магнитного потока сквозь поверхность, ограниченную данным контуром;
- 2) Скорости изменения магнитного потока сквозь поверхность, ограниченную данным контуром;
- 3) Сопротивления контура;
- 4) Величины индукции внешнего магнитного поля;
- 5) Скорости изменения индуктивности внешнего магнитного поля.

87. В магнитное поле, изменяющееся по закону $B = 0,1\cos 4\pi t$, помещена квадратная рамка со стороной $a = 10$ см. Нормаль к рамке совпадает с направлением изменения поля. ЭДС индукции, возникающая в рамке, изменяется по закону...

1. $E_i = -10^{-3} \sin 4\pi t$;
2. $E_i = 4\pi \cdot 10^{-3} \sin 4\pi t$;
3. $E_i = 4\pi \cdot 10^{-3} \sin 4\pi t$;
4. $E_i = 10^{-3} \sin 4\pi t$.

88. В чем заключается явление самоиндукции?

- 1) В изменении индуктивности контура при изменении тока в нем;
- 2) В увеличении индукционного тока в контуре при увеличении основного тока в нем;

- 3) В уменьшении индукционного тока в контуре при уменьшении основного тока в нем;
 4) В возникновении индукционного тока в контуре при изменении основного тока в нем;
 5) В возникновении основного тока в контуре при изменении индукционного тока в нем.

89. Чему равна энергия магнитного поля катушки с индуктивностью 3 Гн при силе тока в ней 2 А?

- 1) 3 Дж;
 2) 6 Дж;
 3) 1,5 Дж;
 4) 2/3 Дж;
 5) 1/3 Дж.

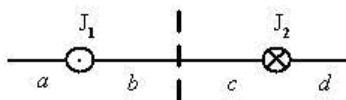
90. Какие вещества называются магнетиками?

- 1) Намагниченные вещества;
 2) Вещества, намагничивающиеся против приложенного магнитного поля;
 3) Вещества, намагничивающиеся вдоль приложенного магнитного поля;
 4) Все вещества без исключения;
 5) Постоянные магниты.

91. Выберите правильное утверждение. Магнитное поле порождается...

- 1) Магнитными зарядами;
 2) Движущимися зарядами;
 3) Покоящимися зарядами;
 4) Движущимися атомами;
 5) Движущимися молекулами.

92. На рисунке изображены сечения двух параллельных прямолинейных длинных проводников с противоположно направленными токами, причем $J_1 = 2J_2$. Индукция B результирующего магнитного поля равна нулю в некоторой точке интервала.



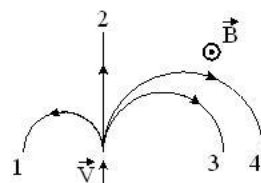
- 1) a;
 2) c;
 3) d;
 4) b.

93. В каком случае прямой провод с током I , помещенный в магнитное поле с индукцией B , испытывает максимальную силу?

- 1) При $I = \text{const}$;
 2) При $B = \text{const}$;
 3) Когда проводник расположен под углом 45 градусов к полю;
 4) Когда проводник расположен вдоль поля;
 5) Когда проводник расположен перпендикулярно полю.

94. На рисунке указаны траектории заряженных частиц, имеющих одинаковую скорость и влетающих в однородное магнитное поле, перпендикулярное плоскости чертежа. При этом для частицы 3...

- 1) $q_3 < 0$;
 2) $q_3 > 0$;
 3) $q_3 = 0$.

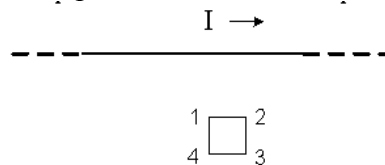


4) $q_3 = q_4$.

95. Нейтрон и протон влетают в однородное магнитное поле перпендикулярно вектору магнитной индукции на расстоянии L друг от друга с одинаковыми скоростями v . Отношение модуля силы, действующей со стороны магнитного поля на нейтрон, к модулю силы, действующей на протон, в этот момент времени равно...

- 1) 1;
- 2) 0;
- 3) 2000;
- 4) 1/2000.

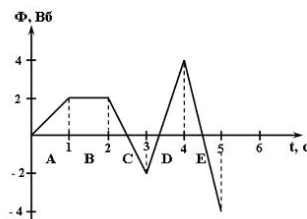
96. На рисунке показан длинный проводник с током, в одной плоскости с которым находится небольшая проводящая рамка.



При выключении в проводнике тока заданного направления, в рамке...

- 1) Возникает индукционный ток в направлении 4-3-2-1;
- 2) Индукционного тока не возникает;
- 3) Возникает индукционный ток в направлении 1-2-3-4.
- 4) Величина индукционного тока в рамке будет возрастать.

97. На рисунке представлена зависимость магнитного потока, пронизывающего некоторый замкнутый контур, от времени. ЭДС индукции в контуре не возникает на интервале...



- 1) E;
- 2) C;
- 3) B;
- 4) D;
- 5) A.

98. Укажите номера правильных утверждений. Индуктивность некоторого проводника зависит от:

- 1) Размеров;
- 2) Формы;
- 3) Магнитных свойств среды, в которой он находится;
- 4) Силы тока в нем;
- 5) Материала, из которого он изготовлен.

99. Индуктивность рамки $L = 40 \text{ мГн}$. Если за время $\Delta t = 0,01 \text{ с}$ сила тока в рамке увеличилась на $\Delta I = 0,2 \text{ А}$, то ЭДС самоиндукции, наведенная в рамке, равна...

- 1) 80 В;
- 2) 8 В;
- 3) 800 В;
- 4) 0,8 В.

100. Какой из перечисленных материалов является ферромагнетиком?

- 1) Медь;
- 2) Алюминий;
- 3) Пластмасса;
- 4) Железо;
- 5) Стекло.

101. Система уравнений Максвелла для электромагнитного поля имеет вид:

$$\oint_{(L)} \vec{E} d\vec{l} = - \int_{(S)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}$$

$$\oint_{(L)} \vec{H} d\vec{l} = \int_{(S)} \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S}$$

$$\oint_{(S)} \vec{D} d\vec{S} = \int_{(V)} \rho dV$$

$$\oint_{(S)} \vec{B} d\vec{S} = 0$$

Следующая система уравнений:

$$\oint_{(L)} \vec{E} d\vec{l} = 0$$

$$\oint_{(L)} \vec{E} d\vec{l} = \int_{(S)} \vec{j} d\vec{S}$$

$$\oint_{(S)} \vec{D} d\vec{S} = \int_{(V)} \rho dV$$

$$\oint_{(S)} \vec{B} d\vec{S} = 0$$

Вторая система уравнений справедлива для...

- 1) Переменного электромагнитного поля при наличии заряженных тел и токов проводимости;
- 2) Стационарных электрических и магнитных полей;
- 3) Стационарного электромагнитного поля в отсутствие заряженных тел;
- 4) Стационарного электромагнитного поля в отсутствие токов проводимости.

102. Как можно обнаружить магнитное поле? По его действию на...

- 1) Неподвижный электрический заряд;
- 2) Магнитную стрелку;
- 3) Проводник с током;
- 4) Проводник без тока;
- 5) Рамку с током.

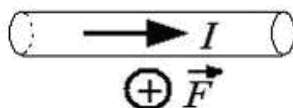
103. На рисунке изображен проводник, через который идет электрический ток. Направление тока указано стрелкой. Как направлен вектор магнитной индукции в точке С?

- 1) В плоскости чертежа $\uparrow$;
- 2) От нас перпендикулярно плоскости чертежа;
- 3) К нам перпендикулярно плоскости чертежа;
- 4) Вектор магнитной индукции в точке С равен нулю.

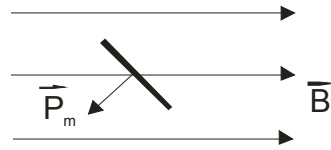


104. В однородном магнитном поле на горизонтальный проводник с током, направленным вправо, действует сила Ампера, направленная перпендикулярно плоскости рисунка от наблюдателя. При этом линии магнитной индукции поля направлены...

- 1) Влево;
- 2) Вниз;
- 3) Вправо;
- 4) Вверх.



105. Рамка с током с магнитным моментом, направление которого указано на рисунке, находится в однородном магнитном поле.



Момент сил, действующих на рамку, направлен...

- 1) Перпендикулярно плоскости рисунка к нам;
- 2) Противоположно вектору магнитной индукции;
- 3) Перпендикулярно плоскости рисунка от нас;
- 4) По направлению вектора магнитной индукции.

106. Вблизи длинного проводника с током (ток направлен от нас) пролетает протон со скоростью $\vec{v}$.



Сила Лоренца...

- 1) Направлена от нас;
- 2) Направлена вправо;
- 3) Направлена влево;
- 4) Направлена к нам;
- 5) Равна нулю.

107. Электрон и протон влетают в однородное магнитное поле перпендикулярно вектору магнитной индукции со скоростями v и $2v$ соответственно. Отношение модуля силы, действующей на электрон со стороны магнитного поля, к модулю силы, действующей на протон, равно...

- 1) 4 : 1;
- 2) 2 : 1;
- 3) 1 : 1;
- 4) 1 : 2.

108. В контуре, вращающемся с постоянной угловой скоростью в однородном магнитном поле, создается...

- 1) Постоянный электрический ток;
- 2) Неизменной величины ЭДС;
- 3) ЭДС, изменяющаяся по гармоническому закону;
- 4) Ток, линейно изменяющийся во времени;
- 5) Напряжение, линейно возрастающее во времени.

109. В магнитном поле находится несколько витков провода, замкнутых на резистор. Если магнитный поток равномерно увеличивать от нуля до значения Φ_0 сначала за время t , а потом за время $4t$, то сила тока в резисторе во втором случае будет...

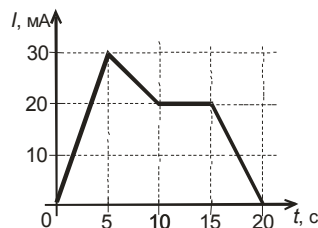
- 1) В 4 раза больше;
- 2) В 4 раза меньше;
- 3) В 2 раза больше;
- 4) В 2 раза меньше.

110. От чего зависит индуктивность уединенного контура?

- 1) От тока в контуре;

- 2) От скорости изменения тока в контуре;
- 3) От магнитного потока, пронизывающего контур;
- 4) От скорости изменения магнитного потока, пронизывающего контур;
- 5) От формы и размеров контура.

111. На рисунке показана зависимость силы тока от времени в электрической цепи с индуктивностью 1 мГн.



Модуль среднего значения ЭДС самоиндукции в интервале от 15 до 20 с. (в мкВ) равен...

- 1) 10;
- 2) 20;
- 3) 0;
- 4) 4.

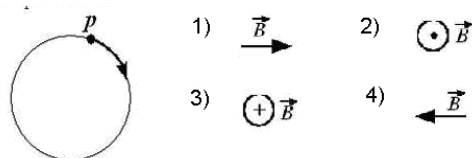
112. Магнитная проницаемость диамагнетиков по модулю приблизительно равна...

- 1) 0;
- 2) 1;
- 3) 2;
- 4) 10;
- 5) 100.

113. Какое утверждение несправедливо для магнитного поля?

- 1) Магнитное поле – вихревое;
- 2) Магнитное поле – потенциально;
- 3) Для магнитных полей выполняется принцип суперпозиции;
- 4) Поток вектора индукции магнитного поля сквозь любую замкнутую поверхность равен нулю;
- 5) Вихревое магнитное поле порождает переменное магнитное поле.

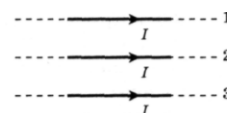
114. Трассировка движения протона в однородном магнитном поле представляет собой окружность, расположенную в плоскости рисунка. Если протон вращается по часовой стрелке, то линии магнитной индукции поля направлены ...



115. Выберите формулировку закона Ампера. На проводник с током, помещенный в магнитное поле, действует сила...

- 1) Пропорциональная силе тока в проводнике, длине проводника и индукции магнитного поля;
- 2) Выталкивающая его из магнитного поля;
- 3) Поворачивающая проводник против магнитного поля;
- 4) Поворачивающая проводник вдоль магнитного поля;
- 5) Пропорциональная току в проводнике и напряженности магнитного поля.

116. Как направлена сила Ампера, действующая на проводник №1 со стороны двух других (см. рисунок), если все проводники тонкие, лежат



в одной плоскости, параллельны друг другу и расстояния между соседними проводниками одинаковы? (I — сила тока.)

- 1) К нам;
- 2) От нас;
- 3) Вверх $\uparrow$;
- 4) Вниз $\downarrow$.

117. Укажите выражение для силы Лоренца...

- 1) $\vec{F} = q\vec{E}$;
- 2) $F = I B / \sin \alpha$;
- 3) $\vec{F} = q[\vec{V} \vec{B}]$;
- 4) $\vec{F} = m\vec{a}$;
- 5) $F = k \cdot q_1 q_2 / r^2$.

118. Два первоначально покоившихся электрона ускоряются в электрическом поле: первый проходит разность потенциалов U , второй — $2U$. Ускорившиеся электроны попадают в однородное магнитное поле, линии индукции которого перпендикулярны скорости движения электронов. Отношение радиусов кривизны траекторий первого и второго электронов в магнитном поле равно...

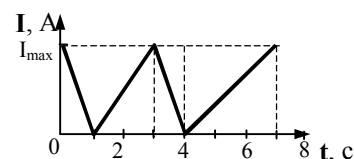
- 1) 0,25;
- 2) 0,5;
- 3) $\sqrt{2}/2$;
- 4) $\sqrt{2}$.

119. Возникающая в замкнутом контуре электродвижущая сила индукции зависит от...

1. Величины магнитного потока сквозь поверхность, ограниченную данным контуром;
2. Скорости изменения магнитного потока сквозь поверхность, ограниченную данным контуром;
3. Сопротивления контура;
4. Величины индукции внешнего магнитного поля.
5. Скорости изменения индуктивности внешнего магнитного поля.

120. На рисунке показано изменение силы тока I в катушке индуктивности от времени t . Модуль ЭДС самоиндукции принимает равные значения в промежутках времени...

- 1) 0 – 1 с и 1 – 3 с;
- 2) 3 – 4 с и 4 – 7 с;
- 3) 1 – 3 с и 4 – 7 с;
- 4) 0 – 1 с и 3 – 4 с.



121. Температура Кюри для железа составляет 768°C . При температуре 600°C железо является...

- 1) Ферромагнетиком;
- 2) Парамагнетиком;
- 3) Диамагнетиком;
- 4) Ферреэлектриком.

122. Какое из перечисленных ниже утверждений является ошибочным?

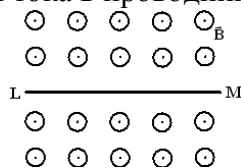
- 1) Линии вектора индукции магнитного поля всегда замкнуты;
- 2) Сила Лоренца действует только на движущиеся электрические заряды;
- 3) Магнитное поле является потенциальным полем;

- 4) ЭДС индукции прямо пропорциональна скорости изменения магнитного потока;
- 5) Вещества, помещенные в магнитное поле, намагничиваются.

123. Направление вектора индукции магнитного поля в данной точке пространства совпадает с направлением

- 1) Силы, действующей на неподвижный заряд в этой точке;
- 2) Силы, действующей на движущийся заряд в этой точке;
- 3) Северного полюса магнитной стрелки, помещенной в эту точку;
- 4) Южного полюса магнитной стрелки, помещенной в эту точку.

124. На рисунке изображен проводник с током, помещенный в однородное магнитное поле с индукцией B , направленное перпендикулярно плоскости чертежа к нам. Укажите правильную комбинацию направления тока в проводнике и вектора силы Ампера.

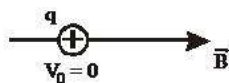


- 1) Ток в направлении $M-L$; сила Ампера - от нас;
- 2) Ток в направлении $L-M$; сила Ампера – вверх;
- 3) Ток в направлении $M-L$; сила Ампера - к нам;
- 4) Ток в направлении $L-M$; сила Ампера – вниз.

125. По горизонтально расположенному прямолинейному проводнику длиной 20 см и массой 2 г течет ток 10 А. Чтобы силу тяжести уравновесить силой Ампера, этот проводник нужно поместить в магнитное поле с индукцией, модуль которой равен (линии индукции однородного магнитного поля горизонтальны и перпендикулярны проводнику)

- 1) 0,01Тл;
- 2) 0,1Тл;
- 3) 1Тл;
- 4) 10Тл.

126 .Как будет двигаться протон (+q), внесенный в однородное магнитное поле с индукцией B ? Начальная скорость протона равна нулю.



- 1) По направлению поля, равномерно;
- 2) Против направления поля, равномерно;
- 3) По направлению поля равноускоренно;
- 4) По окружности в плоскости, перпендикулярной вектору индукции, с постоянной по модулю скоростью;
- 5) Останется неподвижным.

127. Две частицы с одинаковыми зарядами и отношением масс $m_1/m_2 = 2$ влетели в однородные магнитные поля, векторы индукции которых перпендикулярны их скорости: первая — в поле с индукцией B_1 , вторая — в поле с индукцией B_2 . Определите отношение кинетических энергий частиц W_1/W_2 если радиусы их траекторий одинаковы, а отношение модулей индукции $B_1/B_2=2$.

- 1) 1;
- 2) 2;
- 3) 0,25;

4) 4.

128. Какой процесс объясняется явлением электромагнитной индукции?

- 1) Взаимодействие двух проводов с током;
- 2) Возникновение электрического тока в замкнутой катушке при изменении силы тока в другой катушке, находящейся рядом с ней;
- 3) Отклонение магнитной стрелки вблизи проводника с током;
- 4) Возникновение силы, действующей на движущуюся заряженную частицу в магнитном поле.

129. Поток вектора магнитной индукции через рамку, площадь которой равна $0,02 \text{ м}^2$, а плоскость расположена под углом 60° к вектору B , при $B = 0,05 \text{ Тл}$ равен...

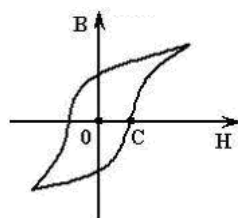
- 1) $0,87 \text{ мВб}$;
- 2) $0,5 \text{ мВб}$;
- 3) $1,25 \text{ мВб}$;
- 4) $2,2 \text{ мВб}$

130. Как изменился магнитный поток через катушку индуктивности, если при увеличении силы тока в катушке, энергия магнитного поля катушки увеличилась в 4 раза?

- 1) Увеличился в 4 раза;
- 2) Уменьшился в 4 раза;
- 3) Увеличился в 2 раза;
- 4) Остался прежним.

131. На рисунке показана зависимость проекции вектора индукции магнитного поля B в ферромагнетике от напряженности H внешнего магнитного поля.

Участок OC соответствует ...



- 1) Коэрцитивной силе ферромагнетика;
- 2) Магнитной индукции насыщения ферромагнетика;
- 3) Остаточной намагниченности ферромагнетика;
- 4) Остаточной магнитной индукции ферромагнетика.

Тема 4: Механические и электромагнитные колебания и волны

1. Укажите определение амплитуды колебаний.

- 1) Величина, пропорциональная приложенной силе.
- 2) Величина, равная числу колебаний за единицу времени.
- 3) Величина, численно равная отклонению системы от положения равновесия в данный момент времени.
- 4) Величина наибольшего отклонения системы от положения равновесия.

2. Укажите формулу для расчета периода колебаний математического маятника.

- 1) $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$;
- 2) $T = \sqrt{\frac{g}{l}}$;
- 3) $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$;

$$4) T = 2\pi\sqrt{LC}; \quad 5) T = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

3. За 100 секунд система совершает 1000 полных колебаний. Чему равны частота и период колебаний системы?

- 1) $\nu = 0,1$ Гц, $T = 10$ с; 2) $\nu = 900$ Гц, $T = 10$ с;
3) $\nu = 10$ Гц, $T = 0,1$ с; 4) $\nu = 1000$ Гц, $T = 1$ с.

4. Материальная точка совершает гармонические колебания по закону

$$x = 0,3 \cos\left(\frac{2\pi}{3}t + \frac{\pi}{4}\right).$$

Максимальное значение скорости точки равно...

- 1) 2π м/с; 2) $0,2\pi$ м/с; 3) $0,1\pi$ м/с; 4) π м/с.

5. Складываются два гармонических колебания одного направления и одной частоты. Результирующее колебание имеет максимальную амплитуду при разности фаз, равной...

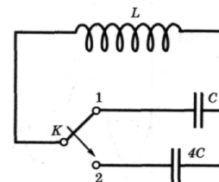
- 1) π ; 2) 0; 3) $\pi/2$; 4) $\pi/4$.

6. Вынужденными являются колебания

- 1) груза на нити в воздухе
2) маятниковых часов
3) периодически подталкиваемых рукой качелей
4) поршня в двигателе внутреннего сгорания.

7. Как изменится частота собственных электромагнитных колебаний в контуре (см. рисунок), если ключ K перевести из положения 1 в положение 2?

- 1) увеличится в 4 раза
2) уменьшится в 4 раза
3) увеличится в 2 раза
4) уменьшится в 2 раза



8. Радиостанция работает на частоте 4×10^8 Гц. Чему равна длина волны, излучаемой антенной радиостанции?

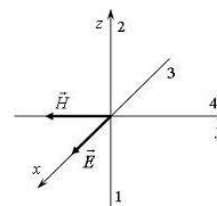
- 1) 1,33 м; 2) 0,75 м; 3) 1,2 м; 4) $1,2 \times 10^{16}$ м.

9. Волна от катера, проходящего по озеру, дошла до берега через 3 мин, причем расстояние между соседними гребнями оказалось равным 2 м, а время между двумя последовательными ударами волн о берег - 2 с. Как далеко от берега проходил катер?

- 1) определить нельзя; 2) 60 м; 3) 120 м; 4) 180 м; 5) 240 м.

10. На рисунке показана ориентация векторов напряженности электрического (E) и магнитного (H) полей в электромагнитной волне. Вектор плотности потока энергии электромагнитного поля ориентирован в направлении...

- 1) 3; 2) 4; 3) 1; 4) 2.



11. Укажите формулу для расчета периода колебаний пружинного маятника:

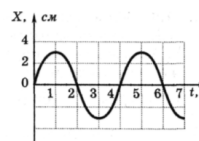
- 1) $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$; 2) $T = \sqrt{\frac{g}{l}}$; 3) $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$;
4) $T = 2\pi \sqrt{LC}$; 5) $T = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

12. При свободных колебаниях за одно и то же время первый математический маятник совершает одно колебание, а второй - три. Нить первого маятника в...

- 1) 9 раз длиннее; 2) 3 раза длиннее; 3) $\sqrt{3}$ раз длиннее;
4) $\sqrt{3}$ раз короче.

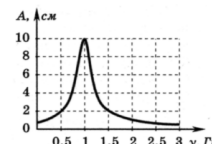
13. На рисунке дан график зависимости координаты тела от времени. Частота колебаний тела равна

- 2) 0,12 Гц; 2) 0,5 Гц; 3) 0,25 Гц; 4) 4 Гц.



14. На рисунке изображена зависимость амплитуды установившихся колебаний маятника от частоты вынуждающей силы (резонансная кривая). Отношение амплитуды установившихся колебаний маятника на резонансной частоте к амплитуде колебаний на частоте 0,5 Гц равно

- 1) 10; 2) 2; 3) 5; 4) 4.



15. Полная механическая энергия пружинного маятника увеличилась в 2 раза. Как изменилась амплитуда колебаний?

- 1) увеличилась в $\sqrt{2}$ раз 2) уменьшилась в 2 раза
3) увеличилась в 2 раза 4) уменьшилась в $\sqrt{2}$ раз

16. Укажите уравнение затухающих колебаний.

- 1) $x = A e^{-\beta t} \sin \omega t$; 2) $x = A \sin (\omega t + \varphi)$;
3) $x = A \cos (\omega t + \varphi)$; 4) $x = A \sin (\omega t + \pi)$;
5) $x = A \cos (\omega t + \pi/2)$.

17. Выберите определение вынужденных колебаний. Вынужденными называются такие колебания, в процессе которых колеблющаяся система...

- 1) совершает колебания по закону синуса;
2) подвергается воздействию внешней периодически изменяющейся силы;
3) предоставлена самой себе;
4) подвергается воздействию постоянной внешней силы;
5) совершает колебания по закону косинуса.

18. Складываются два гармонических колебания одного направления с одинаковыми периодами. Амплитуда результирующего колебания минимальна при разности фаз складываемых колебаний равной...

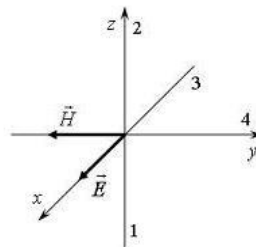
- 1) 0; 2) кратной четному числу π ; 3) кратной нечетному числу π ;
4) кратной нечетному числу $\pi/2$.

19. По участку цепи сопротивлением R идет переменный ток, меняющийся по гармоническому закону. В некоторый момент времени действующее значение напряжения на этом

участке цепи уменьшили в 2 раза, а его сопротивление уменьшили в 4 раза. При этом мощность тока

- 1) уменьшилась в 4 раза
- 2) уменьшилась в 8 раз
- 3) не изменилась
- 4) увеличилась в 2 раза

20. На рисунке показана ориентация векторов напряженности электрического (E) и магнитного (H) полей в электромагнитной волне. Вектор плотности потока энергии электромагнитного поля ориентирован в направлении...



- 1) 3;
- 2) 4;
- 3) 1;
- 4) 2.

21. Уравнение гармонических колебаний имеет вид $x = 4 \sin 2\pi t$ (м). Ускорение в момент времени, равный 0,5 с от начала движения составляет:

- 1) $16\pi^2$ м/с²;
- 2) $8\pi^2$ м/с²;
- 3) 0 м/с²;
- 4) $-16\pi^2$ м/с²;
- 5) $-8\pi^2$ м/с²

22. Если массу груза математического маятника увеличить в 4 раза, то период его свободных малых колебаний

- 1) увеличится в 4 раза
- 2) увеличится в 2 раза
- 3) уменьшится в 4 раза
- 4) не изменится

23. Груз массой m на пружине, совершая свободные колебания, проходит положение равновесия со скоростью v . Через половину периода колебаний он проходит положение равновесия, двигаясь в противоположном направлении с такой же по модулю скоростью v . Чему равен модуль изменения суммы кинетической и потенциальной энергий груза за это время?

- 1) mv^2 ;
- 2) $2mv^2$;
- 3) $\frac{mv^2}{2}$;
- 4) 0.

24. Груз, подвешенный к пружине, совершает вертикальные колебания с периодом 0,6 с. Если этот груз заменить другим, период будет равен 0,8 с. Каким будет период колебаний, если к пружине подвесить оба груза одновременно?

- 1) 0,4 с;
- 2) 0,7 с;
- 3) 0,9 с;
- 4) 1 с;
- 5) 1,2 с.

25. Складываются два гармонических колебания одного направления с одинаковыми периодами и равными амплитудами A_0 . При разности фаз $\Delta\varphi = \frac{3\pi}{2}$ амплитуда результирующего колебания равна...

- 1) $(5/2)A_0$;
- 2) $2A_0$;
- 3) 0;
- 4) $\sqrt{2} A_0$.

26. Уравнение движения пружинного маятника

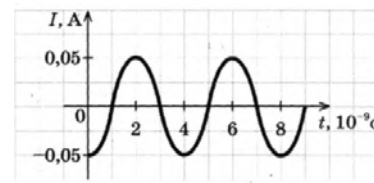
$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t$$

является дифференциальным уравнением ...

- 1) вынужденных колебаний; 2) свободных затухающих колебаний;
3) свободных незатухающих колебаний.

27. На рисунке показан график колебаний силы тока в колебательном контуре с антенной. Определите длину электромагнитной волны, излучаемой антенной.

- 1) $0,83 \times 10^{-6}$ м 2) 0,75 м 3) 0,6 м 4) 1,2 м

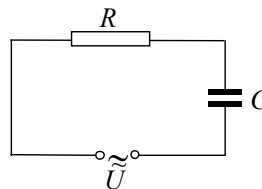


28. Поперечной называют такую волну, в которой частицы

- 1) колеблются в направлении распространения волны
2) колеблются в направлении, перпендикулярном направлению распространения волны
3) движутся по кругу в плоскости, параллельной направлению распространения волны
4) движутся по эллипсу в плоскости, параллельной направлению распространения волны

29. По какой формуле определяется полное сопротивление цепи переменного тока, показанной на рисунке?

- 1) R ;
2) $R + \omega C$;
3) $R + \frac{1}{\omega C}$;
4) $\sqrt{R^2 + (\omega C)^2}$;
5) $\sqrt{R^2 + \frac{1}{(\omega C)^2}}$.



30. Точки, находящиеся на одном луче и удаленные от источника волны на 12 м и 15 м, колеблются с разностью фаз $3\pi/2$. Чему равна длина волны?

- 1) 4 м 2) 8 м 3) 12 м 4) 6 м

31. Какие колебания называются гармоническими?

- 1) с постоянным периодом;
2) с постоянной фазой;
3) зависящие от времени по закону синуса или косинуса;
4) возникающие в системе, выведенной из положения равновесия и предоставленной самой себе.

32. Тело, подвешенное на пружине, совершает гармонические колебания с частотой ν . Потенциальная энергия упругой деформации пружины

- 1) изменяется с частотой $0,5 \nu$
2) изменяется с частотой ν
3) изменяется с частотой 2ν
4) не изменяется

33. Период колебаний груза, подвешенного к пружине, равен T_0 . Если две такие пружины соединить последовательно и подвесить то же тело, период колебаний будет равен:

- 1) $2T_0$; 2) $T_0 \sqrt{2}$; 3) $T_0/2$; 4) $T_0/\sqrt{2}$; 5) T_0 .

34. Разность фаз двух одинаково направленных гармонических колебаний одинаковой частоты и амплитуды, если амплитуда их результирующего колебания равна амплитудам складываемых колебаний, равна...

- 1) 90° ; 2) 120° ; 3) 180° ; 4) 30° .

35. Колебания электрического поля в электромагнитной волне описываются уравнением

$$E = 10 \cos \left(10^{-6} t + \frac{\pi}{2} \right) \quad \text{Определите частоту колебаний.}$$

- 1) 10^{-6} с^{-1}
 2) $1,6 \cdot 10^{-7} \text{ с}^{-1}$
 3) $\frac{\pi}{2} \text{ с}^{-1}$
 4) 10 с^{-1}

36. Материальная точка массой 50 г совершает колебания, уравнение которых имеет вид $x = A \cos \omega t$, где $A = 10 \text{ см}$, $\omega = 5 \text{ с}^{-1}$. Сила, действующая на точку в положении наибольшего смещения точки равна...

- 1) 0,75 мН; 2) 0,5 мН; 3) 7,5 мН; 4) 5 мН.

37. Свободные затухающие колебания заряда конденсатора в колебательном контуре описываются уравнением...

- 1) $\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{1}{LC} q = 0$ 2) $\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = \frac{U_0}{L} \cos \omega t$
 3) $\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = 0$

38. Сила тока через резистор меняется по закону $i = 36 \sin 128t$. Действующее значение силы тока в цепи равно

- 1) 36 А 2) 72 А 3) 128 А 4) 25 А

39. Согласно теории Максвелла, электромагнитные волны излучаются зарядом

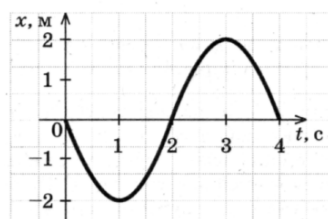
- 1) только при равномерном движении заряда по прямой
 2) только при гармонических колебаниях заряда
 3) только при равномерном движении заряда по окружности
 4) при любом ускоренном движении заряда в инерциальной системе отсчета

40. При уменьшении в 2 раза амплитуды колебаний векторов напряженности электрического и магнитного полей плотность потока энергии...

- 1) останется неизменной; 2) уменьшится в 4 раза; 3) уменьшится в 2 раза.

41. Уравнение гармонических колебаний материальной точки, график зависимости смещения от времени которой представлен на рисунке, имеет следующий вид:

- 1) $x = -2 \sin \left(\frac{\pi t}{2} \right)$
 2) $x = -2 \sin \left(\pi t + \frac{\pi}{2} \right)$
 3) $x = 2 \sin \left(\frac{\pi t}{2} + \frac{\pi}{2} \right)$
 4) $x = -2 \cos \left(\pi t + \frac{\pi}{2} \right)$



42. Сколько раз за один период свободных колебаний груза на пружине потенциальная энергия пружины и кинетическая энергия груза принимают равные значения?

- 1) 1 2) 2 3) 8 4) 4

43. Физический маятник – это...

1) груз, подвешенный на абсолютно упругой пружине и совершающей колебания под действием упругой силы;

2) материальная точка, подвешенная на невесомой нерастяжимой нити и совершающая колебания под действием силы тяжести;

3) любое тело, вращающееся вокруг горизонтальной неподвижной оси, не проходящей через центр тяжести.

44. Частоты колебаний двух одновременно звучащих камертонов настроены на 560 и 560,5 Гц. Период биений равен...

- 1) 1 с; 2) 2 с; 3) 3 с; 4) 5 с.

45. На сколько вопросов о вынужденных колебаниях Вы ответите «да»?

А. Пропорциональна ли амплитуда вынужденных колебаний амплитуде вынуждающей силы?

Б. Зависит ли амплитуда вынужденных колебаний от частоты вынуждающей силы?

В. Равна ли частота гармонических колебаний частоте вынуждающей силы?

Г. Должны ли совпадать вынужденные колебания по фазе с частотой вынуждающей силы?

- 1) А,Б,В,Г; 2) А,Б; 3) В,Г; 4) А,Б,В.

46. Уравнение плоской синусоидальной волны, распространяющейся вдоль оси Ox , имеет

вид $\xi = 0,01 \sin(10^3 t - 2x)$. Тогда скорость распространения волны равна...

- 1) 500 м/с; 2) 2 м/с; 3) 1000 м/с.

47. Емкость конденсатора, включенного в цепь переменного тока, равна 6 мкФ. Уравнение колебаний напряжения на конденсаторе имеет вид: $U = 50 \cos(10^3 t)$, где все величины выражены в СИ. Определите амплитуду колебаний силы тока.

- 1) 0,003 А 2) 0,3 А 3) 0,58 А 4) 50 А

48. Электромагнитное излучение оптического диапазона испускают

1) возбужденные атомы и молекулы вещества

2) атомы и молекулы в стационарном состоянии

3) электроны, движущиеся в проводнике, по которому течет переменный ток

4) возбужденные ядра атомов

49. Расстояния от двух когерентных источников волн до точки М равны a и b . Разность фаз колебаний источников равна нулю, длина волны равна λ . Если излучает только один источник волн, то амплитуда колебаний частиц среды в точке М равна A_1 , если только второй, то — A_2 . Если разность хода волн $a-b = 3\lambda/2$, то в точке М амплитуда суммарного колебания частиц среды

1) равна нулю

2) равна $|A_1 - A_2|$

3) равна $|A_1 + A_2|$

4) меняется со временем периодически

50. Заряженный конденсатор замыкают на катушку. Активное сопротивление проводов и катушки ничтожно. Заряд на положительно заряженной пластине конденсатора

- 1) монотонно возрастет до некоторого максимального значения;
- 2) монотонно спадет до нуля;
- 3) будет колебаться от начального значения до нуля и обратно;
- 4) будет колебаться от начального значения до противоположного, периодически меняя знак.

51. Математический маятник – это...

- 1) груз, подвешенный на абсолютно упругой пружине и совершающей колебания под действием упругой силы;
- 2) материальная точка, подвешенная на невесомой нерастяжимой нити и совершающая колебания под действием силы тяжести;
- 3) любое тело, вращающееся вокруг горизонтальной неподвижной оси, не проходящей через центр тяжести.

52. Шарик, подвешенный на нити, отклоняют влево и отпускают. Через какую долю периода кинетическая энергия шарика будет максимальной?

- 1) $1/8$;
- 2) $1/4$;
- 3) $3/8$;
- 4) $1/2$.

53. Складываются два гармонических колебания одного направления с одинаковыми периодами и равными амплитудами A_0 . При разности фаз $\Delta\varphi = 0$ амплитуда результирующего колебания равна...

- 1) $(5/2)A_0$;
- 2) $2A_0$;
- 3) 0;
- 4) $\sqrt{2} A_0$.

54. Параллельно какой координатной оси распространяется плоская электромагнитная волна, если в некоторый момент времени в точке с координатами (x, y, z) напряженность электрического поля $E = (0, 0, E)$, а индукция магнитного поля $B = (0, B, 0)$?

- 1) Параллельно оси X
- 2) Параллельно оси Y
- 3) Параллельно оси Z
- 4) Такая волна невозможна

55. Звуковая волна распространяется в воздухе от источника колебаний. При увеличении частоты колебаний источника ν в 2 раза...

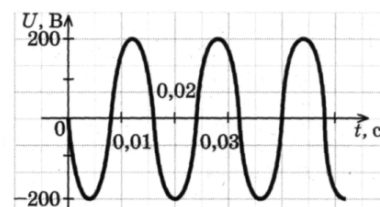
- 1) длина волны λ и скорость распространения волны v уменьшатся в 2 раза;
- 2) длина волны λ уменьшится в 2 раза, а скорость распространения волны v не изменится;
- 3) длина волны λ и скорость распространения волны v не изменятся;
- 4) длина волны λ уменьшится в 2 раза, а скорость распространения волны v увеличится в 2 раза.

56. Электромагнитная волна с частотой $\nu = 5$ МГц переходит из немагнитной среды с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 2$ в вакуум. Приращение ее длины составит

- 1) 17,6 м;
- 2) 20,2 м;
- 3) 7,2 м;
- 4) 0 м.

57. На рисунке показан график изменения напряжения на выходе генератора с течением времени. Чему равен период колебаний напряжения?

- 1) 50 с
- 2) 0,017 с
- 3) 60 с
- 4) 0,02 с



58. Последовательно соединены конденсатор, катушка индуктивности и резистор. Если при неизменной частоте и амплитуде колебания напряжения на концах цепи увеличивать емкость конденсатора от 0 до ∞ , то амплитуда колебаний силы тока в цепи будет

- 1) монотонно убывать
- 2) монотонно возрастать
- 3) сначала возрастать, затем убывать
- 4) сначала убывать, затем возрастать

59. Коэффициент затухания электромагнитных колебаний зависит от...

- 1) заряда на обкладках конденсатора.
- 2) активного сопротивления и индуктивности контура.
- 3) напряжения на конденсаторе.
- 4) емкости конденсатора.
- 5) частоты колебаний.

60. Какая из формул, приведенных ниже, определяет период свободных колебаний в идеальном колебательном контуре?

- 1) $T = \sqrt{LC}$;
- 2) $T = 1/\sqrt{LC}$;
- 3) $T = 2\pi\sqrt{LC}$;
- 4) $T = 2\pi/\sqrt{LC}$;
- 5) $T = 1/(2\pi\sqrt{LC})$.

61. Максимальное смещение колеблющейся точки равно 2 см. Частота колебаний 0,5 Гц, смещение точки от положения равновесия в начальный момент времени равно 1 см. Уравнение колебания имеет вид:

- 1) $x = 0,5 \sin 2t$ (см)
- 2) $x = \sin\left(2\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$ (см)
- 3) $x = 2 \sin\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$ (см)
- 4) $x = 2 \sin\left(\frac{\pi}{2} t + \frac{\pi}{2}\right)$ (см)

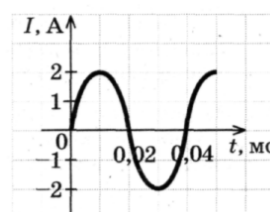
62. Выберите уравнения, описывающее изменение величины заряда на обкладках конденсатора в идеальном колебательном контуре.

- 1) $q = q_0 \cos(t + \varphi_0)$.
- 2) $q = q_0 \omega_0 \cos(t + \varphi_0)$.
- 3) $q = q_0 \cos \omega_0 (t + \varphi_0)$.
- 4) $q = q_0 \cos (\omega_0/t + \varphi_0)$.
- 5) $q = q_0 \cos (\omega_0 \cdot t + \varphi_0)$.

63. Вагон массой 80 т имеет четыре рессоры. Жесткость каждой рессоры равны 197 кН/м. Чтобы вагон сильно раскачивало, толчки от стыков рельс должны повторяться через промежуток времени, равный:

- 1) 8 с;
- 2) 2 с;
- 3) 4 с;
- 4) 5 с.

64. Если сила тока в электрической лампочке, питаемой от генератора переменного тока, меняется с течением времени согласно графику на рисунке, то период колебаний напряжения на клеммах лампы равен



73. Сколько утверждений относительно вынужденных колебаний Вы считаете верным?

А) Для диссипативной системы $\omega_{\text{рез}}$ несколько меньше собственной циклической частоты $\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$.

Б) Амплитуда вынужденных колебаний прямо пропорциональна амплитуде вынуждающей силы F_0 и уменьшается с увеличением коэффициента затухания β .

В) Явление возрастания амплитуды вынужденных колебаний при приближении циклической частоты вынуждающей силы к значению $\omega_{\text{рез}}$ называется явлением резонанса.

Г) Для консервативной системы резонансная и собственная частоты совпадают $\omega_{\text{рез}} = \omega_0$.

- 1) А, Б; 2) А, В, Г; 3) А, Б, В, Г; 4) Б, В, Г.

74. Два одинаково направленных гармонических колебания одинакового периода с амплитудами $A_1 = 6$ см и $A_2 = 8$ см имеют разность фаз $\varphi = 60^\circ$. Амплитуда результирующего колебания равна ...

- 1) 11 см; 2) 12,16 см; 3) 6 см; 4) 8 см.

75. Как определяется период свободных колебаний в идеальном колебательном контуре?

- 1) $\sqrt{LC}$; 2) $1/\sqrt{LC}$; 3) $2\pi\sqrt{LC}$; 4) $2\pi/\sqrt{LC}$.

76. Уравнение движения пружинного маятника

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$$

является дифференциальным уравнением ...

- 1) вынужденных колебаний;
2) свободных затухающих колебаний;
3) свободных незатухающих колебаний;
4) свободных гармонических колебаний.

77. Максимальное напряжение на конденсаторе при колебаниях в контуре равно 50 В, емкость конденсатора равна 0,1 мкФ, индуктивность—1 мГн. Уравнение колебаний заряда на конденсаторе имеет вид:

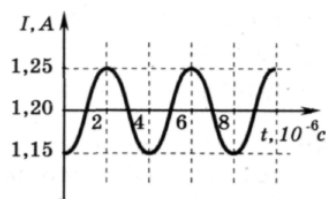
- 1) $q = 50 \cos(10^{-5}t)$ (мкКл) 2) $q = 5 \cos 10^5 t$ (мкКл)
3) $q = 50 \cos(10^5 \pi t)$ (мкКл) 4) $q = 5 \cos(2 \cdot 10^5 \pi t)$ (мкКл)

78. По натянутой струне бежит поперечная волна, имеющая частоту $\nu = 400$ Гц и амплитуду $A = 0,01$ м. Как может при этом зависеть от времени t поперечная координата X некоторой точки на струне?

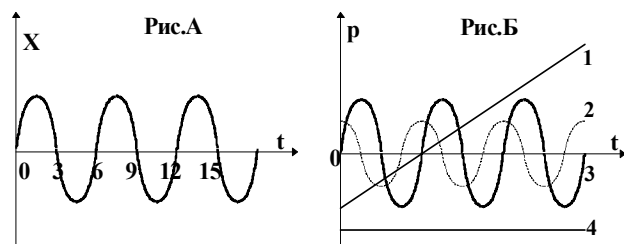
- 1) $X = A \cos(2\pi\nu t)$; 2) $X = A \sin(\nu t)$;
3) $X = A/2 \cos(2\pi\nu t)$; 4) $X = 2A \sin(2\pi\nu t)$;
5) $X = A \cos(\nu t / \pi)$; 6) среди ответов нет правильного.

79. На рисунке показан график колебаний силы тока в колебательном контуре с антенной. Определите длину электромагнитной волны, излучаемой антенной.

- 1) $1,2 \times 10^3$ м; 2) $0,83 \times 10^{-3}$ м; 3) $7,5 \times 10^2$ м; 4) 6×10^2 м



80. На рис. А представлен график зависимости координаты тела от времени при гармонических колебаниях. Какой из графиков на рис. Б выражает зависимость импульса колеблющегося тела от времени?



- 1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4.

81. Математический маятник длиной ℓ совершает гармонические колебания. Как изменится частота колебаний, если длину маятника уменьшить вдвое?

- 1) не изменится;
2) увеличится в два раза;
3) уменьшится в два раза;
4) увеличится в $\sqrt{2}$ раз;
5) уменьшится в $\sqrt{2}$ раз.

82. Укажите вид энергии идеального колебательного контура в начальный момент времени $t = 0$ и через $1/2$ часть периода после начала разряда конденсатора? В начальном состоянии конденсатор полностью заряжен.

- 1) магнитная;
2) электрическая и магнитная в равных соотношениях;
3) электрическая ;
4) энергия равна нулю.

83. Уравнение колебаний груза на пружине имеет вид:

$$x = 10 \sin\left(2\pi t + \frac{\pi}{4}\right) (\text{см}) .$$

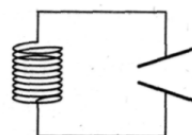
Максимальное смещение и максимальная скорость груза равны, соответственно...

- 1) 10 см и 6,28 м/с;
2) 628 см и 10 м/с;
3) 10 см и 10 м/с;
4) 10 см и 0,625 м/с.

84. Из приведенных выражений уравнением бегущей волны является...

- 1) $\xi = \frac{A_0}{r} \cos(\omega t - kr)$ 4) $\xi = 2A \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \cos \omega t$
2) $\xi = A_0 e^{-\beta r} \cos(\omega t + \varphi_0)$ 5) $\xi = A \cos(\omega t - kx)$
3) $\xi = A \cos(\omega t + \varphi_0)$

85. Известно, что при раздвигании пластин конденсатора в колебательном контуре (рис.) происходит излучение электромагнитных волн. В ходе излучения амплитудное значение напряжения на конденсаторе



- 1) возрастает
- 2) не изменяется
- 3) убывает
- 4) ответ зависит от начального заряда на конденсаторе

86. Для сферической волны справедливо утверждение...

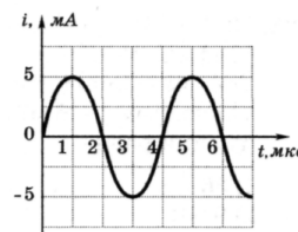
- 1) волновые поверхности имеют вид параллельных друг другу плоскостей;
- 2) амплитуда волны обратно пропорциональна расстоянию до источника колебаний (в не-поглощающей среде);
- 3) амплитуда волны не зависит от расстояния до источника колебаний (при условии, что поглощением среды можно пренебречь);
- 4) амплитуда волны пропорциональна расстоянию до источника колебаний.

87. За время $t = 8$ мин. Амплитуда затухающих колебаний маятника уменьшилась в 3 раза. Коэффициент затухания β равен...

- 1) 0,001;
- 2) 0,0023;
- 3) 0,0046;
- 4) 0,0072.

88. На рисунке приведен график зависимости силы тока от времени в колебательном контуре. Сколько раз энергия магнитного поля катушки достигает максимального значения в течение первых 6 мкс после начала отсчета?

- 1) 1 раз
- 2) 2 раза
- 3) 3 раза
- 4) 4 раза



89. В колебательном контуре с омическим сопротивлением контура $R = 20$ Ом, индуктивностью $L = 1$ мГн возникают апериодические колебания. Укажите возможные значения емкости этого контура.

- 1) 0,1 мкФ;
- 2) 1 мкФ;
- 3) 20 мкФ;
- 4) 2 мкФ.

90. Максимальная скорость точки, совершающей гармонические колебания, равна 10 см/с, максимальное ускорение 100 см/с. Период колебаний равен

- 1) $0,1 \pi$ с;
- 2) $0,2 \pi$ с;
- 3) 1 с;
- 4) 10 с.

91. Тонкий обруч, повешанный на гвоздь, вбитый горизонтально в стену, колеблется в плоскости, параллельной стене. Радиус обруча R равен 20 см. период колебаний обруча...

- 1) $0,1 \pi$ с;
- 2) $0,4 \pi$ с;
- 3) $0,2 \pi$ с;
- 4) 10 с.

92. Конденсатор емкости C включают в цепь переменного тока с напряжением, меняющимся по закону $U = U_0 \sin \omega t$. По какому закону будет меняться ток I через конденсатор?

- 1) $I = U_0 \omega C \cos \omega t$;
- 2) $I = U_0 \omega \sin \omega t$;
- 3) $I = U_0 \omega C \cos(\omega t + \pi/4)$;
- 4) $I = U_0 \omega C \sin(\omega t + \pi/4)$;
- 5) $I = -U_0 \omega C \cos \omega t$;
- 6) $I = -U_0 \omega C \sin \omega t$.

93. Складываются два гармонических колебания одного направления с одинаковыми частотами и равными амплитудами A_0 . При разности фаз $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$ амплитуда результирующего колебания равна...

- 1) 0;
- 2) $2A_0$;
- 3) $A_0\sqrt{3}$;
- 4) $A_0\sqrt{2}$.

94. При увеличении периода колебаний источника волны в 4 раза длина волны

- 1) увеличится в 4 раза;
- 2) не изменится;
- 3) уменьшится в 2 раза;
- 4) уменьшится в $\sqrt{2}$ раза.

95. В первых экспериментах по изучению распространения электромагнитных волн в воздухе были измерены длина волны $\lambda = 50$ см и частота излучения $\nu = 500$ МГц. На основе этих неточных данных было получено значение скорости света в воздухе, равное примерно

- 1) 100 000 км/с;
- 2) 200 000 км/с;
- 3) 250 000 км/с;
- 4) 300 000 км/с.

96. В газовой среде распространяются...

- 1) только поперечные волны;
- 2) только продольные волны;
- 3) продольные и поперечные волны;
- 4) в газовой среде волны распространяться не могут.

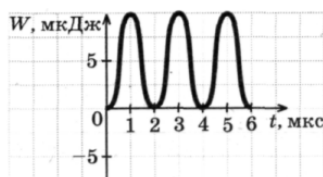
97. Бегущая волна...

- 1) переносит вещество;
- 2) переносит массу;
- 3) не переносит импульс;
- 4) переносит энергию.

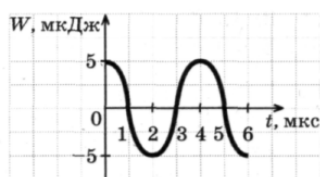
98. Скорость звука в воде 1450 м/с. На каком расстоянии находятся две ближайшие точки, совершающие колебания в противоположных фазах, если частота колебаний $\nu = 725$ Гц.

- 1) 0,5 м;
- 2) 1 м;
- 3) 2 м;
- 4) 4 м.

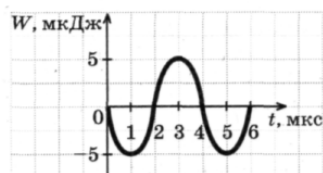
99. На рисунке приведен график зависимости силы тока от времени в колебательном контуре. На каком из графиков правильно показан процесс изменения энергии магнитного поля катушки?



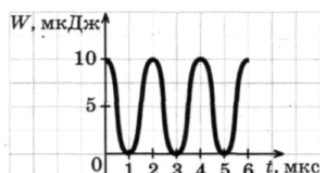
1)



2)



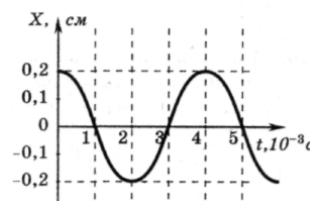
3)



4)

100. На рисунке показан график колебаний одной из точек струны. Согласно графику, период этих колебаний равен

- 1) 1×10^{-3} с;
- 2) 2×10^{-3} с;
- 3) 3×10^{-3} с;
- 4) 4×10^{-3} с.



101. На какие вопросы Вы ответите «да»:

- 1) Гармонические колебания являются периодическими?
- 2) В реальном колебательном контуре всегда присутствуют потери энергии?
- 3) Возможно ли сложение колебаний?
- 4) Изменяется ли амплитуда при гармонических колебаниях?

1) 4, 1;

2) 1, 3;

3) 1, 2, 3;

4) 3, 4.

102. Однородный диск радиусом 60 см колеблется около горизонтальной оси, проходящей через одну из образующих цилиндрической поверхности диска. Период колебаний этого диска равен

- 1) $0,6 \pi$;
- 2) $1,33$ с;
- 3) $1,2$ с;
- 4) $0,8 \pi$.

103. Два гармонических колебания, направленных по одной прямой и имеющих одинаковые периоды и амплитуды складываются в одно колебание той же амплитуды. Разность фаз складываемых колебаний равна...

- 1) π ;
- 2) $1/3 \pi$;
- 3) $2/3 \pi$;
- 4) 2π .

104. Амплитуда затухающих колебаний маятника за 2 мин. уменьшилась в 2 раза. Коэффициент затухания колебаний равен...

- 1) $0,001 \text{ с}^{-1}$;
- 2) $0,006 \text{ с}^{-1}$;
- 3) $0,004 \text{ с}^{-1}$;
- 4) $0,002 \text{ с}^{-1}$.

105. В уравнении гармонического колебания $x = A \cos(\omega t + \varphi_0)$ величина, стоящая под знаком косинуса, называется

- 1) фазой
- 2) начальной фазой
- 3) смещением от положения равновесия
- 4) циклической частотой

106. Явление резонанса может наблюдаться в

- 1) любой колебательной системе
- 2) системе, совершающей свободные колебания

- 3) автоколебательной системе
- 4) системе, совершающей вынужденные колебания

107. Скорость распространения гамма-излучения в вакууме

- 1) равна 3×10^8 м/с
- 2) равна 3×10^2 м/с
- 3) зависит от частоты
- 4) зависит от энергии

108. В вакууме вдоль оси X распространяется плоская электромагнитная волна. Амплитуда напряженности электрического поля волны равна $E_0 = 10$ В/м. ($\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м) Амплитуда напряженности магнитного поля волны равна...

- 1) 100 А/м;
- 2) $2,65 \cdot 10^{-2}$ А/м;
- 3) 0,1 А/м;
- 4) $1,26 \cdot 10^{-2}$ А/м.

109. Если увеличить в 2 раза объемную плотность энергии при неизменной скорости распространения упругих волн, то плотность потока энергии...

- 1) увеличится в 4 раза;
- 2) увеличится в 2 раза;
- 3) увеличится в 8 раз;
- 4) останется неизменной.

110. Уравнение гармонических колебаний имеет вид $x = 4 \sin 2\pi t$ (м). Период колебаний равен

- 1) 0,5 с;
- 2) 1 с;
- 3) 2 с;
- 4) 2π с.

111. Как изменится период колебания математического маятника, если его длину уменьшить в два раза, а массу увеличить в 2 раза?

- 1) Не изменится.
- 2) Увеличится в 2 раза.
- 3) Уменьшится в 2 раза.
- 4) Увеличится в 1,41 раз.
- 5) Уменьшится в 1,41 раз.

112. Колебательный контур состоит из конденсатора электроемкостью C и катушки индуктивностью L . Как изменится период свободных электромагнитных колебаний в этом контуре, если электроемкость конденсатора и индуктивность катушки увеличить в 3 раза?

- 1) увеличится в 3 раза ;
- 2) уменьшится в 3 раза;
- 3) не изменится;
- 4) увеличится в 9 раз.

113. Уменьшение амплитуды колебаний в системе с затуханием характеризуется временем релаксации. Если при неизменном омическом сопротивлении в колебательном контуре увеличить в 2 раза индуктивность катушки, то время релаксации...

- 1) уменьшится в 4 раза;
- 2) уменьшится в 2 раза;
- 3) увеличится в 2 раза;
- 4) не изменится.

114. Точка участвует одновременно в двух гармонических колебаниях, происходящих во взаимно перпендикулярных направлениях и описываемых уравнениями $x = A \sin(\omega t + \pi/2)$ и $y = A \sin \omega t$. Траектория точки представляет собой...

- 1) эллипс;
- 2) окружность радиусом $R = A$;
- 3) окружность радиусом $R = 2A$;
- 4) прямую.

115. В сеть переменного тока с действующим значением напряжения 120 В последовательно включены проводник с активным сопротивлением 10 Ом и катушка индуктивностью 0,1 Гн. Амплитудное значение силы тока в цепи равно 5 А. Частота тока ν равна...

- 1) 156 Гц;
- 2) 51,6 Гц;
- 3) 72,4 Гц;
- 4) 28,3 Гц.

116. Уравнение плоской синусоидальной волны, распространяющейся вдоль оси ОХ, имеет вид $\xi = 0,01 \sin(10^3 t - 2x)$. Укажите единицу измерения волнового числа.

- 1) 1/м;
- 2) м;
- 3) 1/с;
- 4) с.

117. Электромагнитные волны распространяются в некоторой однородной среде со скоростью $v = 2,4 \cdot 10^8$ м/с. Какую длину волны имеют электромагнитные колебания в этой среде, если их частота в вакууме равна 1,2 МГц?

- 1) 100 м;
- 2) 200 м;
- 3) 300 м;
- 4) 50 м.

118. В твердых телах распространяются...

- 1) только поперечные волны;
- 2) только продольные волны;
- 3) продольные и поперечные волны.
- 4) в твердых телах волны распространяться не могут.

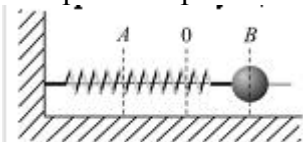
119. Для интерференции двух волн необходимы и достаточны...

- 1) постоянная для каждой точки разность фаз и одинаковое направление колебаний;
- 2) одинаковая частота и одинаковое направление колебаний;
- 3) одинаковая амплитуда и одинаковая частота колебаний.
- 4) постоянная разность фаз и одинаковая частота колебаний.

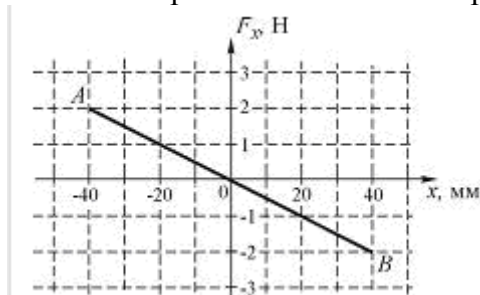
120. Материальная точка совершает гармонические колебания с амплитудой $A = 4$ см и периодом $T = 2$ с. Если смещение точки в момент времени, принятый за начальный, равно нулю, то точка колеблется в соответствии с уравнением (в СИ)...

- 1) $x = 0,04 \sin 2t$;
- 2) $x = 0,04 \cos \pi t$;
- 3) $x = 0,04 \sin \pi t$;
- 4) $x = 0,04 \cos 2t$.

121. Шарик, прикрепленный к пружине и насаженный на горизонтальную направляющую, совершает гармонические колебания.



На графике представлена зависимость проекции силы упругости пружины на положительное направление оси X от координаты шарика.



Работа силы упругости при смещении шарика из положения 0 в положение B составляет...

- 1) 0 Дж; 2) $-4 \cdot 10^{-2}$ Дж; 3) $4 \cdot 10^{-2}$ Дж; 4) $8 \cdot 10^{-2}$ Дж.

122. Материальная точка совершает гармонические колебания по зако-

$$ну x = 0,3 \cos\left(\frac{2\pi}{3}t + \frac{\pi}{4}\right)$$

Уравнение скорости имеет вид:

1) $v = 0,3 \sin\left(\frac{2\pi}{3}t + \frac{\pi}{4}\right)$ 2) $v = -0,2\pi \sin\left(\frac{2\pi}{3}t - \frac{\pi}{4}\right)$

3) $v = 0,2\pi \sin\left(\frac{2\pi}{3}t + \frac{\pi}{4}\right)$ 4) $v = -0,2\pi \sin\left(\frac{2\pi}{3}t + \frac{\pi}{4}\right)$

123. Уравнение бегущей вдоль оси x волны имеет вид...

1) $y = 2A \cdot \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \cos(\omega t)$ 2) $y = A \cdot \cos(\omega t + \varphi)$

3) $y = A \cos\left\{2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\right\}$ 4) $y = A \cdot \cos\left\{\omega\left(t - \frac{x}{\lambda}\right)\right\}$

124. В результате сложения двух колебаний, период одного из них $T = 0,02$ с, получают биения с периодом $T_6 = 0,2$ с. Частота второго складываемого колебания равна...

- 1) 2 Гц; 2) 45 Гц; 3) 100 Гц; 4) 135 Гц.

125. Как изменится период собственных колебаний контура, если его индуктивность увеличить в 20 раз, а емкость уменьшить в 5 раз?

- 1) Увеличится в 2 раза
2) Уменьшится в 2 раза
3) Увеличится в 4 раза
4) Уменьшится в 4 раза

126. В цепь колебательного контура, содержащего катушку индуктивностью $L = 0,2$ Гн и активным сопротивлением $R = 9,7$ Ом, и конденсатор емкостью $C = 40$ мкФ, подключено внешнее переменное напряжение. Разность фаз между током и внешним напряжением φ равна...

- 1) 60° ; 2) -60° ; 3) 45° ; 4) -45° .

127. Вынужденные колебания заряда конденсатора в колебательном контуре описываются уравнением...

1) $\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{1}{LC} q = 0$ 2) $\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = \frac{U_0}{L} \cos \omega t$

3) $\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = 0$

128. Уравнение плоской синусоидальной волны, распространяющейся вдоль оси OX со скоростью 500 м/с, имеет вид $\xi = 0,01 \sin (10^3 t - 2x)$. Циклическая частота ω равна...

- 1) $0,001 \text{ с}^{-1}$; 2) 159 с^{-1} ; 3) 1000 с^{-1} ; 4) 100 с^{-1} .

129. Укажите единицу измерения плотности потока электромагнитной энергии.

- 1) $\text{В} \cdot \text{А} / \text{м}^2$; 2) $\text{В} \cdot \text{А} \cdot \text{с} \cdot \text{м}^2$; 3) $\text{В} \cdot \text{А} \cdot \text{м}^2$; 4) $\text{В} \cdot \text{А} \cdot \text{м}$.

130. Из приведенных выражений уравнением стоячей волны является...

1) $\xi = \frac{A_0}{r} \cos(\alpha t - kr)$ 4) $\xi = 2A \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \cos \alpha t$

2) $\xi = A_0 e^{-R} \cos(\alpha t + \varphi_0)$ 5) $\xi = A \cos(\alpha t - kx)$

3) $\xi = A \cos(\alpha t + \varphi_0)$

131. Различные виды электромагнитных излучений:

1) видимый свет; 2) радиоволны; 3) инфракрасное излучение;
4) ультрафиолетовое излучение; 5) рентгеновские лучи; 6) γ - лучи –
расположите в порядке уменьшения длины волны:

1) 2,3,1,4,5,6; 2) 2,1,3,4,6,5; 3) 6,5,4,3,2,1; 4) 5,1,4,3,2,6.

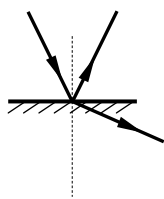
132. Если вектор E ориентирован вдоль положительного направления оси OX , а вектор H вдоль отрицательного направления оси OY , то вектор плотности потока энергии электромагнитного поля ориентирован:

- 1) вдоль отрицательного направления оси OZ ;
- 2) вдоль положительного направления оси OZ ;
- 3) вдоль отрицательного направления оси OX ;
- 4) вдоль положительного направления оси OX .

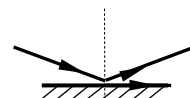
Тема 5: Волновая и квантовая оптика

1. Укажите, на каком рисунка показан ход лучей при полном внутреннем отражении при падении света под углом, меньшим предельного.

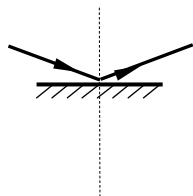
а)



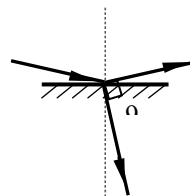
б)



в)



г)



1) а;

2) б;

3) в;

4) г.

2. Почему окраска одного и того же места поверхности мыльного пузыря непрерывно меняется? Поясните ответ.

- 1) Изменяется концентрация мыльного раствора.
- 2) Изменяется угол падения лучей на пленку.
- 3) Изменяется толщина пленки пузыря.

4) Изменяется коэффициент отражения пленки пузыря.

3. Как зависит число дифракционных максимумов, создаваемых дифракционной решеткой, от числа щелей, приходящихся на единицу длины?

- 1) Не зависит от числа щелей;
- 2) увеличивается с увеличением числа щелей;
- 3) уменьшается с увеличением числа щелей;
- 4) может как увеличиваться, так и уменьшаться.

4. Укажите формулу закона Малюса для прохождения линейнополяризованного света через поляризатор.

- 1) $I = \frac{1}{2} I_0$;
- 2) $I = \frac{1}{2} (1 - \eta) I_0$;
- 3) $I = I_0 \cos^2 \varphi$;
- 4) $I = \frac{1}{2} I_0 \cos^2 \varphi$;
- 5) $I = \frac{1}{2} I_0 (1 - \eta)^2 \cos^2 \varphi$.

Здесь везде η – коэффициент поглощения света поляризатором.

5. При попадании солнечного света на капли дождя образуется радуга. Это объясняется тем, что белый свет состоит из электромагнитных волн с разной длиной волны, которые каплями воды по-разному

- 1) преломляются;
- 2) поляризуются;
- 3) отражаются;
- 4) поглощаются.

6. В каком случае излучение наиболее близка к тепловому равновесному?*

- 1) Свечение фосфора при медленном излучении в воздухе;
- 2) свечение разреженного газа при пропускании через него электрического тока;
- 3) свечение нагретого металла, вынутого из печи;
- 4) свечение нагретого металла, находящегося в печи.

7. Укажите формулу, представляющую собой закон Кирхгофа.

- 1) $\lambda_m = \frac{b}{T}$;
- 2) $\frac{r(\lambda, T)}{a(\lambda, T)} = f(\lambda, T) = r_0(\lambda, T)$;
- 3) $R_\vartheta = \sigma T^4$;
- 4) $R_\vartheta = \varepsilon(T) \sigma T^4$.

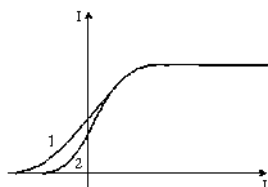
Здесь $r_0(\lambda, T)$ – спектральная плотность энергетической светимости абсолютно черного тела.

8. На рисунке представлены две вольтамперные характеристики вакуумного фотоэлемента. Если E – освещенность фотокатода, а ν – частота падающего света, то для кривых 1 и 2 справедливы следующие утверждения...

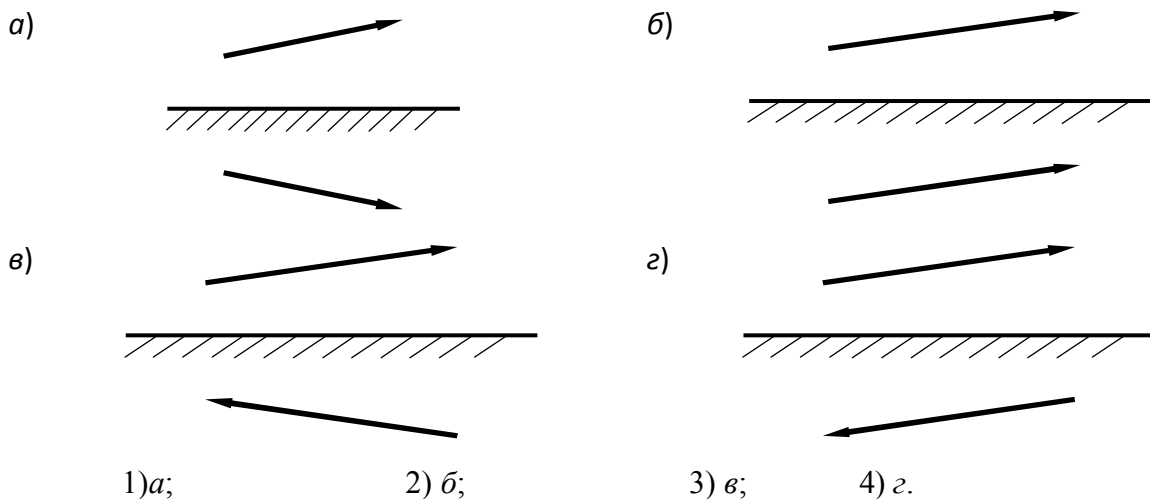
- 1) 1) $\nu_1 > \nu_2$; $E_1 = E_2$;
- 2) 2) $\nu_1 = \nu_2$; $E_1 > E_2$;
- 3) 3) $\nu_1 < \nu_2$; $E_1 = E_2$;
- 4) 4) $\nu_1 = \nu_2$; $E_1 < E_2$.

9. Эффект Комптона наблюдается

- 1) во всех спектральных областях;
- 2) в рентгеновской области;
- 3) в видимой области;
- 4) в инфракрасной области.



10. Укажите, на каком рисунке верно показано изображение предмета в плоском зеркале.



- 1) а;
- 2) б;
- 3) в;
- 4) г.

11. Укажите формулу для радиусов темных колец Ньютона в отраженном свете, если прослойка между линзой и пластинкой заполнена жидкостью с показателем преломления n .

- 1) $r_k = \sqrt{(2k-1)R \frac{\lambda}{2n}}$;
- 2) $r_k = \sqrt{(2k-1)R \frac{\lambda}{2}}$;
- 3) $r_k = \sqrt{k\lambda R}$;
- 4) $r_k = \sqrt{\frac{k\lambda R}{n}}$.

12. На одной щели можно наблюдать

- 1) только дифракцию Френеля;
- 2) только дифракцию Фраунгофера;
- 3) и дифракцию Френеля, и дифракцию Фраунгофера при разных условиях наблюдения;
- 4) дифракцию наблюдать невозможно.

13. Укажите формулу закона Малюса для прохождения естественного света через поляризатор без учета поглощения света поляризатором.

- 1) $I = \frac{1}{2} I_0$;
- 2) $I = \frac{1}{2} (1 - \eta) I_0$;

$$3) I = I_0 \cos^2 \varphi; \quad 4) I = \frac{1}{2} I_0 \cos^2 \varphi;$$

$$5) I = \frac{1}{2} I_0 (1 - \eta)^2 \cos^2 \varphi. \text{ Здесь везде } \eta - \text{ коэффициент поглощения света поляризатором.}$$

14. Узкий пучок белого света в результате прохождения через стеклянную призму расширяется, и на экране наблюдается разноцветный спектр. Это явление объясняется тем, что призма

- 1) по-разному поглощает свет с различными длинами волн;
- 2) окрашивает белый свет в различные цвета;
- 3) преломляет свет с разной длиной волн по-разному, разлагая его на монохроматические составляющие;
- 4) изменяет частоту волн.

15. Какое утверждение противоречит закону Кирхгофа для теплового излучения?

- 1) При тепловом равновесии спектральный состав излучения не зависит от свойств тел.
- 2) При тепловом равновесии абсолютно черное тело излучает с единицы поверхности больше энергии, чем любое нечерное.
- 3) Чем больше поглощательная способность тела, тем больше его излучательная способность.
- 4) Для всех тел отношение излучательной способности к поглощательной способности для одних и тех же длин волн зависит только от температуры.

16. Укажите формулу, представляющую собой закон Вина для абсолютно черного тела..

$$1) \lambda_m = \frac{b}{T};$$

$$2) \frac{r(\lambda, T)}{a(\lambda, T)} = f(\lambda, T) = r_0(\lambda, T);$$

$$3) R_\vartheta = \sigma T^4;$$

$$4) R_\vartheta = \varepsilon(T) \sigma T^4.$$

Здесь $r_0(\lambda, T)$ – спектральная плотность энергетической светимости абсолютно черного тела.

17. Внешний фотоэффект в металле вызывается монохроматическим излучением. При увеличении интенсивности этого излучения в 2 раза максимальная скорость фотоэлектронов, покидающих металл...

- 1) увеличится в 4 раза;
- 2) увеличится в 8 раз;
- 3) увеличится в $\sqrt{2}$ раз;
- 4) увеличится в 2 раза;
- 5) не изменится.

18. На зеркальную поверхность перпендикулярно к ней падает свет. Импульс, переданный поверхности при отражении одного фотона, равен

$$1) \frac{h\nu}{c};$$

$$2) \frac{hc}{\lambda};$$

$$3) mc^2;$$

$$4) \frac{2h\nu}{c}.$$

19. При прохождении через границу раздела двух сред измерены два угла падения α_1 , и α_2 и два соответствующих им угла преломления γ_1 и γ_2 . О соотношении этих углов можно утверждать, что

$$1) \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2};$$

$$2) \frac{\alpha_1}{\gamma_1} = \frac{\alpha_2}{\gamma_2};$$

$$3) \frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_1} = \frac{\sin \gamma_1}{\sin \gamma_2};$$

$$4) \frac{\sin \alpha_1}{\sin \gamma_1} = \frac{\sin \alpha_2}{\sin \gamma_2}.$$

20. Радужные пятна на поверхности воды, покрытой тонкой пленкой бензина, объясняются...

- 1) дифракцией света;
- 2) дисперсией света;
- 3) интерференцией света;
- 4) поляризацией света.

21. Что такое дифракция света?

- 1) Разложение света на монохроматические составляющие при преломлении в призме;
- 2) изменение направления распространения света при переходе из одной среды в другую;
- 3) огибание светом препятствий;
- 4) перераспределение интенсивности света с образованием чередующихся максимумов и минимумов.

22. Укажите формулу закона Малюса для прохождения естественного света через поляризатор с учетом поглощения света поляризатором.

$$1) I = \frac{1}{2} I_0;$$

$$2) I = \frac{1}{2} (1 - \eta) I_0;$$

$$3) I = I_0 \cos^2 \varphi;$$

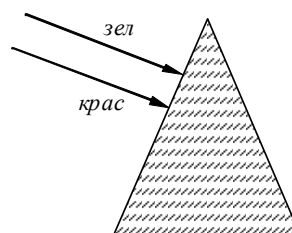
$$4) I = \frac{1}{2} I_0 \cos^2 \varphi;$$

$$5) I = \frac{1}{2} I_0 (1 - \eta)^2 \cos^2 \varphi.$$

Здесь везде η – коэффициент поглощения света поляризатором.

23. Параллельные лучи от лазеров с зеленым и красным светом излучения падают на переднюю грань призмы в направлении, перпендикулярном граням призмы, и выходят через противоположную грань. После прохождения сквозь призму эти лучи

- 1) пересекутся;
- 2) разойдутся;
- 3) будут идти параллельно;
- 4) ответ зависит от преломляющего угла призмы.



24. Температура абсолютно черного тела 727 К. Какой цвет будет преобладать при наблюдении этого тела?

- 1) Фиолетовый;
- 2) белый;
- 3) красный;
- 4) излучение в видимой области отсутствует.

25. Укажите формулу, представляющую собой формулу Планка для спектральной плотности энергетической светимости абсолютно черного тела.

$$1) r(\lambda, T) = \frac{dR_{\lambda}}{d\lambda}; \quad 2) r(\lambda, T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{\exp(hc/\lambda kT) - 1};$$

$$3) \frac{r(\lambda, T)}{a(\lambda, T)} = f(\lambda, T) = r_0(\lambda, T);$$

$$4) R_{\lambda} = \int_0^{\infty} r(\lambda, T) d\lambda.$$

Здесь $r_0(\lambda, T)$ – спектральная плотность энергетической светимости абсолютно черного тела.

26. Красная граница фотоэффекта приходится на зеленый свет. Фотоэффект будет наблюдаться при освещении катода светом...

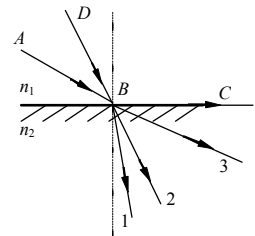
- 1) любым;
- 2) желтым;
- 3) красным;
- 4) фиолетовым.

27. На черную поверхность перпендикулярно к ней падает свет. Импульс, переданный поверхности при отражении одного фотона, равен

$$1) \frac{h\nu}{c}; \quad 2) \frac{hc}{\lambda}; \quad 3) mc^2; \quad 4) \frac{2h\nu}{c}.$$

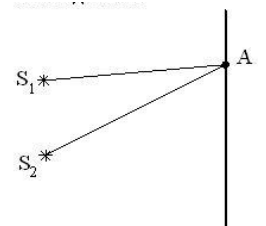
28. Луч AB преломляется в точке B на границе раздела двух сред с показателями преломления $n_1 > n_2$ и идет по пути BC (см. рисунок). Если изменить угол падения луча и направить падающий луч по пути DB , то преломленный луч

- 1) пойдет по пути 1;
- 2) пойдет по пути 2;
- 3) пойдет по пути 3;
- 4) исчезнет.



29. Для точки A оптическая разность хода лучей от двух когерентных источников S_1 и S_2 равна 1,2 $\mu\text{м}$. Если длина волны в вакууме 600 нм , то в точке A будет наблюдаться...

- 1) минимум интерференции, так как разность хода равна нечетному числу полуволн;
- 2) максимум интерференции, так как разность хода равна четному числу полуволн;
- 3) минимум интерференции, так как разность хода равна четному числу полуволн;
- 4) максимум интерференции, так как разность хода равна нечетному числу полуволн.



30. Луч лазера направляется перпендикулярно плоскости дифракционной решетки. Расстояние между нулевым и первым дифракционными максимумами на удаленно экране равно 10 см. Расстояние между нулевым и вторым дифракционными максимумами примерно равно

- 1) 5 см;
- 2) 10 см;
- 3) 20 см;
- 4) 40 см.

31. Укажите формулу закона Малюса для прохождения естественного света через два поляризатора без учета поглощения света поляризаторами.

$$1) \quad I = \frac{1}{2} I_0;$$

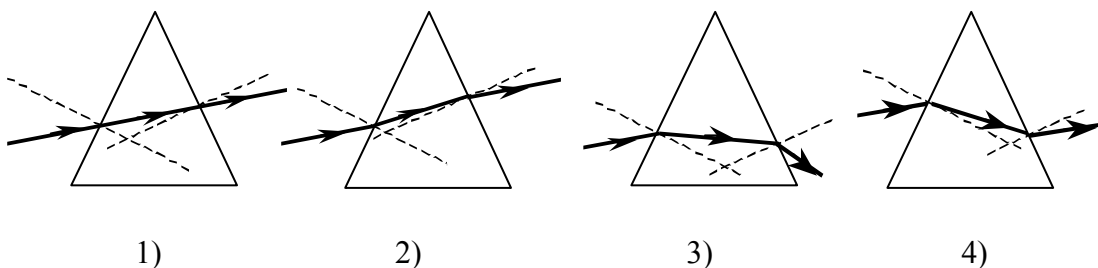
$$2) \quad I = \frac{1}{2}(1 - \eta)I_0;$$

$$3) \ I = I_0 \cos^2 \varphi;$$

$$4) I = \frac{1}{2} I_0 \cos^2 \varphi; 5) I = \frac{1}{2} I_0 (1 - \eta)^2 \cos^2 \varphi.$$

Здесь везде η – коэффициент поглощения света поляризатором.

32. На стеклянную призму падает луч монохроматического света. Укажите рисунок, на котором правильно изображен ход луча при преломлении в призме..



33. Суммарная мощность теплового излучения абсолютно черного тела возросла в 16 раз. Как изменится длина волны, на которую приходится максимум излучательной способности?

- 1) Уменьшится в 16 раз;
- 2) уменьшится в 2 раза;
- 3) не изменится;
- 4) увеличится в 2 раза.

34. Масса фотона может быть рассчитана так:

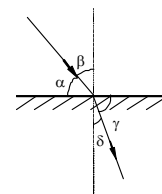
$$1) \frac{h\nu}{c^2};$$

$$2) \frac{c}{v};$$

$$3) \frac{hc}{\lambda};$$

4) $h\nu$.

34. На рисунке показаны направления падающего и преломленного лучей света на границе раздела "воздух-стекло". Показатель преломления стекла равен отношению



$$1) \frac{\sin \alpha}{\sin \beta};$$

$$2) \frac{\sin \alpha}{\sin \delta};$$

$$3) \frac{\sin \beta}{\sin \gamma};$$

$$4) \frac{\sin \beta}{\sin \delta}.$$

35. Укажите формулу, представляющую собой условие максимума при интерференции света.

$$1) \Delta = d \sin \varphi;$$

$$2) \Delta = k\lambda;$$

$$3) \Delta = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha};$$

$$4) \Delta = (2k-1)\frac{\lambda}{2}.$$

36. При каком условии дифракционные явления являются выраженными?

- 1) На препятствиях любого размера при любой форме светового пучка;
- 2) на препятствиях, размеры которых сравнимы с длиной световой волны, при любой форме светового пучка;
- 3) на препятствиях любого размера только для расходящегося светового пучка;
- 4) на препятствиях, размеры которых сравнимы с длиной световой волны, только для расходящегося светового пучка;
- 5) на препятствиях, размеры которых сравнимы с длиной световой волны, только для параллельного светового пучка

37. Укажите формулу закона Малюса для прохождения естественного света через два поляризатора с учетом поглощения света поляризаторами.

$$1) I = \frac{1}{2} I_0;$$

$$2) I = \frac{1}{2} (1 - \eta) I_0;$$

$$3) I = I_0 \cos^2 \varphi; \quad 4) I = \frac{1}{2} I_0 \cos^2 \varphi; \quad 5) I = \frac{1}{2} I_0 (1 - \eta)^2 \cos^2 \varphi.$$

Здесь везде η – коэффициент поглощения света поляризатором.

38. Что такое дисперсия света?

- 1) Разложение света на монохроматические составляющие при преломлении в призме;
- 2) изменение направления распространения света при переходе из одной среды в другую;
- 3) огибание светом препятствий;
- 4) перераспределение интенсивности света с образованием чередующихся максимумов и минимумов.

39. Согласно гипотезе Планка...

- 1) свет испускается и поглощается дискретными порциями (квантами);
- 2) свет испускается и поглощается непрерывно;
- 3) свет испускается непрерывно, а поглощается квантами;
- 4) свет испускается квантами, а поглощается непрерывно.

40. Суммарная мощность теплового излучения возросла в два раза, Как изменилась температура тела?

- 1) Уменьшилась в 2 раза;
- 2) возросла в 2^4 раз;
- 3) возросла в 2 раза;
- 4) возросла в $\sqrt[4]{2}$ раз.

41. Какие явления объясняются полным внутренним отражением?

- а) радужные разводы на лужах;
- б) разложение света в цветную полоску при прохождении стеклянной призмы;
- в) появление цветной окраски при отражении света от компакт-дисков;
- г) игра драгоценных камней;
- д) радуга;
- е) отражение света в зеркале.

$$1) а, б, в;$$

$$2) в, г, е;$$

$$3) г, д, е;$$

$$4) г, д;$$

$$5) б, в, е.$$

42. Укажите формулу, представляющую собой условие минимума при интерференции света.

$$1) \Delta = k\lambda; \quad 2) \Delta = (2k-1)\frac{\lambda}{2};$$

$$3) \Delta = 2dn \pm \frac{\lambda}{2}; \quad 4) \Delta = 2d \pm \frac{\lambda}{2}.$$

43. Укажите формулу, представляющую собой условие максимумов при дифракции Фраунгофера на одной щели.

$$1) a \sin \varphi = k\lambda; \quad 2) a \sin \varphi = (2k-1)\frac{\lambda}{2}; \quad 3) 2d = k\lambda; \quad 4) 2dn = k\lambda.$$

44. Какой свет называется поляризованным?

- 1) Распространяющийся в однородной среде;
- 2) имеющий одну длину волны;
- 3) свет, в котором колебания вектора $\vec{E}$ каким-либо образом упорядочены;
- 4) прошедший через узкую щель;
- 5) отраженный от поверхности металла.

45. В чем причина дисперсии света? Укажите неверное утверждение

- 1) В том, что показатель преломления зависит от длины волны;
- 2) в том, что скорость распространения света разных частот различна;
- 3) в том, что свет с разной длиной волны по-разному поглощается веществом;
- 4) в том, что свет с разной длиной волны распространяется в веществе с разной скоростью.

46. Абсолютно черное тело - это тело...

- 1) рассеивающее все излучение, падающее на него;
- 2) не излучающее электромагнитные волны;
- 3) абсолютно черного цвета;
- 4) поглощающее все излучение, падающее на него.

47. Укажите формулу, представляющую собой закон Стефана-Больцмана для абсолютно черного тела.

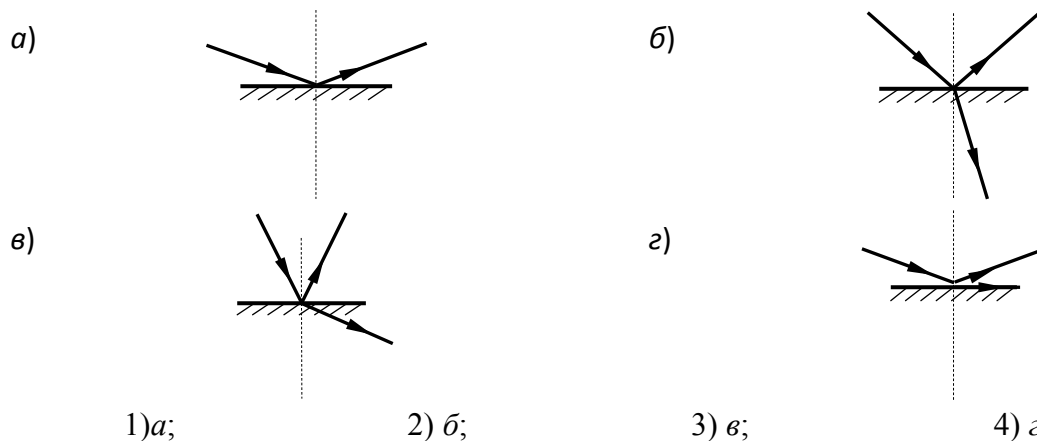
$$1) R_{\text{ж}} = \sigma T^4; \quad 2) R_{\text{ж}} = \varepsilon(T)\sigma T^4;$$

$$3) R_{\text{ж}} = \int_0^{\infty} r(\lambda, T) d\lambda; \quad 4) R_{\text{ж}} = \frac{dW}{S dt}$$

48. Укажите формулу, представляющую собой уравнение Эйнштейна для фотоэффекта. .

$$1) eU_{\text{з}} = \frac{mv_{\text{max}}^2}{2}; \quad 2) \frac{hc}{\lambda_0} = eU; \quad 3) \frac{hc}{\lambda} = A_{\text{с}} + \frac{mv_{\text{max}}^2}{2}; \quad 4) \frac{hc}{\lambda_0} = A_{\text{с}}$$

49. Укажите рисунок, на котором показан ход лучей при преломлении при переходе из менее оптически плотной среды в более плотную.



1) а;

2) б;

3) в;

4) г.

50. Укажите формулу, представляющую собой разность хода лучей при интерференции от двух источников.

1) $\Delta = 2d \pm \frac{\lambda}{2}$; 2) $\Delta = d \sin \varphi$;

3) $\Delta = 2d \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}$; 4) $\Delta = \frac{dx}{L}$.

51. Укажите формулу, представляющую собой условие минимумов при дифракции Фраунгофера на одной щели.

1) $a \sin \varphi = k\lambda$; 2) $a \sin \varphi = (2k - 1) \frac{\lambda}{2}$;

3) $2d = k\lambda$; 4) $2dn = k\lambda$.

52. Как зависит показатель преломления от длины волны в области нормальной дисперсии?

- 1) Увеличивается с увеличением длины волны;
- 2) уменьшается с увеличением длины волны;
- 3) не зависит от длины волны;
- 4) сначала уменьшается с увеличением длины волны, затем, в некотором интервале длин волн, увеличивается с увеличением длины волны.

53. Какой из законов теплового излучения относится к излучению любого тела?

- 1) закон Стефана–Больцмана;
- 2) закон Вина;
- 3) закон Кирхгофа;
- 4) формула Планка.

54. Укажите формулу, представляющую собой закон Стефана–Больцмана для нечерного тела.

1) $R_g = \sigma T^4$; 2) $R_g = \varepsilon(T) \sigma T^4$;

3) $R_g = \int_0^\infty r(\lambda, T) d\lambda$; 4) $R_g = \frac{dW}{S dt}$.

55. Укажите формулу, представляющую собой условие красной границы фотоэффекта.

1) $\varepsilon = \frac{hc}{\lambda}$; 2) $\frac{hc}{\lambda_0} = eU$; 3) $\frac{hc}{\lambda} = A_e + \frac{mv_{\max}^2}{2}$; 4) $\frac{hc}{\lambda_0} = A_e$.

56. Укажите формулу, определяющую предельный угол полного внутреннего отражения.

1) $\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = n_{21}$;

2) $\sin \alpha = \frac{1}{n}$;

3) $n_{21} = \frac{v_1}{v_2}$;

4) $\operatorname{tg} \alpha = n_{21}$.

57. Радужные пятна на поверхности воды, покрытой тонкой пленкой бензина, объясняются...

- 1) дифракцией света;
- 2) дисперсией света;
- 3) интерференцией света;
- 4) поляризацией света.

58. Укажите формулу, представляющую собой условие главных максимумов при дифракции Фраунгофера на дифракционной решетке.

1) $2dn = k\lambda$;

2) $a \sin \varphi = (2k - 1)\frac{\lambda}{2}$;

3) $2d = k\lambda$;

4) $d \sin \varphi = k\lambda$.

59. Укажите формулу, представляющую собой закон Бюстера.

1) $\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = n_{21}$;

2) $\operatorname{tg} \alpha = n_{21}$;

3) $\sin \alpha = \frac{1}{n}$;

4) $n = \frac{v}{c}$.

60. Укажите формулу, представляющую закон связь между энергетической светимостью и спектральной плотностью энергетической светимости.

1) $R_{\vartheta} = \sigma T^4$ %; 2) $R_{\vartheta} = \varepsilon(T)\sigma T^4$;

3) $R_{\vartheta} = \int_0^{\infty} r(\lambda, T) d\lambda$;

4) $R_{\vartheta} = \frac{dW}{S dt}$.

61. Укажите формулу, представляющую собой условие прекращения фототока при фотоэффекте..

1) $h\nu = A_{\vartheta} + eU_{\vartheta}$; 2) $\frac{hc}{\lambda_0} = eU$;

3) $eU_{\vartheta} = \frac{mv_{\max}^2}{2}$; 4) $\frac{hc}{\lambda_0} = A_{\vartheta}$.

62. Чему равен импульс, переданный фотоном веществу при его поглощении и при его отражении при нормальном падении на поверхность?

1) в обоих случаях $\frac{h}{\lambda}$;

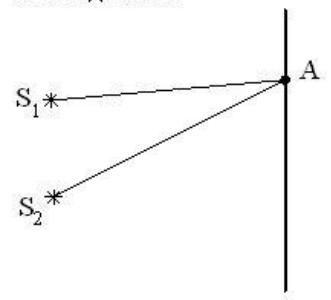
- 2) в первом случае $\frac{h}{\lambda}$, во втором $\frac{2h}{\lambda}$;
- 3) в обоих случаях $\frac{2h}{\lambda}$;
- 4) в первом случае $\frac{2h}{\lambda}$, во втором $\frac{h}{\lambda}$.

63. Луч света падает под углом 60° на границу раздела воздух-жидкость. Отраженный и преломленный лучи перпендикулярны друг другу. Найти показатель преломления жидкости.

- 1) $\sqrt{3}$; 2) $1/\sqrt{3}$; 3) $\sqrt{2}$; 4) $1/\sqrt{2}$.

64. Если S_1 и S_2 — источники когерентных волн, а L_1 и L_2 — расстояния т.А до источников, то в т. А наблюдается максимум интерференции в воздухе при условии...

- 1) $L_2 - L_1 = (2k - 1)\frac{\lambda}{2}$;
- 2) $L_2 - L_1 = (2k - 1)\frac{\lambda}{4}$;
- 3) $L_2 - L_1 = 2k\frac{\lambda}{2}$;
- 4) $L_2 - L_1 = k\frac{\lambda}{2}$.

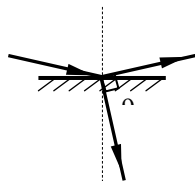


65. Если закрыть n открытых зон Френеля, а открыть только первую, то амплитудное значение вектора напряженности электрического поля...

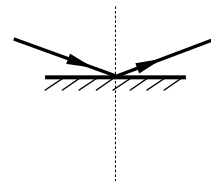
- 1) увеличится в 2 раза;
- 2) уменьшится в 2 раза;
- 3) увеличится в n раз;
- 4) не изменится.

66. Укажите рисунок, на котором правильно показан ход лучей при падении под углом Брюстера.

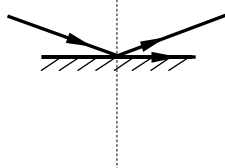
а)



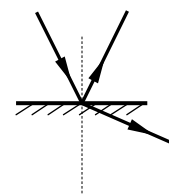
б)



в)



г)



1) а;

2) б;

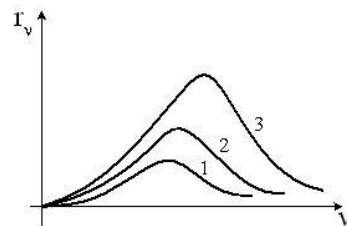
3) в;

4) г.

67. Какое утверждение НЕ является характерной особенностью теплового излучения?

- 1) Характеристики излучения зависят от температуры излучающего тела;
- 2) для реальных тел характеристики излучения зависят от состояния поверхности излучающего тела;
- 3) спектр излучения является сплошным;
- 4) распределение энергии по спектру не зависит от температуры;
- 5) излучение имеет равновесный характер.

68. На рисунке представлены графики зависимости спектральной плотности энергетической светимости абсолютно черного тела от частоты при различных температурах. Наибольшей температуре соответствует график.



- 1) 1;
- 2) 2;
- 3) 3;
- 4) все графики соответствуют одинаковой температуре

69. Что такое фотоэффект?

- 1) Испускание электронов веществом при нагревании;
- 2) электризация вещества при трении;
- 3) ионизация газа под действием ионизирующего излучения;
- 4) испускание электронов веществом под действием света.

70. Укажите формулу, представляющую собой условие коротковолновой границы сплошного рентгеновского спектра.

$$1) h\nu = A_{\epsilon} + eU_3; \quad 2) \frac{hc}{\lambda_0} = eU;$$

$$3) \frac{hc}{\lambda} = A_{\epsilon} + \frac{mv_{\max}^2}{2}; \quad 4) \frac{hc}{\lambda_0} = A_{\epsilon}.$$

71. Укажите формулу, представляющую собой разность хода лучей при интерференции в тонких пленках в веществе с показателем преломления n в проходящем свете при нормальном падении.

$$1) \Delta = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}; \quad 2) \Delta = 2dn \pm \frac{\lambda}{2};$$

$$3) \Delta = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} \pm \frac{\lambda}{2}; \quad 4) \Delta = 2d \pm \frac{\lambda}{2};$$

$$5) \Delta = 2d; \quad 6) \Delta = 2dn.$$

72. Дифракция Фраунгофера – это

- 1) дифракция в параллельных световых пучках;
- 2) дифракция на двух щелях;
- 3) дифракция в расходящихся световых пучках;
- 4) дифракция на решетке.

73. На идеальный поляризатор падает естественный свет интенсивности J_0 от обычного источника. При вращении поляризатора вокруг направления распространения луча интенсивность света прошедшего поляризатор

1) меняется от $J_{\min}$ до $J_{\max}$;

2) не меняется и равна J_0 ;

3) меняется от J_0 до $J_{\max}$;

4) не меняется и равна $(1/2) \cdot J_0$.

74. Явление испускания электронов веществом под действием электромагнитного излучения называется ...

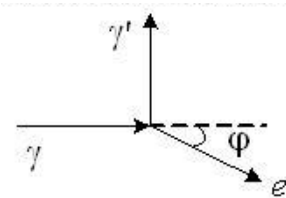
1) ударной ионизацией;

2) фотосинтезом;

3) фотоэффектом;

4) электризацией.

75. На рисунке показаны направления падающего фотона (γ), рассеянного фотона (γ') и электрона отдачи (e). Угол рассеяния 90° , направление движения электрона отдачи составляет с направлением падающего фотона угол $\varphi = 30^\circ$. Если импульс падающего фотона p_γ , то импульс рассеянного фотона равен...



1) $1,5\sqrt{3}p_\gamma$;

2) $p_\gamma/\sqrt{3}$;

3) $0,5p_\gamma$;

4) $\sqrt{3}p_\gamma$.

76. Укажите формулу, не являющуюся законом преломления света.

1) $\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = n_{21}$;

2) $\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = \frac{n_2}{n_1}$;

3) $\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = n$;

4) $n = \frac{v}{c}$.

77. Укажите формулу, представляющую собой разность хода лучей при интерференции в тонких пленках в веществе с показателем преломления n в отраженном свете при нормальном падении.

1) $\Delta = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}$;

2) $\Delta = 2dn \pm \frac{\lambda}{2}$;

3) $\Delta = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} \pm \frac{\lambda}{2}$.

4) $\Delta = 2d \pm \frac{\lambda}{2}$;

5) $\Delta = 2d$;

6) $\Delta = 2dn$.

78. По мере нагревания твердого тела цвет излучения меняется в следующей последовательности:

1) красный, желтый, синий;

2) синий, красный, желтый

3) синий, желтый, красный;

4) фиолетовый, зеленый, красный.

79. Свет, падающий на металл, вызывает эмиссию электронов из металла. Если интенсивность света уменьшается, а его частота при этом остаётся неизменной, то...

1) количество выбитых электронов остаётся неизменным, а их кинетическая энергия увеличивается;

2) количество выбитых электронов уменьшается, а их кинетическая энергия остаётся неизменной;

- 3) количество выбитых электронов увеличивается, а их кинетическая энергия уменьшается;
 4) количество выбитых электронов и их кинетическая энергия увеличиваются;
 5) количество выбитых электронов остаётся неизменным, а их кинетическая энергия уменьшается.

80. Укажите формулу для давления света при частично отражающей поверхности.

1) $P = \frac{E_e}{c}(1 + \rho)$; 2) $P = \frac{E_e}{c}$; 3) $P = \frac{2E_e}{c}$; 4) $P = \frac{E_e}{c}(k + 2\rho)$.

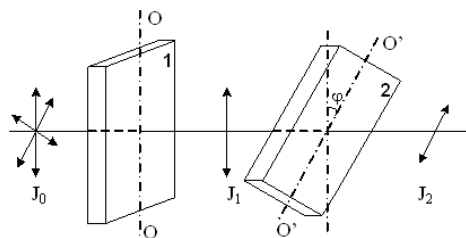
81. Укажите формулу, представляющую собой разность хода лучей при интерференции в тонкой воздушной прослойке в проходящем свете при нормальном падении.

1) $\Delta = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}$; 2) $\Delta = 2dn \pm \frac{\lambda}{2}$;
 3) $\Delta = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} \pm \frac{\lambda}{2}$. 4) $\Delta = 2d \pm \frac{\lambda}{2}$;
 5) $\Delta = 2d$; 6) $\Delta = 2dn$.

82. На экране от круглого отверстия, освещенного небольшой яркой лампочкой, возникает круглое светлое пятно. Что будет происходить при постепенном уменьшении размера отверстия?

- 1) Размер светлого пятна будет возрастать;
 2) Размер светлого пятна будет убывать;
 3) Размер пятна будет уменьшаться, затем возникнет картина чередующихся светлых и темных колец;
 4) Размер пятна будет уменьшаться, а при некотором критическом размере экран резко станет темным.

83. На пути естественного света помещены две пластинки турмалина. После прохождения пластинки 1 свет полностью поляризован. Угол между направлениями OO и $O'O'$ равен



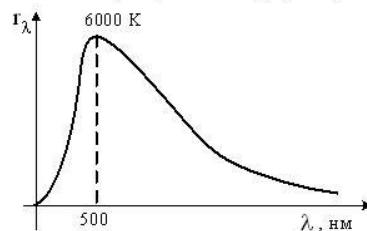
45° , тогда отношение интенсивностей света J_1/J_2 равно...

- 1) 1;
 2) 2;
 3) 4;
 4) 0.

84. Какого цвета мы видим абсолютно черное тело?

- 1) Черного; 2) красного; 3) фиолетового;
 4) Любого цвета в зависимости от температуры этого тела.

85. На рисунке показана кривая зависимости спектральной плотности энергетической светимости абсолютно черного тела от длины волны при $T = 6000\text{ K}$. Если температуру тела уменьшить в 4 раза, то длина волны, соответствующая максимуму излучения абсолютно черного тела, ...

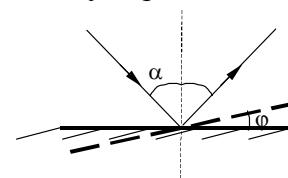


- 1) увеличится в 4 раза;
- 2) уменьшится в 2 раза;
- 3) увеличится в 2 раза;
- 4) уменьшится в 4 раза.

86. Эффект Комптона наблюдается

- 1) во всех спектральных областях;
- 2) в рентгеновской области;
- 3) в видимой области;
- 4) в инфракрасной области.

87. Свет падает на плоское зеркало под углом α . Каким станет угол между отраженным и падающим лучом, если зеркало повернуть на угол φ относительно оси, проходящей через точку падения луча и перпендикулярной плоскости падения?



- 1) $\alpha - \varphi$;
- 2) $2(\alpha - \varphi)$;
- 3) $\alpha + \varphi$;
- 4) $2(\alpha + \varphi)$.

88. Радужные пятна на поверхности воды, покрытой тонкой пленкой бензина, объясняются...

- 1) дифракцией света;
- 2) дисперсией света;
- 3) интерференцией света;
- 4) поляризацией света.

89. Найти наибольший порядок спектра для желтой линии натрия ($\lambda = 589\text{ nm}$), если период дифракционной решетки равен 2 мкм .

- 1) 1;
- 2) 2;
- 3) 3;
- 4) 4.

90. Свет, отраженный от поверхности воды, является частично поляризованным. Что будет наблюдаться, если смотреть на поверхность пруда через поляризатор и при этом его поворачивать?

- 1) Интенсивность проходящего через поляризатор света уменьшается в два раза и не будет изменяться при вращении поляризатора.
- 2) Интенсивность проходящего через поляризатор света будет равна интенсивности падающего и не будет изменяться при вращении поляризатора.
- 3) Интенсивность проходящего через поляризатор света при вращении поляризатора будет изменяться от некоторого максимального до минимального.
- 4) Интенсивность проходящего через поляризатор света будет равна нулю при любом положении поляризатора.

90. Радуга на небе объясняется...

- 1) дифракцией света;
- 2) поляризацией света;
- 3) интерференцией света;
- 4) дисперсией света.

91. В чем заключается ультрафиолетовая катастрофа.

- 1) В катастрофическом увеличении озоновых дыр в атмосфере.
- 2) В неспособности классической физики объяснить распределение энергии по спектру теплового излучения.
- 3) В резком увеличении излучения Солнца в ультрафиолетовой области.
- 4) В последствиях злоупотребления солярием.

92. От чего зависит максимальная кинетическая энергия фотоэлектронов, выбиваемых из металла при фотоэффекте?

- А) От частоты падающего света.
- Б) От интенсивности падающего света.
- В) От работы выхода электронов из металла.

Правильными являются ответы:

- 1) Б; 2) А и Б; 3) А и В; 4) А, Б и В.

93. Эффект Комптона – это

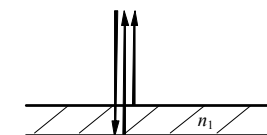
- 1) испускание электронов с поверхности металла под действием рентгеновского излучения;
- 2) увеличение длины волны рентгеновского излучения при рассеянии веществом;
- 3) образование дифракционной картины при рассеянии рентгеновского излучения веществом;
- 4) испускание рентгеновского излучения веществом под действием падающих на него электронов.

94. При освещении тонкой пленки параллельными лучами белого света наблюдается радужная окраска пленки. Чем это можно объяснить? Поясните ответ.

- 1) Пленка неоднородна по составу.
- 2) Пленка в разных местах имеет разную толщину.
- 3) Пленка в разных местах неодинаково отражает свет.
- 4) В пленку в разных местах добавлены различные красители.

95. На поверхность стекла нанесен тонкий слой диэлектрика. Укажите формулу для разности хода отраженных лучей, если $n_1 < n_2$.

- 1) $\Delta = 2dn_2$; 2) $\Delta = 2d \pm \frac{\lambda}{2}$; 3) $\Delta = 2dn_2 \pm \frac{\lambda}{2}$;



- 4) $\Delta = 2dn_1$; 5) $\Delta = 2dn_1 \pm \frac{\lambda}{2}$

96. Как зависит число дифракционных максимумов, создаваемых дифракционной решеткой, от числа щелей, приходящихся на единицу длины?

- 1) Не зависит от числа щелей;
- 2) увеличивается с увеличением числа щелей;
- 3) уменьшается с увеличением числа щелей;
- 4) может как увеличиваться, так и уменьшаться.

97. При каких условиях происходит фотоэффект?

- 1) При любых интенсивностях и частотах света;
- 2) при любых интенсивностях и при частотах, превышающих некоторое минимальное значение;

- 3) При любых частотах и при интенсивностях, превышающих некоторое минимальное значение;
 4) при условии, что частота и интенсивность превышают некоторое минимальное значение.

98. Укажите формулу для изменения длины волны рентгеновского излучения при комптоновском рассеянии.

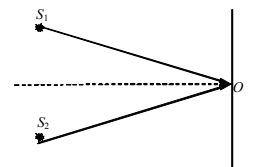
$$\begin{array}{ll} 1) \lambda = \frac{h}{p_\gamma}; & 2) \lambda = \frac{hc}{\nu}; \\ 3) \Delta\lambda = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\theta); & 4) \lambda = \frac{\nu}{c}. \end{array}$$

99. При каких условиях возможно наблюдение полного внутреннего отражения?

- 1) при переходе света из оптически менее плотной среды в более плотную при любых углах падения;
- 2) при переходе света из оптически более плотной среды в менее плотную при любых углах падения;
- 3) при переходе света из оптически более плотной среды в менее плотную, если угол падения больше предельного;
- 4) при переходе света из оптически более плотной среды в менее плотную, если угол падения меньше предельного;
- 5) при отражении от металлов.

100. Если S_1 и S_2 – источники когерентных волн, то разность фаз колебаний, возбуждаемых этими волнами в т. О (центральный максимум), равна...

- 1) $\pi/2$;
- 2) 2π ;
- 3) 0;
- 4) π



101. Укажите формулу, представляющую собой условие минимумов при дифракции Фраунгофера на одной щели.

$$\begin{array}{ll} 1) a \sin \varphi = k\lambda; & 2) a \sin \varphi = (2k - 1)\frac{\lambda}{2}; \\ 3) 2d = k\lambda; & 4) 2dn = k\lambda. \end{array}$$

102. Что принимается за направление колебаний в световой волне?

- 1) Направление колебаний вектора напряженности электрического поля $\vec{E}$.
- 2) Направление колебаний вектора напряженности магнитного поля $\vec{H}$.
- 3) Направление распространения световой волны.
- 4) Направление, составляющее угол 45° к направлениям колебаний векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$.

103. Какая из формулировок не соответствует определению теплового излучения?

- 1) Электромагнитное излучение, находящееся в равновесии со стенками замкнутой полости, в которой оно заключено.
- 2) Свечение тела, потери энергии которого на излучение, полностью компенсируется подводом энергии за счет нагревания.
- 3) Электромагнитное излучение тела, температура которого поддерживается постоянной.
- 4) Электромагнитное излучение тела, появляющееся в результате хаотического движения частиц, из которых оно состоит.

спектральная плотность энергетической светимости абсолютно черного тела.

104. При фотоэффекте задерживающая разность потенциалов НЕ зависит от

- А) Частоты падающего света.
- Б) Интенсивности падающего света.
- В) Угла падения света.

Какие утверждения правильны?

- 1) А и Б;
- 2) Б и В;
- 3) А и В;
- 4) А, Б и В.

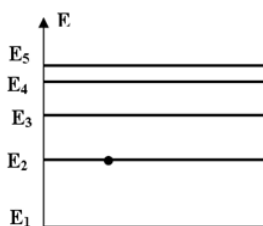
Тема 6: Квантовая физика и физика атома

1. Несостоятельность планетарной модели атомов по Резерфорду заключается в следующем:

- А) Силы притяжения между электроном и ядром настолько велики, что электроны должны упасть на ядро.
- Б) Спектр излучения атомов должен быть сплошным, а не линейчатым.

- 1) только А;
- 2) только Б;
- 3) А и Б;
- 4) ни А, ни Б.

2. На рисунке приведена диаграмма энергетических уровней некоторого атома. Электрон находится на втором стационарном уровне. Сколько спектральных линий могут наблюдаться в спектре поглощения этого атома?



- 1) 1;
- 2) 2;
- 3) 3;
- 4) 4;
- 5) 5.

3. В таблице приведены значения энергии для первых четырех энергетических уровней атома водорода. Излучение с наибольшей длиной волны, наблюдаемое как отдельная линия в спектре испускания водорода, может быть получено при переходе между энергетическими уровнями

- 1) с $n = 4$ на $n = 1$
- 2) с $n = 1$ на $n = 4$
- 3) с $n = 4$ на $n = 3$
- 4) с $n = 3$ на $n = 4$

n	Энергия, 10^{-19} Дж
1	-21,8
2	-5,3
3	-2,4
4	-1,3

4. Согласно постулатам Бора, частота электромагнитного излучения, возникающего при переходе атома из возбужденного состояния с энергией E_1 в основное состояние с энергией E_0 , вычисляется по формуле (c — скорость света, h — постоянная Планка)

$$1) \frac{E_1 + E_0}{h} \quad 2) \frac{E_1 - E_0}{h} \quad 3) \frac{ch}{E_1 - E_0} \quad 4) \frac{ch}{E_0 + E_1}$$

5. Групповая скорость длины волны де Бройля...

- 1) больше скорости света в вакууме;
- 2) равна скорости частиц;
- 3) зависит от квадрата длины волны;
- 4) равна скорости света в вакууме;
- 5) не имеет смысла как физическая величина.

6. Какие утверждения справедливы в случае соотношения неопределенностей для энергии и времени?

- А.) Частота излученного фотона имеет неопределенность $\Delta\nu = \Delta E/h$, т.е. линии спектра характеризуются частотой $\nu \pm \Delta E/h$ и должны быть размыты;
 - В.) Невозможно с бесконечной точностью знать энергию частицы и время ее пребывания в этом энергетическом состоянии
 - С.) Если частица существует в каком то состоянии бесконечно долго, то энергия этого состояния известна точно;
 - Д.) Зная ширину спектральной линии, можно оценить порядок времени пребывания атома в возбужденном состоянии.
- 1) А,В, С. 2) В, С, Д. 3) В,Д. 4) А,В,С,Д.

7. Стационарным уравнением Шредингера для линейного гармонического осциллятора является уравнение ...

$$1) \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E \psi = 0 \quad 2) \Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2} E \psi = 0$$

$$3) \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E - \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} \right) \psi = 0 \quad 4) \Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E + \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) \psi = 0$$

8. Какие утверждения справедливы при описании состояния электрона?

- А) Если орбитальное квантовое число ($l = 0$), то состояние электрона называется s - состоянием; ($l = 1$) - p – состоянием; ($l = 2$) - d – состоянием.
 - В) Значение главного квантового числа n указывается перед условным обозначением орбитального квантового числа и определяет энергетические уровни электрона в атоме: 3s ($n = 3, l = 0$).
 - С) Орбитальное квантовое число (l) определяет момент импульса электрона в атоме: ($l = 0, 1, 2, \dots$).
 - Д) Квантовые числа n и l характеризуют ориентацию электронного облака в пространстве.
- 1) А,В,Д; 2) А,В,С,Д; 3) В,С; 4) А,В,С.

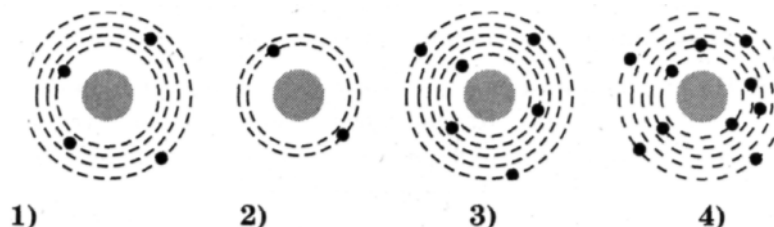
8. Фазовая скорость фотона равна...

- 1) скорости света в вакууме c ; 2) c^2 / v ; 3) v ; 4) $d\omega / dk$.

9. Частица в потенциальной яме шириной l находится в низшем возбужденном состоянии. Определить вероятность нахождения частицы в интервале $l/4$, равноудаленном от стенок ямы.

- 1) 0,091; 2) 0,027; 3) 0,5; 4) 0,91.

10. На рисунке изображены схемы четырех атомов. Черными точками обозначены электроны. Атому ${}^6\text{C}^{12}$ соответствует схема



11. Атом находится в состоянии с энергией $E_1 = -3$ эВ. Минимальная энергия, необходимая для отрыва электрона от атома, равна

- 1) 0 2) E_1 3) $-E_1$ 4) $-0,5E_1$

12. Длина волны де Бройля частицы уменьшилась вдвое. Скорость этой частицы ...

- 1) увеличилась в 4 раза;
2) уменьшилась вдвое;
3) уменьшилась в 4 раза;
4) увеличилась вдвое;
5) не изменилась.

13. Длина волны де Бройля для электрона с кинетической энергией 1 кэВ равна...

- 1) 0,019 нм; 2) 0,039 нм; 3) 1 нм; 4) 39 нм.

14. Кинетическая энергия электрона в атоме водорода составляет величину порядка 10 эВ. Используя соотношение неопределенностей оцените минимальные размеры атома.

- 1) $1,24 \cdot 10^{-10}$ м; 2) $4,24 \cdot 10^{-10}$ м; 3) $0,2 \cdot 10^{-10}$ м; 4) $3,22 \cdot 10^{-10}$ м

15. Стационарным уравнением Шредингера для водородоподобного атома является уравнение ...

1) $\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E \psi = 0$ 2) $\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2} E \psi = 0$

3) $\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E - \frac{m\alpha_0^2 x^2}{2} \right) \psi = 0$ 4) $\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E + \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) \psi = 0$

16. При движении свободной частицы справедливы следующие утверждения...

- а) энергия может принимать любые значения, т.е. энергетический спектр свободной частицы непрерывный;
б) энергия может принимать только дискретные значения и квантуется главным квантовым числом n ;
в) плотность вероятности обнаружения частицы в данной точке пространства

$|\Psi|^2$ не зависит от времени, т.е. все положения свободной частицы в пространстве равновероятны;

г) плотность вероятности обнаружения частицы в данной точке пространства определяется выражением $|\Psi_n(x)|^2 = \Psi_n(x) \Psi_n^*(x)$ и зависит от x и n .

- 1) а,б,в,г; 2) а,б,в; 3) а,в; 4) б,г.

17. Величина момента импульса L орбитального движения электрона, находящегося в атоме водорода в s -состоянии, равна

- 1) $1,49 \cdot 10^{-34}$ Дж·с; 2) 0; 3) $2,08 \cdot 10^{-34}$ Дж·с; 4) $2,58 \cdot 10^{-34}$ Дж·с.

18. Для какого из перечисленных состояний в изолированном атоме водорода кратность вырождения наибольшая?

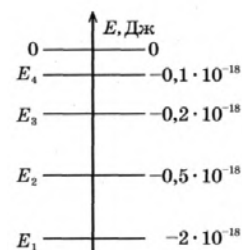
- 1) $1s$; 2) $3s$; 3) $3p$; 4) $4d$.

19. Длина волны де Бройля для электрона, движущегося по первой Боровской орбите в атоме водорода, равна...

- 1) $3,4 \cdot 10^{-10}$ м; 2) $2,13 \cdot 10^{-10}$ м; 3) $1,67 \cdot 10^{-10}$ м; 4) $8,8 \cdot 10^{-10}$ м.

20. На рисунке изображена схема возможных значений энергии атомов газа. Какие фотоны могут поглощать те атомы, которые находятся в состоянии с энергией E_3 ?

- 1) Фотоны с любой энергией, большей $0,2 \times 10^{-18}$ Дж
 2) Фотоны с любой энергией в пределах от 0 до $0,2 \times 10^{-18}$ Дж
 3) Фотоны с энергией $0,1 \times 10^{-18}$ Дж и $0,2 \times 10^{-18}$ Дж
 4) Фотоны с энергией $0,1 \times 10^{-18}$ Дж, $0,2 \times 10^{-18}$ Дж и любой, большей $0,2 \times 10^{-18}$ Дж



21. Энергия испущенного фотона при переходе с четвертого уровня атома водорода в серии Бальмера равна...

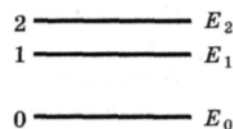
- 1) -13, эВ; 2) 10,2 эВ; 3) -10,2 эВ; 4) 3,4 эВ.

22. Атом водорода поглотил квант с энергией 15 эВ. Энергия электрона вне атома равна...

- 1) 1,4 эВ; 2) -1,4 эВ; 3) 2,4 эВ; 4) 13,6 эВ.

23. Сколько фотонов различной частоты могут испускать атомы водорода, находившиеся во втором возбужденном состоянии E_2 , согласно постулатам Бора?

- 1) 1 2) 2 3) 3 4) 4



24. Стационарным уравнением Шредингера для частицы в потенциальной яме с бесконечно высокими стенками является уравнение ...

$$\begin{array}{ll}
 1) \quad \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E \psi = 0 & 2) \quad \Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2} E \psi = 0 \\
 3) \quad \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E - \frac{m\alpha_0^2 x^2}{2} \right) \psi = 0 & 4) \quad \Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E + \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) \psi = 0
 \end{array}$$

25. Частица в потенциальной яме шириной l находится в возбужденном состоянии ($n = 2$). Плотность вероятности нахождения частицы в центре ямы равна...

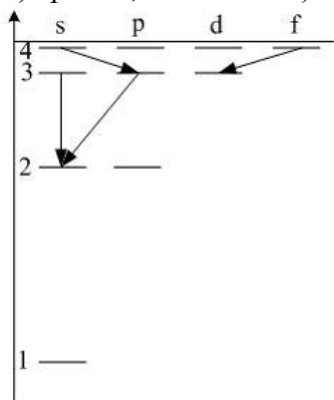
- 1) 0,5; 2) 0,25; 3) 0,5; 4) 0.

26. Вычислить величину момента импульса L орбитального движения электрона, находящегося в атоме водорода в p -состоянии.

- 1) $1,49 \cdot 10^{-34}$ Дж·с; 2) 0; 3) $2,49 \cdot 10^{-34}$ Дж·с 4) $1,58 \cdot 10^{-34}$ Дж·с

27. Закон сохранения момента импульса накладывает ограничения на возможные переходы электрона в атоме с одного уровня на другой (правило отбора). В энергетическом спектре атома водорода (рис.) запрещенным переходом является...

- 1) $3p - 2s$; 2) $3s - 2s$; 3) $4s - 3p$; 4) $4f - 3d$.



28. Кратность вырождения для электрона, находящегося в возбужденном состоянии ($n = 3$) равна...

- 1) 3; 2) 4; 3) 6; 4) 9.

29. Сколько квантов различной энергии могут испускать атомы водорода, если их электроны находятся на третьей орбите?

- 1) кванты двух различных энергий;
 2) кванты трех различных энергий;
 3) кванты четырех различных энергий;
 4) кванты пяти различных энергий;

30. Средняя кинетическая энергия электрона в невозбужденном атоме водорода равна 13.6 эВ. Исходя из соотношения неопределенностей наименьшая неточность, с которой можно вычислить координату электрона, равна...

- 1) $\Delta x \geq 10^{-10}$ м; 2) $\Delta x \geq 10^{-9}$ м; 3) $\Delta x \geq 10^{-11}$ м; 4) $\Delta x \geq 10^{-8}$ м.

31. В опыте Резерфорда большая часть α -частиц свободно проходит сквозь фольгу, практически не отклоняясь от прямолинейных траекторий, потому что

- 1) ядро атома имеет положительный заряд
- 2) электроны имеют отрицательный заряд
- 3) ядро атома имеет малые (по сравнению с атомом) размеры
- 4) α -частицы имеют большую (по сравнению с ядрами атомов) массу

32. Энергия испущенного фотона при переходе с четвертого уровня в атоме водорода в серии Бальмера равна...

- 1) 10,2 эВ;
- 2) -10,2 эВ;
- 3) 3,4 эВ;
- 4) -3,4эВ.

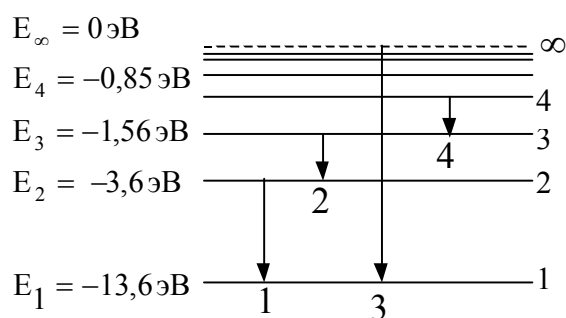
33. В атоме водорода уровню энергии номера n отвечает без учета спина) ...

- 1) $n + 1$ различных квантовых состояний;
- 2) n^2 различных квантовых состояний;
- 3) $2 n^2$ различных квантовых состояний;
- 4) $(n + 1)^2$ различных квантовых состояний.

34. Частица в потенциальном ящике шириной L находится в возбужденном состоянии ($n = 2$). В каких точках интервала ($0 < x < L$) плотность вероятности $|\psi(x)|^2$ нахождения частицы минимальна?

- 1) $x = L/2$;
- 2) $x = L/3$;
- 3) $x = L/4$;
- 4) $x = 3L/4$.

35. На рисунке показана схема энергетических уровней атома водорода и некоторые возможные переходы электрона из одного состояния в другое. Укажите, какому переходу соответствует спектральная линия, лежащая в видимой области спектра.



- 1) 1
- 2) 2
- 3) 3
- 4) 4

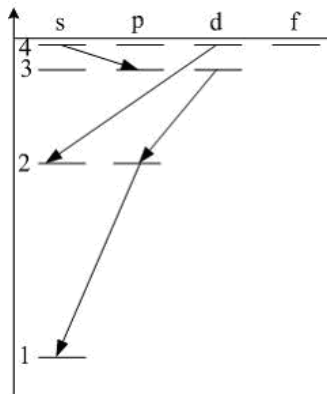
36. Электрон и α -частица имеют одинаковые импульсы. Длина волны де Бройля какой частицы больше?

- 1) электрона, т.к. его электрический заряд меньше;
- 2) длины волн одинаковы;
- 3) α -частицы, т.к. ее масса больше;
- 4) α -частица не обладает волновыми свойствами.

37. Какое из приведенных ниже утверждений является серьезным доводом против планетарной модели атомов по Резерфорду?

- 1) $\frac{3}{8}$; 2) $\frac{5}{8}$; 3) $\frac{1}{4}$; 4) $\frac{1}{2}$.

42. Закон сохранения момента импульса накладывает ограничения на возможные переходы электрона в атоме с одного уровня на другой (правило отбора) . В энергетическом спектре атома водорода (рис.) разрешенными переходами являются...



- 1) $4s - 3p$; $3d - 2p$; $2p - 1s$;
- 2) $4d - 2s$;
- 3) $4s - 3p$; $3d - 2p$.
- 4) $4s - 3p$; $3d - 2p$; $2p - 1s$; $4d - 2s$;

43. Установите соответствие квантовых чисел, определяющих волновую функцию электрона в атоме водорода их физическому смыслу.

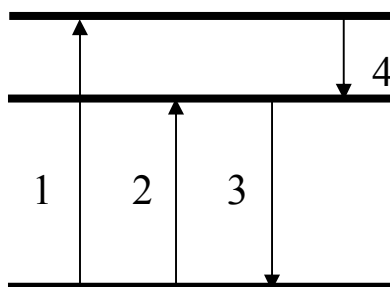
1) n	А. Определяет ориентацию электронного облака в пространстве.
2) l	Б. Определяет форму электронного облака
3) m	В. Определяет размеры электронного облака
	Г. Собственный механический момент электрона

- 1) 1 – Г, 2-Б, 3 – А; 2) 1 –А, 2 – Б, 3 – В; 3) 1- В, 2 –Б, 3 –А; 4) 1 –В, 2 – А, 3 – Г.

44. Величина момента импульса L орбитального движения электрона, находящегося в атоме водорода в p -состоянии, равна...

- 1) $1,49 \cdot 10^{-34}$ Дж·с;
- 2) $2,58 \cdot 10^{-34}$ Дж·с;
- 3) $1,054 \cdot 10^{-34}$ Дж·с;
- 4) $2,108 \cdot 10^{-34}$ Дж·с.

45. На рисунке представлена диаграмма энергетических уровней атома. Какой цифрой обозначен переход, соответствующий поглощению атомом фотона самой большой частоты?



- 1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4.

46. Атом водорода находился в нормальном состоянии. При первом столкновении с другим атомом, он перешел в возбужденное состояние, а при следующем столкновении был ионизирован. Энергия системы «ядро – электрон» имела

- 1) максимальное значение в нормальном состоянии атома;
- 2) максимальное значение в возбужденном состоянии атома;
- 3) максимальное значение в ионизированном состоянии атома;
- 4) одинаковое значение во всех трех состояниях;

47. Длина волны де Бройля для электрона больше, чем для α -частицы. Импульс какой частицы больше?

- 1) электрона
- 2) α -частицы
- 3) импульсы одинаковы
- 4) величина импульса не связана с длиной волны

48. Определить длину волны, соответствующую границе серии Бальмера для водорода. Постоянная Ридберга равна $1,097 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}$.

- 1) 500 нм;
- 2) 364,7 нм;
- 3) 293,4 нм;
- 4) 1290 нм.

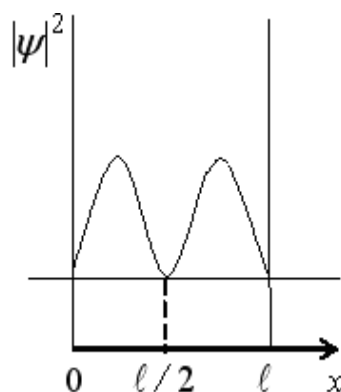
49. Воспользовавшись соотношением неопределенностей оцените размытость энергетического уровня для возбужденного состояния, время жизни в котором составляет 10^{-8} с .

- 1) 414 нэВ;
- 2) 21,8 эВ;
- 3) 912 нэВ;
- 4) 912 мкэВ.

50. Стационарным уравнением Шредингера для линейного гармонического осциллятора является уравнение ...

- 1) $\frac{d^2 \psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E \psi = 0$
- 2) $\Delta \psi + \frac{2m}{\hbar^2} E \psi = 0$
- 3) $\frac{d^2 \psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E - \frac{m \omega_0^2 x^2}{2} \right) \psi = 0$
- 4) $\Delta \psi + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E + \frac{Ze^2}{4\pi \epsilon_0 r} \right) \psi = 0$

51. На рисунке изображена плотность вероятности обнаружения микрочастицы на различных расстояниях от «стенок» ямы.



Вероятность ее обнаружения на участке

$\ell/4 < x < 3\ell/4$ равна...

- 1) $\frac{1}{2}$; 2) 0; 3) $\frac{3}{4}$; 4) $\frac{1}{4}$.

52. Квадрат модуля волновой функции ψ , входящей в уравнение Шредингера, равен...

- 1) импульсу частицы в соответствующем месте пространства;
- 2) энергии частицы в соответствующем месте пространства;
- 3) плотности вероятности обнаружения частицы в соответствующем месте пространства;
- 5) квадрату энергии частицы в соответствующем месте пространства.

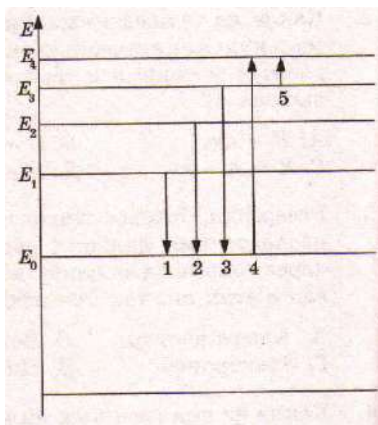
53. Частица в потенциальной яме находится в основном состоянии. Какова вероятность обнаружить частицу в крайней трети ямы?

- 1) $\frac{1}{3}$; 2) 0,195; 3) $\frac{2}{3}$; 4) 0,279.

54. Используя принцип Паули, укажите какое максимальное число электронов в атоме могут иметь одинаковые следующие квантовые числа: n, l, m

- 1) 2; 2) 1; 3) 4; 4) 6.

55. На рисунке представлена диаграмма энергетических уровней атома. Какой стрелкой обозначен переход с излучением фотона наименьшей частоты?



- 1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4; 5) 5.

56. Электрон выбит из атома водорода, находящегося в основном состоянии, фотоном, энергия которого 17,7 эВ. Скорость электрона за пределами атома равна...

- 1) 1,2 Мм/с; 2) 0,6 Мм/с; 3) 3,4 Мм/с; 4) 0.

57. Используя теорию Бора для атома водорода, определите скорость движения электрона по первой боровской орбите.

- 1) 2,56 Мм/с; 2) 1,29 Мм/с; 3) 2,19 Мм/с; 4) 60 Мм/с.

58. Электрон в атоме водорода перешел из основного состояния в возбужденное с $n = 3$. Радиус его боровской орбиты ...

- 1) увеличился в 3 раза;
- 2) уменьшился в 3 раза;
- 3) увеличился в 9 раз;
- 4) уменьшился в 9 раз;
- 5) увеличился в 2 раза.

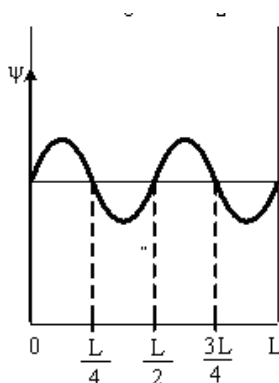
59. Электрон и протон движутся с одинаковыми скоростями. У какой из этих частиц большая длина волны де Бройля?

- 1) у электрона
- 2) у протона
- 3) длины волн этих частиц одинаковы
- 4) частицы нельзя характеризовать длиной волны

60. Орбитальное квантовое число l определяет...

- 1) проекцию орбитального момента импульса электрона на заданное направление;
- 2) момент импульса электрона в атоме;
- 3) энергию стационарного состояния электрона в атоме;
- 4) собственный механический момент электрона в атоме.

61. Если ψ - функция имеет вид, указанный на рисунке,



то вероятность обнаружить электрон на участке $\frac{L}{4} < x < \frac{3L}{4}$ равна...

- 1) $3/8$;
- 2) $5/8$;
- 3) $1/4$;
- 4) $1/2$.

62. Правила отбора, ограничивающие число возможных переходов электронов, связанных с испусканием и поглощением света, имеют вид...

- 1) для орбитального и магнитного квантовых чисел $\Delta l = \pm 1$; $\Delta m_l = 0; \pm 1$.
- 2) для главного и орбитального квантовых чисел $\Delta n = \pm 1$; $\Delta l = \pm 1$;
- 3) для главного и магнитного квантовых чисел $\Delta n = \pm 1$; $\Delta m_l = \pm 1$;
- 4) переход электрона из основного состояния в возбужденное происходит по схеме $1s \rightarrow ns$

63. Электрон в атоме водорода перешел из основного состояния в возбужденное с $n = 4$. Радиус его боровской орбиты ...

- 1) увеличился в 16 раз;
- 2) уменьшился в 16 раз;
- 3) увеличился в 4 раза;
- 4) уменьшился в 4 раза;
- 5) не изменился.

64. Энергия фотона, испускаемого при переходе электрона в атоме водорода с третьего энергетического уровня на первый, равна...

- 1) 13,6 эВ;
- 2) 12,1 эВ;
- 3) 10,2 эВ;
- 4) 3,4 эВ.

65. Какое из перечисленных условий определяет возможность обнаружить волновые свойства микрочастицы?

- 1) Движение с релятивистской скоростью;

- 2) наличие электрического заряда;
- 3) наличие магнитного момента;
- 4) малая масса частицы.

66. Какое из утверждений ошибочно?

- 1) Соотношение неопределенностей является следствием невозможности изучить свойства микрочастиц в связи с волновым характером их движения.
- 2) Произведение неопределенностей координаты и соответствующего ей импульса не может быть меньше величины порядка $\hbar$.
- 3) Чем точнее определена координата микрочастицы, тем менее точно определено значение импульса микрочастицы, и наоборот.
- 4) Для тел с координатами, определенными с одной и той же точностью Δx , точность определения скорости зависит от массы этих тел.

67. Правило отбора накладывает ограничения на возможные переходы электрона в атоме с одного уровня на другой. В энергетическом спектре атома водорода запрещенным переходом является...

- 1) $2p - 1s$;
- 2) $4s - 2p$;
- 3) $3d - 2p$;
- 4) $4d - 2s$.

68. Потенциал ионизации водородоподобного атома гелия равен...

- 1) 13,6 эВ;
- 2) 40,8 эВ;
- 3) 54,4 эВ;
- 4) 10,2 эВ.

69. Частица в потенциальном ящике шириной L находится в состоянии с главным квантовым числом $n = 3$. Какова вероятность нахождения частицы в крайней трети ящика?

- 1) $\frac{1}{2}$;
- 2) $\frac{1}{3}$;
- 3) $\frac{1}{4}$;
- 4) $\frac{3}{8}$.

70. Найти кинетическую энергию электрона, если длина волны де Бройля 0,10 нм.

- 1) 120 эВ;
- 2) 73 эВ;
- 3) 150 эВ;
- 4) 13,6 эВ.

71. Положение пылинки массой $m = 10^{-9}$ кг можно установить с неопределенностью $\Delta x = 0,1$ мкм. Учитывая, что постоянная Планка $\hbar = 1,054 \cdot 10^{-34}$ Дж·с, неопределенность скорости ΔV_x (в м/с) будет не менее...

- 1) $1,05 \cdot 10^{-18}$
- 2) $1,05 \cdot 10^{-24}$
- 3) $1,05 \cdot 10^{-27}$
- 4) $1,054 \cdot 10^{-21}$.

72. Вычислить длину волны де Бройля для атома водорода, кинетическая энергия которого равна 100 эВ.

- 1) 0,00286 нм;
- 2) 0,286 нм;
- 3) 0,088 нм;
- 4) 0,000286 нм.

73. Какое из перечисленных свойств не является обязательным для ψ - функции?

- 1) ψ - функция непрерывна;
- 2) ψ - функция конечна;
- 3) ψ - функция должна быть функцией комплексного переменного;
- 4) ψ - функция должна иметь непрерывные частные производные первого порядка по координатам.

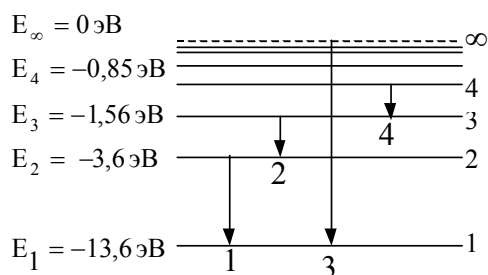
74. Определите, во сколько раз орбитальный момент импульса L_l электрона, находящегося в f – состоянии, больше, чем для электрона в p – состоянии.

- 1) 1,5; 2) 2,45; 3) 5; 4) 3,43.

75. В атоме К и L оболочки заполнены полностью. Общее число электронов в атоме равно...

- 1) 6; 2) 8; 3) 18; 4) 10.

75. На рисунке представлена схема энергетических уровней атома водорода. Какой цифрой обозначен переход с излучением фотона, имеющего максимальный импульс?



- 1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4.

76. В теории Бора атома водорода радиус n – ой круговой орбиты выражается через радиус первой орбиты. Как изменится кинетическая энергия электрона при переходе со второй орбиты на первую?

- 1) Увеличится в 4 раза;
2) уменьшится в 4 раза;
3) увеличится в 2 раза;
4) уменьшится в 2 раза;
5) не изменится.

77. Какова природа сил, отклоняющих α – частицы от прямолинейной траектории в опытах Резерфорда?

- 1) Гравитационная;
2) электромагнитная;
3) ядерная;
5) упругая.

78. Если неопределенность координаты электрона ($m_e = 9.11 \cdot 10^{-31}$ кг) при его движении в атоме $\Delta x = 10^{-10}$ м, то неопределенность скорости его движения составляет...

- 1) $1.16 \cdot 10^6$ м/с;
2) $7.27 \cdot 10^6$ м/с;
3) $1.16 \cdot 10^{-10}$ м/с;
4) ∞ .

$$\hbar = 1.054 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}.$$

79. Какую энергию необходимо дополнительно сообщить электрону, чтобы его дебройлевская длина волны уменьшилась от 0,1 нм до 0,05 нм?

- 1) 450 эВ; 2) 150 эВ; 3) 100 эВ; 4) 1050 эВ.

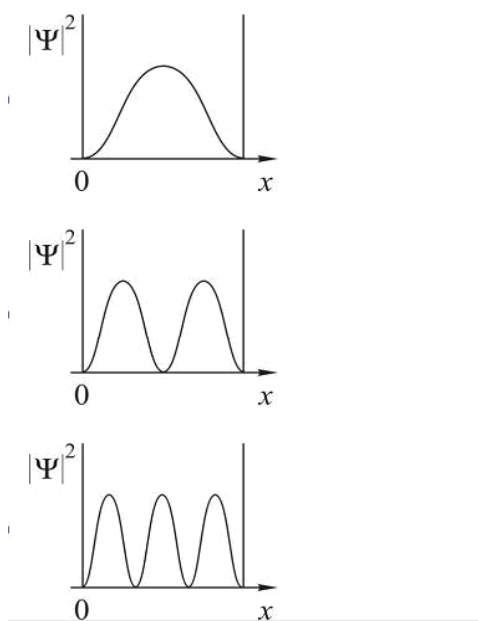
80. Какое из следующих утверждений ошибочно для атома водорода?

- 1) Главное квантовое число n может принимать любые целочисленные положительные значения, начиная с единицы.
- 2) Главное квантовое число n определяет возможные значения энергии электрона в атоме.
- 3) Зная главное квантовое число n , можно однозначно определить квантовые состояния электрона: его энергию, момент импульса, магнитный момент и т.п.
- 4) При заданном n орбитальное квантовое число ℓ может принимать всего n значений.

81. Для какого из перечисленных состояний кратность вырождения наибольшая?

- 1) 1s; 2) 2s; 3) 2p; 4) 3d.

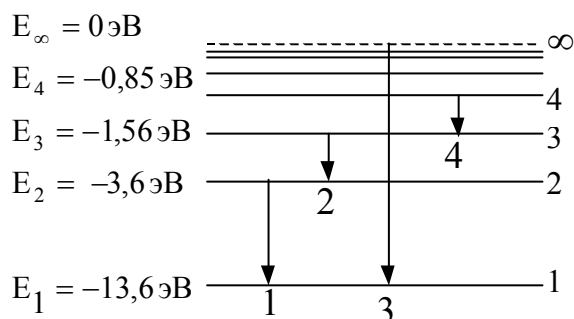
82. На рисунках приведены картины распределения плотности вероятности нахождения микрочастицы в потенциальной яме с бесконечно высокими стенками



Состоянию с $n = 3$ соответствует...

- 1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) необходимый рисунок отсутствует.

83. На рисунке представлена схема энергетических уровней атома водорода.



Какой цифрой обозначен переход, соответствующий серии Пашена?

- 1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4.

84. Основываясь на том, что энергия ионизации атома водорода $E_i = 13,6 \text{ эВ}$, определите энергию фотона, соответствующую самой длинноволновой линии серии Бальмера.

- 1) 1,89 эВ; 2) 2,55 эВ; 3) 10,2 эВ; 4) 1,21 эВ.

85. Электрон движется в атоме водорода по первой боровской орбите. Принимая, что допустимая неопределенность скорости составляет 10% от ее числового значения, определите неопределенность координаты электрона.

- 1) $\Delta x = 3,34$ пм; 2) $\Delta x = 3,34$ нм; 3) $\Delta x = 2,16$ пм; 4) $\Delta x = 2,16$ нм.

86. При движении какого из перечисленных тел волновые свойства могут быть обнаружены экспериментально?

- 1) Пылинка с массой $m = 10^{-15}$ кг летит со скоростью 100 м/с.
 2) Электрон движется со скоростью 10^5 м/с.
 3) Земля движется по орбите со скоростью $3 \cdot 10^4$ м/с.
 4) Ракета летит со второй космической скоростью 11,2 км/с.

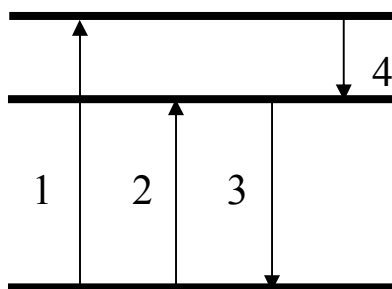
87. В каком из перечисленных случаев энергетический спектр электрона сплошной?

- 1) Электрон в потенциальной яме шириной 10^{-6} м.
 2) Электрон в атоме.
 3) Электрон в молекуле водорода.
 4) Свободный электрон.

88. Электрон в атоме находится в d – состоянии. Максимальное значение проекции момента импульса на направление внешнего магнитного поля равно...

- 1) $2\hbar$; 2) $3\hbar$; 3) $32\hbar$; 4) $1\hbar$.

89. На рисунке представлена диаграмма энергетических уровней атома. Какой цифрой обозначен переход, соответствующий поглощению атомом фотона наименьшей длины волны?



- 1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4.

89. Кинетическая энергия электрона равна 1 кэВ. Определите длину волны де Бройля.

- 1) 38,8 пм; 2) 12,8 пм; 3) 1,29 пм; 4) 3,6 нм.

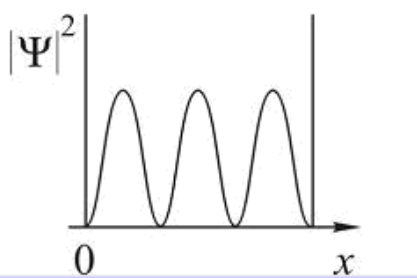
90. Определите отношение неопределенностей скорости электрона, если его координата установлена с точностью до 10^{-5} м, и пылинки массой 10^{-12} кг ($\Delta v_e / \Delta v_n$), если ее координата установлена с такой же точностью.

- 1) $2,8 \cdot 10^{18}$; 2) $1,1 \cdot 10^{18}$; 3) $1,1 \cdot 10^{10}$; 4) $1,9 \cdot 10^8$.

91. На какой вопрос о соотношении неопределенностей для энергии и времени Вы ответите «нет»?

- 1) Невозможно с бесконечной точностью знать энергию частицы и время его пребывания в этом энергетическом состоянии.
- 2) Если частица существует в каком либо состоянии достаточно долго, то энергия этого состояния известна точно.
- 3) Зная ширину спектральной линии, можно оценить порядок времени пребывания атома в возбужденном состоянии.
- 4) В соотношении неопределенностей ΔE – разность энергий двух соседних состояний; Δt – неопределенность длительности перехода между этими состояниями.

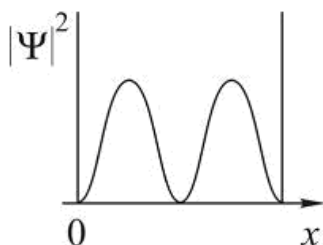
92. На рисунке изображена плотность вероятности обнаружения микрочастицы на различных расстояниях от «стенок» ямы. Вероятность ее обнаружения в средней трети ямы равна...



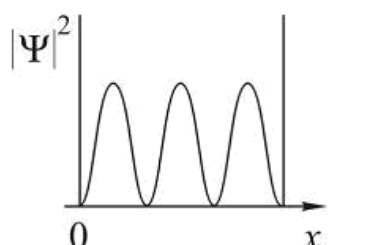
- 1) $\frac{1}{2}$;
- 2) 0;
- 3) $\frac{1}{3}$;
- 4) $\frac{1}{4}$

93. На рисунках приведены картины распределения плотности вероятности нахождения микрочастицы в потенциальной яме с бесконечно высокими стенками. Состоянию с квантовым числом $n = 2$ соответствует...

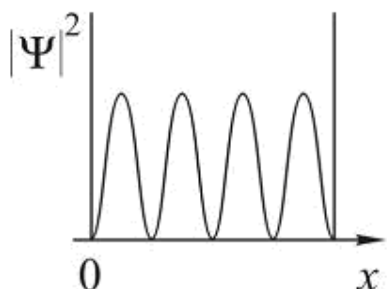
1)



2)



3)



4) необходимого рисунка нет.

94. Укажите размерность ψ - функции.

- 1) м;
- 2) $1/\text{м}$;
- 3) $1/\text{с}$;
- 4) безразмерная величина.

95. В каком из указанных ниже состояний в атоме водорода электрон обладает меньшей энергией?

- 1) $1d$; 2) $2p$; 3) $n = 3, l = 1$; 4) $n = 4, l = 2$.

96. Максимальное значение проекции момента импульса L_{lz} на направление внешнего магнитного поля для электрона в d – состоянии равно...

- 1) $3\hbar$; 2) $4\hbar$; 3) $\hbar$; 4) $2\hbar$.

97. Опыты Резерфорда по рассеянию α - частиц подтвердили, что...

- 1) атом является нейтральным;
- 2) α - частицы являются ядрами атомов гелия;
- 3) атом имеет ядро, размеры которого значительно меньше размеров самого атома;
- 4) размер электрона значительно меньше размеров атома.

98. Корпускулярные и волновые свойства микрочастиц одновременно наблюдаться...

- 1) могут;
- 2) не могут;
- 3) могут только у фотонов;
- 4) могут только у электрически заряженных частиц

99. Кинетическая энергия электрона, для которого длина волны равна $0,06$ нм, равна...

- 1) 419 эВ; 2) $0,23$ эВ; 3) 221 эВ; 4) $13,6$ эВ.

100. Какие из приведенных утверждений соответствуют смыслу постулатов Бора?

А) В атоме электроны движутся по круговым орбитам и излучают при этом электромагнитные волны.

Б) Атом может находиться только в одном из стационарных состояний, в которых атом не излучает энергию.

В) При переходе из одного стационарного состояния в другое атом поглощает или излучает квант электромагнитного излучения.

- 1) только А; 2) только Б; 3) только В; 4) Б и В.

101. Частица в потенциальной яме шириной l находится в возбужденном состоянии. Вероятность нахождения частицы в первой четверти ямы на втором энергетическом уровне равна...

- 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{1}{4}$; 3) $\frac{3}{8}$; 4) $\frac{3}{4}$.

102. Электрон в атоме находится в f – состоянии. Максимальное значение проекции момента импульса на направление внешнего магнитного поля равно...

- 1) $2\hbar$; 2) $3\hbar$; 3) $12\hbar$; 4) $1\hbar$.

103. Используя принцип Паули, укажите какое максимальное число электронов в атоме могут иметь одинаковые следующие квантовые числа n, l, m_l, m_s ?

- 1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4.

104. Укажите число вопросов, на которые вы ответите «Да».

1) Можно ли точно определить одновременно кинетическую и потенциальную энергию микрочастицы?

2) Верно ли, что нельзя одновременно определить точные значения координаты и импульса микрочастицы?

3) Согласны ли Вы, что классические понятия координаты и импульса могут быть применимы к микрочастицам?

4) Можно ли одновременно определить точные значения энергии микрочастицы и времени, в течение которого она обладает этой энергией?

1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4.

105. В опыте Резерфорда по взаимодействию α - частиц с веществом электроны не оказывают заметного влияния на рассеяние α - частиц. Объясняется это тем, что ...

1) заряды α - частиц и электронов противоположны;

2) взаимодействие α - частиц и электронов электромагнитное;

3) масса электронов во много раз меньше массы α - частиц;

4) взаимодействие α - частиц и электронов гравитационное

106. Энергия атома водорода в нормальном состоянии $E_1 = -13,53$ эВ. Энергия фотона, поглощенного атомом водорода, при переходе электрона с первого энергетического уровня на третий равна...

1) 12эВ; 2) 10,2 эВ; 3) 13,53 эВ; 4) 15,22.эВ.

107. Электрон в атоме водорода перешел из основного состояния в возбужденное с $n = 4$. Скорость электрона на этой орбите возбужденного атома водорода...

1) не изменилась;

2) увеличилась в 4 раза;

3) уменьшилась в 4 раза;

4) увеличилась в 16 раз;

5) уменьшилась в 16 раз.

108. Какие опыты подтверждают наличие у микрочастиц волновых свойств?

1) дифракция света;

2) дифракция электронов;

3) фотоэффект;

4) интерференция света.

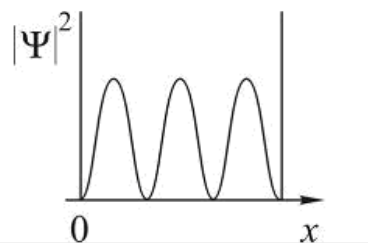
109. Выполняется ли соотношение неопределенностей Гейзенберга при движении электрона в электроннолучевой трубке?

1) нет; 2) да; 3) зависит от ускоряющего напряжения; 4) зависит от силы тока в трубке.

110. Частица в потенциальном ящике находится в основном состоянии. Какова вероятность W нахождения частицы в средней трети ящика?

1) 0,609; 2) 0,195; 3) 0,25; 4) 0,755.

111. На рисунке изображена плотность вероятности обнаружения микрочастицы на различных расстояниях от «стенок» ямы шириной L . Вероятность ее обнаружения на участке $L/6 < x < L$ равна...



- 1) $5/6$; 2) 0; 3) $1/3$; 4) $1/4$.

112. В каком из состояний атом водорода обладает наименьшим орбитальным моментом импульса?

- 1) $n = 3, \ell = 1$; 2) $n = 3, \ell = 2$; 3) $2p$; 4) $n = 3, \ell = 0$.

113. Максимальное число электронов в M – оболочке равно...

- 1) 2; 2) 8; 3) 32; 4) 28.

114. Первый потенциал возбуждения двукратно ионизированного атома лития равен ...

- 1) 91,8 эВ; 2) 40,8 эВ; 3) 13,6 эВ; 4) 10,2 эВ.

115. Найдите длину волны де Бройля для электрона, имеющего кинетическую энергию 10 кэВ.

- 1) 12,2 пм; 2) 8,7 пм; 3) 10,8 нм; 4) 1 нм.

116. Волновая функция частицы в потенциальной яме с бесконечно высокими стенками шириной L имеет вид $\psi = A \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$. Величина импульса этой частицы в основном состоянии равна...

- 1) $\frac{\pi\hbar}{2L}$; 2) $\frac{2\pi\hbar}{3L}$; 3) $\frac{3\pi\hbar}{2L}$; 4) $\frac{\pi\hbar}{L}$.

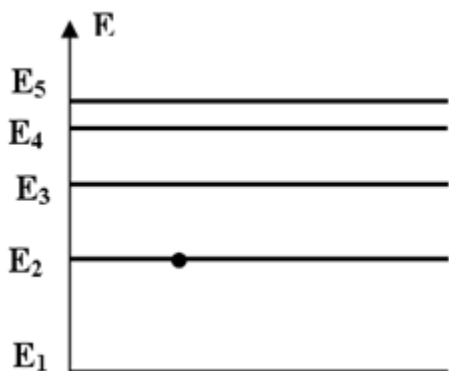
116. Время жизни электронов в атоме в метастабильном состоянии составляет 10^{-6} с. Учитывая, что постоянная Планка $\hbar = 6,6 \cdot 10^{-16}$ эВ·с, ширина метастабильного уровня (в эВ) будет не мене ...

- 1) $6,6 \cdot 10^{-10}$; 2) $1,5 \cdot 10^{-10}$; 3) $6,6 \cdot 10^{-13}$; 4) $1,5 \cdot 10^{-13}$.

117. Длина волны де Бройля для электрона, движущегося по первой Боровской орбите в атоме водорода, равна...

- 1) $3,4 \cdot 10^{-10}$ м; 2) $2,13 \cdot 10^{-10}$ м; 3) $1,67 \cdot 10^{-10}$ м; 4) $8,8 \cdot 10^{-10}$ м.

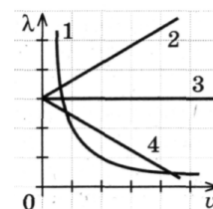
118. На рисунке приведена диаграмма энергетических уровней некоторого атома. Электрон находится на втором стационарном уровне. Сколько спектральных линий могут наблюдаться в спектре поглощения этого атома?



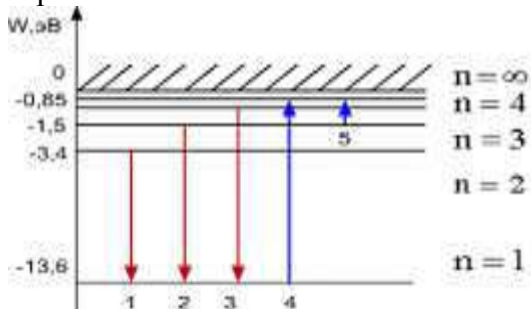
- 1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4; 5) 5.

119. На каком из графиков правильно показана зависимость длины волны де Бройля электрона от его скорости?

- 1)1 2)2 3)3 4)4



120. На рисунке представлена диаграмма энергетических уровней атома водорода. Поглощение фотона с наибольшей длиной волны происходит при переходе, обозначенном стрелкой ...



- 1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4; 5) 5.

Тема 7: Элементы ядерной физики

1. Какое утверждение неверно?

- 1) Магнитный момент ядра может быть равен нулю;
- 2) Спин ядра не зависит от числа нуклонов в ядре;
- 3) Магнитный момент ядра значительно меньше собственного магнитного момента электрона;
- 4) Спин ядра полуцелый, если число нуклонов в ядре нечетное.

2. Укажите число регистрирующих приборов, в которых используется ионизирующее действие быстрых заряженных частиц:

- 1) Камера Вильсона;
- 2) Пузырьковая камера;
- 3) Счетчик Гейгера;
- 4) Счетчик Черенкова.

3. Какое утверждение ошибочно?

- 1) Период полураспада – это время, в течение которого распадается половина имеющихся ядер;
- 2) Среднее время жизни – это время, в течении которого число нераспавшихся ядер убывает в e раз;
- 3) Закон $N=N_0e^{-\lambda t}$ справедлив для всех видов радиоактивных превращений;
- 4) Постоянная радиоактивного распада λ одинакова для всех радиоактивных изотопов одного и того же элемента.

4. Укажите число верных утверждений:

- 1) Энергетический спектр α - излучения дискретный;
- 2) Энергетический спектр β – излучения сплошной;
- 3) Энергетический спектр γ – излучения дискретный;
- 4) α – распад, как правило, сопровождается γ – излучением.

5. Какое утверждение ошибочно?

- 1) Масса ядра всегда меньше суммы масс нуклонов, из которых оно состоит;
- 2) Удельная энергия связи ядра – это энергия связи, отнесенная к одному нуклону;
- 3) Энергия связи ядра может быть определена по равенности масс ядра и составляющих его нуклонов;
- 4) Энергия сильного взаимодействия нуклонов в ядре зависит от их электрического заряда.

6. Какое утверждение ошибочно?

- 1) Тепловой эффект ядерной реакции может быть положительным и отрицательным;
- 2) Тепловой эффект ядерной реакции можно определить по разности масс покоя исходных частиц и конечных продуктов реакции;
- 3) При ядерных реакциях всегда наблюдается выделение энергии;
- 4) Если масса покоя частиц, вступающих в ядерную реакцию, больше массы покоя продуктов реакции, то происходит выделение энергии.

7. Какая из строчек таблицы правильно отражает структуру ядра ${}_{18}\text{Ar}^{37}$?

	Число протонов	Число нейтронов
1)	18	19
2)	18	37
3)	37	18
4)	37	55

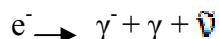
8. Сколько α - и β^- – распадов должно произойти, чтобы ${}_{92}^{238}\text{U}$ превратился в стабильный изотоп свинца ${}_{82}^{206}\text{Pb}$.

- 1) 10 α – распадов и 4 β^- - распадов;
- 2) 9 α - распадов и 5 β^- - распадов;
- 3) 6 α - распадов и 8 β^- - распадов;
- 4) 8 α - распадов и 6 β^- - распадов.

9. Сколько атомов радона распадается за сутки из 10^6 исходных атомов? Период полураспада радона 3,82 суток.

- 1) $1,66 \times 10^5$;
- 2) $2,44 \times 10^4$;
- 3) $2,46 \times 10^3$;
- 4) $3,12 \times 10^5$.

10. Реакция распада электрона по схеме

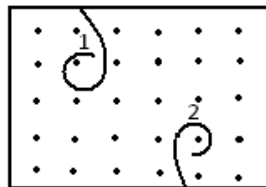


невозможна вследствие невыполнения закона сохранения...

- 1) электрического заряда;
- 2) лептонного заряда;
- 3) энергии.
- 4) импульса

11. В камере Вильсона, помещенной во внешнее магнитное поле таким образом, что вектор индукции магнитного поля направлен перпендикулярно плоскости рисунка на нас, были сфотографированы треки двух частиц. Какой из треков может принадлежать α – частице?

- 1) только первый;
- 2) только второй;
- 3) как первый, так и второй;
- 4) ни один из приведенных.



12. Один из видов радиоактивного излучения представляет собой поток быстро движущихся электронов. Это...

- 1) γ – излучение;
- 2) α – излучение;
- 3) β^- – излучение;
- 4) β^+ – излучение

13. Ядерной реакцией деления является

- 1) ${}_{77}^{174}\text{Ir} \rightarrow {}_{73}^{170}\text{Ta} + {}_2^4\text{He}$
- 2) ${}_4^9\text{Be} + {}_2^4\text{He} \rightarrow {}_6^{12}\text{C} + {}_0^1\text{n}$
- 3) ${}_{100}^{246}\text{Fm} \rightarrow {}_{51}^{123}\text{Sb} + {}_{49}^{120}\text{In} + 3{}_0^1\text{n}$
- 4) ${}_0^1\text{n} \rightarrow {}_1^1\text{p} + {}_{-1}^0\text{e}$

14. Неизвестный радиоактивный химический элемент самопроизвольно распадается по схеме: $X \rightarrow {}_{36}^{91}\text{Kr} + {}_{56}^{142}\text{Ba} + 3{}_0^1\text{n}$. Ядро этого элемента содержит...

1. 92 протона и 142 нейтрона;
2. 94 протона и 144 нейтрона;
3. 94 протона и 142 нейтрона;
4. 92 протона и 144 нейтрона.

15. Испусканием ядер гелия обязательно сопровождается...

- 1) β^- – распад;
- 2) К- захват;
- 3) β^+ – распад;
- 4) α – распад.

16. Период полураспада некоторого радиоактивного изотопа равен 1 месяц. За какое время число ядер этого изотопа уменьшится в 32 раза?

- 1) 3 месяца;
- 2) 4 месяца
- 3) 5 месяцев;
- 4) 6 месяцев

17. Ядро ${}_{93}^{237}\text{Np}$, испытав серию α – распадов и β – распадов, превратилось в ядро ${}_{83}^{213}\text{Bi}$. Определите число α – распадов.

- 1) 6
- 2) 2
- 3) 24
- 4) 4

18. Позитрон является античастицей по отношению к...

- 1) нейтрону;
- 2) протону;
- 3) фотону;
- 4) электрону.

19. Какое утверждение неверно?

- 1) Изотопами называются ядра с одинаковым числом протонов.
- 2) Атомы, ядра которых являются изотопами, обладают совершенно одинаковыми физическими свойствами.
- 3) Изобарами называются ядра с одинаковыми числом нуклонов.
- 4) Элементы, ядра которых являются изобарами, имеют различные химические свойства.

20. Укажите число верных утверждений.

- А) Энергия связи атомного ядра зависит от числа нуклонов, входящих в это ядро.
- Б) Самыми устойчивыми являются ядра элементов с наибольшей удельной энергией связи.
- В) Удельная энергия связи ядра ${}_{92}\text{U}$ больше, чем ядра ${}_{82}\text{Pb}$.
- Г) При делении ядра удельная энергия связи образовавшихся ядер всегда меньше, чем у исходного ядра.

1. 2. 3. 4.

21. Укажите число формул, по которым можно вычислить активность радиоактивного препарата.

- 1) $X_1 = N_0 e^{-\lambda t}$
- 2) $X_2 = N \frac{1}{\tau}$
- 3) $X_3 = N \frac{\ln 2}{T}$
- 4) $X_4 = \alpha_0 e^{-\lambda t}$

α_0 – активность в момент времени $t = 0$,

τ – среднее время жизни

1. 2. 3. 4.

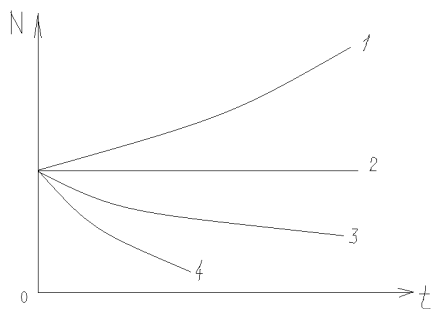
22. Следствием каких законов сохранения являются правила смещения при радиоактивном распаде?

- 1) Закона сохранения энергии.
- 2) Закона сохранения момента импульса.
- 3) Закона сохранения электрического заряда.
- 4) Закона сохранения импульса.

23. Какие частицы не вызывают появления треков в камере Вильсона?

- 1) Протоны.
- 2) Нейтроны.
- 3) Альфа – частицы.
- 4) Электроны.

24. На рисунке приведены графики изменения со временем количества нейтронов N в ходе реакции деления урана. Какая из кривых соответствует коэффициенту размножения нейтронов, большему единицы ($K > 1$).



1. 2. 3. 4.

25. Какая ядерная реакция может быть использована для получения цепной реакции деления?

- 1) ${}_{96}^{243}\text{Cm} + {}_0^1n \rightarrow 4{}_0^1n + {}_{42}^{108}\text{Mo} + {}_{54}^{132}\text{Xe}$
- 2) ${}_{6}^{12}\text{C} \rightarrow {}_{3}^{6}\text{Li} + {}_{3}^{6}\text{Li}$
- 3) ${}_{90}^{227}\text{Th} + {}_0^1n \rightarrow {}_{49}^{129}\text{In} + {}_{41}^{99}\text{Nb}$
- 4) ${}_{96}^{243}\text{Cm} \rightarrow {}_{43}^{108}\text{Tc} + {}_{53}^{141}\text{I}$

26. Нагретый газ углерод ${}_{6}^{15}\text{C}$ излучает свет. Этот изотоп испытывает β - распад с периодом полураспада 2,5 с. Как изменится спектр излучения всего газа за 5 с?

- 1) Спектр углерода исчезнет и заменится спектром азота ${}_{7}^{15}\text{N}$
- 2) Спектр станет ярче из – за выделяющейся энергии.
- 3) Спектр сдвинется из – за уменьшения числа атомов углерода.
- 4) Спектр углерода станет менее ярким, и добавляется линии азота ${}_{7}^{15}\text{N}$.

27. Какие частицы не входят в состав атомного ядра?

- 1) протоны.
- 2) нейтроны.
- 3) нуклоны.
- 4) электроны.

28. Ядро урана ^{235}U разделилось на два ядра – осколка. Укажите число верных утверждений.

- А) процесс сопровождается выделением энергии.
- Б) удельная энергия связи новых ядер больше, чем исходного.
- В) Относительное число нейтронов в ядрах – осколках меньше, чем в исходном ядре.
- Г) Ядра урана ^{235}U делятся под действием медленных нейтронов.

1. 2. 3. 4.

29. Укажите число верных утверждений.

- А) время, в течение которого распадается половина радиоактивных ядер, называется периодом полураспада.
- Б) периоды полураспада у всех радиоактивных изотопов данного химического элемента одинаковы.
- В) время, за которое число нераспавшихся радиоактивных ядер убывает в e – раз, называется средним временем жизни.
- Г) активность радиоактивного препарата зависит от числа имеющихся ядер и от постоянной распада.

1. 2. 3. 4.

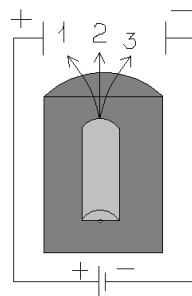
30. В каком регистрирующем приборе не используется ионизирующее действие радиоактивного излучения?

- 1) В камере Вильсона
- 2) В счетчике Гейгера
- 3) В счетчике Черенкова
- 4) В пузырьковой камере

31. Какая доля радиоактивных атомов распадется через интервал времени равный двум периодам полураспада?

- 1) 25%
- 2) 75%
- 3) 50%
- 4) 90%
- 5) все атомы распадутся

32. Какими цифрами обозначены α –, β –, γ – излучение на рисунке?



- 1) 1 – α , 2 – β , 3 – γ
- 2) 1 – β , 2 – α , 3 – γ
- 3) 1 – α , 2 – γ , 3 – β
- 4) 1 – β , 2 – γ , 3 – α

33. В процессе электромагнитного взаимодействия принимают участие...

- 1) фотоны
- 2) нейтрино
- 3) нейтроны
- 4) протоны

34. Ядро состоит из:

- 1) Нейтронов и электронов;
- 2) Протонов и нейтронов;
- 3) Протонов и электронов;
- 4) Нейтронов.

35. Какое утверждение ошибочно?

- 1) Заряд ядра определяется зарядом протонов, входящих в его состав;
- 2) В стабильных ядрах число нейтронов всегда меньше числа протонов;
- 3) В ядрах тяжелых элементов отношение числа нейтронов к числу протонов больше, чем в легких ядрах;
- 4) Нейтрон, как и протон, имеет механический и магнитный моменты.

36. На сколько вопросов относящихся к закону радиоактивного распада $N = N_0 e^{-\lambda t}$ вы ответите «да» ?

- А) Является ли этот закон статистическим?
- Б) Справедлив ли этот закон для всех видов радиоактивности?
- В) Обозначает ли N в этом законе число распавшихся ядер?
- Г) Можно ли записать этот закон в виде $N = N_0 e^{-t/\tau}$, где τ – среднее время жизни радиоактивных ядер?

1.

2.

3.

4.

37. На какой вопрос об активности радиоактивного вещества Вы ответите нет ?

- 1) Зависит ли активность от числа атомов радиоактивного вещества?
- 2) Зависит ли активность от постоянного распада?
- 3) Изменяется ли со временем активность одного и того же вещества?
- 4) Зависит ли активность от температуры радиоактивного вещества?

38. Какое вещество образуется в ходе ядерной реакции $Al_{13}^{27}(\gamma, x) Mg_{12}^{26}$?

- 1) Обычный водород
- 2) Дейтерий
- 3) Тритий
- 4) Гелий

39. Какое утверждение ошибочно?

- 1) Реакция синтеза гелия из более легких ядер является цепной;
- 2) Реакция синтеза гелия из дейтерия и трития идет с выделением нейтронов;
- 3) Термоядерная реакция синтеза ядер легких элементов может происходить только при очень высокой температуре;
- 4) Термоядерная реакция идет с выделением энергии.

40. Сколько α – и β – распадов должно произойти при радиоактивном распаде ядра урана ${}_{92}^{238}\text{U}$ и конечном превращении его в ядро свинца ${}_{82}^{206}\text{Pb}$?

- 1) 8 α - распадов и 10 β - распадов;
- 2) 10 – распадов и 8 β - распадов;
- 3) 10 – распадов и 10 β – распадов;
- 4) 10 α - распадов и 9 β – распадов.

41. α - излучение представляет собой поток:

- 1) Электронов;
- 2) Квантов электромагнитного излучения, испускаемых атомными ядрами при переходе из возбужденного состояния в основное;
- 3) Протонов;
- 4) Ядер атомов гелия.

42. Какая из приведенных пар является изобарной?

- 1) ${}^3_1\text{H}$, ${}^2_1\text{H}$;
- 2) ${}^3_1\text{H}$, ${}^3_2\text{He}$;
- 3) ${}^3_2\text{He}$, ${}^4_2\text{He}$;
- 4) ${}^4_2\text{He}$, ${}^3_1\text{H}$.

43. Ядерные силы:

- 1) Центральные;
- 2) Короткодействующие;
- 3) Обладают свойством насыщения;
- 4) Имеют обменный характер.

Какое утверждение ошибочно?

44. Зависит ли активность $\frac{dN}{dt}$ некоторого радиоактивного препарата от:

- 1) Его массы;
- 2) Числа радиоактивных ядер;
- 3) Температуры;
- 4) Периода полураспада.

На какой вопрос Вы ответите «Нет» ?

45. В какой из приведенных ядерных реакций частица X является нейтроном?

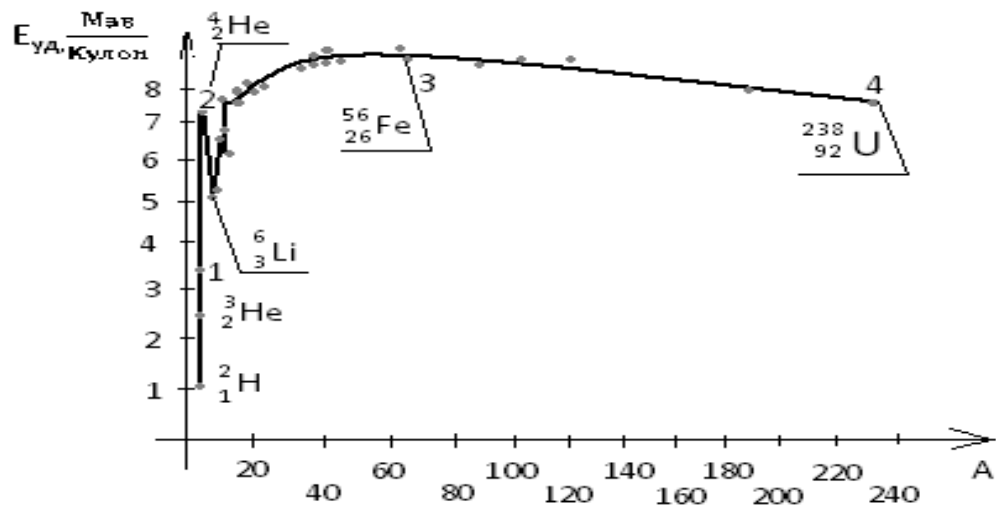
- 1) ${}^2_1\text{H} + {}^4_2\text{He} \rightarrow \text{X} + \text{p}$;
- 2) ${}^6_3\text{Li} + \text{D} \rightarrow \text{X} + {}^4_2\text{He}$;
- 3) ${}^7_3\text{Li} + \text{p} \rightarrow \text{X} + {}^4_2\text{He}$;
- 4) ${}^{14}_7\text{N} + \text{X} \rightarrow \text{p} + {}^{14}_6\text{C}$.

46. Какая доля радиоактивных ядер некоторого элемента распадается за время, равное половине периода полураспада?

- 1) 0,71 ;

- 2) 0,5 ;
- 3) 0,29 ;
- 4) 0,14.

47. На графике представлена зависимость удельной энергии $E_{уд}$ связи нуклонов в ядре атома от массового числа A атома. При распаде какого из ядер, отмеченных на кривой, может выделяться энергия?



- 1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4.

48. Взаимодействие, в котором принимают участие все элементарные частицы, называется:

- 1) гравитационным;
- 2) сильным;
- 3) слабым;
- 4) электромагнитным

49. Укажите ошибочное утверждение:

- 1) Магнитный момент ядра может быть равен нулю;
- 2) Ядра с полуцелым спином являются наиболее прочными;
- 3) Магнитный момент ядра меньше собственного магнитного момента электрона;
- 4) Спин ядра полуцелый, если число нуклонов нечетное.

50. Даны массы нейтральных атомов в атомных единицах:

- 1) H^2 - 2,014102;
- 2) H^3 -3,016049;
- 3) He^3 -3,016030;
- 4) Li^6 -6,015126.

Кроме того известны массы:

H^1 -1,007825;

n -1,008665.

Ядро какого атома самое прочное?

51. Начальное число атомов в различных радиоактивных препаратах одинаково и равно $N_0=10^{16}$. Периоды полураспада:

- 1) $6,9 \cdot 10^5$ с (I^{131});
- 2) $5,12 \cdot 10^{10}$ с (Ra^{226});
- 3) $1,7 \cdot 10^8$ с (Co^{60});
- 4) $6,3 \cdot 10^8$ с (Sr^{90}).

У какого из препаратов начальная активность равна $10^{10} \frac{\text{расп}}{\text{с}}$?

52. Ядро урана ${}_{92}^{233}\text{U}$ претерпело шесть α и три β^- превращений. Какое ядро образовалось?

- 1) ${}_{82}^{207}\text{Pb}$;
- 2) ${}_{83}^{213}\text{Bi}$;
- 3) ${}_{83}^{209}\text{Bi}$;
- 4) ${}_{82}^{211}\text{Pb}$.

53. В какой из приведенных ядерных реакций частица X это протон?

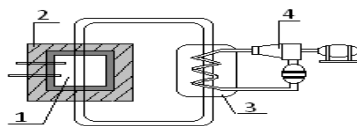
- 1) ${}_{13}^{27}\text{Al} (n, X) {}_{11}^{24}\text{Na}$;
- 2) ${}_{7}^{14}\text{N} (n, X) {}_{6}^{14}\text{C}$;
- 3) ${}_{13}^{27}\text{Al} (\gamma, X) {}_{13}^{28}\text{Al}$;
- 4) ${}_{1}^2\text{H} (X, n) {}_{2}^4\text{He}$.

54. Ядро урана делится на два ядра-осколка. Укажите с каким из приведенных утверждений Вы не согласны?

- 1) Процесс сопровождается выделением энергии;
- 2) Удельная энергия связи новых ядер больше, чем исходного;
- 3) Относительное число нейтронов в ядрах-осколках больше, чем в исходном ядре;
- 4) Ядра-осколки радиоактивны.

55. На рисунке изображена блок-схема атомной электростанции. Какой цифрой обозначена зона, в которой тяжелые ядра радиоактивного топлива делятся с выделением энергии?

- 1) 1
- 2) 2
- 3) 3
- 4) 4



56. Реакция распада электрона по схеме $e^- \rightarrow \gamma + \bar{\nu}$ невозможна вследствие невыполнения закона сохранения:

- 1) Электрического заряда;
- 2) Лептонного заряда;
- 3) Энергии;
- 4) Барионного заряда.

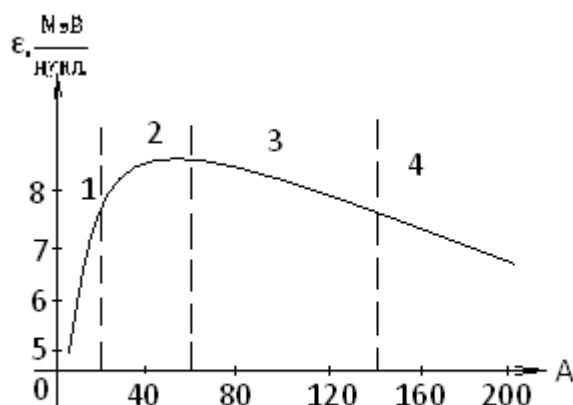
57. Как изменяется полная энергия двух ядер дейтерия ${}^2_1\text{H}$, при соединении их в ядро гелия ${}^4_2\text{He}$?

- 1) Увеличивается;
- 2) Уменьшается;
- 3) Не изменяется;
- 4) Увеличивается или уменьшается в зависимости от начального расстояния между ядрами дейтерия.

58. Укажите ошибочное утверждение. У любого атомного ядра:

- 1) Заряд положительный, кратный заряду протона;
- 2) Массовое число совпадает с числом нуклонов;
- 3) Спин полуцелый;
- 4) Плотность порядка $10^{17} \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$.

59. На графике представлена усредненная зависимость удельной энергии связи стабильных ядер ϵ от числа нуклонов в ядре A . Какой интервал значений A соответствует ядрам, обладающим наибольшей устойчивостью?



60. Активность препаратов уменьшилась вдвое за время равное:

- 1) 8 суток (I^{131});
- 2) 75 суток (Ir^{192});
- 3) 3,82 суток (Rn^{222});
- 4) 14,3 суток (P^{32}).

У какого из препаратов постоянная распада λ равна $0,18 \text{ суток}^{-1}$?

61. За 8 часов начальное количество радиоактивного изотопа уменьшилось в три раза. За какое время оно уменьшится в 27 раз?

- 1) За сутки;
- 2) За 36 часов;
- 3) За трое суток;
- 4) За 72 часа.

62. При какой из ядерных реакций энергия поглощается?

- 1) $\text{Li}^7 + \text{H}^2 \rightarrow \text{Be}^8 + \text{n}$;
- 2) $\text{Be}^9 + \text{H}^2 \rightarrow \text{B}^{10} + \text{n}$;
- 3) $\text{N}^{14} + \text{He}^4 \rightarrow \text{H}^1 + \text{O}^{17}$;
- 4) $\text{Li}^7 + \text{H}^1 \rightarrow \text{He}^4 + \text{He}^4$.

Массы в атомных единицах:

$\text{H}^1 - 1,08814$	$\text{Li}^7 - 7,01823$	$\text{B}^{10} - 10,01612$
$\text{n} - 1,00899$	$\text{Be}^8 - 8,00785$	$\text{N}^{14} - 14,00752$
$\text{H}^2 - 2,01474$	$\text{Be}^9 - 9,01505$	$\text{O}^{17} - 17,00453$
$\text{He}^4 - 4,00388$		

63. Укажите ошибочное утверждение:

- 1) Спонтанная реакция деления атомного ядра наблюдается только на тяжелых ядрах;
- 2) Цепная реакция деления атомных ядер возможна, если при каждом акте деления образуются свободные нейтроны;
- 3) При реакции деления ядра удельная энергия связи осколков больше, чем исходного ядра;
- 4) Число нейтронов в ходе цепной реакции нельзя регулировать.

64. В результате реакции ядра ${}_{13}^{30}\text{Al}^{27}$ с α -частицей ${}_2^4\text{He}$ появился протон ${}_1^1\text{H}$ и ядро:

- 1) ${}_{14}^{30}\text{Si}$;
- 2) ${}_{16}^{32}\text{S}$;
- 3) ${}_{14}^{28}\text{Si}$;
- 4) ${}_{17}^{35}\text{Cl}$.

65. Внутри атомного ядра произошло самопроизвольное превращение нейтрона в протон $\text{n} \rightarrow \text{p} + \text{e}^- + \bar{\nu}$. С ядром в результате такого превращения произошел:

- 1) Ядерная реакция синтеза;
- 2) β^+ - распад;
- 3) α - распад;
- 4) β^- - распад.

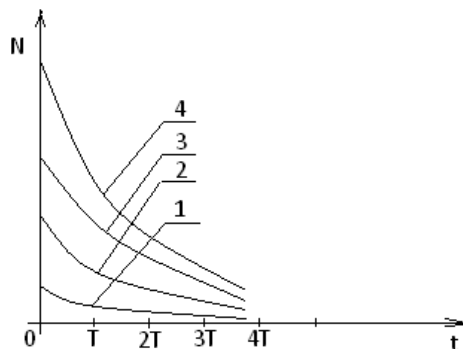
66. Верно ли, что нейтрон:

- 1) Имеет массу большую, чем нейтрон;
- 2) Вне ядра стабилен;
- 3) Имеет полуцелый спин;
- 4) Обладает магнитным моментом.

На какой вопрос вы ответили «нет»?

67. На графике изображены кривые распада радиоактивных препаратов. Какой график соответствует препарату с наибольшей активностью в момент времени $t=0$?

N- число нераспавшихся ядер в момент времени t



68. В каком из приведенных примеров радиоактивного распада появляется позитроны?

- 1) ${}_{35}^{78}\text{Br} \longrightarrow {}_{34}^{78}\text{Se} + \dots$
- 2) ${}_{35}^{80}\text{Br} \longrightarrow {}_{36}^{80}\text{Kr} + \dots$
- 3) ${}_{90}^{234}\text{Th} \longrightarrow {}_{91}^{234}\text{Pa} + \dots$
- 4) ${}_{92}^{238}\text{U} \longrightarrow {}_{90}^{234}\text{Th} + \dots$

69. При ядерных реакциях соблюдаются законы сохранения:

- 1) Электрического заряда;
- 2) Массового числа;
- 3) Энергии;
- 4) Моента импульса.

70. В результате деления тяжелого атомного ядра происходит:

- 1) Разделение ядра на меньшее ядро и α -частицу;
- 2) Разделение ядра на два соразмерных по массе ядра и испускание нейтронов;
- 3) Разделение ядра на отдельные протоны и нейтроны;
- 4) Испускание ядром одного или нескольких нейтронов.

71. Источник радиоактивного излучения испускает α -частицы, которые отклоняются в сторону отрицательно заряженной пластины конденсатора, а затем попадают в металлический приемник, который заземлен. Сила тока в заземляющем проводе достигает J. Сколько частиц зафиксирует за минуту на выходе этого источника счетчик Гейгера, если входное окошко счетчика ослабляет это излучение в n раз? Элементарный заряд равен e.

- 1) $\frac{I}{en}$;
- 2) $\frac{30I}{en}$;
- 3) $\frac{60I}{en}$;
- 4) n.

72. Позитрон является античастицей по отношению к :

- 1) Нейтрону
- 2) Протону
- 3) Нейтрино

4) Электрону.

73. Верно ли что:

- 1) Заряд ядра определяется числом протонов.
- 2) В ядрах тяжелых элементов отношение числа нейтронов к числу протонов больше, чем в легких.
- 3) всякое ядро, содержащее больше нейтронов, чем протонов, стабильно.
- 4) Четность спина ядра зависит от числа нуклонов?

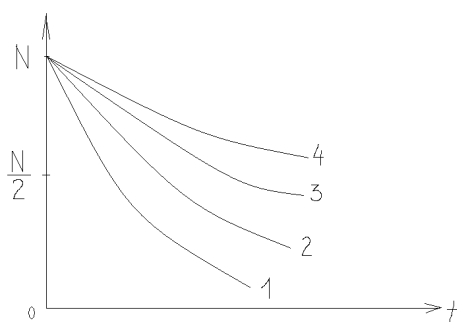
На какой вопрос Вы ответили «Нет, не верно» ?

74. Верно ли, что удельная энергия связи :

- 1) ${}_{92}\text{U}^{238}$ меньше, чем ${}_{82}\text{Pb}^{206}$
- 2) ${}_2\text{He}^3$ меньше, чем ${}_2\text{He}^4$
- 3) ${}_2\text{He}^4$ больше, чем ${}_1\text{H}^3$
- 4) ${}_2\text{He}^4$ больше, чем ${}_8\text{O}^{16}$

На какой вопрос Вы ответили «Нет»?

75. На графике изображены кривые распада различных радиоактивных препаратов. Какой график соответствует препарату с наибольшей активностью в момент времени $t = 0$
 N – число нераспавшихся ядер к моменту времени t .



76.. Какое утверждение ошибочно?

- 1) Тепловой эффект ядерной реакции может быть положительным и отрицательным.
- 2) Тепловой эффект ядерной реакцией можно определить по разности масс покоя исходных частиц и конечных продуктов реакции.
- 3) При ядерных реакциях всегда наблюдается выделение энергии.
- 4) Если масса покоя частиц, вступающих в ядерную реакцию, больше массы продуктов реакции, то происходит выделение энергии.

77. Верно ли, что:

- 1) Удельная энергия связи дейтерия и трития меньше, чем гелия.
- 2) Реакция синтеза гелия из дейтерия и трития идет с выделением нейтронов.
- 3.) Реакция синтеза гелия из более легких элементов может происходить при любых значениях температуры и давления.
- 4) Реакция синтеза гелия это термоядерная реакция, т.к. происходит при очень высокой температуре?

На какой вопрос Вы ответили «Нет, не верно»?

78. α – частица столкнулась с ядром азота ${}_{7}\text{N}^{14}$. При этом образовались ядро водорода и ядро...

- 1) кислорода с массовым числом 17.

- 2) азота с массовым числом 14.
- 3) кислорода с массовым числом 16.
- 4) фтора с массовым числом 19.

79. При облучении нейтронами ядра урана 235 делятся на:

- 1) 2 сравнимых по массе осколка деления и нейтроны.
- 2) альфа – и бета – частицы.
- 3.) нейтроны и протоны.
- 4) нейтроны, протоны и электроны.

80. При бомбардировке ядер изотопа азота ${}^{14}_7N$ нейтронами образуется изотоп бора ${}^{11}_5B$.

Еще в этой ядерной реакции образуется...

- 1) протон
- 2) α – частица
- 3) нейтрон
- 4) 2 нейтрона
- 5) 2 протона

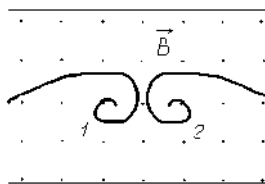
81. Незвестный радиоактивный химический элемент самопроизвольно распадается по схеме: $X \rightarrow {}^{91}_{36}Kr + {}^{142}_{56}Ba + 3n$. Ядро этого элемента содержит...

- 1) 92 протона и 144 нейтрона
- 2) 92 протона и 142 нейтрона
- 3) 94 протона и 144 нейтрона
- 4) 94 протона и 142 нейтрона

82. Ядро атома состоит из

- 1) нейтронов и электронов
- 2) протонов и нейтронов
- 3) протонов и электронов
- 4) нейтронов

83. В камере Вильсона, помещенной во внешнее магнитное поле таким образом, что вектор индукции магнитного поля направлен перпендикулярно плоскости рисунка на нас, были сфотографированы треки двух частиц. Какие из треков могут принадлежать электрону?



- 1) только 1 – й
- 2) только 2 – й
- 3) 1 – й и 2 – й
- 4) не один из приведенных

84. Детектор радиоактивных излучений помещен в закрытую картонную коробку с толщиной стенок - 1 мм. Какие излучения он может зарегистрировать?

- 1) α и β
- 2) α и γ
- 3) β и γ
- 4) α , β , γ

85. Ядерная реакция ${}_{92}^{235}\text{U} + {}_0^1\text{n} \rightarrow {}_{54}^{140}\text{Xe} + {}_{38}^{94}\text{Sc} + 2{}_0^1\text{n}$ идет с большим выделением энергии. Энергия выделяется в основном в виде

- 1) Энергия α – частиц
- 2) Энергия γ – частиц
- 3) Энергия β – частиц
- 4) Кинетической энергии ядер – осколков

86. Ядро изотопа урана ${}_{92}\text{U}^{238}$ после нескольких радиоактивных распадов превратилось в ядро изотопа ${}_{92}\text{U}^{234}$. Какие это были распады?

- 1) Один α и два β
- 2) Один α и один β
- 3) Два α и один β
- 4) Такое превращение невозможно

87. Периодом полураспада называется...

- 1) Время, в течении которого концентрация распавшихся ядер увеличивается в e – раз.
- 2) Время, в течении которого распадаются все атомы радиоактивного элемента
- 3) Время, в течении которого распадается половина наличного количества атомов радиоактивного элемента
- 4) Время между моментами распада двух ядер атомов радиоактивного элемента

88. Из перечисленных ниже превращений к β^- - распаду отнесится...

- 1) ${}^A_Z\text{X} + e^- \rightarrow {}^A_{Z-1}\text{X} + \nu$
- 2) ${}^A_Z\text{X} \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2}\text{X} + {}^4_2\text{He}$
- 3) ${}^A_Z\text{X} \rightarrow {}^A_{Z+1}\text{X} + e^- + \bar{\nu}_e$
- 4) ${}^A_Z\text{X} \rightarrow {}^A_{Z-1}\text{X} + e^+ + \nu_e$

89. Установить соответствие процессов взаимопревращения частиц:

1) β^- - распад	А. ${}^0_{-1}e + {}^0_{+1}e \rightarrow 2\gamma$
2) К – захват	Б. ${}_1^1p \rightarrow {}_0^1n + {}^0_{+1}e + \nu_e$
3) β^+ - распад	В. ${}_1^1p + {}^0_{-1}e \rightarrow {}_0^1n + \nu_e$
4) аннигиляция	Г. ${}_0^1n \rightarrow {}_1^1p + {}^0_{-1}e + \nu_e$
	Д. ${}_0^1n + {}^0_{-1}e \rightarrow {}_1^1p + \nu_e$

1. 1-А, 2-Б, 3-Г, 4-Д
2. 1-Г, 2-Б, 3-В, 4-А
3. 1-Б, 2-Г, 3-А, 4-Д
4. 1-Б, 2-В, 3-А, 4-Д

90. Нуклидами с одинаковым атомным номером называют...

- 1) изомеры
- 2) изобары
- 3) изотопы
- 4) электроны в свободном состоянии

91. Чему равно число нейтронов в ядре урана ${}_{92}\text{U}^{238}$?

- 1) 0
- 2) 92
- 3) 146
- 4) 238

92. Удельные энергии связи нуклонов в ядрах плутония ${}_{94}\text{Pu}^{240}$, кюрия ${}_{96}\text{Cm}^{245}$ и америция ${}_{95}\text{Am}^{246}$ равны соответственно 0,21; 0,22; 0,23 МэВ/нуклон. Из какого ядра труднее выбить нейтрон?

- 1) из ядра ${}_{94}\text{Pu}^{240}$
- 2) из ядра ${}_{96}\text{Cm}^{245}$
- 3) из ядра ${}_{95}\text{Am}^{246}$
- 4) все ядра одинаково устойчивы

93. α – излучение – это ...

- 1) поток ядер гелия
- 2) поток протонов
- 3) поток электронов
- 4) электромагнитные волны

94.. Если ΔN – уменьшение числа нейтронов в ядре, а ΔZ – уменьшение числа протонов в ядре, то какие изменения в составе ядра произошли в результате радиоактивного альфа – распада?

- 1) $\Delta N = 4$
- 2) $\Delta Z = 4$
- 3) $\Delta N = 0$
- 4) $\Delta N = 2$

95. γ – излучение представляет собой поток...

- 1) электронов
- 2) ядер атомов гелия
- 3) протонов
- 4) квантов электромагнитного излучения, испускаемых атомными ядрами при переходе из возбужденного состояния в основное.

96. В процессе электромагнитного взаимодействия принимают участие...

- 1) Фотоны
- 2) Нейтрино
- 3) Нейтроны
- 4) Протоны

97. Какой порядковый номер в таблице Менделеева имеет элемент, который образуется в результате α – распада и последующего β – распада ядра элемента с порядковым номером Z ?

- 1) $Z + 2$
- 2) $Z + 1$
- 3) $Z - 2$
- 4) $Z - 1$

98. При самопроизвольном распаде ядра энергия

- 1) выделяется
- 2) поглощается
- 3) Сначала поглощается, потом выделяется
- 4) Не выделяется и не поглощается

99. Активность некоторого изотопа за 10 суток уменьшилась на 50 %.

Период полураспада этого изотопа....

- 1) 10 суток

- 2) 7 суток
- 3) 30 суток
- 4) 20 суток
- 5) 5 суток

100. Изобарами называются нуклиды...

- 1) Обладающие одинаковым спином
- 2) С невозбужденной оболочкой
- 3) С одинаковым числом нейтронов
- 4) С одинаковым массовым числом

101. Радиоактивный изотоп нептуния ${}_{93}^{237}\text{Np}$ после одного α – распада превращается в изотоп

- 1) ${}_{91}^{233}\text{Pa}$
- 2) ${}_{92}^{238}\text{U}$
- 3) ${}_{90}^{230}\text{Th}$
- 4) ${}_{94}^{241}\text{Pu}$

102. При распаде ядра изотопа лития ${}_{3}\text{Li}^8$ образовались два одинаковых ядра и β – частица. Два одинаковых ядра – это ядра...

- 1) Водорода
- 2) Гелия
- 3) Бора
- 4) Дейтерия

103. Устройство, в котором регистрация траектории быстрых заряженных частиц осуществляется за счет конденсации пересыщенных паров воды при ионизации воздуха пролетающими частицами, называется...

- 1) Счетчик Гейгера
- 2) Камера Вильсона
- 3) Пузырьковая камера
- 4) Толстослойная фотоэмульсия

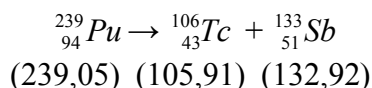
104. Значение зарядового числа Z при β – распаде меняется...

- 1) На три
- 2) На единицу
- 3) Не меняется
- 4) На четыре

105. В первой ядерной реакции, осуществленной Резерфордом, ядра азота ${}_{7}^{14}\text{N}$ при бомбардировке α – частицами, превращались в ядра изотопа кислорода ${}_{8}^{17}\text{O}$. Какие еще частицы были продуктом реакции?

- 1) Протон
- 2) Два протона
- 3) Нейтрон
- 4) Два нейтрона

106. Ниже записана ядерная реакция, а в скобках указаны массы (в а.е.м.) участвующих в ней частиц. Поглощается или выделяется энергия при этой реакции?



- 1) Выделяется
- 2) Поглощается
- 3) Не поглощается и не выделяется
- 4) Недостаточно данных для ответа

107. Имеется 10^8 атомов радиоактивного изотопа йода ${}_{53}^{128}\text{I}$, период полураспада которого 25 мин. Какое количество ядер изотопа распадается за 50 мин?

- 1) $2,5 \cdot 10^7$
- 2) $7,5 \cdot 10^7$
- 3) $5 \cdot 10^7$
- 4) 10^8

108. Сколько α – и β – распадов должно произойти, чтобы ${}_{92}^{238}\text{U}$ превратился в стабильный изотоп свинца ${}_{82}^{207}\text{Pb}$:

- 1) 6 α – распадов и 8 β – распадов;
- 2) 8 α – распадов и 6 β – распадов;
- 3) 9 α – распадов и 5 β – распадов;
- 4) 10 α – распадов и 4 β – распадов.

109. Испусканием ядер гелия обязательно сопровождается...

- 1) β^- – распад
- 2) К – захват
- 3) β^+ – распад
- 4) α – распад

Критерии оценивания: правильность ответа

Правила оценивания тестового задания:

Правильный ответ – 1 балл.

Неправильный ответ, ответ с ошибкой – 0 баллов

Критерии оценки:

оценка «отлично» выставляется обучающемуся, если он набрал 9-10 баллов (90-100% правильных ответов)

оценка «хорошо» выставляется обучающемуся, если он набрал 7-8 баллов (70-89% правильных ответов)

оценка «удовлетворительно» выставляется обучающемуся, если он набрал 5-6 баллов (50-69% правильных ответов)

оценка «неудовлетворительно» выставляется обучающемуся, если он набрал 0-4 баллов (0-49% правильных ответов)

Составители: Коршунов И.Г., профессор, д.ф.-м.н.; Житова Л.П., доцент, к.т.н., Глаголева Ю.В., доцент, к.ф.-м.н.; Садырева О.В., доцент, к.ф.-м.н.; Смольников С.А., доцент, к.ф.-м.н.; Калачева М.В., доцент, к.т.н. Комарова Л.И., доцент, к.ф.-м.н.; Келина Е.Н., доцент.

ФГБОУ ВО «УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГОРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ФАКУЛЬТЕТ ГЕОЛОГИИ И ГЕОФИЗИКИ

Кафедра физики

Дисциплина «Физика»

КОМПЛЕКТ ЗАДАЧ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Задачи для контрольной работы, направленные на оценку уровня знаний, умений, владений, формирующих компетенции ОК-7, ОПК-2

Задачи для контрольной работы размещены на сайте кафедры физики
<http://ugguphysica.narod.ru>

Примерный план решения задач по физике

1. Внимательно прочитать условие задачи. Установить, о каких физических явлениях и законах идет речь в задаче.
2. Сделать краткую запись условия задачи, что дано и что нужно найти. Все данные задачи выразить в системе СИ (м, кг, Н, Вт, А, В и т.д.).
3. Сделать чертеж, схему или рисунок, поясняющие описанный в задаче процесс. Указать на чертеже все данные и искомые величины задачи.
4. Написать уравнение или систему уравнений, описывающих происходящий физический процесс в общем виде.
5. Если равенства векторные, то их необходимо спроектировать по оси координат и записать в скалярной форме.
6. Используя условия задачи и чертеж, преобразовать исходные равенства так, чтобы в конечном виде в них входили лишь упомянутые в условиях задачи величины и табличные данные.
7. Решить задачу в общем виде и получить окончательную формулу для расчета искомой величины.
8. Произвести вычисления по этой формуле.
9. Произвести проверку единиц величин, подставив их в окончательную формулу. Полученная единица должна совпадать с единицей искомой в задаче величины.

Контрольная работа выполняется по темам 1- 4 и содержит пять задач, номера которых задаются преподавателем индивидуально для каждого студента.

Число задач по теме 1: Механика-60.

Число задач по теме 2: Молекулярная физика и термодинамика-80.

Число задач по теме 3: Электричество и магнетизм-200.

Число задач по теме 4: Механические и электромагнитные колебания и волны-60.

Контрольная работа № 2 выполняется по темам 5-7 и содержит пять задач, номера которых задаются преподавателем индивидуально для каждого студента.

Число задач по теме 5: Волновая и квантовая оптика- 100

Число задач по теме 6: Квантовая физика, физика атома-40

Число задач по теме 7: Элементы ядерной физики-30

<i>Критерии оценки контрольной работы</i>	<i>Количество баллов</i>
оформление работы в соответствии с предъявляемыми требованиями	0-4
обоснование выбора методики решения задачи;	0-4
точность в расчетах при определении искомой величин и правильность записи единиц измерения	0-3
наличие обоснования, вывода, использование профессиональной терминологии, логичность	0-4
Итого	0-15

15 баллов (90-100%) - оценка «отлично»

12 баллов (70-89%) - оценка «хорошо»

8 баллов (50-69%) - оценка «удовлетворительно»

0-7 балла (0-49%) - оценка «неудовлетворительно»

Составители: Садырева О.В., доцент, к.ф.-м.н.; Катанова Л.К., доцент, к.ф.-м.н.;
ст.препод. Лукашевич Л.Н.; ст.препод. Келарева И.А.; ст.препод. Шварте Н.А.

ФГБОУ ВО «УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГОРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ФАКУЛЬТЕТ ГЕОЛОГИИ И ГЕОФИЗИКИ

Кафедра физики

КОМПЛЕКТ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ

дисциплина **Физика**

Комплект лабораторных работ направлен на оценку уровня знаний, умений, владений, формирующих компетенции ОК-7, ПКД-2

Полное описание лабораторных работ работы размещено на сайте кафедры физики
<http://ugguphysica.narod.ru>

Тема 1: механика

1. Лабораторная работа “Определение плотности твердого тела правильной геометрической формы”

Цель работы: определение плотности твердого тела правильной геометрической формы, ознакомление и работа с измерительными инструментами.

Контрольные вопросы

1. Что называется плотностью тела?
2. Вывести расчетную формулу определения плотности цилиндра.
3. Пояснить порядок выполнения работы.
4. Какие измерения в данной работе относятся к прямым, какие к косвенным?
5. Как вычисляются абсолютная и относительная погрешности при многократных и однократных измерениях?
6. Вывести формулу для относительной погрешности при определении плотности тела в данной работе.
7. Сравните относительные погрешности прямых измерений в данной работе. Неточность измерений какой величины (m , или d) дает наибольший вклад в погрешность определения плотности?

2. Лабораторная работа “Динамическое определение массы с помощью инерционных весов”

Цель работы: определение массы тела динамическим методом.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение массы и веса тела.
2. Есть ли разница между тяготеющей и инертной массой?
3. Сформулируйте второй закон Ньютона и закон Гука, поясните физический смысл коэффициента упругости.
4. Под действием какой силы получается колебательное движение платформы?
5. Чем характеризуется простое гармоническое колебание?
6. Указать, в каких точках пути при колебании платформы ускорение и скорость наибольшие по величине.
7. Что называют периодом колебания и как он определяется в данной работе?
8. Запишите формулы для нахождения периодов математического, физического и пружинного маятников.
9. Как определяется масса тела с помощью инерционных весов?

3. Лабораторная работа “Определение момента инерции системы тел”

Цель работы: экспериментальное определение момента инерции системы тел и сравнение полученного результата с теоретически рассчитанным значением для этой же системы тел.

Контрольные вопросы

Опишите установку, применяемую в данной работе.

2. Какие силы, приводящие систему в движение, действуют на груз?
3. Сформулируйте основной закон динамики поступательного движения.
4. Сформулируйте основной закон динамики вращательного движения и поясните физический смысл входящих в этот закон величин.
5. Сделайте вывод расчетной формулы для экспериментального определения момента инерции.
6. Как можно теоретически рассчитать момент инерции?
7. Ввести формулу относительной погрешности определения момента инерции диска при определении ее по формуле: 8. Изменится ли момент инерции системы при увеличении массы подвешиваемых грузов?

4. Лабораторная работа “Определение модуля Юнга твердых тел динамическим методом”

Цель работы: Определение модуля Юнга, ознакомление с способом определения модуля Юнга методом стоячих волн.

Контрольные вопросы

1. Что называется напряжением?
2. Сформулируйте закон Гука.
3. Опишите ход работы на лабораторной установке.
4. Что называется длиной волны?
5. Объяснить расчетную формулу для определения значения модуля Юнга.
6. Выразить скорость звука в твердых телах через модуль Юнга.
7. Объяснить формулу относительной погрешности.

5. Лабораторная работа “Определение модуля сдвига по крутильным колебаниям”

Цель работы: изучение деформации сдвига и кручения, определение модуля сдвига металлического стержня.

Контрольные вопросы

1. Что называется деформацией тела? Виды деформации.
2. Сформулируйте закон Гука?
3. Что такое модуль сдвига?
4. Какой физический смысл модуля кручения?
5. Когда справедлив закон Гука?

6. Лабораторная работа “Определение скорости полёта пули при помощи баллистического маятника”

Цель работы: определение скорости полёта пули при помощи баллистического маятника.

Контрольные вопросы

1. Какая система тел называется замкнутой?
2. Формулировка закона сохранения импульса.
3. Какой удар называется упругим? неупругим? Как выглядит запись закона сохранения импульса для каждого из них?
4. Формулировка закона сохранения и превращения энергии и где он проявляется в данной работе.
5. Через какие параметры определяется скорость пули в данной работе и вид расчетной формулы.
6. Как вычисляются погрешности измерений в данной работе?

Лаборатория компьютерного физического практикума

7. Лабораторная работа “Определение ускорения свободного падения”

Цель работы: исследование движения материальной точки с постоянным ускорением и экспериментальное определение ускорения свободного падения на поверхности Земли.

Контрольные вопросы

1. Что называется материальной точкой, как определяется ее положение в пространстве?
2. Дайте определение системы отсчета.
3. Что называется механическим движением?
4. Что такое скорость материальной точки?
5. Дайте определение ускорения материальной точки.
6. Что называется траекторией движения материальной точки?
7. Запишите уравнение движения материальной точки.
8. Что характеризует тангенциальное ускорение? Как оно направлено?
9. Что характеризует нормальное ускорение? Как оно направлено?
10. Как рассчитывается полное ускорение?
11. Как движется материальная точка, если ускорение остается все время направленным вдоль скорости? Перпендикулярно скорости?

8. Лабораторная работа “Движение под действием постоянной силы”

Цель работы: исследование движения тела под действием постоянной силы и экспериментальное определение свойств сил трения покоя и движения, а также массы тела.

Контрольные вопросы

1. Что изучает динамика?
2. Дайте определение импульса материальной точки.
3. Что такое масса?
4. Дайте определение силы.
5. Сформулируйте второй закон Ньютона.
6. Как возникает сила трения?
7. Опишите свойства силы трения покоя.
8. При каких условиях возникает сила трения скольжения?
9. Перечислите свойства силы трения скольжения.
10. Запишите формулу, определяющую максимальное значение силы трения покоя.

9. Лабораторная работа “Абсолютно неупругий удар”

Цель работы: исследование физических характеристик, сохраняющихся при столкновениях, и экспериментальное определение зависимости тепловыделения при неупругом столкновении от соотношения масс при разных скоростях.

Контрольные вопросы

1. Что такое удар?
2. Какое столкновение называется абсолютно неупругим?
3. Какое столкновение называется абсолютно упругим?
4. Сформулируйте закон сохранения импульса. При каком столкновении он выполняется?
5. Сформулируйте закон сохранения полной механической энергии. При каком столкновении он выполняется?
6. Что называется полной механической энергией?
7. Какая система тел называется замкнутой (изолированной)?
8. При каком столкновении выделяется тепловая энергия?
9. Как рассчитывается относительная тепловая энергия?

Тема 2: молекулярная физика и термодинамика

1. Лабораторная работа “Определение отношения теплоемкости газа при постоянном давлении к теплоемкости газа при постоянном объеме”

Цель работы: изучение законов идеального газа и определение опытным путем величины показателя адиабаты для воздуха.

Контрольные вопросы

1. Что такое молярная теплоемкость газа, в каких единицах она измеряется ?
2. Написать соотношение между удельной и молярной теплоемкостями.
3. Какая из теплоемкостей C_p или C_v больше и почему?
4. Написать соотношение между C_p , C_v и R .
5. Чем характерны изотермический и адиабатический процессы?
6. Указать, в какие моменты работы происходит адиабатический и изохорический процессы.
7. Рассказать порядок выполнения работы.
8. Вывести расчетную формулу для вычисления γ .
9. На каком основании при получении расчетной формулы (17) для γ логарифмы чисел заменяются самими числами?
10. Как вычисляется относительная погрешность искомой величины в данной работе ?

2. Лабораторная работа “Определение массы моля и плотности воздуха”

Цель работы: экспериментальное определение массы моля и плотности воздуха при нормальных условиях.

Контрольные вопросы

1. Что называется молем вещества?
2. Что называется плотностью?
В каких единицах она измеряется?
3. Записать уравнение состояния идеального газа в форме закона Менделеева-Клайперона.
4. Вывести расчетную формулу для определения массы моля воздуха в данной работе.
5. Как вычислить плотность воздуха при нормальных условиях, зная массу моля?
6. Что называется давлением?

3. Лабораторная работа “Определение коэффициента поверхностного натяжения жидкости методом отрыва кольца”

Цель работы: опытным путем определить значение коэффициента поверхностного натяжения воды при комнатных условиях.

Контрольные вопросы

1. Что называется коэффициентом поверхностного натяжения?
2. В каких единицах он измеряется?
3. Как возникает и как направлена сила поверхностного натяжения?
4. Объяснить метод определения коэффициента поверхностного натяжения используемый в данной работе.
4. Какие силы действуют на кольцо при его отрыве от поверхности жидкости? В какой момент кольцо отрывается от жидкости?
5. Рассказать ход выполнения работы.
6. Вывести формулу для относительной погрешности измерения E_a .

4. Лабораторная работа “Определение коэффициента динамической вязкости жидкости по методу Стокса”

Цель работы: изучение явления внутреннего трения в жидкостях, определения динамической вязкости жидкости.

Контрольные вопросы

1. Что называется вязкостью?
2. Как возникает сила внутреннего трения в жидкости?
3. Дайте определение коэффициенту вязкости, в каких единицах он измеряется.

4. В чём сущность метода Стокса?
5. Какие силы действуют на шарик, падающий в жидкости?
6. Как изменяется с температурой коэффициент вязкости?
7. Как определяется плотность шариков и плотность жидкости?
8. Вывести расчётную формулу для вычисления вязкости.

Лаборатория компьютерного физического практикума

5. Лабораторная работа “Адиабатический процесс”

Цель работы: подтверждение закономерностей адиабатического процесса и экспериментальное определение показателя адиабаты, количества степеней свободы и структуры молекул газа в данной модели.

Контрольные вопросы

1. Какой процесс называется адиабатным и где он применяется?
2. Сформулируйте первое начало термодинамики.
3. Что такое число степеней свободы? Чему оно равно для одно-, двух-, трехатомной молекулы?
4. Запишите и сформулируйте первый закон термодинамики для адиабатного процесса.
5. Запишите уравнение Пуассона для адиабатного процесса.
6. Чему равен показатель адиабаты?
7. Что называется изопроцессом? Перечислите известные изопроцессы.

6. Лабораторная работа “Распределение Максвелла”

Цель работы: подтверждение распределения Максвелла для молекул идеального газа по скоростям и экспериментальное определение массы молекул в данной модели.

Контрольные вопросы

1. Что такое функция распределения?
2. Каковы особенности графика функции распределения Максвелла?
3. Напишите формулу вычисления средней арифметической скорости молекул идеального газа.
4. Напишите формулу вычисления средней квадратичной скорости молекул идеального газа.
5. Что называется наивероятнейшей скоростью? Напишите формулу для ее вычисления.

7. Лабораторная работа “Цикл Карно”

Цель работы: знакомство с компьютерной моделью цикла Карно в идеальном газе, Экспериментальное определение работы, совершённой газом за цикл и КПД прямого цикла Карно.

Контрольные вопросы

1. Что такое цикл Карно?
2. Какие устройства называют тепловыми двигателями?
3. Из каких основных элементов состоит тепловой двигатель?
4. Зачем в тепловом двигателе нужен холодильник?
5. Что является холодильником в двигателе внутреннего сгорания?
6. Объясните принцип действия теплового двигателя.
7. Чему равна работа, совершаемая в результате прямого цикла Карно? Как она определяется графически?
8. Как вычисляется термический КПД цикла Карно?

8. Лабораторная работа “Уравнение Ван-дер-Ваальса”

Цель работы: экспериментальное подтверждение закономерностей поведения реального газа.

Контрольные вопросы

1. Что такое физический газ?

2. Что такое идеальный газ? При каких условиях физический газ можно описывать моделью идеального газа?
3. Запишите уравнение состояния идеального газа.
4. Запишите уравнение состояния реального газа.
5. Что определяют константы Ван-дер-Ваальса?
6. Что такое изотерма?
7. В чем особенности критической изотермы?
8. Какова особенность поведения газа при температуре выше критической? Ниже критической?
9. На каких участках изотермы Ван-дер-Ваальса примерно совпадают с изотермами реального газа?

Тема 3: Электричество и магнетизм

1. Лабораторная работа “Определение емкости конденсатора”

Цель работы: изучение законов электростатики и одного из методов измерения емкости конденсатора.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение емкости конденсатора.
2. Объясните по схеме цепи назначение используемых приборов.
3. Подробно объясните принцип определения емкости в данной работе.
4. Выведите расчетные формулы для определения емкостей C_x , $C_{\text{спар}}$, $C_{\text{спос}}$.
5. Каковы единицы измерения емкости?
6. Изобразите схемы параллельного и последовательного соединений конденсаторов. Запишите формулы для результирующих емкостей.
7. Выведите формулы для расчета погрешностей измерений электроемкости.

2. Лабораторная работа “Определение сопротивлений проводников с помощью моста Уитстона”

Цель работы: изучение законов постоянного тока на примере классического метода измерения сопротивления проводников с помощью мостовой схемы и определение удельного сопротивления материала проводника.

Контрольные вопросы

1. Что такое электросопротивление проводника? От чего оно зависит?
2. Что такое удельное сопротивление проводника, в каких единицах оно измеряется?
3. От чего зависит удельное сопротивление проводника?
4. Начертите схему моста Уитстона и опишите способ измерения сопротивления с его помощью.
5. Выведите расчетную формулу для определения сопротивления неизвестного проводника.
6. Как вычисляются относительная и абсолютная погрешности измерения сопротивления R_x и удельного сопротивления ρ ?

3. Лабораторная работа “Определение индуктивности катушки”

Цель работы: изучение явления электромагнитной индукции и его законов, измерение индуктивности катушки, исследование зависимости индуктивности катушки от силы тока, протекающего по ее обмотке, а также индуктивности катушки, ее полного и индуктивного сопротивлений от частоты переменного тока.

Контрольные вопросы

1. В чем заключается явление самоиндукции?
2. Что называется индуктивностью и в каких единицах она измеряется?
3. От чего зависит индуктивность катушки?
4. Запишите формулы для индуктивного и модуля полного сопротивлений катушки.
5. Выведите расчетную формулу для определения индуктивности катушки.
6. Как зависит модуль полного сопротивления катушки от частоты изменения тока в ней?

7. Какое влияние оказывает наличие сердечника в катушке на величину силы тока в ней при переменном и постоянном токах?

4. Лабораторная работа “Изучение контрольно-измерительных приборов”

Цель работы: ознакомление с принципами действия и правилами эксплуатации электронных контрольно-измерительных приборов, используемых в лабораторных работах по разделам курса физики “Электричество и магнетизм”, “Колебания и волны”.

Контрольные вопросы

1. Расскажите о назначении универсального измерительного прибора В7-16А.
2. Укажите органы управления прибором В7-16А и расскажите о их назначении.
3. Расскажите о назначении генератора сигналов ЛЗ1.
4. Укажите органы управления генератора сигналов ЛЗ1 и расскажите о их назначении.
5. Расскажите о назначении осциллографа универсального С1-83.
6. Опишите функциональную схему осциллографа С1-83.
7. Укажите органы управления осциллографа С1-83 и расскажите об их назначении.

5. Лабораторная работа “Определение электродвижущей силы источника тока методом компенсации”

Цель работы: изучение законов постоянного электрического тока и ознакомление с компенсационным методом измерения электродвижущей силы источника тока.

Контрольные вопросы

1. Что называется электродвижущей силой источника тока?
2. Что такое сторонние силы?
3. Назовите способы измерения ЭДС.
4. Какова природа ошибки, допускаемой при измерении ЭДС источника тока с помощью вольтметра?
5. В чем заключается метод компенсации и каковы его достоинства?
6. Приведите принципиальную схему электрической цепи для измерения ЭДС методом компенсации. Поясните порядок проведения измерений.
7. Выведите расчетную формулу для определения E_x .
8. Какому условию должна удовлетворять в этой установке величина ЭДС источника тока, служащего для питания цепи?

6. Лабораторная работа “Снятие кривой намагничивания и петли гистерезиса с помощью осциллографа”

Цель работы: изучение законов электромагнетизма, методов исследования характеристик магнитного поля в веществе, свойств ферромагнетиков и ознакомление со способом опытного изучения магнитных свойств ферромагнетика с помощью осциллографа.

Контрольные вопросы

1. Назовите характеристики магнитного поля и дайте их определения.
2. Назовите величины, характеризующие магнитные свойства вещества.
3. Что такое намагниченность? Что характеризует эта величина? От чего она зависит?
4. На какие группы подразделяются вещества по магнитным свойствам?
5. Назовите отличительные свойства ферромагнитных веществ.
6. Что представляет собой кривая намагничивания?
7. В чем заключается явление магнитного гистерезиса?
8. Что такое остаточная индукция и коэрцитивная сила?
9. Что представляют собой магнитные домены?
10. Опишите процесс изменения доменной структуры при намагничивании ферромагнетика.
11. Что такое магнитное насыщение?
12. Нарисуйте схему установки, поясните назначение всех элементов схемы, расскажите порядок выполнения работы.
13. Выведите расчетные формулы для определения B и H .
14. На что расходуется энергия при перемагничивании ферромагнетика?

7. Лабораторная работа “Определение горизонтальной составляющей вектора индукции магнитного поля Земли”

Цель работы: изучение законов магнетизма, ознакомление с одним из методов определения характеристик магнитного поля Земли и измерение с помощью прибора (тангенс-гальванометра) горизонтальной составляющей магнитного поля Земли.

Контрольные вопросы

1. В каких единицах измеряется индукция магнитного поля?
2. Назовите три основных характеристики магнитного поля Земли.
3. Запишите формулу для индукции магнитного поля кругового тока.
4. Расскажите порядок выполнения работы.
5. Каков физический смысл постоянной тангенс-гальванометра?
6. Для какой цели измерение углов отклонения магнитной стрелки производится по обоим ее концам?
7. С какой целью измерения производятся при двух направлениях тока в катушке тангенс-гальванометра?
8. С какой целью измерения углов отклонения магнитной стрелки производятся при двух значениях силы тока.

8. Лабораторная работа “Определение удельного заряда электрона”

Цель работы: изучение движения элементарных частиц в электрическом и магнитном полях, экспериментальное определение удельного заряда электрона с помощью магнетрона.

Контрольные вопросы

1. Что называется удельным зарядом электрона?
2. Какая сила действует на электрон в электрическом поле?
3. Какая сила действует на электрон, движущийся в магнитном поле?
4. Выведите формулу для радиуса кривизны электрона, движущегося в однородном магнитном поле.
5. Какой вид может принимать форма траектории электрона при разных значениях индукции магнитного поля в магнетроне.
6. Что собой представляет сбросовая характеристика магнетрона?
7. Какова методика определения $V_{кр}$?

9. Лабораторная работа “Исследование переходных процессов в цепях, содержащих индуктивность и сопротивление, при коммутации источника постоянного тока”

Цель работы: убедиться, что катушка индуктивности обладает способностью накапливать магнитную энергию и экспериментально установить закон изменения силы тока и напряжения на элементах цепи во время протекания переходного процесса, определить их длительность.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение переходного процесса, протекающего при замыкании или размыкании цепи с индуктивностью и сопротивлением.
2. Как определяется характерное время переходного процесса?
3. Нарисуйте графики зависимости силы тока от времени при размыкании и замыкании цепи.
4. Сформулируйте и поясните закон индукции Фарадея.
5. Запишите первое и второе правило Кирхгофа.
6. Расскажите порядок выполнения работы.

Лаборатория компьютерного физического практикума

10. Лабораторная работа “Движение заряженной частицы в электрическом поле”

Цель работы: знакомство с моделью процесса движения заряда в однородном электрическом поле и экспериментальное определение величины удельного заряда частицы.

Контрольные вопросы

1. Перечислите свойства электрического заряда.
2. Что называют элементарным электрическим зарядом?
3. Сформулируйте и запишите закон Кулона.
4. Дайте определение электрического поля.
5. Что называют напряжённостью электрического поля?
6. Какое поле называется однородным?
7. Что такое конденсатор?
8. Какое поле существует между пластинами плоского конденсатора?
9. Какую форму имеет траектория движения электрона между пластинами плоского конденсатора?

11. Лабораторная работа “Электрическое поле точечных зарядов”

Цель работы: знакомство с моделированием электрического поля двух точечных зарядов и экспериментальное определение величины электрической постоянной.

Контрольные вопросы

1. Что такое электрическое поле?
2. Запишите и сформулируйте закон Кулона.
3. Что называется напряжённостью электрического поля?
4. Дайте определение линий напряжённости электрического поля.
5. Изобразите с помощью линий напряжённости поле положительного заряда, отрицательного заряда и поля диполя.
6. Сформулируйте принцип суперпозиции для напряжённости электрического поля.
7. Что такое электрический диполь?
8. Что называется дипольным моментом?
9. Чему равна напряжённость электрического поля на оси диполя на большом расстоянии от него.

12. Лабораторная работа “Исследование зависимости мощности и КПД источника постоянного тока от внешней нагрузки”

Цель работы: знакомство с компьютерным моделированием цепей постоянного тока и исследование зависимости мощности и КПД источника постоянного тока от сопротивления внешней цепи.

Контрольные вопросы

1. Нарисуйте полную цепь. Запишите и сформулируйте закон Ома для полной цепи.
2. Что такое ток короткого замыкания?
3. Как вычисляется мощность, выделяемая во внешней цепи? При каком условии она достигает наибольшего значения?
4. Что такое полная мощность?
5. Как вычисляется КПД источника тока?
6. Верно ли утверждение, что мощность, выделяемая во внутренней части цепи, постоянна для данного источника?
7. Чему равно КПД источника тока, когда мощность, выделяемая во внешней цепи, достигает наибольшего значения?

13. Лабораторная работа “Закон Ома для неоднородного участка цепи”

Цель работы: знакомство с компьютерным моделированием цепей постоянного тока и экспериментальное подтверждение закона Ома для неоднородного участка цепи.

Контрольные вопросы

Что называется электрическим током?

1. Что такое сила тока?
2. Какой участок цепи называется однородным и неоднородным?
3. Сформулируйте и запишите закон Ома для однородного участка цепи в интегральной форме.
4. Сформулируйте закон Ома для однородного участка цепи в дифференциальной форме.
5. Что называется удельным сопротивлением проводника?

6. Что называется сторонней силой? Какова её природа?
7. Закон Ома для неоднородного участка цепи.
8. Дайте определение понятий: разность потенциалов, ЭДС источника тока, напряжение на участке цепи.

Тема 4: Механические и электромагнитные колебания и волны

1. Лабораторная работа “Сложение однонаправленных и взаимно перпендикулярных колебаний”

Цель работы: практическое ознакомление с физикой гармонических колебаний, исследование процесса сложения гармонических электрических колебаний.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение гармонических колебаний.
2. Запишите и поясните уравнение гармонических колебаний.
3. На примере сложения двух гармонических колебаний проиллюстрируйте метод векторных диаграмм.
4. Что называется биениями?
5. Как определить сдвиг фаз между двумя одночастотными взаимно перпендикулярными колебаниями по результирующей траектории?
6. Опишите устройство экспериментальной установки, охарактеризуйте назначения приборов.

2. Лабораторная работа “Определение скорости распространения электромагнитных волн с помощью двухпроводной линии”

Цель работы: изучение процесса распространения электромагнитных волн и экспериментальное измерение скорости их распространения в воздухе методом стоячих волн.

Контрольные вопросы

1. От каких характеристик среды зависит скорость распространения электромагнитных волн?
2. Как образуется стоячая электромагнитная волна в двухпроводной линии?
3. Записать и пояснить уравнение стоячей волны.
4. Что называется пучностью и узлом стоячей волны?
5. Каким образом проводится определение длины волны?
6. Расскажите о порядке выполнения работы.

3. Лабораторная работа “Исследование свободных затухающих колебаний в электрическом колебательном контуре”

Цель работы: изучение законов электричества и магнетизма; измерение параметров затухающих колебаний силы, тока и напряжения на элементах цепи колебательного контура.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение затухающих колебаний. Напишите уравнение затухающих колебаний.
2. Что называется коэффициентом затухания?
3. Что характеризует логарифмический декремент затухания?
4. Дайте определение добротности колебательной системы?
5. Нарисуйте графики зависимости силы тока и заряда от времени при затухающем процессе в последовательном колебательном контуре.
6. Расскажите о порядке выполнения работы.
7. Какие приборы используются при изучении затухающих колебаний в колебательном контуре.
8. Найти логарифмический декремент затухания математического маятника, если за время $t = 1$ мин амплитуда колебаний уменьшилась в два раза. Длина маятника $l = 1$ м.
9. Колебательный контур состоит из конденсатора $C = 405$ нФ, катушки с индуктивностью

$L = 10 \text{ мГн}$ и сопротивления $R = 2 \text{ Ом}$. Во сколько раз уменьшится разность потенциалов на обкладках конденсатора за один период колебаний?

4. Лабораторная работа “Изучение явления резонанса в колебательном контуре”

Цель работы: изучение колебательных процессов, наблюдаемых в электрической цепи на примере работы колебательного контура.

Контрольные вопросы

1. Что называется колебательным контуром?
2. Почему в реальном колебательном контуре свободные колебания всегда являются затухающими?
3. В чём заключается явление резонанса?
4. Что такое добротность колебательного контура и от чего она зависит?
5. Какая кривая называется резонансной? Как изменяется её вид при увеличении коэффициента затухания.

Лаборатория компьютерного физического практикума

5. Лабораторная работа “Свободные колебания в RLC-контуре”

Цель работы: экспериментальное исследование закономерностей свободных затухающих колебаний и определение величины индуктивности контура.

Контрольные вопросы

1. Что называется колебанием?
2. Какие колебания называются свободными?
3. Что называется колебательным контуром?
4. Что такое идеальный колебательный контур?
5. Какие колебания называются гармоническими?
6. Какие физические величины испытывают колебания в идеальном колебательном контуре?
7. Запишите дифференциальное уравнение для заряда конденсатора в контуре в случае свободных незатухающих гармонических колебаний.
8. Запишите формулу зависимости заряда на конденсаторе от времени при свободных незатухающих колебаниях в контуре.
9. Запишите дифференциальное уравнение для заряда конденсатора в контуре в случае свободных затухающих колебаний.
10. Запишите формулу зависимости заряда на конденсаторе от времени при свободных затухающих колебаниях в контуре.
11. Запишите формулу Томсона для периода колебаний.
12. Напишите формулу для коэффициента затухания и частоты затухающих колебаний.
13. Что называется временем затухания?
14. Чему равен логарифмический декремент затухания?
15. Как определяется добротность колебательного контура?
16. Как определяется графически время затухания?

6. Лабораторная работа “Вынужденные колебания в RLC- контуре”

Цель работы: экспериментальное подтверждение закономерностей при вынужденных колебаниях в RLC-контуре.

Контрольные вопросы

1. Что называется колебанием?
2. Дайте определение вынужденным колебаниям.
3. Что такое колебательный контур?
4. Запишите дифференциальное уравнение вынужденных колебаний для заряда конденсатора.
5. Как выглядит решение этого уравнения в установившемся режиме?
6. Как определяется сила тока в цепи при вынужденных колебаниях?

7. Запишите формулу для напряжения на конденсаторе в цепи.
8. Что называется резонансом напряжения?
9. Что называется резонансом тока?
10. На какой частоте наблюдается резонанс тока?
11. На какой частоте наблюдается резонанс напряжения?
12. Как определить добротность контура?
13. Что такое резонансная кривая?

Тема 5: Волновая и квантовая оптика

1. Лабораторная работа “Определение показателя преломления жидкостей при помощи рефрактометра”

Цель работы: изучение явления преломления света и полного внутреннего отражения, а также ознакомление со способом измерения показателя преломления с помощью рефрактометра.

Контрольные вопросы

1. Что называется относительным и абсолютным показателем преломления вещества?
2. Сформулируйте закон преломления света.
3. В чем состоит явление полного внутреннего отражения и при каких условиях оно наблюдается?
4. Объясните принцип действия рефрактометра.
5. Расскажите порядок выполнения работы.

2. Лабораторная работа “Определение радиуса кривизны линзы при помощи колец Ньютона”

Цель работы: изучение явления интерференции света и применения этого явления для измерения радиуса кривизны линзы при помощи колец Ньютона.

Контрольные вопросы

1. Что представляет собой монохроматический свет?
2. Что называется геометрической и оптической разностью хода лучей?
3. В чем заключается явление интерференции света?
4. Расскажите, как происходит интерференция в клинообразной пластинке.
5. Как получаются кольца Ньютона?
6. Вывести формулу для определения радиуса кривизны линзы, используя радиусы колец Ньютона.
7. Рассказать порядок выполнения работы.

3. Лабораторная работа “Определение длины световой волны с помощью дифракционной решетки”

Цель работы: изучение явления дифракции света на примере дифракционной решетки и способа измерения длины световой волны с помощью дифракционной решетки.

Контрольные вопросы

1. В чем состоит явление дифракции света?
2. Что называется дифракционной решеткой?
3. Объяснить дифракцию от решетки.
4. Записать и пояснить условие главных дифракционных максимумов.
5. Чем спектр, получаемый с помощью дифракционной решетки, отличается от получаемого с помощью призмы?
6. Поясните цель работы и порядок ее выполнения.

4. Лабораторная работа “Изучение спектра дифракционной решетки с помощью гониометра”

Цель работы: изучение явления дифракции и ознакомление с методом определения длины волны света с помощью гониометра.

Контрольные вопросы

1. В чем состоит явление дифракции света?

2. Что представляет собой дифракционная решетка?
3. Что называется периодом дифракционной решетки?
4. Объясните, как происходит процесс дифракции на решетке.
5. Запишите условие главных дифракционных максимумов.
6. Каким образом можно определить максимальное число максимумов, которое можно получить с помощью дифракционной решетки?
7. Чем отличается спектр, получаемый с помощью дифракционной решетки от получаемого с помощью призмы?

8. Расскажите порядок выполнения работы.

5. Лабораторная работа “Изучение явления поляризации света. Закон Брюстера”

Цель работы: изучение поляризации света при отражении света от поверхности диэлектриков.

Контрольные вопросы

1. Какой свет называется плоскополяризованным?
2. Назовите способы получения поляризованного света.
3. Сформулируйте закон Брюстера
4. Что такое угол Брюстера?
5. Сформулируйте закон Малюса.

6. Лабораторная работа “Определение процентного содержания сахара при помощи полутеневого поляриметра”

Цель работы: изучение поляризации света и физических основ работы полутеневого поляриметра.

Контрольные вопросы

1. В чем отличие поляризованного света от естественного?
2. Какие вещества называются оптически активными? Перечислите разновидности оптически активных веществ.
3. Что называется удельным вращением? От чего зависит эта величина? Запишите формулу для определения удельного вращения.
4. Нарисуйте оптическую схему полутеневого поляриметра. Перечислите основные его части и объясните их назначение.
5. Расскажите о назначении и устройстве призмы Николя.
6. Опишите устройство и принцип действия кварцевого компенсатора.
7. Расскажите о порядке измерения углов плоскости поляризации в данной работе.
8. Опишите порядок определения удельного вращения раствора сахара в данной работе.
9. Приведите примеры применения явления вращения плоскости поляризации.

7. Лабораторная работа “Измерение яркостной температуры вольфрама оптическим пирометром ЛОП-72”

Цель работы: изучение законов теплового излучения, ознакомление с устройством и принципом действия оптического пирометра ЛОП-72 и измерение с его помощью яркостных температур нагретого тела по тепловому излучению в видимой области спектра.

Контрольные вопросы

1. Что называется абсолютно черным телом?
2. Как определяется яркость нагретого тела, от чего она зависит?
3. Дайте определение яркостной температуры.
4. Сформулируйте закон Стефана–Больцмана.
5. Как определяется спектральная плотность энергетической светимости?
6. Сформулируйте закон смещения Вина.
7. Назовите единицы измерения энергетической светимости и спектральной плотности энергетической светимости.

Лаборатория компьютерного физического практикума

8. Лабораторная работа “Моделирование оптических систем”

Цель работы: ознакомление с построением изображения в тонкой линзе и микроскопе и проверка формулы увеличения микроскопа.

Контрольные вопросы

1. Что изучает геометрическая оптика?
2. Что называется линзой?
3. Какая линза называется тонкой?
4. Что такое главная и побочная оптические оси?
5. Что такое главные фокусы линзы? Где они расположены?
6. Какая линза называется собирающей? Рассеивающей?
7. Можно ли с помощью рассеивающей линзы получить увеличенное изображение предмета? Сделайте чертеж.
8. Можно ли с помощью собирающей линзы получить уменьшенное изображение предмета? Сделайте чертеж.
9. Запишите формулу тонкой линзы.
10. Что называется оптической силой линзы, в каких единицах она измеряется?
11. Что представляет собой микроскоп? Опишите принцип его действия.
12. Как вычисляется увеличение микроскопа?
13. Что называется расстоянием наилучшего зрения.

9. Лабораторная работа “Интерференционный опыт Юнга”

Цель работы: знакомство с моделированием процесса сложения когерентных электромагнитных волн и экспериментальное исследование закономерностей взаимодействия световых волн от двух источников (щелей).

Контрольные вопросы

1. Что называется интерференцией?
2. Дайте определение когерентных волн.
3. В чем заключается опыт Юнга?
4. Что такое геометрическая и оптическая разности хода волн?
5. Сформулируйте условие, при выполнении которого наблюдается интерференционный максимум.
6. Чему равно расстояние между соседними светлыми интерференционными полосами в опыте Юнга?

10. Лабораторная работа “Внешний фотоэффект”

Цель работы: изучение явления внешнего фотоэффекта, экспериментальное подтверждение его закономерностей и определение красной границы фотоэффекта, работы выхода электронов из фотокатода и постоянной Планка.

Тема 6: Квантовая физика и физика атома

1. Лабораторная работа “Определение постоянных Ридберга и Планка спектроскопическим методом”

Цель работы: изучение спектра излучения атомарного водорода, определение постоянных Ридберга и Планка на основе измерения длин волн первых трёх линий в серии Бальмера.

Контрольные вопросы

1. Опишите характерные особенности спектра испускания атома водорода.
2. Сформулируйте постулаты Бора. Получите выражение для энергии электрона в атоме водорода.
3. Каков энергетический спектр атомного водорода? Объясните основные закономерности спектра испускания.
4. Каким переходам соответствуют видимые линии серии Бальмера?

5. Получите расчётную формулу для определения постоянной Планка по спектру испускания атома водорода.
6. Опишите принцип действия и устройство монохроматора УМ–2.
7. В чём заключается градуировка монохроматора?
8. Опишите порядок проведения работы.

2. Лабораторная работа “Определение постоянной Планка с помощью полупроводникового лазера”

Цель работы: является ознакомление с принципом работы полупроводниковых инжекционных лазеров, определение постоянной Планка на основе измерения напряжения включения полупроводникового лазера и длины волны излучаемого им света.

Контрольные вопросы

1. Что называется уровнем Ферми?
 2. Какой энергетический уровень считается вырожденным?
 3. Что такое инверсная заселенность уровней?
 4. Какие методы накачки применяют в полупроводниковых лазерах?
 5. Чем характеризуется модовый состав лазерного излучения?
 6. Как в работе определяется длина волны излучения лазерного диода?
 7. Как устроена экспериментальная установка?
- Каково назначение ее отдельных узлов и блоков?
8. На каком принципе основан расчет постоянной Планка в работе?

Лаборатория компьютерного физического практикума

3. Лабораторная работа “Спектр излучения атомарного водорода”

Цель работы: знакомство с планетарной и квантовой моделями атома и закономерностями формирования линейчатого спектра излучения атомарного водорода и экспериментальное определение постоянной Ридберга.

Контрольные вопросы

1. Что называется спектром электромагнитного излучения?
2. Какие виды спектров вы знаете? Что является их источниками?
3. Опишите планетарную модель атома.
4. В чем отличие квантовой модели от планетарной?
5. При каких условиях электроны в атоме излучают или поглощают электромагнитное излучение?
6. Дайте характеристику стационарным состояниям атома.
7. Что определяет главное квантовое число? Какие значения оно принимает?
8. Что включает в себя понятие об энергетических уровнях?
9. Что называется спектральной серией?
10. Назовите спектральные серии излучения атомарного водорода. Объясните, как они возникают?

4. Лабораторная работа “Определение периода кристаллической решетки методом дифракции электронов

Цель работы: является изучение волновых свойств электронов, знакомство с компьютерной моделью дифракции электронов при их рассеянии на одномерной монокристаллической решётке и экспериментальное определение периода кристаллической решётки «плёнки металла».

Контрольные вопросы

1. Что такое кристаллическая решетка?
2. Что называется элементарной ячейкой?
3. Что такое период кристаллической решетки?
4. Что понимают под волнами де Бройля?
5. Чему равна длина волны де Бройля?

6. В чем суть корпускулярно -волнового дуализма?
7. Что такое дифракция микрочастиц?
8. Объясните образование дифракционной картины при рассеивании электронов веществом.
9. Что излучает электронография?
10. Как рассчитывается период кристаллической решетки в данной работе?

5. Лабораторная работа “Эффект Комптона”

Цель работы: экспериментальное подтверждение закономерностей эффекта Комптона и определение комптоновской длины волны электрона.

Контрольные вопросы

1. Что называется эффектом Комптона?
2. Опишите процесс взаимодействия падающего рентгеновского фотона и свободного электрона вещества.
3. Напишите формулу для эффекта Комптона.
4. Напишите формулу для комптоновской длины волны электрона. Чему она равна?
5. Какие законы сохранения выполняются при взаимодействии фотона с электроном в эффекте Комптона?
6. Напишите закон сохранения энергии и импульса для эффекта Комптона.
7. Чему равно максимальное изменение длины волны рассеянного фотона и когда оно наблюдается?

Тема 7: Элементы ядерной физики

1. Лабораторная работа “ Исследование характеристик газоразрядного счетчика частиц”

Цель работы: ознакомление с устройством, принципом действия счетчика Гейгера-Мюллера, снятие его характеристики, по которой надо выбрать рабочее напряжение и определить наклон плато Гейгера.

Контрольные вопросы

1. Что представляет собой счетчик Гейгера-Мюллера?
2. Поясните несамостоятельный и самостоятельный газовые разряды.
3. Чем отличаются пропорциональные счетчики от счетчиков с самостоятельным разрядом?
4. Поясните образование лавины ионов в счетчике под действием одной частицы.
5. Объясните механизм самогашения счетчика.
6. Почему скорость счета при одном и том же напряжении на счетчике разная?
7. Какая часть счетной характеристики называется плато Гейгера, как находятся наклон плато и рабочее напряжение?
8. Почему при низких напряжениях на счетчике частицы не регистрируются?

2. Лабораторная работа “Определение максимальной энергии и коэффициента поглощения бета-излучения”

Цель работы: изучение свойств радиоактивных излучений, измерение интенсивностей

Фона и β -излучения, снятие кривой поглощения и определение коэффициента поглощения.

Контрольные вопросы

1. Назовите виды и свойства радиоактивных излучений .
2. Какая из траекторий на рис. 5 принадлежит α -, β - и γ - излучениям? Укажите направление магнитного поля .
3. Что изменится на рис. 5, если между источником излучения и свинцовым коллиматором поместить: а) лист бумаги; б) стальную пластинку толщиной 5 мм?
4. Приведите примеры использования радиоактивных излучений в горной промышленности.

6. Поясните виды β -распада.

3. Лабораторная работа “Определение длины свободного пробега и энергии альфа-частиц”

Цель работы: изучение свойств α -частиц, и закона радиоактивного распада, определение периода полураспада T и постоянной распада λ , длины свободного пробега и энергии α -частиц.

Контрольные вопросы

1. Что такое α -частица, каков её состав?
2. Запишите и поясните закон радиоактивного распада в дифференциальной и интегральной формах.
3. Что называется периодом полураспада?
4. Запишите закон Гейгера - Нэттола.
5. Что такое средний и экстраполированный пробег α -частиц?
6. Как в работе определяется энергия и период полураспада α -частиц.
7. Поясните работу блока детектирования α -частиц.
8. Расскажите порядок выполнения работы.

Критерии оценки: при выполнении лабораторной работы осуществляется следующим образом:

Критерии оценки лабораторной работы	Количество баллов
Оформление отчета по лабораторной работе в соответствии с предъявленными требованиями	0-4
точность в расчетах при определении искомых физических величин с учетом расчета их погрешностей и правильность записи единиц измерения	0-4
правильность записи единиц измерения	0-3
обоснованные выводы о результатах выполненной лабораторной работы	0-4
Итого	0-15

15 баллов (90-100%) - оценка «отлично»

12 баллов (70-89%) - оценка «хорошо»

8 баллов (50-69%) - оценка «удовлетворительно»

0-7 балла (0-49%) - оценка «неудовлетворительно»

Составители: Куриченко А.А., доцент, к.ф.-м.н., Адриановский Б.П., доцент, к.ф.-м.н., Тарасов Б.Н., доцент, к.ф.-м.н., Полев В.Ф., доцент, к.ф.-м.н., Комарова Л.И., доцент, к.ф.-м.н., Славина Т.П., доцент, к.г.-м.н., Кривошеин А.А., доцент, к.г.-м.н., Садырева О.В., доцент, к.ф.-м.н.; Катанова Л.К., доцент, к.ф.-м.н.; ст.преп. Лукашевич Л.Н.; ст.преп. Келарева И.А.; ст.преп. Шварте Н.А., ст.преп. Заянова С.А., ст.преп. Шитова С.Н.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ОПРОСА

дисциплина **ФИЗИКА**

Вопросы для проведения опроса направлены на оценку уровня знаний, умений, формирующих компетенции ОК-7, ОПК-2

Раздел 1: Механика

Тема 1: Механика

1. Что такое механическое движение? Какими свойствами обладают абсолютное время и абсолютное пространство?
2. Что представляет собой система отсчета?
3. Чем путь отличается от перемещения тела?
4. Дайте определение мгновенной, средней и средней путевой скорости.
5. Дайте определение мгновенного, среднего и центростремительного ускорения.
6. Какое движение называется равномерным, а какое равноускоренным. Приведите Уравнения этих движений в векторном и скалярном виде.
7. Какое движение называется вращательным? Назовите основные характеристики вращательного движения тела.
8. Что понимается под угловым перемещением тела, его угловой скоростью и угловым ускорением?
9. Укажите взаимосвязь между линейными и угловыми кинематическими характеристиками вращательного движения тела (перемещение и угловое перемещение; скорость и угловая скорость; ускорение и угловое ускорение).
10. Чему равно полное ускорение при криволинейном движении?
11. В чем различие между кинематикой и динамикой материальной точки?
12. Дайте определение силы в механике и сформулируйте принцип суперпозиции для сил.
13. Какие системы называются инерциальными?
14. К каким системам применимы законы динамики? Сформулируйте первый закон динамики. Что понимается под инерцией тел?
15. Сформулируйте второй закон динамики. Что понимается под инертностью тела?
16. Укажите взаимосвязь между импульсом силы и изменением импульса тела.
17. Сформулируйте третий закон динамики.
18. Сформулируйте закон всемирного тяготения и закон Гука.
19. Какие силы называются фундаментальными силами?
20. Сформулируйте принцип относительности Галилея и закон сложения скоростей в классической механике.
21. Назовите основные характеристики динамики вращательного движения. Что понимается под моментом силы и моментом импульса?

22. Сформулируйте основной закон динамики для вращательного движения.
23. Что такое момент инерции тела относительно оси вращения и от каких параметров он зависит?
24. Сформулируйте теорему Штейнера.
25. Запишите формулы для определения моментов инерции шара, сплошного и полого цилиндров, стержней.
26. Сформулируйте законы сохранения импульса и момента импульса.
27. Какие удары называют абсолютно упругими и абсолютно неупругими?
28. Запишите законы сохранения энергии и импульса при абсолютно упругом и абсолютно неупругом ударах.
29. Что такое механическая работа и мощность? Работа.
30. Назовите виды механической энергии. Что понимается под полной механической энергией тела?
31. Сформулируйте теорему об изменении кинетической энергии для поступательного и вращательного движений.
32. От чего зависит потенциальная энергия тела?
33. Какие силы называются консервативными и неконсервативными? Чему равна работа консервативной силы, если начальное и конечное положения тела совпадают?
34. Сформулируйте теорему об изменении потенциальной энергии. Чему равна потенциальная энергия тела, поднятого на высоту h , и упруго деформированного тела?
35. Укажите связь между консервативной силой и потенциальной энергией.
36. Сформулируйте условие равновесия тел, находящихся в поле консервативных сил.
37. Сформулируйте закон сохранения полной механической энергии тела.

Тема 2: Молекулярная физика и термодинамика

1. В чем суть статистического и термодинамического методов описания свойств макросистем?
2. С помощью каких параметров определяется состояние системы?
3. Какой газ называется идеальным?
4. Сформулируйте основные положения МКТ.
5. Что понимается под давлением и температурой в МКТ?
6. Какая температур принимается за 0 К?
7. Запишите основное уравнения МКТ. Закон Дальтона.
8. Запишите уравнение состояния ИГ (ур-е Менделеева-Клапейрона)
9. Сформулируйте основные газовые законы.
10. Чем определяются число степеней свободы газовых молекул?
11. Сформулируйте закон равномерного распределения энергии молекул по степеням свободы.
12. Изобразите графически закон распределение молекул по модулю скорости.
13. Какими свойствами обладает функция распределения Максвелла?
14. Запишите барометрическую формулу Лапласа.
15. Запишите закон Больцмана для распределения частиц во внешнем потенциальном поле.
16. Как рассчитать среднее число столкновения и среднюю длину свободного пробега молекул?
17. В чем суть явлений диффузии, теплопроводности и внутреннего трения?
18. Внутренняя энергия газа. Теплота и работа.
19. Сформулируйте первое начало термодинамики.
20. Чему равна работа при расширения ИГ?
21. Что понимается под теплоемкостью? Какие виды теплоемкости Вы знаете?
22. Примените первое начало термодинамики к изотермическому процессу.

23. Примените первое начало термодинамики к изохорическому процессу.
24. Примените первое начало термодинамики к изобарическому процессу.
25. Примените первое начало термодинамики к адиабатическому процессу.
26. Какой процесс называется адиабатическим
27. Чему равна работа при адиабатическом процессе?
28. Что представляет собой Цикл Карно?
29. Чему равен КПД цикла Карно?
30. Как определить КПД произвольного цикла?
31. Какие процессы называются обратимыми и необратимыми?
32. Что такое приведенное количество теплоты и как оно связано с энтропией S ?
33. Чему равна термодинамическая вероятность W состояния и как она связана с энтропией S ?
34. Сформулируйте статистическое толкование энтропии.
35. Сформулируйте принцип возрастания энтропии.
36. Как изменяется энтропия при изотермическом, изобарическом и изохорическом процессах?
37. Как изменяется энтропия при адиабатическом процессе?
38. Сформулируйте второе начало термодинамики.
39. Статистическое толкование второго начала ТД.
40. Ограниченность области применения второго начала термодинамики.

Тема 3: Электричество и магнетизм

1. Какой электрический заряд считается элементарным?
2. Сформулируйте и запишите закон Кулона.
3. Сформулируйте закон сохранения электрического заряда.
4. Что называется напряженностью электрического поля?
5. В чем заключается принцип суперпозиции полей?
6. Сформулируйте теорему Гаусса для электростатического поля.
7. Запишите формулу для расчета напряженности электрического поля точечного заряда.
8. Как рассчитать электрическое поле, создаваемое бесконечной равномерно заряженной плоскостью?
9. Как рассчитать электрическое поле, создаваемое двумя бесконечными равномерно заряженными плоскостями?
10. Как рассчитать электрическое поле, создаваемое бесконечной равномерно заряженной нитью.
11. Чему равна работа поля при перемещении точечных зарядов?
12. Что называется потенциалом электростатического поля?
13. Потенциал поля системы точечных зарядов.
14. Запишите связь между напряженностью поля и потенциалом.
15. Какие поверхности называются эквипотенциальными?
16. Запишите формулу для расчета разности потенциалов между двумя точками поля.
17. Запишите формулу для расчета разности потенциалов между двумя точками, находящимися на расстоянии r_1 и r_2 от бесконечной равномерно заряженной нити (цилиндра).
18. Рассчитайте потенциал бесконечной равномерно заряженной плоскости и разность потенциалов между двумя заряженными плоскостями.
19. Рассчитайте поле равномерно заряженной сферической поверхности.
20. Что такое электрический диполь?
21. Поведение диполя в однородном и неоднородном электрических полях.

22. Какие вещества называются диэлектриками? Назовите типы диэлектриков
23. Напряженность поля в диэлектриках. Диэлектрическая проницаемость ϵ .
24. Сформулируйте теорему Гаусса для диэлектриков.
25. Что такое вектор электрической индукции?
26. Как распределяются заряды в проводнике в отсутствие поля.
27. Как распределяются избыточные заряды в проводниках?
28. Чему равна напряженность поля вблизи поверхности заряженного проводника?
29. Чему равна емкость проводника и от чего она зависит?
30. Чему равна емкость уединенного проводника?
31. Какой конденсатор называется плоским и чему равна его емкость?
32. Какое соединение конденсаторов называется последовательным, а какое параллельным?
33. Чему равна общая емкость при последовательном и параллельном соединении конденсаторов?
34. Чему равна энергия заряженного конденсатора? Заряд конденсатора?
35. Как определяется энергия электростатического поля и объемная плотность энергии этого поля?
36. Какой электрический ток называется постоянным? Назовите его характеристики.
37. Сформулируйте условия существования электрического тока.
38. Какие силы, действующие на электрические заряды, называются сторонними? Сторонние силы в электрической цепи. Источники тока. Электродвижущая сила.
39. Для чего нужны источники тока и чему равна их ЭДС?
40. В чем различие между разностью потенциалов, ЭДС и напряжением?
41. Запишите закон Ома в интегральной и дифференциальной форме для однородного участка цепи.
42. Запишите закон Ома для неоднородного участка цепи и замкнутой цепи.
43. Как определяется работа и мощность электрического тока?
44. Сформулируйте закон Джоуля-Ленца.
45. Сформулируйте правила Кирхгофа.
46. Что является источником магнитных полей?
47. Что называется индукцией магнитного поля?
48. Как магнитное поле действует на движущиеся электрические заряды и чему равна Сила Лоренца?
49. Запишите закон Био-Савара-Лапласа и сформулируйте принцип суперпозиции для индукции магнитного поля.
50. Каким способом можно графически изобразить магнитное поле?
51. За счет чего взаимодействуют два параллельных тока и какая сила называется силой Ампера?
52. Сформулируйте теорему Гаусса для вектора магнитной индукции.
53. Как определяется поток вектора магнитной индукции через произвольную поверхность?
54. Сформулируйте и запишите теорему о циркуляции вектора индукции магнитного поля.
55. Почему магнитное поле является вихревым полем?
56. Как определить работу поля по перемещению проводника и контура с током в магнитном поле?
57. Чему равен механический момент сил, действующий на рамку с током в магнитном поле?
58. В чем заключается явление электромагнитной индукции?
59. Запишите закон Фарадея и сформулируйте правило Ленца.
60. Какое явление называется явлением самоиндукции?

61. Чему равна индуктивность длинного соленоида?
62. Как влияет самоиндукция на ток при замыкании и размыкании электрической цепи?
63. Чему равна энергия магнитного поля и плотность энергии магнитного поля?
64. Назовите типы магнетиков.
65. Чему равно магнитное поле в веществе?
66. Какие вещества относятся к диамагнетикам, а какие к парамагнетикам.
67. Магнитоупорядоченные вещества. Антиферромагнетики. Ферриты.
68. За счет чего ферромагнетики обладают особыми свойствами и что такое спин электрона?
69. Назовите основные положения электромагнитной теории Максвелла.
70. Сформулируйте и запишите первое уравнение Максвелла.
71. Что доказывает то, что электрическое поле, возникающее при наличии переменного магнитного поля, является вихревым
72. Сформулируйте и запишите второе уравнение Максвелла. Какова природа тока смещения?
73. Запишите полную систему уравнений Максвелла в интегральной форме.

Тема 4: Механические и электромагнитные колебания и волны

1. Какие колебания называются гармоническими? Гармонические колебания и их характеристики:
2. Что такое амплитуда, фаза, частота, период колебаний? Назовите единицы их измерения.
3. Чему равна скорость и ускорение материальной точки при механических гармонических колебаниях?
4. Запишите дифференциальное уравнение для гармонических механических колебаний.
5. Что такое гармонический осциллятор?
6. Чему равна энергия колебательного процесса: кинетическая, потенциальная и полная энергия?
7. Из каких элементов состоит идеальный колебательный контур?
8. Почему колебательный контур называется идеальным?
9. Запишите дифференциальное уравнение для свободных незатухающих электромагнитных колебаний.
10. Как изменяются с течением времени сила тока в цепи идеального контура и напряжение на конденсаторе?
11. Запишите дифференциальное уравнение для затухающих механических колебаний. Чему равен коэффициент затухания?
12. Запишите дифференциальное уравнение для затухающих электромагнитных колебаний. Чему равен коэффициент затухания в данном случае?
13. Чему равны логарифмический декремент затухания и добротность колебательного контура?
14. Как механическое гармоническое колебание можно изобразить графически с помощью векторной диаграммы?
14. Как будет перемещаться материальная точка в результате сложения двух сонаправленных гармонических колебаний одинаковой частоты?
15. При каких условиях возникают фигуры Лиссажу?
16. Какие колебания называются вынужденными? Запишите дифференциальное уравнение для вынужденных механических колебаний.
17. Запишите дифференциальное уравнение для вынужденных электромагнитных колебаний.
18. Запишите выражение для силы тока в колебательном контуре при установившихся вынужденных колебаниях.

19. В чем заключается явление резонанса напряжения и резонанса тока в колебательном контуре?
20. Какой процесс называется волновым процессом?
21. Какие волны называются продольными, а какие –поперечными?
22. Что такое длина волны, волновой фронт, волновая поверхность, волновое число?
23. Запишите уравнение плоской и сферической механических волн.
24. Запишите волновое уравнение для механических волн.
25. Что можно найти, решая волновое уравнение?
26. Какие волны называются электромагнитными? Чему равна скорость распространения электромагнитных волн?
27. Запишите волновое уравнение для электромагнитных волн.
28. Запишите уравнение плоской гармонической электромагнитной волны.
29. Почему электромагнитные волны являются поперечными волнами?
30. Чему равна энергия и объемная плотность энергии для электромагнитных волн.
31. Запишите выражение для вектора Пойнтинга. Что он определяет?
32. Запишите выражение для давления электромагнитных волн.
33. Какие волны называются “стоячими волнами”. Можно ли их отнести к волновым процессам?
34. Запишите уравнения для “стоячей волны”.
35. Как определить узлы и пучности “стоячих волн”?
36. Назовите практическое применение” стоячих волн”.
37. Что происходит при отражении “стоячих волн” от менее плотной и от более плотной среды?

Тема 5: Волновая и квантовая оптика

1. Сформулируйте закон отражения и закон преломления света.
2. Чему равна скорость распространения световых волн и какую длину волны имеют эти волны?
3. В чем заключается явление интерференции света?
4. Какие волны называются когерентными волнами?
5. Существуют ли в природе когерентные волны и почему?
6. Чему равна оптическая длина пути луча и оптическая разность хода волн?
7. Сформулируйте условия усиления и ослабления света при интерференции.
8. Какие вы знаете способы наблюдения интерференции света?
9. Запишите условия для нахождения минимумов и максимумов интенсивности при интерференции света от двух источников.
10. Проанализируйте выражение для оптической разности хода волн при интерференции света от тонкой плоскопараллельной пластинки.
11. Как возникают полосы равной толщины и равного наклоны при интерференции света от тонкой плоскопараллельной пластинки?
12. Как возникают кольца Ньютона при интерференции света?
13. Какое практическое значение имеет интерференция света?
14. В чем заключается явление дифракции света?
15. Какие виды дифракции вы знаете?
16. Сформулируйте принцип Гюйгенса и принцип Гюйгенса-Френеля.
17. Запишите аналитическое выражение для принципа Гюйгенса-Френеля.
18. В чем заключается метод зон Френеля при расчете дифракционной картины.
19. Запишите условия для максимумов и минимумов интенсивности света при дифракции Фраунгофера на плоской щели.
20. Чем поляризованный свет отличается от естественного света?
21. В чем заключается явление дихроизма?

22. Для каких целей нужны поляроиды, поляризационные призмы и призма Николя?
23. Сформулируйте и запишите закон Малюса.
24. В чем заключается явление двойного лучепреломления? Какие кристаллы называются одноосными, а какие двуосными?
25. За счет чего возникает тепловое излучение?
26. В чем отличие теплового излучения от всех других видов сечения тел?
27. Какое тело называется абсолютно черным? Есть ли в природе абсолютно черные тела?
28. Нарисуйте модель абсолютно черного тела.
29. Сформулируйте и запишите закон Кирхгофа. Сформулируйте следствия из закона Кирхгофа.
30. Изобразите графически спектр излучения абсолютно черного тела.
31. Запишите закон Стефана – Больцмана и Закон смещения Вина.
32. В чем заключалась ультрафиолетовая катастрофа?
33. Сформулируйте гипотезу Планка при объяснении им спектра теплового излучения абсолютно черного тела.
34. Фотоны, их свойства: энергия, масса, импульс.
35. В чем заключается явление фотоэффекта?
36. Какие законы установил Столетов для внешнего фотоэффекта?
37. Запишите уравнение Эйнштейна для внешнего фотоэффекта.
38. Что такое “красная граница фотоэффекта и как ее определить?
39. В чем заключались опыты Лебедева?
40. В чем заключается эффект Комптона?
41. В чем заключается двойственность природы электромагнитного излучения?

Тема 6: Квантовая физика, физика атома

1. Какую длину волны имеют рентгеновские лучи?
2. при каких условиях возникает рентгеновский спектр?
3. Сформулируйте закон Мозли. Что позволил уточнить этот закон?
4. Запишите формулу Бальмера-Ридберга для линейчатого спектра испускания атома водорода.
5. О чем заключались опыты Резерфорда?
6. Какие выводы сделал Резерфорд, анализируя полученные экспериментальные данные о рассеянии альфа-лучей?
7. Из чего состоял атом в ядерной модели атома Резерфорда?
8. Недостатки теории атома Резерфорда.
9. Сформулируйте постулаты в модели атома Бора.
10. Изобразите графически энергетический спектр атома водорода.
11. В чем состояли недостатки модели атома Бора?
12. Сформулируйте гипотезу де Бройля о корпускулярно-волновом дуализме микрочастиц. Какие опыты подтверждали эту гипотезу? Волны де Бройля.
13. Что собой представляют волны де Бройля?
14. Запишите соотношения неопределенности Гейзенберга для импульса и энергии.
15. Какими свойствами обладает волновая функция.
16. Запишите уравнение Шредингера, содержащее время и для стационарных состояний.
17. Зачем необходимо решать уравнение Шредингера?
18. Что такое собственные волновые функции микрочастицы и собственные значения ее энергии?
19. В чем заключается туннельный эффект?
20. Назовите квантовые числа электронов в атоме. Что они определяют?
21. Сформулируйте принцип Паули для электронов в атоме.

Тема 7: Элементы ядерной физики

1. Из каких частиц состоит атомное ядро?
2. Чем протоны отличаются от нейтронов?
3. Чему равны заряд и масса ядра.
4. Что такое зарядовое и массовое число?
5. Какой размер имеют атомные ядра?
6. Назовите свойства ядерных сил.
7. Какие ядра называются изотопами и изобарами?
8. Где используются изотопы?
9. Как связан дефект массы с энергией связи атомного ядра?
10. Что такое удельная энергия связи ядра?
11. Назовите виды радиоактивного распада атомных ядер.
12. Запишите закон радиоактивного распада ядер.
13. Чему равен период полураспада ядер и как он связан с постоянной радиоактивного распада?
14. Что такое радиоактивное равновесие?
15. Когда наступает радиоактивное равновесие?
16. Как определить активность препарата?
17. Запишите правило смещения при альфа-распаде.
18. Запишите правила смещения при бета-распадах.
19. Почему возникла гипотеза о нейтрино?
20. Какими свойствами обладает нейтрино?
21. Что такое ядерная реакция?
22. Кто впервые осуществил ядерную реакцию?
23. Во сколько этапов протекает ядерная реакция?
24. Запишите схему ядерной реакции.
25. Какие правила выполняются при ядерных реакциях?
26. Расскажите о реакции деления тяжелых ядер.
27. Где на практике применяются ядерные реакции?
28. Как определить энергию, которая выделяется при ядерных реакциях?
29. Расскажите о реакции синтеза легких ядер.
30. В чем заключается радиоуглеродный метод датировки?

Оценка за опрос определяется простым суммированием баллов:

<i>Критерии оценки ответа на вопрос</i>	<i>Количество баллов</i>
правильность ответа	1
всесторонность и глубина ответа (полнота)	1
наличие выводов	1
соблюдение норм литературной речи	1
владение профессиональной лексикой	1
Итого	5

Правила оценивания:

оценка «отлично» выставляется, если обучающийся получил за ответы 5 баллов;
оценка «хорошо» выставляется, если обучающийся получил за ответы 4- балла;
оценка «удовлетворительно» выставляется, если обучающийся получил за ответы 3 балла;
оценка «неудовлетворительно» выставляется, если обучающийся получил за ответы 0-2 балла;

Автор: Коршунов И.Г. , профессор, д.ф.-м.н.

 УТВЕРЖДАЮ
Зав. кафедрой физики
И.Г. Коршунов

КОМПЛЕКТ ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ ДЛЯ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

Б1.Б.11 ФИЗИКА

Направление подготовки/ специальность -
15.03.02 Технологические машины и оборудование

Направленность (профиль)/ специализация —
Машины и оборудование нефтяных и газовых комплексов

квалификация выпускника: бакалавр

Автор: Коршунов И.Г., д.ф.-м.н., профессор

Одобен на заседании кафедры

Физики

(название кафедры)

Протокол № от 2018

(Дата)

Екатеринбург
2018

<i>Оценочное средство</i>	<i>Оцениваемые компетенции</i>	<i>Составляющая компетенции, подлежащая оцениванию</i>	<i>Количество тестовых заданий</i>	<i>Другие оценочные средства</i>	
				<i>вид</i>	<i>количество</i>
зачет:	ОК-7 ПКД-2	знания, умения, владения			
тест	ОК-7 ПКД-2	знания и умения	200		
теоретический вопрос	ОК-7 ПКД-2	знания, умения и владения		вопросы	125
задачи по физике с горно-техническим уклоном	ОК-7 ПКД-2	знания, умения и владение		задачи	101

<i>Оценочное средство</i>	<i>Оцениваемые компетенции</i>	<i>Составляющая компетенции, подлежащая оцениванию</i>	<i>Количество тестовых заданий</i>	<i>Другие оценочные средства</i>	
				<i>вид</i>	<i>количество</i>
экзамен:	ОК-7 ПКД-2	знания, умения, владения			
тест	ОК-7 ПКД-2	знания и умения	237		
теоретический вопрос	ОК-7 ПКД-2	знания, умения и владения		вопросы	53
задачи по физике с горно-техническим уклоном	ОК-7 ПКД-2	знания, умения и владения		задачи	79

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

для зачета

дисциплина **ФИЗИКА**

Тестовые задания, направленные на оценку знаний и умений, формирующих компетенции ОК-7, ОПК-2

1. Скорость пули при вылете из ствола пистолета равна 250 м/с. Длина ствола 0,1 м. Определите примерно ускорение пули внутри ствола, если считать ее движение равноускоренным.

- 1) 312 км/с² 2) 114 км/с² 3) 1248 м/с² 4) 100 м/с²

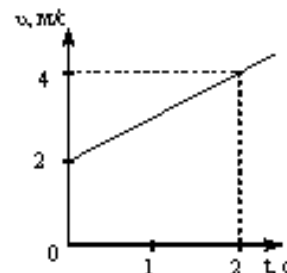
2. К боковой поверхности цилиндра, вращающегося вокруг своей оси, прижимают второй цилиндр с осью, параллельной оси первого, и радиусом, вдвое превосходящим радиус первого. При совместном вращении двух цилиндров без проскальзывания у них совпадают

- 2) периоды вращения
- 2) частоты вращения
- 3) линейные скорости точек на поверхности
- 4) центростремительные ускорения точек на поверхности

3. На графике приведен график зависимости скорости тела от времени. Масса тела

11 г. Сила, действующая на тело, равна...

- 1) 0 Н
- 2) 5 Н
- 3) 30 Н
- 4) 10 Н



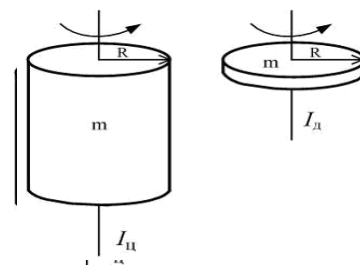
4. На тело действует постоянный вращающий момент. Какая из перечисленных ниже величин при вращательном движении тела не изменяется с течением времени?

1. Угловая скорость. 2. Угловое ускорение. 3. Кинетическая энергия вращения.
4. Момент импульса тела. 5. Момент инерции.

- 1) 1 2) 3 3) 2, 5 4) 4 5) 1, 3, 5.

5. Диск и цилиндр имеют одинаковые массы и радиусы. Для их моментов инерции справедливо соотношение...

- 1) $I_{ц} = I_{д}$; 2) $I_{ц} > I_{д}$; 3) $I_{ц} < I_{д}$; 4) $I_{ц} \gg I_{д}$.



6. Какое утверждение ошибочно?

- 1) Механическая система называется замкнутой, если на нее не действуют внешние силы или действие всех внешних сил на эту систему полностью скомпенсировано.
- 2) Результирующий импульс замкнутой системы тел с течением времени не изменяется.
- 3) Если система замкнута, то ее результирующий импульс всегда равен нулю.
- 4) В замкнутой консервативной системе полная механическая энергия с течением времени не изменяется.
- 5) Работа консервативной силы на замкнутой траектории равна нулю.

7. Сплошной цилиндр катится по горизонтальной плоскости. Какую часть энергия поступательного движения каждого тела составляет от общей кинетической энергии?

- 1) $5/7$ 2) $3/4$ 3) $2/3$ 4) $1/2$

8. Укажите формулировку закона сохранения импульса.

- 1) В замкнутой системе тел суммарный импульс системы постоянен.
- 2) В замкнутой системе тел суммарный импульс системы равен нулю.
- 3) Импульс тела равен произведению массы тела на его скорость.
- 4) Сумма внешних сил, приложенных к телу, равна нулю.
- 5) Суммарная кинетическая энергия замкнутой системы равна нулю

9. Момент инерции тонкого обруча массой m , радиусом R относительно оси, проходящей через центр обруча перпендикулярно плоскости, в которой лежит обруч, равен $I = mR^2$. Если ось вращения перенести параллельно в точку на обруче, то момент инерции обруча...

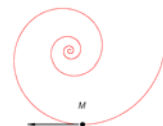
- 1) увеличится в 1,5 раза
- 2) увеличится в 2 раза
- 3) не изменится
- 4) уменьшится в 2 раза

10. Зависимость пути от времени для прямолинейно движущегося тела имеет вид: $S(t) = 2t + 3t^2$, где все величины выражены в СИ. Ускорение тела равно

- 1) 1 м/с^2 2) 2 м/с^2 3) 3 м/с^2 4) 6 м/с^2

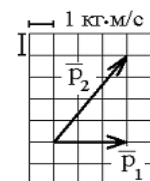
11. Точка M движется по спирали с постоянной по величине скоростью в направлении, указанном стрелкой. При этом величина полного ускорения....

- 5) уменьшается;
- 6) не изменяется;
- 7) увеличивается.
- 8) увеличивается и уменьшается



12. Теннисный мяч летел с импульсом P_1 (масштаб и направления указаны на рисунке). Теннисист произвел по мячу резкий удар с средней силой 80 Н . Изменившийся импульс мяча стал равным P_2 . Сила действовала на мяч в течении...

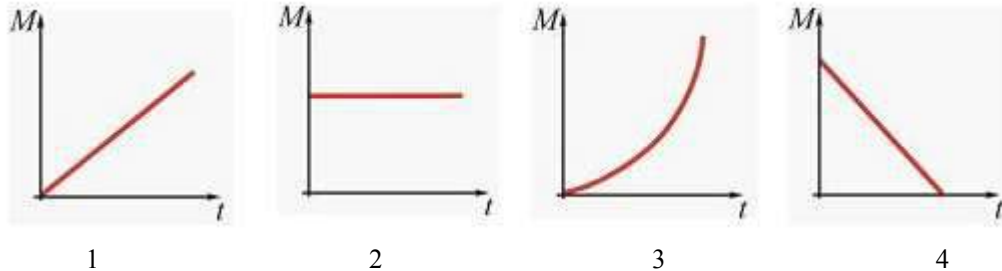
- 5) $0,05 \text{ с}$
- 6) $0,5 \text{ с}$
- 7) $0,3 \text{ с}$
- 8) $0,1 \text{ с}$



13. Если тело движется по окружности с постоянной по величине скоростью, следовательно, равнодействующая всех сил, действующих на тело....

- 1) равна нулю.
- 2) постоянна по величине и совпадает с направлением скорости.
- 3) постоянна по величине и направлена по радиусу к центру окружности.
- 4) постоянна по величине и направлена по касательной к окружности.
- 5) переменна по величине и направлена к центру окружности.

14. Момент импульса вращающегося тела изменяется по закону $L = at^3$, где a – некоторая положительная константа. Зависимость от времени момента сил, действующих на тело, определяется графиком ...



15. Найти приращение энергии тела, если $E_1 = 10$ Дж, $E_2 = 7$ Дж?

- 1) 17 Дж.
- 2) 3 Дж.
- 3) -3 Дж.
- 4) 8,5 Дж.
- 5) 1,5 Дж.

16. Шар катится по горизонтальной плоскости. Какую часть энергии поступательного движения каждого тела составляет от общей кинетической энергии?

- 1) $5/7$
- 2) $3/4$
- 3) $2/3$
- 4) $1/2$

17. Чтобы уменьшить отдачу при выстреле из винтовки, необходимо:

- 1) увеличить массу винтовки;
- 2) уменьшить массу винтовки;
- 3) увеличить скорость пули;
- 4) уменьшить массу пули;
- 5) уменьшить скорость пули.

- 1) 1, 4, 5.
- 2) 2, 3.
- 3) 1, 2.
- 4) 1, 3.
- 5) 2, 5.

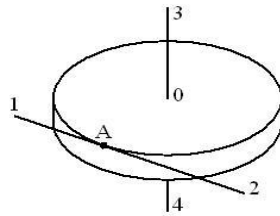
18. Тело брошено вертикально вверх с начальной скоростью 16 м/с. На высоте h кинетическая энергия равна потенциальной. Определить эту высоту.

- 1) 10 м
- 2) 7,3 м
- 3) 6,4 м
- 4) 16 м

19. Зависимость координаты от времени для некоторого тела описывается уравнением $X = 8t - t^2$, где все величины выражены в СИ. В какой момент времени скорость тела равна нулю?

- 1) 8 с
- 2) 4 с
- 3) 3 с
- 4) 0 с

20. Диск радиуса R вращается вокруг вертикальной оси равноускоренно по часовой стрелке. Укажите направление вектора углового ускорения.



1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4.

21. К потолку лифта, поднимающегося вверх тормозясь, на нити подвешено тело массой 10 кг. Модуль вектора скорости изменения импульса тела равен $50 \text{ кг} \cdot \text{м/с}$. Сила натяжения нити равна

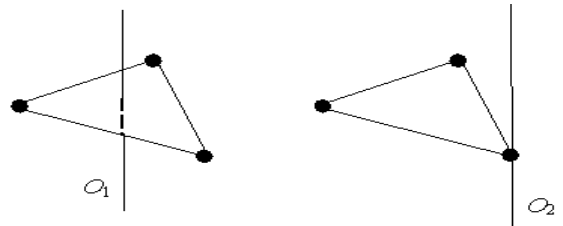
1) $150 \text{ кг} \cdot \text{м/с}$; 2) $50 \text{ кг} \cdot \text{м/с}$; 3) $100 \text{ кг} \cdot \text{м/с}$; 4) $0 \text{ кг} \cdot \text{м/с}$

22. Укажите правильные утверждения. Момент инерции тела:

- 1) зависит от пространственного распределения массы тела;
- 2) является коэффициентом пропорциональности между угловым ускорением тела и моментом сил;
- 3) зависит от суммы моментов сил, приложенных к телу;
- 4) зависит от положения оси вращения тела;
- 5) зависит от суммы сил, действующих на тело.

1) 1, 2, 4 2) 2 3) 5 4) 2, 3, 5. 5) Все правильные.

23. Три маленьких шарика расположены в вершинах правильного треугольника. Момент инерции этой системы относительно оси O_1 , перпендикулярной плоскости треугольника и проходящей через его центр – I_1 . Момент инерции этой же системы относительно оси O_2 , перпендикулярной плоскости треугольника и проходящей через один из шаров – I_2 .



Справедливо утверждение...

1) $I_1 = I_2$ 2) $I_1 > I_2$ 3) $I_1 < I_2$ 4) $I_1 \gg I_2$

24. Якорь двигателя вращается с частотой 40 с^{-1} , развиваемая им мощность 3 кВт. Найти вращающий момент якоря.

1) $10 \text{ Н} \cdot \text{м}$ 2) $12 \text{ Н} \cdot \text{м}$ 3) $15 \text{ Н} \cdot \text{м}$ 4) $23 \text{ Н} \cdot \text{м}$

25. Закон сохранения импульса формулируется так.

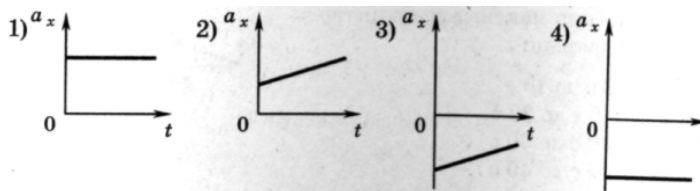
- 1) Результирующий момент импульса изолированной (замкнутой) системы с течением времени не изменяется.
- 2) Изменение импульса тела за некоторый промежуток времени равно импульсу силы, действующей на это тело за этот же промежуток времени.
- 3) Импульс тела равен произведению массы тела на его скорость.
- 4) Результирующий импульс изолированной (замкнутой) системы с течением времени не изменяется.
- 5) Результирующая всех сил, действующих на тело, равна скорости изменения импульса.

26. Обруч массой $m = 0,3 \text{ кг}$ и $R = 0,5 \text{ м}$ привели во вращение, сообщив ему энергию вращательного движения 1200 Дж и опустили на пол так, что его ось вращения оказалась параллельной плоскости пола. Если обруч начал двигаться без проскальзывания, имея кинетическую энергию

тическую энергию поступательного движения 200 Дж, то сила трения совершила работу, равную...

- 1) 1400 Дж; 2) 1000 Дж; 3) 600 Дж; 4) 800 Дж.

27. Тело, двигаясь вдоль оси ОХ прямолинейно и равноускоренно, за некоторое время уменьшило свою скорость в 2 раза. Какой из графиков зависимости проекции ускорения от времени соответствует такому движению?

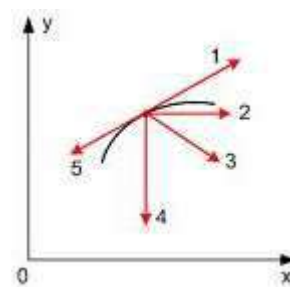


- 1) 1 2) 2 3) 3 4) 4

28. Тело брошено под углом к горизонту и движется в поле силы тяжести Земли. На рисунке изображен восходящий участок траектории данного тела.

Правильно изображает полное ускорение вектор ...

- 1) 5; 2) 2; 3) 3; 4) 4; 5) 1.



29. Самолет летит в горизонтальной плоскости по окружности с постоянной скоростью 360 км/ч. Подъемная сила всегда перпендикулярна плоскости крыльев самолета. Если эта плоскость составляет угол в 45° с горизонтом, то радиус окружности виража самолета равен

- 1) 400м 2) 600м 3) 800м 4) 1000м

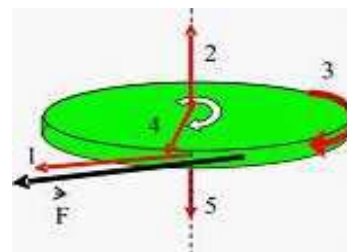
30. Укажите верный вариант ответов. Выражение для кинетической энергии вращающегося вокруг неподвижной оси тела содержит:

1) момент импульса тела; 2) момент инерции тела; 3) угловую скорость; 4) угловое ускорение; 5) массу тела.

- 1) 1 2) 2, 3. 3) 4 4) 5 5) 4, 5.

31. Колесо вращается так, как показано на рисунке стрелкой. К ободу колеса приложена сила, направленная по касательной. Правильно изображает угловое перемещение колеса вектор ...

- 1) 5; 2) 2; 3) 3; 4) 4; 5) 1.



32. Мальчик подбросил футбольный мяч с поверхности Земли на некоторую высоту. Какое из утверждений будет справедливо в этом случае?

- 1) Величина потенциальной энергии мяча будет равна нулю.
2) Величина потенциальной энергии мяча зависит от высоты и массы мяча.
3) Кинетическая энергия мяча всегда равна потенциальной.

- 4) Полная энергия мяча будет состоять только из кинетической энергии.
 5) Величина потенциальной энергии мяча зависит от скорости и массы мяча.

33. Двигатель мощностью 3 кВт за 12 с разогнал маховик до 10 об/с. Найти момент инерции маховика.

- 1) $15 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ 2) $21 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ 3) $18 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ 4) $27 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$

34. Неподвижная лодка вместе с находящимся в ней охотником имеет массу 250 кг. Охотник выстреливает из ружья в горизонтальном направлении. Какую скорость получит лодка после выстрела? Масса пули 5 г, а ее скорость при вылете равна 1000 м/с.

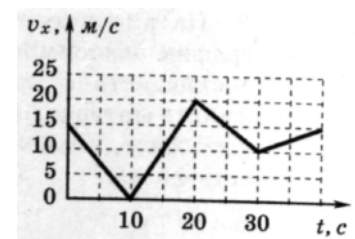
- 1) 22,4 м/с. 2) 0,05 м/с. 3) 0,02 м/с. 4) 700 м/с. 5) 0 м/с.

35. Человек сидит в центре вращающейся по инерции вокруг вертикальной оси карусели и держит в руках вертикально тяжелый шест за его середину. Если он сместит шест, оставляя его в вертикальном положении, в направлении от центра карусели, то частота вращения в конечном состоянии

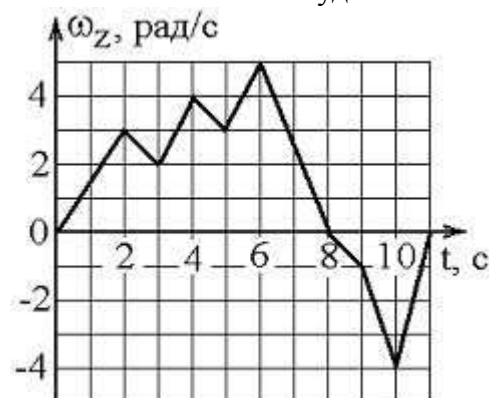
- 1) уменьшится; 2) не изменится; 3) увеличится; 4) будет равна нулю

36. Автомобиль движется по прямой улице. На графике представлена зависимость скорости автомобиля от времени. Модуль ускорения максимален в интервале времени

- 5) от 0 с до 10 с
 6) от 10 с до 20 с
 7) от 20 с до 30 с
 8) от 30 с до 40 с



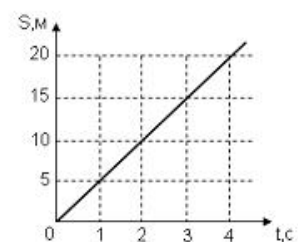
37. Твердое тело начинает вращаться вокруг оси Z с угловой скоростью, проекция которой изменяется во времени, как показано на графике. Угол поворота тела относительно начального положения будет максимальным в момент времени, равный ...



- 1) 11 с 2) 6 с; 3) 8 с; 4) 10 с.

38. Зависимость перемещения тела массой 4 кг от времени представлена на рисунке. Кинетическая энергия тела в момент времени $t=3$ с равна...

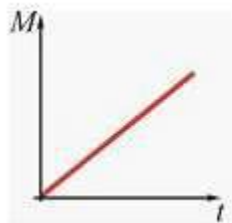
- 5) 40 Дж
 6) 20 Дж
 7) 50 Дж
 8) 15 Дж



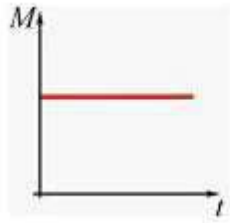
39. Маховик, приведенный в равноускоренное вращение, сделав 40 полных оборотов, стал вращаться с частотой 480 мин^{-1} . Определить угловое ускорение маховика

- 1) 5 рад/с^2 2) 6 рад/с^2 3) 2 рад/с^2 4) $3,5 \text{ рад/с}^2$

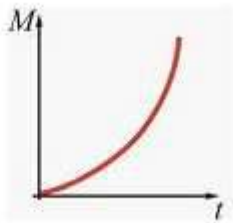
40. Момент импульса вращающегося тела изменяется по закону $L = at^2$, где a – некоторая положительная константа. Зависимость от времени момента сил, действующих на тело, определяется графиком ...



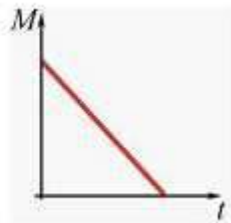
1



2



3

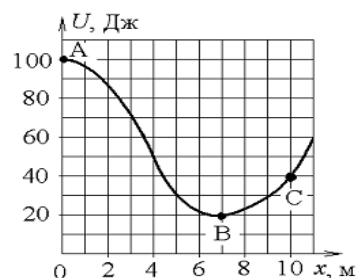


4

41. Небольшая шайба начинает движение без начальной скорости по гладкой горке из точки А. Сопротивление воздуха пренебрежимо мало. Зависимость потенциальной энергии шайбы от координаты изображено на графике $U(x)$

Кинетическая энергия шайбы в точке С...

- 5) в 2 раза меньше, чем в точке В
6) в 1,33 раза меньше, чем в точке В
7) в 2 раза больше, чем в точке В
8) в 1,33 раза больше, чем в точке В



42. Якорь двигателя делает 240 об/мин. Определить вращающий момент, если мощность двигателя 1 кВт.

- 1) $40 \text{ Н} \cdot \text{м}$ 2) $50 \text{ Н} \cdot \text{м}$ 3) $25 \text{ Н} \cdot \text{м}$ 4) $30 \text{ Н} \cdot \text{м}$

43. Тело массой 2 кг поднято над Землей. Его потенциальная энергия 400 Дж. Если на поверхности Земли потенциальная энергия равна нулю и силами сопротивления воздуха можно пренебречь, скорость, с которой тело упадет на Землю, составит...

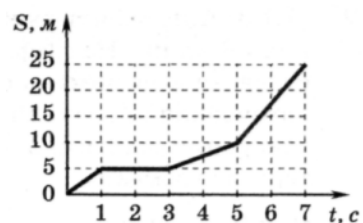
- 1) 14 м/с ; 2) 10 м/с ; 3) 20 м/с ; 4) 40 м/с .

44. Шар имеет массу 5 кг и катится со скоростью 10 м/с по горизонтальной плоскости. Найти кинетическую энергию тела.

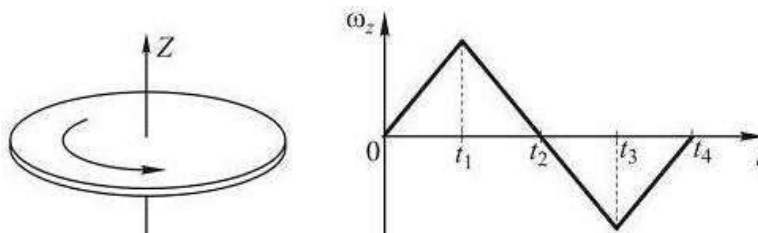
- 1) 350 Дж 2) 400 Дж 3) 250 Дж 4) 500 Дж

45. Автомобиль движется по прямой улице. На графике представлена зависимость скорости автомобиля от времени. Модуль скорости максимален в интервале времени

- 5) от 0 с до 1 с
6) от 1 с до 3 с
7) от 3 с до 5 с
8) от 5 с до 7 с



46. Диск вращается вокруг своей оси, изменяя проекцию своей угловой скорости $\omega_x(t)$ так, как показано на рисунке.



Векторы угловой скорости ω и ускорения ϵ сонаправлены в интервалы времени

- 1) от t_1 до t_2 и от t_2 до t_3 ;
- 2) от 0 до t_1 и от t_1 до t_2 ;
- 3) от 0 до t_1 и от t_2 до t_3 ;
- 4) от t_1 до t_2 и от t_3 до t_4 .

47. Выберите формулировку третьего закона Ньютона.

- 1) Силы взаимодействия между материальными точками пропорциональны произведению масс точек и обратно пропорциональны квадрату расстояния между ними.
- 2) Силы взаимодействия точечных зарядов пропорциональны произведению величин зарядов и обратно пропорциональны квадрату расстояния между ними.
- 3) Силы, с которыми действуют друг на друга взаимодействующие тела, равны по величине и противоположны по направлению.
- 4) Момент силы пропорционален угловому ускорению тела.
- 5) Сила, действующая на тело равна скорости изменения импульса тела.

48. Маховик, приведенный в равноускоренное вращение, сделав 40 полных оборотов, стал вращаться с частотой 480 мин^{-1} . Определить угловое ускорение маховика

- 1) 5 рад/с^2
- 2) 6 рад/с^2
- 3) 2 рад/с^2
- 4) $3,5 \text{ рад/с}^2$

49. Две материальные точки одинаковой массы движутся с одинаковой угловой скоростью по окружностям радиусами $R_1 = 2R_2$. При этом отношение моментов импульса точек L_1/L_2 равно...

- 1) $1/2$;
- 2) 2;
- 3) 4;
- 4) $1/4$.

1.6.6. Укажите формулу для расчета кинетической энергии тела.

- 1) $kx^2/2$;
- 2) mgh ;
- 3) $mv^2/2$;
- 4) $F_{\text{тр}} \cdot S$;
- 5) mv .

50. Какую работу надо произвести, чтобы раскрутить маховик массой 80 кг до 180 об/мин? Массу маховика считать равномерно распределенной по ободу с диаметром 1 м.

- 1) 1 кДж
- 2) 2,1 кДж
- 3) 3,6 кДж
- 4) 5 кДж

51. Идеальный газ это система, состоящая из...

- 1) молекул кислорода;
- 2) молекул различных газов;
- 3) многоатомных молекул;
- 4) взаимодействующих атомов;
- 5) невзаимодействующих материальных точек.

52. Выберите уравнение Менделеева-Клапейрона.

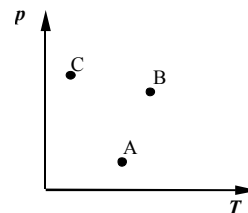
- 1) $p = p_0(1 + \alpha T)$.
- 2) $pV = \text{const}$.
- 3) $V = V_0 \alpha T$.
- 4) $M/\mu = \nu$.
- 5) $pV = \nu RT$.

53. При увеличении абсолютной температуры идеального газа в 2 раза средняя квадратичная скорость движения его молекул:

- 1) увеличится в 2 раза;
- 2) увеличится в 6 раз;
- 3) уменьшится в 8 раз;
- 4) увеличится в 4 раза.

54. Объемы трех состояний одной и той же массы идеального газа, обозначенных на графике точками А, В и С на диаграмме $p - T$, связаны между собой соотношением:

- 1) $V_A > V_B > V_C$;
- 2) $V_A < V_B < V_C$;
- 3) $V_C > V_B < V_A$;
- 4) $V_A < V_B$, $V_B > V_C$;



55. В 1 кг воды содержится...

- 1) 55,5 моль ($3,3 \cdot 10^{25}$ молекул);
- 2) 100 моль ($6 \cdot 10^{23}$ молекул);
- 3) 18 моль ($18 \cdot 10^{23}$ молекул);
- 4) 1 моль (10^{23} молекул).

56. Укажите утверждение, с которым Вы согласны.

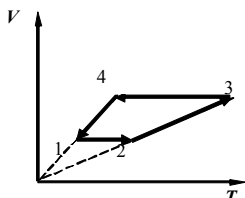
Количество теплоты – это...

- 5) энергия, передаваемая телу в процессе совершения работы;
- 6) энергия, передаваемая и получаемая телом в процессе теплопередачи;
- 7) сумма кинетической и потенциальной энергий молекул тела;
- 8) энергия, передаваемая телу в процессе упорядоченного движения.

57. Укажите верную запись I начала термодинамики.

- 1) $Q = m \cdot C (T_2 - T_1)$.
- 2) $Q = \Delta U + A$.
- 3) $Q = I^2 R t$.
- 4) $\eta = \frac{A}{Q}$.

58. На рисунке представлен график изменения состояния идеального газа. На каком участке работа имеет максимальное по модулю значение?



- 1) 1 – 2;
- 2) 2 – 3;
- 3) 3 – 4;
- 4) 4 – 1.

59. Чему равно число степеней свободы молекул двухатомного газа?

- 1) $i = 2$;
- 2) $i = 3$;
- 3) $i = 4$;

- 4) $i = 5$;
 5) $i = 6$.

61. Какое количество теплоты нужно передать двум молям идеального одноатомного газа, чтобы увеличить его объем в 3 раза при постоянном давлении? Начальная температура газа T_0 .

- 1) $2RT_0$; 2) $4RT_0$; 3) $10RT_0$; 4) $6RT_0$; 5) $5RT_0$.

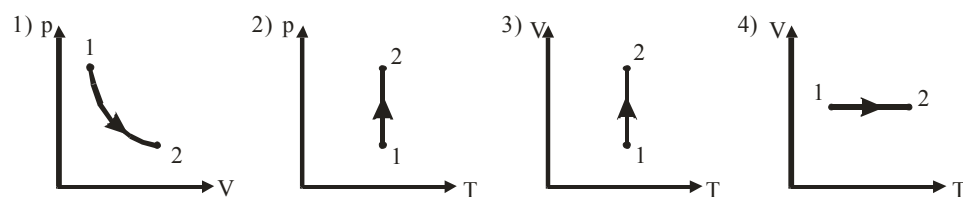
11. Давление газа при его нагревании в закрытом сосуде увеличивается. Это можно объяснить увеличением...

- 4) концентрации молекул;
 5) расстояний между молекулами;
 6) средней кинетической энергии молекул;
 4) средней потенциальной энергии молекул.

62. Объем одного моля идеального газа при нормальных условиях ($t=0^\circ\text{C}$; $p = 101 \text{ кПа}$) равен...

- 1) 8,31 л; 2) 22,4 л; 3) 10^3 м^3 ; 4) зависит от природы газа

63. Какой график соответствует процессу изотермического сжатия системы?

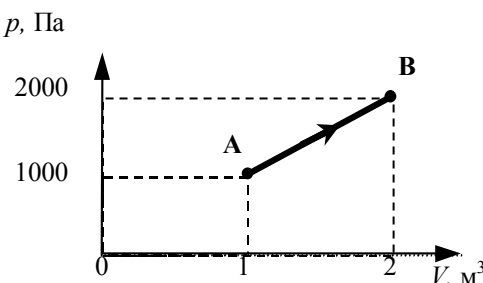


64. Абсолютная температура газа возросла в 2 раза. Во сколько раз изменилась наиболее вероятная скорость молекул?

- 1) Не изменилась.
 2) Увеличилась в 1,41 раза.
 3) Уменьшилась в 2 раза.
 4) Увеличилась в 2 раза.
 5) Увеличилась в 4 раза.

65. При переходе из состояния А в состояние В температура идеального газа

- 1) увеличилась в 2 раза;
 2) увеличилась в 4 раза;
 3) уменьшилась в 2 раза;
 4) уменьшилась в 4 раза.



66. Какие из перечисленных видов энергии входят в состав внутренней энергии тела?

- а) кинетическая энергия хаотического (теплового) движения молекул;
 б) потенциальная энергия взаимодействия молекул;
 в) кинетическая энергия тела как целого относительно других тел;
 г) механическая энергия;

- 1) в; 2) а, б; 3) г; 4) а, в.

67. Газ совершает наименьшую работу, если его расширение от объема V_1 до V_2 происходит...

- 6) адиабатически;
- 7) изохорически;
- 8) изотермически;
- 9) изобарически;
- 10) сначала изохорически, затем адиабатно.

68. Укажите формулу для расчета коэффициента полезного действия цикла Карно.

- 1) $\frac{T_2 - T_1}{T_2}$; 2) $Q_1 - Q_2$; 3) $\frac{T_1 + T_2}{T_1}$; 4) $\frac{A}{Q_1}$; 5) $\frac{Q_1}{A}$.

69. Верно ли, что...

- 6) при любом круговом процессе система не может совершать работу большую, чем количество тепла, подведенное к ней извне;
- 7) тепло, подведенное к системе, затрачивается на изменение ее внутренней энергии и на совершение ею работы над внешними телами;
- 8) невозможно такое периодически движущееся устройство, единственным и конечным результатом которого было бы превращение внутренней энергии в механическую?;
- 9) механическая энергия может превращаться во внутреннюю полностью, а внутренняя в механическую - лишь частично переведена во внутреннюю.

- 1) 1; 2) 1, 2, 3, 4; 3) 2, 3; 4) 1, 3; 5) 3, 4.

70. Гелий, находящийся при нормальных условиях, изотермически расширяется от 1 л до 2 л. Найти количество теплоты, сообщенное газу.

- 1) 69 Дж; 2) 100 Дж 3) 690 Дж; 4) 1000 Дж.

71. Какие утверждения справедливы для идеального газа?

- 1) Взаимодействие молекул на расстоянии отсутствует.
- 2) Уравнение Менделеева-Клапейрона описывает состояние газа.
- 3) Молекулы газа взаимодействуют на расстоянии.
- 4) Внутренняя энергия равна сумме кинетической и потенциальной энергии взаимодействия молекул газа.
- 10) Собственным объемом молекул можно пренебречь по сравнению с объемом сосуда, в котором газ находится.

- 1) 4; 2) 1; 3) 2; 4) 5; 5) 1, 2, 5.

72. Воздух в комнате состоит из смеси газов: кислорода, азота, углекислого газа, паров воды и др. Какие из физических параметров этих газов обязательно одинаковы при тепловом равновесии?

- 2) парциальное давление; 2) температура; 3) концентрация; 4) объем.

73. Абсолютная температура газа уменьшилась в 4 раза. Во сколько раз изменилась средняя квадратичная скорость молекул?

- 1) Уменьшилась в 2 раза.
- 2) Не изменилась.

- 3) Уменьшилась в $\sqrt{2}$ раз.
- 4) Увеличилась в 2 раза.
- 5) Уменьшилась в 4 раза.

74. Укажите численное значение универсальной газовой постоянной.

- 1) $8,31 \cdot 10^{23}$ Дж/(моль К);
- 2) $1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К;
- 3) $6,02 \cdot 10^{23}$ моль⁻¹;
- 4) 8,31 Дж/(моль);
- 5) 8,31 Дж/(моль К).

75. Молекулы какого газа обладают наименьшим числом степеней свободы?

- 1) водорода; 2) азота; 3) гелия; 4) кислорода; 5) углекислого газа.

76. Какие утверждения могут служить формулировкой второго начала термодинамики?

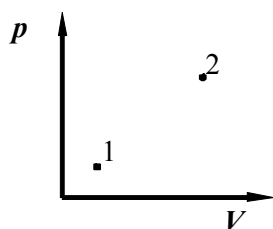
- 1) Энтропия – скалярная физическая величина, характеризующая состояние системы, приращение которой при обратимом процессе равно количеству приведенного тепла, полученному системой в этом процессе
- 2) На круговом процессе система не может совершать работу без подвода энергии извне или совершать работу, большую, чем подводимая извне энергия.
- 3) Невозможно периодически действующее устройство, которое превращало бы тепло в работу полностью
- 4) Невозможно периодически действующее устройство, которое совершало бы работу большую, чем подводимое тепло

- 1) 1; 2) 2; 3) 2, 3, 4; 4) 3; 5) 4.

77. Что называется молярной теплоемкостью идеального газа?

- 1) Работа, совершенная одним молем газа при нагревании на 1 К.
- 2) Изменение внутренней энергии газа при нагревании моля на 1 К.
- 3) Количество теплоты для нагревания одного моля газа на 1 К.
- 4) Количество теплоты для нагревания 1 кг газа на 1 К.
- 5) Изменение внутренней энергии газа при нагревании 1 кг на 1 К.

78. Газ переходит из состояния 1 в состояние 2. В первом случае сначала по изохоре, а затем по изобаре, а в другом случае, наоборот, сначала по изобаре, а затем по изохоре. Сравните работу, совершаемую системой в двух случаях, и сообщаемое системе количество теплоты.



- 1) одинаковое;
- 2) в первом случае работа больше и количество теплоты больше;
- 3) во втором случае работа больше и количество теплоты больше;
- 4) в первом случае работа меньше, а количество теплоты больше.

79. Первый закон термодинамики в дифференциальной форме записывается так:

- 1) $\delta Q = \delta A + dV$;
- 2) $\delta Q = A + dU$;
- 3) $Q = A + \Delta U$;
- 4) $\delta Q = \delta A + dU$;
- 5) $dQ = dA + dU$.

80. Тепловая машина с КПД 60 % получает за цикл от нагревателя 100 Дж. Какое количество теплоты машина отдает за цикл холодильнику?

- 1) 40 Дж; 2) 60 Дж; 3) 100 Дж; 4) 160 Дж.

81. Укажите уравнение Менделеева-Клапейрона для 1 моля газа.

- 1) $pV = \frac{m}{\mu}RT$; 2) $pV^\gamma = \text{const}$; 3) $pV_m = RT$;
 4) $\frac{pV}{T} = \text{const}$; 5) $\left(p + \frac{a}{V_m^2}\right)(V_m - b) = RT$.

82. Изменение на 100 °С температуры газа с 300 °С до 400 °С соответствует изменению температуры по шкале Кельвина на...

- 1) 573 К; 2) 673 К; 3) 273 К; 4) 100 К.

83. Действия каких сил компенсируются когда подводная лодка покоится в толще воды ?

- 1) силы тяжести и силы Архимеда;
 2) Силы тяжести и суммы сил упругости дна и силы Архимеда, если под дном лодки есть вода;
 3) силы тяжести , силы давления воды и силы упругости дна, если под дном лодки совершенно нет воды;
 4) силы тяжести и силы давления воды

84. При некотором процессе, проведенном с идеальным газом, соотношение между давлением и объемом газа $P \cdot V = \text{const}$. Как изменится температура газа, если давление увеличится в 4 раза?

- 1) Увеличится в 2 раза. 2) Увеличится в 4 раза.
 3) Уменьшится в 4 раза. 4) Останется без изменений.

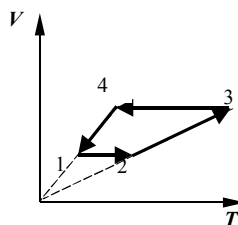
85. Какое число молекул находится в комнате объемом 80 м³ при температуре 17 °С и давлении 100 кПа?

- 1) $4 \cdot 10^{27}$; 2) $2 \cdot 10^{26}$ 3) $2 \cdot 10^{27}$; 4) $2 \cdot 10^{28}$.

86. Какой физический смысл имеет универсальная газовая постоянная?

- 1) Равна работе, которую совершает 1 моль газа при нагревании на 1 К при адиабатическом процессе.
 2) Равна работе, которую совершает 1 моль идеального газа при нагревании на 1 К при изобарическом процессе.
 3) Равна работе, которую совершает 1 моль газа при нагревании на 1 К при изохорном процессе.
 4) Равна изменению внутренней энергии 1 моля идеального газа при изобарном нагревании на 1 К.
 5) Равна изменению внутренней энергии 1 моля идеального газа при адиабатном процессе.

87. На рисунке представлен график изменения состояния идеального газа. На каком участке



работа газа имеет максимальное по модулю значение?

- 1) 1 – 2; 2) 2 – 3;
3) 3 – 4; 4) 4 – 1.

88. Укажите формулу для расчета коэффициента полезного действия цикла Карно.

- 1) $\frac{T_1 - T_2}{T_1}$; 2) $Q_1 - Q_2$; 3) $\frac{T_1 + T_2}{T_1}$; 4) $\frac{Q_2}{Q_1}$; 5) $\frac{Q_1}{A}$.

89. Система совершает работу только за счет убыли своей внутренней энергии. Какой процесс при этом происходит?

- 1) Изотермический
2) Изохорический
3) Адиабатический
4) Изобарический
5) Политропический

90. При изотермическом расширении 10 г азота, находящегося при температуре 17 °С, была совершена работа 860 Дж. Во сколько раз изменилось давление при расширении?

- 1) Уменьшилось в 2 раза.
2) Увеличилось в 2,7 раза.
3) Уменьшилось в 2,7 раза.
4) Увеличилось в 2 раза.

91. От каких термодинамических параметров зависит энергия молекулы газа?

- 2) От P, V, T . 2) От P . 3) От V . 4) От T .

P – давление газа, V – объем газа, T – абсолютная температура газа

92. Абсолютная температура газа уменьшилась в 2 раза. Во сколько раз изменилась наиболее вероятная скорость молекул?

- 1) Уменьшилась в 4 раза.
2) Увеличилась в 1,41 раза.
3) Уменьшилась в 2 раза.
4) Уменьшилась в $\sqrt{2}$ раз.
5) Не изменилась.

93. Укажите уравнение Ван-дер-Ваальса для 1 моля газа.

- 1) $pV = \frac{m}{\mu} RT$; 7) $pV^\gamma = \text{const}$; 3) $pV_m = RT$;
4) $\left(p + \frac{a}{V_m^2} \right) (V_m - b) = RT$; 5) $\frac{pV}{T} = \text{const}$.

2.5.5. При температуре T_0 и давлении p_0 один моль идеального газа занимает объем V_0 . Каков объем двух молей этого газа при давлении $2p_0$ и температуре $2T_0$?

- 1) $4V_0$; 2) $2V_0$; 3) V_0 ; 4) $8V_0$.

94. Укажите верную формулировку I закона термодинамики.

- 1) Количество теплоты, подведенное к системе, расходуется на работу системы против внутренних сил и изменение полной энергии системы.

- 2) Количество теплоты, подведенное к системе, расходуется на работу системы против внешних сил и изменение внутренней энергии системы.
- 3) Количество теплоты, подведенное к системе, расходуется на изменение работы системы и повышение внутренней энергии системы.
- 4) Количество теплоты, подведенное к системе, расходуется на работу системы против внешних сил.
- 5) Количество теплоты, подведенное к системе, расходуется на изменение внутренней энергии системы.

95. Укажите утверждение, с которым Вы согласны.

Количество теплоты – это...

- 6) энергия, передаваемая телу в процессе совершения работы;
- 7) энергия, передаваемая и получаемая телом в процессе теплопередачи;
- 8) сумма кинетической и потенциальной энергий молекул тела;
- 9) энергия, передаваемая телу в процессе упорядоченного движения.

96. Что называется удельной теплоемкостью?

- 1) Количество теплоты, необходимое для нагревания 1 кг вещества на 1 К.
- 2) Количество теплоты, необходимое для нагревания 1 моля вещества на 1 К.
- 3) Количество теплоты, необходимое для нагревания всей массы вещества.
- 4) Работа, совершаемая газом, при изменении его объема.
- 5) Изменение внутренней энергии.

97. Найдите уравнение Пуассона.

- 1) $pV^\gamma = \text{const}$;
- 2) $\frac{C_p}{C_v}$;
- 3) $pV = \text{const}$;
- 4) $A = -\Delta U$;
- 5) $\frac{i+2}{i}$.

98. 10 г кислорода находятся в сосуде под давлением 300 кПа и температуре 10 °С. После изобарического нагревания газ занял объем 10 л. Работа, совершенная газом при расширении равна...

- 1) 2,3 кДж;
- 2) 3,2 кДж;
- 3) 5 кДж;
- 4) 32 кДж.

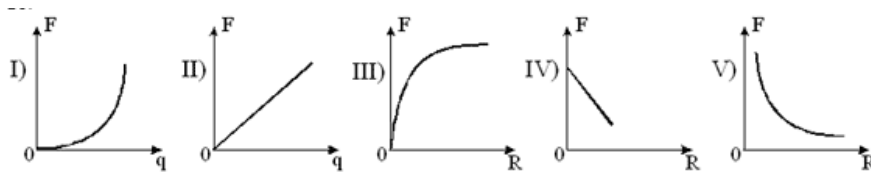
99. Укажите запись закона Шарля.

- 1) $pV = \frac{m}{\mu} RT$.
- 2) $pV = \text{const}$.
- 3) $\frac{p}{T} = \text{const}$.
- 4) $\frac{pV}{T} = \text{const}$.
- 5) $p = \frac{2}{3} n \langle E \rangle$.

100. При изотермическом процессе в газе не изменяются...

- 1) давление;
- 2) объем;
- 3) температура;
- 4) масса и объем;
- 5) масса и температура.

101. Какие из нижеприведенных графиков наиболее точно отражают зависимость кулоновской силы F от величины одного из зарядов q и расстояния между ними R ?

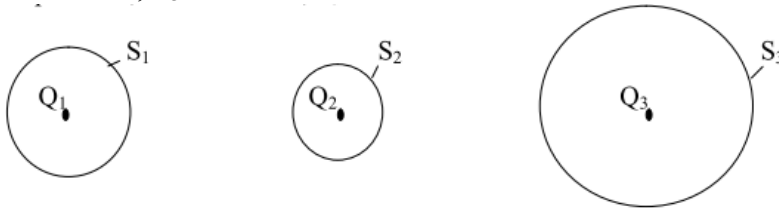


- 1) I, III ; 2) I, III, V ; 3) II, III, V ; 4) II, V .

102. По какой из приведенных ниже формул можно рассчитать в СИ модуль напряженности электростатического поля точечного заряда q , находящегося в однородном изотропном диэлектрике?

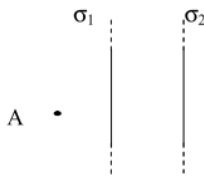
- 1) $E = \frac{q}{r}$; 2) $E = \frac{kq}{r}$; 3) $E = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2}$; 4) $E = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r}$.

103. Сферические поверхности охватывают точечные заряды $Q_1 = 3Q$, $Q_2 = 6Q$, $Q_3 = 2Q$. Сравните потоки вектора напряженности поля зарядов сквозь эти поверхности, если $S_1 = 2 \cdot S_2$, $S_3 = 3 \cdot S_2$.

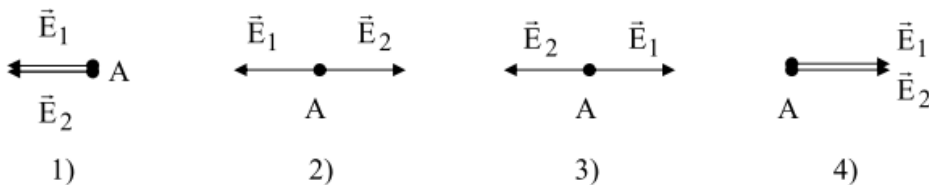


- 1) $\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_3$; 2) $\Phi_1 > \Phi_2 > \Phi_3$; 3) $\Phi_3 > \Phi_1 > \Phi_2$; 4) $\Phi_1 < \Phi_2 < \Phi_3$.

104. Поле создано двумя параллельными бесконечными равномерно заряженными плоскостями. Поверхностные плотности заряда плоскостей σ_1 и σ_2 , причем $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ (см.рис.).



Укажите рисунок векторов $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ в точке А, где $\vec{E}_1$ — напряженность поля первой плоскости, $\vec{E}_2$ — напряженность поля второй плоскости.



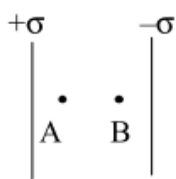
105. По какой из приведенных ниже формул можно рассчитать в СИ потенциал электростатического поля точечного заряда q , находящегося в однородном изотропном диэлектрике?

- 1) $\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r}$; 2) $\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$; 3) $\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2}$; 4) $\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$.

106. Емкость батареи, состоящей из двух конденсаторов, соединенных параллельно, определяется по формуле:

- 1) $C = C_1 + C_2$; 2) $C = C_1 - C_2$; 3) $C = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}$; 4) $C = \frac{C_1 + C_2}{C_1 \cdot C_2}$.

107. Сравните в точках А и В объемные плотности энергий электростатического поля заряженного плоского конденсатора.

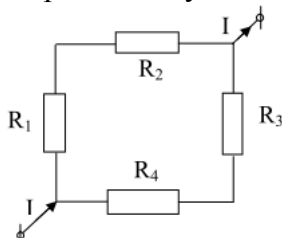


- 1) $w_A = w_B$; 2) $w_A > w_B$; 3) $w_A < w_B$; 4) $w_A = w_B = 0$.

108. Какая из приведенных ниже формул является математическим выражением закона Ома для однородного участка цепи?

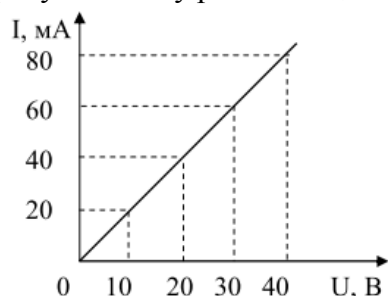
- 1) $I = \frac{U}{R}$; 2) $I = \frac{\varepsilon}{R + r}$; 3) $I = \frac{\varepsilon}{r}$; 4) $I = \sum_{i=1}^n I_i$.

109. При пропускании тока по участку цепи, состоящему из сопротивлений $R_1 = 5 \text{ Ом}$, $R_2 = 1 \text{ Ом}$, $R_3 = 8 \text{ Ом}$, $R_4 = 4 \text{ Ом}$, соединенных как показано на схеме, наибольшее падение напряжения будет на сопротивлении...



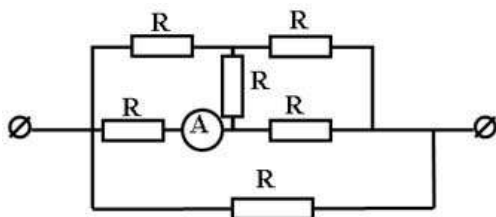
- 1) R_1 ; 2) R_2 ; 3) R_3 ; 4) R_4 ;

110. Зависимость тока I , протекающего через сопротивление R от напряжения U , дана на рисунке. Чему равна мощность, выделяемая на сопротивлении R при $U = 40 \text{ В}$?



- 1) 1,6 Вт; 2) 2,1 Вт; 3) 2,8 Вт; 4) 3,2 Вт.

111. К концам цепи изображенной на рисунке, подведено напряжение 270 В. Какой ток показывает амперметр, приведенный на рисунке, если сопротивления резисторов 135 Ом?



- 1) 1 А; 2) 4 А; 3) 2 А; 4) 0,5 А.

112. По какой из приведенных ниже формул можно рассчитать тепловую мощность тока P на внешнем участке цепи?

1) $P = I \cdot r$; 2) $P = I^2 \cdot R$; 3) $P = I\varepsilon - I^2 \cdot R$; 4) $P = I \cdot R$.

113. Дополните утверждение: циркуляция вектора напряженности поля сторонних сил по замкнутой электрической цепи $\oint \vec{E}_{\text{ст}} d\vec{l} =$

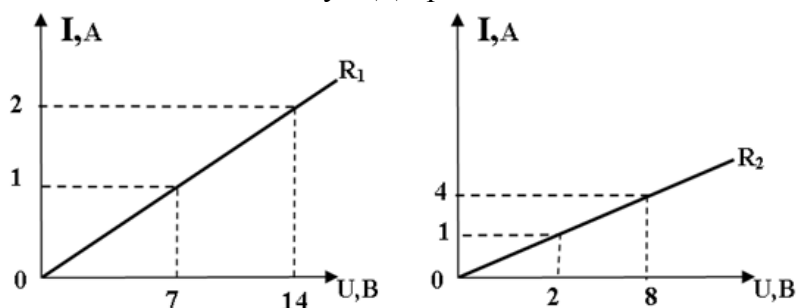
1) ... = 0; 2) ... = ε ; 3) ... = U ; 4) ... = I

где ε – ЭДС источника, U – напряжение; I – сила тока.

114. ЭДС источника тока 8 В, его внутреннее сопротивление 1/8 Ом. К источнику подключены параллельно два сопротивления 1,5 Ом и 0,5 Ом. Полный ток в цепи равен ...

1) 16 А; 2) 8 А; 3) 4 А; 4) 2 А; 5) 1 А.

115. На рисунках представлены вольт-амперные характеристики двух резисторов. Какую мощность потребляют эти резисторы, если их соединить последовательно и подсоединить к источнику ЭДС равным 36 В ?

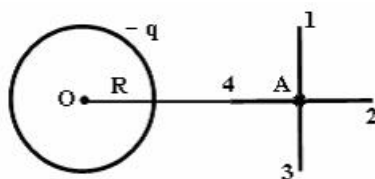


1) 18 Вт; 2) 9 Вт; 3) 36 Вт; 4) 0,5 Вт.

116. Точечный заряд $+q$ находится в центре сферической поверхности. Если заряд сместить из центра сферы, оставляя его внутри нее, то поток вектора напряженности электростатического поля через поверхность:

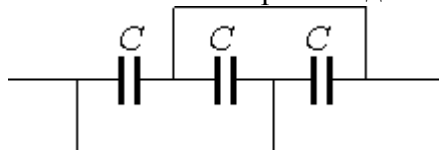
1) увеличится; 2) не изменится; 3) уменьшится 4) станет равным нулю.

117. Поле создано равномерно заряженной сферической поверхностью с зарядом $-q$. Укажите направление вектора градиента потенциала в точке А.



1) А – 3; 2) А – 1; 3) А – 2; 4) А – 4.

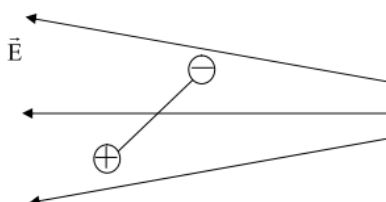
118. Емкость батареи конденсаторов, соединенных как показано на рисунке, равна:



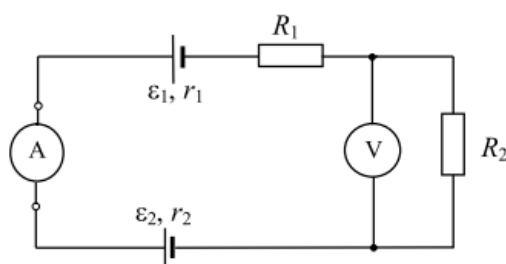
1) $C/3$; 2) $3C$; 3) $2C$; 4) C .

119. Что будет происходить с диполем, помещенным в неоднородное электрическое поле, как показано на рисунке

- 1) Диполь повернется по часовой стрелке, и будет втягиваться в область сильного поля;
- 2) диполь повернется против часовой стрелки, и будет выталкиваться из области сильного поля;
- 3) диполь повернется по часовой стрелке, и будет выталкиваться из области сильного поля;
- 4) диполь повернется против часовой стрелки, и будет втягиваться в область сильного поля;

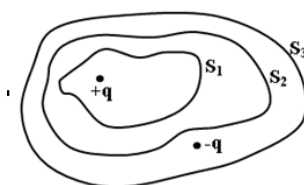


120. В цепи на рисунке с параметрами $\varepsilon_1 = 10$ В, $\varepsilon_2 = 5$ В, $r_1 = 2$ Ом, $r_2 = 1$ Ом, $R_1 = 10$ Ом, $R_2 = 20$ Ом, $R_A = 1$ Ом, $R_V = 100$ Ом, показание амперметра составляет...



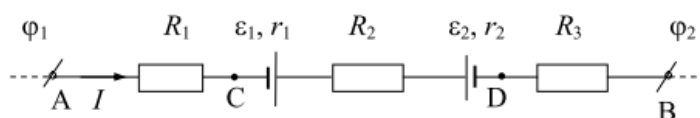
- 1) 3,2 А; 2) 0,425 А; 3) 1 А; 4) 0,16 А.

121. Дана система точечных зарядов в вакууме и замкнутые поверхности S_1 , S_2 , S_3 . Поток вектора напряженности электростатического поля равен нулю через поверхность



- 1) S_1 ; 2) S_2 ; 3) S_3 ; 4) q .

122. На рисунке изображен участок электрической цепи. Параметры цепи: $\varepsilon_1 = 7$ В, $\varepsilon_2 = 2$ В, $r_1 = r_2 = 1$ Ом, $R_1 = 3$ Ом, $R_2 = R_3 = 5$ Ом, $\varphi_1 - \varphi_2 = 10$ В. Сила тока равна...



- 1) 1 А; 2) 2 А; 3) 3 А; 4) 6 А.

123. Плоский воздушный конденсатор емкостью 17,6 пФ образуют квадратные пластины, расположенные на расстоянии 0,4 мм друг от друга. Определить длину одной из сторон этих пластин.

- 1) $4 \cdot 10^{-2}$ см 2) $2 \cdot 10^{-2}$ см 3) 2,8 см 4) 4 см

124. Каким уравнением описывается первый закон Кирхгофа?

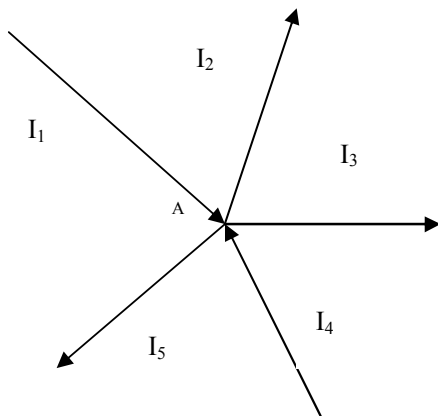
- 1) $\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$ 2) $\sum_{i=1}^n I_i = 0$ 3) $I = \frac{\epsilon}{R + r}$ 4) $\sum_{i=1}^n I_i R_i = \sum_j^m \epsilon_j$

125. Приведите в соответствие формулы и их названия:

- 1) Закон Кулона;
2) Вектор напряженности электрического поля;
3) Принцип суперпозиции электрических полей;
4) Теорема Гаусса для вектора напряженности электрического поля.

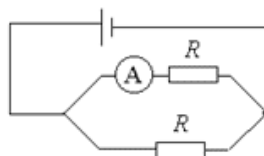
А) $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q'}$; Б) $F = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2}$ В) $\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i$ Г) $\vec{E} = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i$.

126. Какое из соотношений выражает 1-й закон Кирхгофа для узла А?



- 1) $I_4 - I_2 + I_1 - I_5 - I_3 = 0$; 2) $I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 = 0$;
3) $I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0$; 4) $I_4 + I_2 + I_1 + I_5 + I_3 = 0$

127. Амперметр, изображенный на рисунке показывает 2 А. Определить сопротивление внешнего участка цепи, если ЭДС источника тока 12 В, а падение напряжения внутри него 4 В.



- 1) 4 Ом 2) 8 Ом 3) 2 Ом 4) 6 Ом

128. Вокруг металлического проводника возникает магнитное поле в случае...

- 1) Движения проводника;
- 2) Нагрева проводника;
- 3) Вращения проводника;
- 4) Помещения проводника в электрическое поле;
- 5) Пропускания по проводнику электрического тока.

129. Магнитное поле создано двумя параллельными длинными проводниками с токами I_1 и I_2 , расположенными перпендикулярно плоскости рисунка. Если $I_1 = 2I_2$, то вектор индукции результирующего поля в точке А направлен...

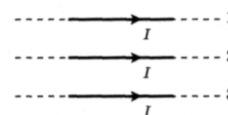
- 1) Вверх;
- 2) Влево;
- 3) Вниз;
- 4) Вправо.



130. В магнитном поле B на прямой проводник длиной L с током I действует сила Ампера, которая равна $F = IBL \sin \alpha$, где α - угол между...

- 1) I и B ;
- 2) B и L ;
- 3) B и нормалью к L ;
- 4) I и L ;
- 5) I и нормалью к L .

134. На проводник №2 со стороны двух других проводников действует сила Ампера (см. рисунок). Все проводники тонкие, лежат в одной плоскости, параллельны друг другу, и расстояния между соседними проводниками одинаковы, I — сила тока. Сила Ампера в этом случае...



- 1) Направлена вверх ↑;
- 2) Направлена вниз ↓;
- 3) Направлена от нас;
- 4) Равна нулю.

135. В чем заключается явление самоиндукции?

- 1) В изменении индуктивности контура при изменении тока в нем;
- 2) В увеличении индукционного тока в контуре при увеличении основного тока в нем;
- 3) В уменьшении индукционного тока в контуре при уменьшении основного тока в нем;
- 4) В возникновении индукционного тока в контуре при изменении основного тока в нем;
- 5) В возникновении основного тока в контуре при изменении индукционного тока в нем.

136. Чему равна энергия магнитного поля катушки с индуктивностью 3 Гн при силе тока в ней 2 А?

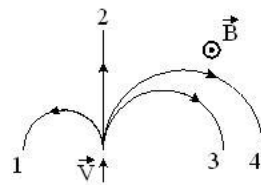
- 1) 3 Дж;
- 2) 6 Дж;
- 3) 1,5 Дж;
- 4) 2/3 Дж;
- 5) 1/3 Дж.

137. В каком случае прямой провод с током I , помещенный в магнитное поле с индукцией B , испытывает максимальную силу?

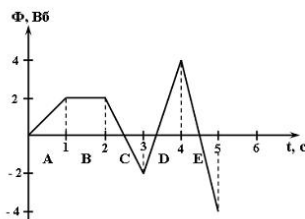
- 1) При $I = \text{const}$;
- 2) При $B = \text{const}$;
- 3) Когда проводник расположен под углом 45 градусов к полю;
- 4) Когда проводник расположен вдоль поля;
- 5) Когда проводник расположен перпендикулярно полю.

138. На рисунке указаны траектории заряженных частиц, имеющих одинаковую скорость и влетающих в однородное магнитное поле, перпендикулярное плоскости чертежа. При этом для частицы 3...

- 1) $q_3 < 0$;
- 2) $q_3 > 0$;
- 3) $q_3 = 0$.
- 4) $q_3 = q_4$.



139. На рисунке представлена зависимость магнитного потока, пронизывающего некоторый замкнутый контур, от времени. ЭДС индукции в контуре не возникает на интервале...



- 1) E;
- 2) C;
- 3) B;
- 4) D;
- 5) A.

140. Система уравнений Максвелла для электромагнитного поля имеет вид:

$$\oint_{(L)} \vec{E} d\vec{l} = - \int_{(S)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}$$

$$\oint_{(L)} \vec{H} d\vec{l} = \int_{(S)} \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S}$$

$$\oint_{(S)} \vec{D} d\vec{S} = \int_{(V)} \rho dV$$

$$\oint_{(S)} \vec{B} d\vec{S} = 0$$

Следующая система уравнений:

$$\oint_{(L)} \vec{E} d\vec{l} = 0$$

$$\oint_{(L)} \vec{E} d\vec{l} = \int_{(S)} \vec{j} d\vec{S}$$

$$\oint_{(S)} \vec{D} d\vec{S} = \int_{(V)} \rho dV$$

$$\oint_{(S)} \vec{B} d\vec{S} = 0$$

Вторая система уравнений справедлива для...

- 5) Переменного электромагнитного поля при наличии заряженных тел и токов проводимости;
- 6) Стационарных электрических и магнитных полей;
- 7) Стационарного электромагнитного поля в отсутствие заряженных тел;

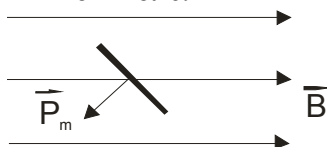
8) Стационарного электромагнитного поля в отсутствие токов проводимости.

141. На рисунке изображен проводник, через который идет электрический ток. Направление тока указано стрелкой. Как направлен вектор магнитной индукции в точке С?



- 5) В плоскости чертежа $\uparrow$;
- 2) От нас перпендикулярно плоскости чертежа;
- 3) К нам перпендикулярно плоскости чертежа;
- 4) Вектор магнитной индукции в точке С равен нулю.

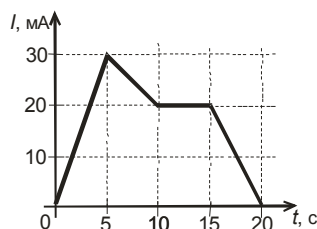
142. Рамка с током с магнитным моментом, направление которого указано на рисунке, находится в однородном магнитном поле.



Момент сил, действующих на рамку, направлен...

- 1) Перпендикулярно плоскости рисунка к нам;
- 2) Противоположно вектору магнитной индукции;
- 3) Перпендикулярно плоскости рисунка от нас;
- 4) По направлению вектора магнитной индукции.

143. На рисунке показана зависимость силы тока от времени в электрической цепи с индуктивностью 1 мГн.



Модуль среднего значения ЭДС самоиндукции в интервале от 15 до 20 с. (в мкВ) равен...

- 1) 10;
- 2) 20;
- 3) 0;
- 4) 4.

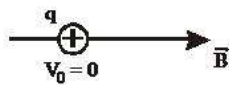
144. Температура Кюри для железа составляет 768°C . При температуре 600°C железо является....

- 1) Ферромагнетиком;
- 2) Парамагнетиком;
- 3) Диамагнетиком;
- 4) Ферреэлектриком.

145. Какое из перечисленных ниже утверждений является ошибочным?

- 1) Линии вектора индукции магнитного поля всегда замкнуты;
- 2) Сила Лоренца действует только на движущиеся электрические заряды;
- 3) Магнитное поле является потенциальным полем;
- 4) ЭДС индукции прямо пропорциональна скорости изменения магнитного потока;
- 5) Вещества, помещенные в магнитное поле, намагничиваются.

146. Как будет двигаться протон (+q), внесенный в однородное магнитное поле с индукцией B ? Начальная скорость протона равна нулю.



- 1) По направлению поля, равномерно;
- 2) Против направления поля, равномерно;
- 3) По направлению поля равноускоренно;
- 4) По окружности в плоскости, перпендикулярной вектору индукции, с постоянной по модулю скоростью;
- 5) Останется неподвижным.

147. Какой процесс объясняется явлением электромагнитной индукции?

- 1) Взаимодействие двух проводов с током;
- 2) Возникновение электрического тока в замкнутой катушке при изменении силы тока в другой катушке, находящейся рядом с ней;
- 3) Отклонение магнитной стрелки вблизи проводника с током;
- 4) Возникновение силы, действующей на движущуюся заряженную частицу в магнитном поле.

148. Поток вектора магнитной индукции через рамку, площадь которой равна $0,02 \text{ м}^2$, а плоскость расположена под углом 60° к вектору B , при $B = 0,05 \text{ Тл}$ равен...

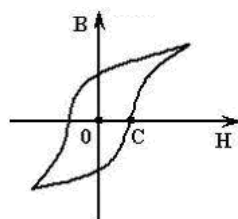
- 1) $0,87 \text{ мВб}$;
- 2) $0,5 \text{ мВб}$;
- 3) $1,25 \text{ мВб}$;
- 4) $2,2 \text{ мВб}$

149. Как изменился магнитный поток через катушку индуктивности, если при увеличении силы тока в катушке, энергия магнитного поля катушки увеличилась в 4 раза?

- 1) Увеличился в 4 раза;
- 2) Уменьшился в 4 раза;
- 3) Увеличился в 2 раза;
- 4) Остался прежним.

150. На рисунке показана зависимость проекции вектора индукции магнитного поля B в ферромагнетике от напряженности H внешнего магнитного поля.

Участок OC соответствует ...



- 1) Коэрцитивной силе ферромагнетика;
- 2) Магнитной индукции насыщения ферромагнетика;
- 3) Остаточной намагниченности ферромагнетика;
- 4) Остаточной магнитной индукции ферромагнетика.

151. Укажите определение амплитуды колебаний.

- 1) Величина, пропорциональная приложенной силе.
- 2) Величина, равная числу колебаний за единицу времени.
- 3) Величина, численно равная отклонению системы от положения равновесия в данный момент времени.
- 4) Величина наибольшего отклонения системы от положения равновесия.

152. Укажите формулу для расчета периода колебаний математического маятника.

- 1) $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$;
- 2) $T = \sqrt{\frac{g}{l}}$;
- 3) $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$;
- 4) $T = 2\pi \sqrt{LC}$;
- 5) $T = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

154. За 100 секунд система совершает 1000 полных колебаний. Чему равны частота и период колебаний системы?

- 1) $\nu = 0,1$ Гц, $T = 10$ с;
- 2) $\nu = 900$ Гц, $T = 10$ с;
- 3) $\nu = 10$ Гц, $T = 0,1$ с;
- 4) $\nu = 1000$ Гц, $T = 1$ с.

155. Материальная точка совершает гармонические колебания по закону

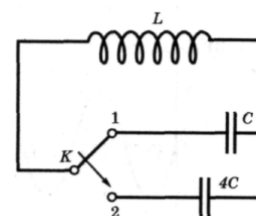
$$x = 0,3 \cos\left(\frac{2\pi}{3}t + \frac{\pi}{4}\right)$$

Максимальное значение скорости точки равно...

- 1) 2π м/с;
- 2) $0,2\pi$ м/с;
- 3) $0,1\pi$ м/с;
- 4) π м/с.

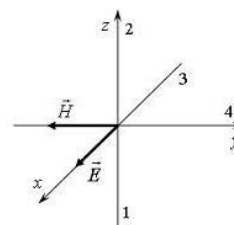
156. Как изменится частота собственных электромагнитных колебаний в контуре (см. рисунок), если ключ K перевести из положения 1 в положение 2?

- 1) увеличится в 4 раза
- 2) уменьшится в 4 раза
- 3) увеличится в 2 раза
- 4) уменьшится в 2 раза

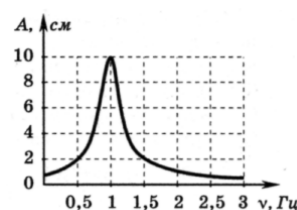


157. На рисунке показана ориентация векторов напряженности электрического (E) и магнитного (H) полей в электромагнитной волне. Вектор плотности потока энергии электромагнитного поля ориентирован в направлении...

- 1) 3;
- 2) 4;
- 3) 1;
- 4) 2.



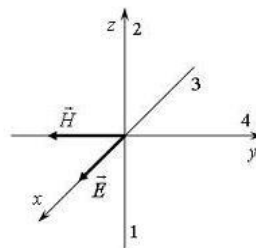
158. На рисунке изображена зависимость амплитуды установившихся колебаний маятника от частоты вынуждающей силы (резонансная кривая). Отношение амплитуды установившихся колебаний маятника на



резонансной частоте к амплитуде колебаний на частоте 0,5 Гц равно

- 1) 10; 2) 2; 3) 5; 4) 4.

159. На рисунке показана ориентация векторов напряженности электрического (E) и магнитного (H) полей в электромагнитной волне. Вектор плотности потока энергии электромагнитного поля ориентирован в направлении...



- 1) 3; 2) 4; 3) 1; 4) 2.

160. Уравнение движения пружинного маятника

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t$$

является дифференциальным уравнением ...

- 1) вынужденных колебаний; 2) свободных затухающих колебаний;
3) свободных незатухающих колебаний.

161. При распространении электромагнитной волны в вакууме

- 1) происходит только перенос энергии
2) происходит только перенос импульса
3) происходит перенос и энергии, и импульса
4) не происходит переноса ни энергии, ни импульса

162. Если уменьшить в 2 раза объемную плотность энергии при неизменной скорости распространения упругих волн, то плотность потока энергии...

- 1) уменьшится в 2 раза; 2) уменьшится в 4 раза; 3) останется неизменной.

163. В радиоволне, распространяющейся в вакууме со скоростью v , происходят колебания векторов напряженности электрического поля E и индукции магнитного поля B . При этих колебаниях векторы E , B , v имеют следующую взаимную ориентацию

- 1) $\vec{E} \perp \vec{B}$, $\vec{E} \parallel \vec{v}$, $\vec{B} \parallel \vec{v}$
2) $\vec{E} \perp \vec{B}$, $\vec{E} \perp \vec{v}$, $\vec{B} \perp \vec{v}$
3) $\vec{E} \parallel \vec{B}$, $\vec{E} \perp \vec{v}$, $\vec{B} \perp \vec{v}$
4) $\vec{E} \parallel \vec{B}$, $\vec{E} \parallel \vec{v}$, $\vec{B} \parallel \vec{v}$

164. Радиостанция работает на частоте 60 МГц. Определите длину электромагнитных волн, излучаемых антенной радиостанции.

- 3) 0,5 м 3) 6 м
4) 5 м 4) 10 м

165. Какое утверждение верно?

В теории электромагнитного поля Максвелла

А — переменное электрическое поле является источником вихревого магнитного поля.

Б — переменное магнитное поле является источником вихревого электрического поля

- 1) только А 2) только Б 3) и А, и Б 4) ни А, ни Б

167. Сколько утверждений относительно вынужденных колебаний Вы считаете верным?

- А) Для диссипативной системы $\omega_{\text{рез}}$ несколько меньше собственной циклической частоты $\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$.
 Б) Амплитуда вынужденных колебаний прямо пропорциональна амплитуде вынуждающей силы F_0 и уменьшается с увеличением коэффициента затухания β .
 В) Явление возрастания амплитуды вынужденных колебаний при приближении циклической частоты вынуждающей силы к значению $\omega_{\text{рез}}$ называется явлением резонанса.
 Г) Для консервативной системы резонансная и собственная частоты совпадают $\omega_{\text{рез}} = \omega_0$.
- 1) А, Б; 2) А,В,Г; 3) А,Б,В,Г; 4) Б,В,Г.

168. Уравнение движения пружинного маятника

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$$

является дифференциальным уравнением ...

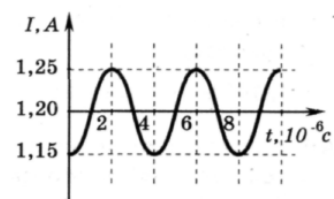
- 1) вынужденных колебаний;
 2) свободных затухающих колебаний;
 3) свободных незатухающих колебаний;
 4) свободных гармонических колебаний.

169. Максимальное напряжение на конденсаторе при колебаниях в контуре равно 50 В, емкость конденсатора равна 0,1 мкФ, индуктивность—1 мГн. Уравнение колебаний заряда на конденсаторе имеет вид:

- 1) $q = 50 \cos(10^{-5}t)$ (мкКл) 2) $q = 5 \cos 10^5 t$ (мкКл)
 3) $q = 50 \cos(10^5 \pi t)$ (мкКл) 4) $q = 5 \cos(2 \cdot 10^5 \pi t)$ (мкКл)

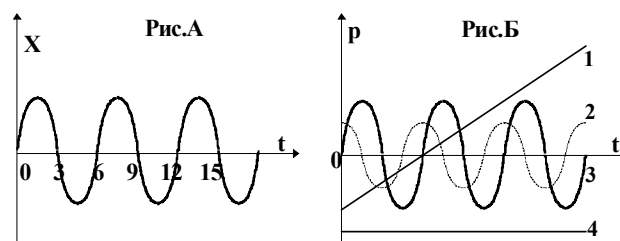
170. На рисунке показан график колебаний силы тока в колебательном контуре с антенной. Определите длину электромагнитной волны, излучаемой антенной.

- 1) $1,2 \times 10^3$ м; 2) $0,83 \times 10^{-3}$ м; 3) $7,5 \times 10^2$ м; 4) 6×10^2 м



171. На рис. А представлен график зависимости координаты тела от времени при гармонических колебаниях. Какой из графиков на рис. Б выражает зависимость импульса колеблющегося тела от времени?

- 1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4.



172. Укажите вид энергии идеального колебательного контура в начальный момент времени $t = 0$ и через $1/2$ часть периода после начала разряда конденсатора? В начальном состоянии конденсатор полностью заряжен.

- 1) магнитная;
 2) электрическая и магнитная в равных соотношениях;
 3) электрическая ;

4) энергия равна нулю.

173. Уравнение колебаний груза на пружине имеет вид:

$$x = 10 \sin\left(2\pi t + \frac{\pi}{4}\right) (\text{см}) .$$

Максимальное смещение и максимальная скорость груза равны, соответственно...

- 1) 10 см и 6,28 м/с;
- 2) 628 см и 10 м/с;
- 3) 10 см и 10 м/с;
- 4) 10 см и 0,625 м/с.

174. Из приведенных выражений уравнением бегущей волны является...

- 1) $\xi = \frac{A_0}{r} \cos(\omega t - kr)$
- 4) $\xi = 2A \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \cos \omega t$
- 2) $\xi = A_0 e^{-R} \cos(\omega t + \varphi_0)$
- 5) $\xi = A \cos(\omega t - kx)$
- 3) $\xi = A \cos(\omega t + \varphi_0)$

175. Для сферической волны справедливо утверждение...

- 1) волновые поверхности имеют вид параллельных друг другу плоскостей;
- 2) амплитуда волны обратно пропорциональна расстоянию до источника колебаний (в не-поглощающей среде);
- 3) амплитуда волны не зависит от расстояния до источника колебаний (при условии, что поглощением среды можно пренебречь);
- 4) амплитуда волны пропорциональна расстоянию до источника колебаний.

176. Максимальная скорость точки, совершающей гармонические колебания, равна 10 см/с, максимальное ускорение 100 см/с. Период колебаний равен

- 1) $0,1 \pi$ с;
- 2) $0,2 \pi$ с;
- 3) 1с;
- 4) 10 с.

177. Конденсатор емкости C включают в цепь переменного тока с напряжением, меняющимся по закону $U = U_0 \sin \omega t$. По какому закону будет меняться ток I через конденсатор?

- 1) $I = U_0 \omega C \cos \omega t$;
- 2) $I = U_0 \omega \sin \omega t$;
- 3) $I = U_0 \omega C \cos(\omega t + \pi/4)$;
- 4) $I = U_0 \omega C \sin(\omega t + \pi/4)$;
- 5) $I = -U_0 \omega C \cos \omega t$;
- 6) $I = -U_0 \omega C \sin \omega t$.

178. Складываются два гармонических колебания одного направления с одинаковыми частотами и равными амплитудами A_0 . При разности фаз $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$ амплитуда результирующего колебания равна...

- 1) 0; 2) $2A_0$; 3) $A_0\sqrt{3}$; 4) $A_0\sqrt{2}$.

179. В газовой среде распространяются...

- 1) только поперечные волны; 2) только продольные волны; 3) продольные и поперечные волны; 4) в газовой среде волны распространяться не могут.

180. Бегущая волна...

- 1) переносит вещество;
2) переносит массу;
3) не переносит импульс;
4) переносит энергию .

181. Скорость звука в воде 1450 м/с. На каком расстоянии находятся две ближайшие точки, совершающие колебания в противоположных фазах, если частота колебаний $\nu = 725$ Гц.

- 1) 0,5 м; 2) 1 м; 3) 2 м; 4) 4 м.

182. На какие вопросы Вы ответите «да»:

- 1) Гармонические колебания являются периодическими?
2) В реальном колебательном контуре всегда присутствуют потери энергии?
3) Возможно ли сложение колебаний?
4) Изменяется ли амплитуда при гармонических колебаниях?

- 1) 4, 1; 2) 1, 3; 3) 1, 2, 3; 4) 3, 4.

183. Два гармонических колебания, направленных по одной прямой и имеющих одинаковые периоды и амплитуды складываются в одно колебание той же амплитуды. Разность фаз складываемых колебаний равна...

- 1) π ;
2) $\frac{1}{3}\pi$;
3) $\frac{2}{3}\pi$;
4) 2π .

184. В уравнении гармонического колебания $x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$ величина, стоящая под знаком косинуса, называется

- 1) фазой
2) начальной фазой
3) смещением от положения равновесия
4) циклической частотой

185. Точка участвует одновременно в двух гармонических колебаниях, происходящих во взаимно перпендикулярных направлениях и описываемых уравнениями

$x = A \sin(\omega t + \pi/2)$ и $y = A \sin \omega t$. Траектория точки представляет собой...

- 1) эллипс;
2) окружность радиусом $R = A$;
3) окружность радиусом $R = 2A$;

4) прямую.

186. Электромагнитные волны распространяются в некоторой однородной среде со скоростью $v = 2,4 \cdot 10^8$ м/с. Какую длину волны имеют электромагнитные колебания в этой среде, если их частота в вакууме равна 1,2 МГц?

- 1) 100 м; 2) 200 м; 3) 300 м; 4) 50 м.

187. В твердых телах распространяются...

- 1) только поперечные волны;
2) только продольные волны;
3) продольные и поперечные волны.
4) в твердых телах волны распространяться не могут.

188. Для интерференции двух волн необходимы и достаточны...

- 1) постоянная для каждой точки разность фаз и одинаковое направление колебаний;
2) одинаковая частота и одинаковое направление колебаний;
3) одинаковая амплитуда и одинаковая частота колебаний.
4) постоянная разность фаз и одинаковая частота колебаний.

189. Материальная точка совершает гармонические колебания с амплитудой $A = 4$ см и периодом $T = 2$ с. Если смещение точки в момент времени, принятый за начальный, равно нулю, то точка колеблется в соответствии с уравнением (в СИ)...

- 1) $x = 0,04 \sin 2t$; 2) $x = 0,04 \cos \pi t$; 3) $x = 0,04 \sin \pi t$; 4) $x = 0,04 \cos 2t$.

190. Материальная точка совершает гармонические колебания по закону $x = 0,3 \cos\left(\frac{2\pi}{3}t + \frac{\pi}{4}\right)$

Уравнение скорости имеет вид:

1) $v = 0,3 \sin\left(\frac{2\pi}{3}t + \frac{\pi}{4}\right)$ 2) $v = -0,2\pi \sin\left(\frac{2\pi}{3}t - \frac{\pi}{4}\right)$

3) $v = 0,2\pi \sin\left(\frac{2\pi}{3}t + \frac{\pi}{4}\right)$ 4) $v = -0,2\pi \sin\left(\frac{2\pi}{3}t + \frac{\pi}{4}\right)$

191. Уравнение бегущей вдоль оси x волны имеет вид...

1) $y = 2A \cdot \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \cos(\omega t)$ 2) $y = A \cdot \cos(\omega t + \varphi)$

3) $y = A \cos\left\{2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\right\}$ 4) $y = A \cdot \cos\left\{\omega\left(t - \frac{x}{\lambda}\right)\right\}$

192. В результате сложения двух колебаний, период одного из них $T = 0,02$ с, получают биения с периодом $T_6 = 0,2$ с. Частота второго складываемого колебания равна...

- 1) 2 Гц; 2) 45 Гц; 3) 100 Гц; 4) 135 Гц.

193. Как изменится период собственных колебаний контура, если его индуктивность увеличить в 20 раз, а емкость уменьшить в 5 раз?

- 1) Увеличится в 2 раза
2) Уменьшится в 2 раза
3) Увеличится в 4 раза
4) Уменьшится в 4 раза

194. В цепь колебательного контура, содержащего катушку индуктивностью $L = 0,2$ Гн и активным сопротивлением $R = 9,7$ Ом, и конденсатор емкостью $C = 40$ мкФ, подключено внешнее переменное напряжение. Разность фаз между током и внешним напряжением φ равна...

- 1) 60° ; 2) -60° ; 3) 45° ; 4) -45° .

195. Вынужденные колебания заряда конденсатора в колебательном контуре описываются уравнением...

- 1) $\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{1}{LC} q = 0$ 2) $\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = \frac{U_0}{L} \cos \omega t$
3) $\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = 0$

196. Уравнение плоской синусоидальной волны, распространяющейся вдоль оси ОХ со скоростью 500 м/с, имеет вид $\xi = 0,01 \sin (10^3 t - 2x)$. Циклическая частота ω равна...

- 1) $0,001 \text{ с}^{-1}$; 2) 159 с^{-1} ; 3) 1000 с^{-1} ; 4) 100 с^{-1} .

197. Укажите единицу измерения плотности потока электромагнитной энергии.

- 1) $\text{В} \cdot \text{А} / \text{м}^2$; 2) $\text{В} \cdot \text{А} \cdot \text{с} \cdot \text{м}^2$; 3) $\text{В} \cdot \text{А} \cdot \text{м}^2$; 4) $\text{В} \cdot \text{А} \cdot \text{м}$.

198. Из приведенных выражений уравнением стоячей волны является...

- 1) $\xi = \frac{A_0}{r} \cos(\omega t - kr)$ 4) $\xi = 2A \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \cos \omega t$
2) $\xi = A_0 e^{-kx} \cos(\omega t + \varphi_0)$ 5) $\xi = A \cos(\omega t - kx)$
3) $\xi = A \cos(\omega t + \varphi_0)$

199. Различные виды электромагнитных излучений:

- 1) видимый свет; 2) радиоволны; 3) инфракрасное излучение;
4) ультрафиолетовое излучение; 5) рентгеновские лучи; 6) γ - лучи –
расположите в порядке уменьшения длины волны:
1) 2,3,1,4,5,6; 2) 2,1,3,4,6,5; 3) 6,5,4,3,2,1; 4) 5,1,4,3,2,6.

200. Если вектор $\mathbf{E}$ ориентирован вдоль положительного направления оси ОХ, а вектор $\mathbf{H}$ вдоль отрицательного направления оси ОУ, то вектор плотности потока энергии электромагнитного поля ориентирован:

- 1) вдоль отрицательного направления оси OZ ;
- 2) вдоль положительного направления оси OZ ;
- 3) вдоль отрицательного направления оси OX ;
- 4) вдоль положительного направления оси OX .

Критерии оценивания: правильность ответов

Правила оценивания:

Правильный ответ – 1 балл

Неправильный ответ, ответ с ошибкой – 0 баллов

Составил: Коршунов И.Г., д.ф.-м.н., профессор

ФГБОУ ВО «УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГОРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ФАКУЛЬТЕТА ГЕОЛОГИИ И ГЕОФИЗИКИ

Кафедра физики

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ

для зачета

дисциплина **ФИЗИКА**

Теоретические вопросы, направленные на оценку знаний, умений и владений, формирующих компетенции ОК-7, ПКД-2

Примерные вопросы для подготовки к зачету

1. Механическое движение. Пространство. Время. Материальная точка. Тело отсчета. Система отсчета.
2. Траектория. Путь. Перемещение. Мгновенная скорость. Средняя скорость перемещения. Средняя путевая скорость.
3. Ускорение: мгновенное, среднее, центростремительное.
4. Равномерное и равнопеременное движения. Свободное падение тел. Уравнения этих движений в векторном и скалярном виде.
5. Кинематика вращательного движения. Основные понятия: угловое перемещение, угловая скорость, угловое ускорение.
6. Связь линейных и угловых кинематических характеристик: перемещение и угловое перемещение; скорость и угловая скорость; ускорение и угловое ускорение. Полное ускорение при криволинейном движении.
7. Динамика (определение). Сила. Принцип суперпозиции.
8. Первый закон Ньютона. Инерциальные системы отсчета. Инерция. Инертность.
9. Второй закон Ньютона. Масса. Импульс тела. Импульс силы.
10. Третий закон Ньютона. Силы в механике: гравитационные и силы электромагнитной природы (упругие и силы сопротивления).
11. Принцип относительности Галилея. Закон сложения скоростей в классической механике.
12. Основные характеристики динамики вращательного движения: момент силы; момент импульса. Основной закон динамики для вращательного движения (вывод).
13. Момент инерции материальной точки. Расчет момента инерции тела произвольной формы на примере сплошного цилиндра.
14. Теорема Штейнера. Моменты инерции шара, сплошного и полого цилиндров, стержней.
15. Закон сохранения импульса (вывод) и момента импульса. Механическая система. Внутренние силы, внешние силы. Замкнутая механическая система.
16. Абсолютно упругий и абсолютно неупругий удары. Закон сохранения импульса для этих случаев.
17. Работа. Мощность. Механическая энергия. Кинетическая, потенциальная, полная механическая энергия.
18. Вывод теоремы об изменении кинетической энергии для поступательного и вращательного движений.

19. Потенциальная энергия. Консервативные и неконсервативные силы. Работа консервативной силы по замкнутой траектории.
20. Теорема об изменении потенциальной энергии. Потенциальная энергия тела, поднятого на высоту h , и упруго деформированного тела.
21. Фундаментальная связь между консервативной силой и потенциальной энергией. Условия равновесия тел, находящихся в поле консервативных сил.
22. Закон изменения механической энергии. Закон сохранения механической энергии.
23. Статистический и термодинамический методы описания свойств макросистем.
24. Термодинамические параметры.
25. Основные положения МКТ. Идеальный газ.
26. Давление газа. Вывод основного уравнения МКТ. Закон Дальтона.
27. Температура. Термодинамическая температура.
28. Уравнение состояния ИГ (уравнение Менделеева-Клапейрона)
29. МКТ толкования термодинамической температуры.
30. Опытные газовые законы.
31. Число степеней свободы молекул. Закон равномерного распределения молекул по степеням свободы.
32. Распределение Максвелла.
33. Барометрическая формула (зависимость давления в атмосфере от высоты).
34. Закон Больцмана для распределения частиц во внешнем потенциальном поле.
35. Среднее число столкновений и средняя длина свободного пробега молекул.
36. Явление переноса в термодинамически неравновесных условиях. Опытные законы теплопроводности, диффузии, внутреннего трения.
37. Внутренняя энергия газа. Теплота и работа.
38. Первое начало термодинамики. Работа расширения ИГ.
39. Теплоемкость газов. Молярная теплоемкость при постоянных давлении и объеме (C_p и C_v).
40. Применение 1 начала термодинамики к изопроцессам.
41. Адиабатный (политропный процесс)
42. Работа в адиабатном процессе.
43. Цикл Карно. Термический КПД цикла.
44. Обратимые и необратимые процессы. Энтропия S . Приведенное количество теплоты. Неравенство Клаузиуса.
45. Термодинамическая вероятность W состояния. Принцип возрастания энтропии. Связь S и W (формула Больцмана). Статистическое толкование энтропии.
46. Изменение энтропии при некоторых обратимых процессах.
47. Второе начало термодинамики. Статистическое толкование второго начала ТД
48. Электрический заряд. Элементарный заряд. Закон Кулона.
49. Электрическое поле в вакууме. Принцип суперпозиции полей. Закон сохранения электрического заряда.
50. Напряженность электрического поля в вакууме. Принцип суперпозиции полей. Напряженность поля точечного заряда.
51. Теорема Гаусса для электростатического поля (вывод).
52. Применение теоремы Гаусса к расчету поля, создаваемого бесконечной равномерно заряженной плоскостью. Поле, создаваемое двумя бесконечными разноименно заряженными плоскостями.
53. Применение теоремы Гаусса к расчету поля, создаваемого бесконечной равномерно заряженной нитью.
54. Применение теоремы Гаусса к расчету напряженности поля равномерно заряженной сферы.

55. Работа электростатического поля при перемещении точечных зарядов.
2. Потенциал. Потенциал поля системы точечных зарядов.
3. Связь между напряженностью поля и потенциалом.
4. Эквипотенциальные поверхности.
5. Расчет потенциала бесконечно одноименно заряженной плоскости и разности потенциалов между заряженными плоскостями.
6. Формула для расчета разности потенциалов между двумя точками поля. Разность потенциалов между двумя точками, находящимися на расстоянии r_1 и r_2 от оси равномерно заряженной нити.
7. Расчет поля равномерно заряженной сферической поверхности.
8. Электрический диполь. Диполь в однородном и неоднородном электрическом полях.
9. Диэлектрики. Свободные и связанные заряды. Поляризация диэлектриков. Типы диэлектриков.
10. Поляризованность. Напряженность поля в диэлектриках. Диэлектрическая проницаемость ϵ .
11. Теорема Гаусса для диэлектриков. Вектор электрической индукции
12. Проводники в электрическом поле. Распределение зарядов на проводнике в отсутствие поля. Напряженность поля вблизи поверхности проводника.
13. Емкость уединенного проводника. Емкость уединенного шара.
14. Плоский конденсатор и его емкость. Соединение конденсаторов.
15. Энергия электрического поля. Объемная плотность энергии.
16. Постоянный электрический ток, его характеристики и условия существования. Основные определения.
17. Сторонние силы в электрической цепи. Источники тока. Электродвижущая сила. Разность потенциалов, напряжение.
18. Закон Ома в интегральной и дифференциальной форме для однородного участка цепи.
19. Закон Ома для неоднородного участка и замкнутой цепи.
20. Работа и мощность тока. Закон Джоуля-Ленца.
21. Правила Кирхгофа.
22. Магнитное поле и его характеристики.
23. Сила Лоренца. Действие магнитного поля на движущийся заряд.
24. Закон Био-Савара-Лапласа. Принцип суперпозиции.
25. Применение закона Б-С-Л- и принципа суперпозиции для расчета магнитных полей. Индукция магнитного поля, создаваемого прямым проводником с током.
26. Графическое изображение магнитных полей.
27. Сила Ампера. Взаимодействие двух параллельных токов.
28. Теорема Гаусса для вектора магнитной индукции. Поток вектора магнитной индукции.
29. Теорема о циркуляции вектора индукции магнитного поля.
30. Применение теоремы о циркуляции к расчету магнитного поля соленоида.
31. Вихревой характер магнитного поля.
32. Работа по перемещению проводника и контура с током в магнитном поле. Механический момент сил, действующий на рамку с током в магнитном поле.
33. Явление электромагнитной индукции. опыты Фарадея.
34. Закон Фарадея. Правило Ленца.
35. Явление самоиндукции.
36. Индуктивность длинного соленоида.
37. Влияние самоиндукции на ток при замыкании и размыкании.
38. Энергия магнитного поля. Плотность энергии магнитного поля.
39. Типы магнетиков. Магнитное поле в веществе.
40. Диамагнетики. Спин.
41. Орбитальный диамагнетизм.
42. Парамагнетики.

43. Магнитоупорядоченные вещества. Антиферромагнетики. Ферриты.
44. Ферромагнетики.
45. Основные положения электромагнитной теории Максвелла. Первое уравнение Максвелла. Вихревой характер электрического поля, возникающего при электромагнитной индукции.
46. Второе уравнение Максвелла. Ток смещения.
47. Полная система уравнений Максвелла в интегральной форме. Материальные уравнения.

102. Гармонические колебания и их характеристики: амплитуда, фаза, частота, период колебаний. Единицы измерения.
103. Кинематика колебательных процессов: скорость, ускорение. Дифференциальное уравнение гармонических колебаний. Гармонический осциллятор.
104. Энергия колебательного процесса: кинетическая, потенциальная, полная энергия.
105. Колебательный контур. Дифференциальное уравнение свободных незатухающих электромагнитных колебаний.
106. Сила тока в идеальном колебательном контуре. Напряжение на конденсаторе. Колебания заряда и энергии на различных стадиях колебательного процесса.
107. Дифференциальное уравнение затухающих механических колебаний и его решение. Коэффициент затухания.
108. Дифференциальное уравнение затухающих электромагнитных колебаний и его решение. Коэффициент затухания. Время релаксации. Логарифмический декремент затухания.
109. Добротность колебательного контура.
110. Векторная диаграмма. Сложение гармонических колебаний одного направления и одинаковой частоты.
111. Биения.
112. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний одинаковой частоты.
113. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний разных частот. Фигуры Лиссажу.
114. Вынужденные колебания. Дифференциальное уравнение вынужденных механических колебаний.
115. Вынужденные колебания. Дифференциальное уравнение вынужденных электромагнитных колебаний.
116. Сила тока в контуре при установившихся вынужденных колебаниях.
117. Резонанс напряжений.
118. Резонанс токов.
119. Механизм образования и распространения механических волн в упругой среде. Продольные и поперечные волны. Длина волны, волновой фронт, волновая поверхность.
120. Уравнение плоской и сферической механической волны. Волновое число.
121. Волновое уравнение. Вывод.
122. Электромагнитные волны.
123. Уравнение электромагнитной волны. Фазовая скорость электромагнитной волны. Поперечность ЭМВ.
124. Энергия электромагнитной волны. Давление ЭМВ.
125. Стоячая волна. Уравнение стоячей волны. Узлы и пучности. Отражение волны от менее плотной и от более плотной среды.

<i>Критерии оценивания:</i>	<i>Количество баллов</i>
Полнота ответа на вопрос	0-3
Последовательность ответа на вопрос	0-2
Степень использования и понимания теоретических (научных) источников	0-2
Демонстрация умения анализировать материал	0-1

Соблюдение норм литературной речи	0-1
Использование профессиональной лексики	0-1

Критерии оценки:

оценка «отлично» выставляется обучающемуся, если он набрал 9-10 баллов

оценка «хорошо» выставляется обучающемуся, если он набрал 7-8 баллов

оценка «удовлетворительно» выставляется обучающемуся, если он набрал 5-6 баллов

оценка «неудовлетворительно» выставляется обучающемуся, если он набрал 0-4 балла.

Автор: Коршунов И.Г., д.ф-м.н., профессор.

ФГБОУ ВО «УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГОРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ФАКУЛЬТЕТ ГЕОЛОГИИ И ГЕОФИЗИКИ

Кафедра физики

ЗАДАЧИ ПО ФИЗИКЕ С ГОРНО-ТЕХНИЧЕСКИМ УКЛОНОМ

для зачета

дисциплина **ФИЗИКА**

Задачи по физике с горно-техническим уклоном, направленные на оценку знаний, умений и владений, формирующих компетенции ОК-7, ОПК-2

1. Расстояние между двумя станциями метрополитена 1,5 км. Первую половину этого расстояния поезд проходит равноускоренно, вторую - равнозамедленно с тем же по модулю ускорением. Максимальная скорость поезда 50 км/ч. Найти ускорение и время движения поезда между станциями.
2. Шахтная клеть поднимается со скоростью 12 м/с. После выключения двигателя, двигаясь с отрицательным ускорением $1,2 \text{ м/с}^2$, останавливается у верхней приемной площадки. На каком расстоянии от нее находилась клеть в момент выключения двигателя и сколько времени двигалась до остановки?
3. С башни высотой 30 м в горизонтальном направлении брошено тело с начальной скоростью 10 м/с. Определить уравнение траектории тела, скорость тела в момент падения.
4. Для добывания руды открытым способом произвели взрыв породы. Подъем кусков породы, выброшенных вертикально вверх, длился 5 с. Определить их начальную скорость и высоту подъема.
5. При взрыве серии скважин камень, находящийся на уступе высотой 45 м, получил скорость 100 м/с в горизонтальном направлении. Какова дальность полета камня, сколько времени он будет падать, с какой скоростью упадет на землю?
6. Рассчитать скорость движения и полное ускорение шахтного электровоза в момент времени 5 с, если он движется по криволинейному участку радиусом 15 м. Закон движения электровоза выражается формулой $S = 800 + 8t - 0,5 t^2$, м.

7. Во сколько раз тангенциальное ускорение точки, лежащей на ободу вращающегося колеса, больше ее нормального ускорения для того момента времени, когда вектор полного ускорения этой точки составляет угол 30° с вектором ее линейной скорости?
8. Под действием постоянной силы 118 Н вагонетка приобрела скорость 2 м/с, пройдя путь 10 м. Определить силу трения и коэффициент трения, если масса вагонетки 400 кг.
9. В шахте опускается равноускоренно лифт массой 280 кг, в первые 10 с он проходит 35 м. Найти натяжение каната, на котором висит лифт.
10. На горизонтальной платформе шахтной клетки находится груз 60 кг. Определить силу давления груза на платформу: при равномерном подъеме и спуске, при подъеме и спуске с ускорением 3 м/с^2 , при спуске с ускорением $9,8 \text{ м/с}^2$.
11. Тело скользит по наклонной плоскости, образующей с горизонтом угол 45° . Пройдя путь 36,4 см, тело приобретает скорость 2 м/с. Найти коэффициент трения тела о плоскость.
12. Найти закон движения (зависимость пройденного расстояния от времени) куска антрацита при скольжении его с нулевой начальной скоростью по стальному желобу с углом наклона 30° . Коэффициент трения 0,3.
13. Рудничный поезд массой 450 т движется со скоростью 30 км/ч, развивая мощность 150 л. с. (1 л. с. = 736 Вт). Определить коэффициент трения.
14. Определить силу тяги, которую развивает лебедка при подъеме вагонетки массой 2 т с ускорением $0,5 \text{ м/с}^2$, если коэффициент трения 0,03, а угол наклона железнодорожного полотна 30° .
15. Вагонетка скатывается по наклонной горке длиной 5 м. Определить путь, проходимый вагонеткой по горизонтали до остановки, и наибольшую скорость движения, если коэффициент сопротивления 0,0095. Угол наклона 5° .
16. Маховик, приведенный в равноускоренное вращение, сделав 40 полных оборотов, стал вращаться с частотой 480 мин^{-1} . Определить угловое ускорение маховика и продолжительность равноускоренного вращения.
17. Ротор шахтного электродвигателя совершает 960 об/мин. После выключения он останавливается через 10 с. Считая вращение равнозамедленным, найти угловое ускорение ротора. Сколько оборотов сделал ротор до остановки?
18. Крутящий момент двигателя электрической лебедки $1,2 \text{ кН}\cdot\text{м}$. Для остановки двигателя служат тормозные деревянные колодки, прижимающиеся с двух сторон к тормозному чугунному диску радиусом 0,6 м, жестко связанному с ротором двигателя. Найти силу давления, необходимую для остановки ротора, если коэффициент трения равен 0,5.
19. Двигатель мощностью 3 кВт за 12 с разогнал маховик до 10 об/с. Найти момент инерции маховика.
20. Была произведена работа в 1 кДж, чтобы из состояния покоя привести маховик во вращение с частотой 8 с^{-1} . Какой момент импульса (количества движения) приобрел маховик?
21. Шар и цилиндр имеют одинаковую массу 5 кг и катятся со скоростью 10 м/с по горизонтальной плоскости. Найти кинетическую энергию этих тел.
22. Какую работу надо произвести, чтобы раскрутить маховик массой 80 кг до 180 об/мин? Массу маховика считать равномерно распределенной по ободу с диаметром 1 м.
23. Ротор шахтного электродвигателя совершает 960 об/мин. После выключения он останавливается через 10 с. Считая вращение равнозамедленным, найти угловое ускорение ротора. Сколько оборотов сделал ротор до остановки?

24. Шар и сплошной цилиндр катятся по горизонтальной плоскости. Какую часть энергии поступательного движения каждого тела составляет от общей кинетической энергии?
25. Маховик, выполненный в виде диска радиусом 0,4 м и имеющий массу 100 кг, был раскручен до 480 оборотов в минуту и предоставлен самому себе. Под действием трения вала о подшипники маховик остановился через 80 с. Определить момент сил трения.
26. Какой объем занимает 1 кг водорода при давлении 106 Па и температуре 20°C? Молярная масса водорода $2 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.
27. Для автогенной сварки привезли баллон кислорода вместимостью 100 л. Найти массу кислорода, если его давление 12 МПа и температура 16°C. Молярная масса кислорода $32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.
28. Определить среднюю плотность сжатого воздуха в рудничной воздухопроводной сети, если давление воздуха в компрессоре составляет $7 \cdot 10^5$ Па, а давление у воздухоприемников $6 \cdot 10^5$ Па. Температура воздуха в начале и конце сети равна 27°C и 7°C. Молярная масса воздуха равна 0,029 кг/моль.
29. Стальной баллон емкостью 25 л наполнен ацетиленом C_2H_2 при температуре 27°C до давления 20 МПа. Часть ацетилена использовали для автогенной сварки подкрановых путей в шахте. Какая масса ацетилена израсходована, если давление в баллоне при температуре 23°C стало равным 14 МПа? Молярная масса ацетилена 0,026 кг/моль.
30. Сжатый воздух в баллоне имеет температуру 15°C. Во время пожара температура воздуха в баллоне поднялась до 450°C. Взорвется ли баллон, если известно, что при этой температуре он может выдержать давление не более 9,8 МПа? Начальное давление в баллоне 4,8 МПа.
31. Температура взрыва гремучей смеси, то есть температура, до которой нагреты в первый момент газообразные продукты взрыва, достигает в среднем 2600°C, если взрыв происходит внутри замкнутого пространства. Во сколько раз давление при взрыве гремучего газа превосходит давление смеси до взрыва, если последнее равно 10^5 Па, а начальная температура 17°C?
32. Компрессор, обеспечивающий работу отбойных молотков в забое, засасывает из атмосферы 100 л воздуха в секунду при давлении 1 атм. Сколько отбойных молотков может работать от этого компрессора, если для каждого молотка необходимо 100 см^3 воздуха в секунду при давлении 50 атм?
33. В двигателе Дизеля сжимается адиабатически воздух, в результате чего его температура поднимается, достигая температуры воспламенения нефти 800°C. До какого давления сжимается при этом воздух и во сколько раз уменьшается его объем, если начальное давление 1 атм, начальная температура 80°C, $\gamma = 1,4$?
34. Современные вакуумные насосы позволяют понижать давление до 10^{-15} мм рт. ст. Сколько молекул газа содержится в объеме 1 см^3 при указанном давлении и температуре 27°C?
35. Определить средние квадратичные скорости молекул метана CH_4 до взрыва и после него, если температура до взрыва равна 20°C, а после него 2600°C. Молярная масса 0,016 кг/моль.
36. Найти среднюю кинетическую энергию вращательного движения одной молекулы кислорода при температуре 350 К, а также кинетическую энергию вращательного движения всех молекул, содержащихся в 4 г кислорода.
37. Вычислить удельные теплоемкости при постоянном объеме и при постоянном давлении окиси углерода CO, принимая этот газ за идеальный.
38. На сжатие азота при постоянном давлении была затрачена работа 12 кДж. Найти изменение внутренней энергии и затраченное количество теплоты.
39. Какое количество теплоты для нагревания от 50°C до 100°C надо сообщить азоту массой 28 г, который находится в цилиндре с подвижным поршнем? Чему равна при этом процессе работа расширения?

40. При адиабатическом процессе расширения внутренняя энергия кислорода уменьшилась на 8,38 кДж. Вычислить массу кислорода, если начальная температура его 47°C , а объем увеличился в 10 раз.
41. В двигателе внутреннего сгорания температура газообразных продуктов сгорания поднимается от 600°C до 2000°C . Найти количество теплоты, подведенное к 1 кг газа при постоянном давлении, изменение его внутренней энергии и совершенную работу, если удельные теплоемкости при постоянных давлении и объеме соответственно равны $1,25\text{ кДж}/(\text{кг}\cdot\text{K})$ и $0,96\text{ кДж}/(\text{кг}\cdot\text{K})$.
42. Определить мощность на валу компрессора производительностью 25 м^3 в минуту, работающего на подземную воздушную сеть, если первоначальное давление 1 атм, а давление, развиваемое компрессором в конце изотермического сжатия, составляет 7 атм.
43. Тепловая машина работает по обратимому циклу Карно. Температура нагревателя 227°C . Определить термический коэффициент полезного действия цикла и температуру охладителя, если за счет каждого килоджоуля теплоты, полученной от нагревателя, машина совершает работу 350 Дж.
44. От идеальной теплосиловой установки, работающей по циклу Карно, отводится ежедневно 270 МДж теплоты с помощью холодильника при 9°C . Определить полезную мощность установки, если количество подводимой в час теплоты равно 900 МДж. При какой температуре подводится теплота?
45. Газ совершает цикл Карно. Абсолютная температура нагревателя в три раза выше, чем температура холодильника. Нагреватель передал газу 42 кДж теплоты. Какую работу совершил газ?
46. При прямом цикле Карно тепловая машина совершает работу, равную 200 Дж. Температура нагревателя 375 К, холодильника 300 К. Найти количество теплоты, получаемое машиной от нагревателя.
47. Вследствие трения о шкив ремень заряжается, причем каждый квадратный метр ремня содержит 0,02 Кл заряда. Ширина ремня 0,3 м, скорость его движения 20 м/с. Какой заряд проходит каждую секунду через любую неподвижную плоскость, перпендикулярную ремню?
48. Определить заряд, емкость и потенциал Земли, считая ее шаром радиусом $6\cdot 10^3\text{ км}$ и зная, что напряженность поля около поверхности равна 100 В/м.
49. Разность потенциалов между пластинами плоского конденсатора 6 кВ, заряд каждой пластины 10 нКл. Найти энергию конденсатора и силу взаимного притяжения пластин, если расстояние между ними 2 см.
50. Какое количество теплоты выделится при разрядке плоского конденсатора, если разность потенциалов между пластинами 15 кВ, расстояние 1 мм, диэлектрик слюда ($\epsilon=6$), площадь каждой пластины 300 см^2 ?
51. Какую работу надо совершить, чтобы увеличить расстояние между пластинами воздушного конденсатора от 0,03 м до 0,1 м? Площадь пластин 100 см^2 . Конденсатор подключен к источнику напряжения 220 В.
52. Камнедробилка должна работать под напряжением 100 В, потребляя ток в 40 А. Напряжение на электростанции 120 В, а расстояние до нее 1 км. Определить сечение медных соединительных проводов ($\rho=1,7\cdot 10^{-8}\text{ Ом}\cdot\text{м}$).
53. Какой длины надо взять нихромовый проводник диаметром 1,5 мм для изготовления спирали вулканизатора, применяемого при сращивании кабелей, если сопротивление спирали 5,5 Ом, а удельное сопротивление нихрома $1,1\cdot 10^{-6}\text{ Ом}\cdot\text{м}$?
54. Цена деления прибора $1,5\cdot 10^{-5}\text{ А/дел}$. Шкала прибора имеет 200 делений, его внутреннее сопротивление 100 Ом. Какие сопротивления нужно подключить к этому прибору и каким образом, чтобы можно было измерять напряжение до 200 В или ток до 4 А?
55. Определить сопротивление медных магистральных проводов при температуре 30°C . Расстояние от места расположения проводов до взрывной станции 400 м. Площадь сечения проводов $0,8\text{ мм}^2$, $\rho=0,017(\text{Ом}\cdot\text{мм}^2/\text{м})$, $\alpha=0,0044\text{ град}^{-1}$.

56. ЭДС батареи 12 В, ток короткого замыкания 5 А. Какую наибольшую мощность может дать батарея во внешней цепи?
57. Найти ток короткого замыкания для аккумуляторной батареи, если при токе 5 А она дает во внешнюю цепь мощность 9,5 Вт, а при токе 8 А мощность 14,4 Вт.
58. Ток в проводнике сопротивлением 100 Ом равномерно нарастает от 0 до 10 А в течение 30 с. Чему равно количество теплоты, выделившееся за это время в проводнике?
59. По прямому бесконечно длинному проводнику течет ток 50 А. Найти магнитную индукцию в точке, удаленной на расстояние 5 см от проводника.
60. По двум бесконечно длинным прямым параллельным проводам текут токи 50 А и 100 А в противоположных направлениях. Расстояние между проводами 20 см. Определить магнитную индукцию в точке, удаленной на 25 см от первого и на 40 см от второго провода.
61. Найти число витков в катушке диаметром 10 см, если магнитная стрелка, помещенная в ее центре, отклонилась от плоскости магнитного меридиана на 38° при токе 0,2 А. Горизонтальная составляющая земного магнитного поля 12,8 А/м. Плоскость катушки совпадает с плоскостью магнитного меридиана.
62. Определить горизонтальную составляющую напряженности магнитного поля Земли, если обмотка тангенс-буссоли имеет 10 витков радиусом 25 см. При токе 0,64 А стрелка отклоняется на угол 45° .
63. Плоский контур площадью 20 см^2 находится в однородном магнитном поле с индукцией 0,03 Тл. Найти магнитный поток, пронизывающий контур, если его плоскость составляет угол 60° с линиями индукции.
64. Электромагнит изготовлен в виде тороида со средним диаметром 51 см и вакуумным зазором 2 мм. Обмотка тороида равномерно распределена по всей его длине. Во сколько раз уменьшится напряженность магнитного поля в зазоре, если при неизменном токе в обмотке зазор увеличить в три раза? Магнитная проницаемость сердечника тороида 800.
65. Найти напряженность магнитного поля между полюсами электромагнита, если проводник массой 10 г и длиной 1 м при токе в нем 19,6 А висит в поле, не падая.
66. В однородном магнитном поле с индукцией 0,1 Тл движется проводник длиной 10 см со скоростью 15 м/с, направленной перпендикулярно к магнитному полю. Найти ЭДС, индуцированную в проводнике.
67. Обмотка электромагнита содержит 800 витков. Площадь сечения сердечника 15 см^2 , Индукция магнитного поля в сердечнике 1,4 Тл. Вычислить величину средней ЭДС, возникающей в обмотке при размыкании тока, если ток уменьшается до нуля в течение 0,001 с.
68. На железное кольцо намотано в один слой 200 витков провода. Чему равна энергия Магнитного поля, если при токе 2,5 А магнитный поток в железе 0,5 мВб?
69. Замкнутый соленоид намотан на немагнитный каркас и содержит 20 витков на каждый сантиметр длины. Найти объемную плотность энергии поля при токе 1 А.
70. С какой скоростью должен нарастать ток в катушке с числом витков 800, площадью поперечного сечения 10 см^2 , длиной 30 см, чтобы величина ЭДС самоиндукции, возникшей в ней, была равна 25 мВ?

71. Маятник для гравиметрической съемки за сутки совершил 57600 колебаний. Найти ускорение свободного падения, если длина маятника 0,56 м.
72. Днище вибролюка, применяемого для погрузки руды в бункер поезда из очистной камеры, совершает гармоническое колебательное движение с амплитудой 5 мм и частотой 1500 мин^{-1} . Написать уравнение колебаний, если начальная фаза равна нулю.
73. Стол питателя, предназначенного для погрузки руды в вагонетки, колеблется с частотой 45 мин^{-1} . Определить максимальные скорость и ускорение стола, полную энергию колебаний, если масса питателя 1000 кг, амплитуда колебаний 72 мм.
74. Решето рудообогатительного грохота совершает вертикальное колебательное движение с амплитудой 5 см. Найти наименьшую частоту колебаний, при которой куски руды, лежащие на решете, будут отделяться от него и подбрасываться вверх.
75. Для погружения обсадных труб в глинистые отложения применяется вибровозбудитель ВО-10, амплитуда колебаний которого 0,13 см, частота вращения дебалансов 1200 мин^{-1} . Определить максимальные скорость и ускорение, написать уравнение колебаний, если начальная фаза равна нулю.
76. Определить полную энергию колебаний и максимальную силу взаимодействия между подъемным сосудом массой 90 тонн и армировкой ствола шахты, если амплитуда горизонтальных колебаний сосуда 3 см, а циклическая частота 7 с^{-1} .
77. Точка одновременно совершает два гармонических колебания, происходящих по взаимно перпендикулярным направлениям и выражаемых уравнениями: $x = 0,5 \sin t$, $y = 2 \cos t$. Найти уравнение траектории точки, построить график ее движения.
78. Два одинаково направленных гармонических колебания одного периода с амплитудами 10 см и 6 см складываются в одно колебание с амплитудой 14 см. Определить разность фаз складываемых колебаний.
79. Груз, подвешенный к пружине, гармонически колеблется по вертикали с периодом 0,5 с. Коэффициент упругости пружины 4 Н/м. Определить массу груза.
80. Амплитуда затухающих колебаний маятника за 5 мин уменьшилась в два раза. За какое время, считая от начального момента, амплитуда уменьшится в восемь раз?
81. Источник незатухающих гармонических колебаний подчиняется закону $x = 5 \sin 3140t$ (м). Определить смещение, скорость и ускорение точки, находящейся на расстоянии 340 м от источника, через 1 с от начала колебаний, если скорость волны 340 м/с.
82. Уравнение незатухающих колебаний $y = 0,1 \sin 0,5\pi t$ (м). Скорость волны 300 м/с. Написать уравнение колебаний для точек волны в момент времени 4 с после начала колебаний. Найти разность фаз для источника и точки на расстоянии 200 м от него.

83. Звуковые колебания с частотой 500 Гц и амплитудой 0,25 мм, распространяются в воздухе. Длина волны 70 см. Определить скорость распространения волны и наибольшую скорость колебаний частиц воздуха.
84. Определить коэффициент сжатия горной породы - величину, обратную модулю Юнга, если скорость распространения звуковых волн в горной породе равна 4500 м/с, а плотность породы составляет $2,3 \cdot 10^3$ кг/м³.
85. К одному из концов длинного стержня прикреплен вибратор, колеблющийся по закону $y = 10^{-6} \sin 10^4 \pi t$ (м). Найти скорость точек в сечении стержня, отстоящем от вибратора на расстоянии 25 см, в момент времени 10^{-4} с. Скорость волны $5 \cdot 10^3$ м/с.
86. Колебательный контур состоит из катушки с индуктивностью 2 мГн и конденсатора емкостью 888 пФ. На какую длину волны настроен контур?
87. Найти частоту собственных колебаний в контуре, состоящем из катушки индуктивности и плоского конденсатора. Площадь каждой пластины конденсатора 30 см² и расстояние между ними 0,1 см. Число витков катушки 1000, длина ее 30 см, сечение 1 см².
88. Колебательный контур состоит из катушки с индуктивностью 1,02 Гн и конденсатора емкостью 0,025 мкФ. Заряд на конденсаторе равен $2,5 \cdot 10^{-6}$ Кл. Какова зависимость разности потенциалов на конденсаторе от времени?
89. Катушка (без сердечника) длиной 50 см и площадью поперечного сечения 3 см² имеет 1000 витков и соединена параллельно с конденсатором. Он состоит из двух пластин площадью 75 см² каждая, расстояние между пластинами 5 мм, диэлектрик -воздух. Найти период колебаний контура и длину волны, на которую он настроен.
90. Колебательный контур состоит из катушки индуктивностью 1,02 Гн и конденсатора емкостью 25 нФ. На обкладках конденсатора сосредоточен заряд 2,5 мкКл. Написать уравнение изменения тока в цепи в зависимости от времени.
91. Разность потенциалов на конденсаторе в контуре за 1 мс уменьшается в три раза. Найти коэффициент затухания.
92. Электромагнитные волны распространяются в некоторой однородной среде со скоростью $2,5 \cdot 10^8$ м/с. Какую длину волны имеют электромагнитные колебания в данной среде, если частота колебаний 1 МГц?
93. Катушка с индуктивностью 30 мкГн присоединена к плоскому конденсатору с площадью пластин 0,01 м² и расстоянием между ними 0,1 мм. Найти диэлектрическую проницаемость среды, заполняющей пространство между пластинами, если контур настроен на длину волны 750 м.
94. Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью 80 пФ и катушки индуктивностью 0,5 мГн. Найти максимальный ток в контуре, если максимальная разность потенциалов на обкладках конденсатора 300 В. На какую длину волны резонирует данный контур?
95. Закон изменения разности потенциалов на обкладках конденсатора в контуре задан уравнением $U = 50 \cos 10^4 \pi t$ (В). Емкость конденсатора равна 0,1 мкФ. Найти период колебаний, индуктивность, длину волны. Написать закон изменения тока в контуре.

96. Колебательный контур состоит из конденсатора переменной емкости от 12 пФ до 80 пФ и катушки с индуктивностью 1,2 мГн. Найти диапазон длин электромагнитных волн, которые могут вызывать резонанс в этом контуре.
97. Индуктивность колебательного контура 0,5 мГн. Какова должна быть электроемкость контура, чтобы он резонировал на длину волны 300 м?
98. Катушка (без сердечника) длиной 50 см и площадью поперечного сечения 3 см^2 имеет 1000 витков и соединена параллельно с конденсатором. Он состоит из двух пластин площадью 75 см^2 каждая, расстояние между пластинами 5 мм, диэлектрик -воздух. Найти период колебаний контура и длину волны, на которую он настроен.
99. Какую индуктивность надо включить в колебательный контур, чтобы при емкости 2 мкФ получить частоту 1000 Гц?
100. Индуктивность катушки в колебательном контуре 20 мкГн. Требуется настроить этот контур на частоту 5 МГц. Какую емкость следует выбрать?
101. Колебательный контур, состоящий из воздушного конденсатора с двумя пластинами по 100 см^2 каждая и катушки с индуктивностью 1 мкГн резонирует на волну длиной 10м. Найти расстояние между пластинами конденсатора.

<i>Критерии оценивания решения задач по физике с горно-техническим уклоном</i>	<i>Количество баллов</i>
Правильность полученного ответа задачи	0-1
Полнота ответа на заданные преподавателем вопросы по решению по задачи	0-3
Использование профессиональной терминологии при обсуждении с преподавателем решения задачи	0-1
Итого	0-5

Критерии оценки:

оценка «отлично» выставляется обучающемуся, если он набрал 5 баллов
оценка «хорошо» выставляется обучающемуся, если он набрал 4 балла
оценка «удовлетворительно» выставляется обучающемуся, если он набрал 3 баллов
оценка «неудовлетворительно» выставляется обучающемуся, если он набрал 0-2 балла.

Составил: Коршунов И.Г., д.ф-м.н., профессор.

ГБОУ ВО «УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГОРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ФАКУЛЬТЕТ ГЕОЛОГИИ И ГЕОФИЗИКИ

Кафедра физики

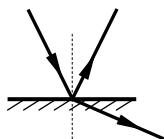
ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ для экзамена

дисциплина **ФИЗИКА**

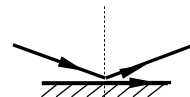
**Тестовые задания для экзамена направленные на оценку знаний и умений,
формирующих компетенции ОК-7 и ПКД-2**

1. Укажите, на каком рисунка показан ход лучей при полном внутреннем отражении при падении света под углом, меньшим предельного.

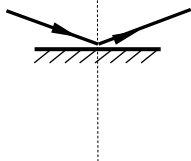
а)



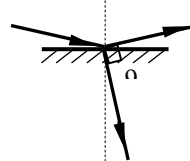
б)



в)



г)



1) а;

2) б;

3) в;

4) г.

2. Почему окраска одного и того же места поверхности мыльного пузыря непрерывно меняется? Поясните ответ.

- 1) Изменяется концентрация мыльного раствора.
- 2) Изменяется угол падения лучей на пленку.
- 3) Изменяется толщина пленки пузыря.
- 4) Изменяется коэффициент отражения пленки пузыря.

3. Как зависит число дифракционных максимумов, создаваемых дифракционной решеткой, от числа щелей, приходящихся на единицу длины?

- 1) Не зависит от числа щелей;
- 2) увеличивается с увеличением числа щелей;
- 3) уменьшается с увеличением числа щелей;
- 4) может как увеличиваться, так и уменьшаться.

4. Укажите формулу закона Малюса для прохождения линейнополяризованного света через поляризатор.

- 1) $I = \frac{1}{2} I_0$;
- 2) $I = \frac{1}{2} (1 - \eta) I_0$;
- 3) $I = I_0 \cos^2 \varphi$;
- 4) $I = \frac{1}{2} I_0 \cos^2 \varphi$;
- 5) $I = \frac{1}{2} I_0 (1 - \eta)^2 \cos^2 \varphi$.

Здесь везде η – коэффициент поглощения света поляризатором.

5. При попадании солнечного света на капли дождя образуется радуга. Это объясняется тем, что белый свет состоит из электромагнитных волн с разной длиной волны, которые каплями воды по-разному

- 1) преломляются;
- 2) поляризуются;
- 3) отражаются;
- 4) поглощаются.

6. В каком случае излучение наиболее близка к тепловому равновесному?

- 1) Свечение фосфора при медленном излучении в воздухе;
- 2) свечение разреженного газа при пропускании через него электрического тока;
- 3) свечение нагретого металла, вынутого из печи;
- 4) свечение нагретого металла, находящегося в печи.

7. Укажите формулу, представляющую собой закон Кирхгофа.

- 1) $\lambda_m = \frac{b}{T}$;
- 2) $\frac{r(\lambda, T)}{a(\lambda, T)} = f(\lambda, T) = r_0(\lambda, T)$;
- 3) $R_\vartheta = \sigma T^4$;
- 4) $R_\vartheta = \varepsilon(T) \sigma T^4$.

Здесь $r_0(\lambda, T)$ – спектральная плотность энергетической светимости абсолютно черного тела.

8. На рисунке представлены две вольтамперные характеристики вакуумного фотоэлемента. Если E – освещенность фотокатода, а ν – частота падающего света, то для кривых 1 и 2 справедливы следующие утверждения...

- 5) 1) $\nu_1 > \nu_2$; $E_1 = E_2$;
- 6) 2) $\nu_1 = \nu_2$; $E_1 > E_2$;
- 7) 3) $\nu_1 < \nu_2$; $E_1 = E_2$;
- 8) 4) $\nu_1 = \nu_2$; $E_1 < E_2$.

9. Эффект Комптона наблюдается

- 1) во всех спектральных областях;
- 2) в рентгеновской области;
- 3) в видимой области;
- 4) в инфракрасной области.

10. На одной щели можно наблюдать

- 1) только дифракцию Френеля;
- 2) только дифракцию Фраунгофера;
- 3) и дифракцию Френеля, и дифракцию Фраунгофера при разных условиях наблюдения;
- 4) дифракцию наблюдать невозможно.

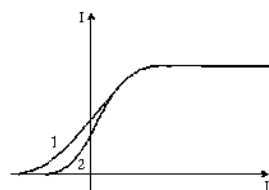
11. Укажите формулу закона Малюса для прохождения естественного света через поляризатор без учета поглощения света поляризатором.

$$1) I = \frac{1}{2} I_0; \quad 2) I = \frac{1}{2} (1 - \eta) I_0;$$

$$3) I = I_0 \cos^2 \varphi; \quad 4) I = \frac{1}{2} I_0 \cos^2 \varphi;$$

$$5) I = \frac{1}{2} I_0 (1 - \eta)^2 \cos^2 \varphi. \text{ Здесь } \eta -$$

коэффициент поглощения света поляризатором.



12. Узкий пучок белого света в результате прохождения через стеклянную призму расширяется, и на экране наблюдается разноцветный спектр. Это явление объясняется тем, что призма

- 1) по-разному поглощает свет с различными длинами волн;
- 2) окрашивает белый свет в различные цвета;
- 3) преломляет свет с разной длиной волн по-разному, разлагая его на монохроматические составляющие;
- 9) изменяет частоту волн.

13. Какое утверждение противоречит закону Кирхгофа для теплового излучения?

- 1) При тепловом равновесии спектральный состав излучения не зависит от свойств тел.

- 2) При тепловом равновесии абсолютно черное тело излучает с единицы поверхности больше энергии, чем любое нечерное.
- 3) Чем больше поглощательная способность тела, тем больше его излучательная способность.
- 4) Для всех тел отношение излучательной способности к поглощательной способности для одних и тех же длин волн зависит только от температуры.

14. Укажите формулу, представляющую собой закон Вина для абсолютно черного тела..

$$1) \lambda_m = \frac{b}{T};$$

$$2) \frac{r(\lambda, T)}{a(\lambda, T)} = f(\lambda, T) = r_0(\lambda, T);$$

$$3) R_\vartheta = \sigma T^4;$$

$$4) R_\vartheta = \varepsilon(T) \sigma T^4.$$

Здесь $r_0(\lambda, T)$ – спектральная плотность энергетической светимости абсолютно черного тела.

15. Внешний фотоэффект в металле вызывается монохроматическим излучением. При увеличении интенсивности этого излучения в 2 раза максимальная скорость фотоэлектронов, покидающих металл...

- 1) увеличится в 4 раза;
- 2) увеличится в 8 раз;
- 3) увеличится в $\sqrt{2}$ раз;
- 4) увеличится в 2 раза;
- 5) не изменится.

16. При прохождении через границу раздела двух сред измерены два угла падения α_1 , и α_2 и два соответствующих им угла преломления γ_1 и γ_2 . О соотношении этих углов можно утверждать, что

$$1) \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2};$$

$$2) \frac{\alpha_1}{\gamma_1} = \frac{\alpha_2}{\gamma_2};$$

$$3) \frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_1} = \frac{\sin \gamma_1}{\sin \gamma_2};$$

$$4) \frac{\sin \alpha_1}{\sin \gamma_1} = \frac{\sin \alpha_2}{\sin \gamma_2}.$$

17. Радужные пятна на поверхности воды, покрытой тонкой пленкой бензина, объясняются...

- 1) дифракцией света;
- 2) дисперсией света;
- 3) интерференцией света;
- 4) поляризацией света.

18. Что такое дифракция света?

- 1) Разложение света на монохроматические составляющие при преломлении в призме;

- 2) изменение направления распространения света при переходе из одной среды в другую;
- 3) огибание светом препятствий;
- 4) перераспределение интенсивности света с образованием чередующихся максимумов и минимумов.

19. Укажите формулу закона Малюса для прохождения естественного света через поляризатор с учетом поглощения света поляризатором.

- 1) $I = \frac{1}{2} I_0$;
- 2) $I = \frac{1}{2} (1 - \eta) I_0$;
- 3) $I = I_0 \cos^2 \varphi$;
- 4) $I = \frac{1}{2} I_0 \cos^2 \varphi$;
- 5) $I = \frac{1}{2} I_0 (1 - \eta)^2 \cos^2 \varphi$.

Здесь везде η – коэффициент поглощения света поляризатором.

20. Температура абсолютно черного тела 727 К. Какой цвет будет преобладать при наблюдении этого тела?

- 1) Фиолетовый;
- 2) белый;
- 3) красный;
- 4) излучение в видимой области отсутствует.

21. Укажите формулу, представляющую собой формулу Планка для спектральной плотности энергетической светимости абсолютно черного тела.

- 1) $r(\lambda, T) = \frac{dR_\lambda}{d\lambda}$;
- 2) $r(\lambda, T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{\exp(hc/\lambda kT) - 1}$;
- 3) $\frac{r(\lambda, T)}{a(\lambda, T)} = f(\lambda, T) = r_0(\lambda, T)$;
- 4) $R_\lambda = \int_0^\infty r(\lambda, T) d\lambda$.

Здесь $r_0(\lambda, T)$ – спектральная плотность энергетической светимости абсолютно черного тела.

22. Красная граница фотоэффекта приходится на зеленый свет. Фотоэффект будет наблюдаться при освещении катода светом...

- 1) любым;
- 2) желтым;
- 3) красным;
- 4) фиолетовым.

23. На черную поверхность перпендикулярно к ней падает свет. Импульс, переданный поверхности при отражении одного фотона, равен

1) $\frac{h\nu}{c}$;

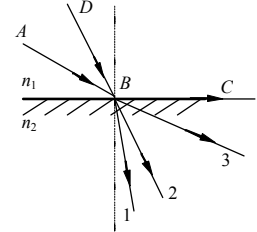
2) $\frac{hc}{\lambda}$;

3) mc^2 ;

4) $\frac{2h\nu}{c}$.

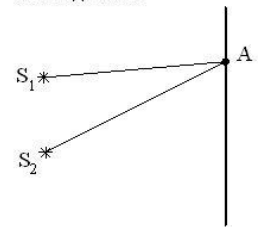
24. Луч AB преломляется в точке B на границе раздела двух сред с показателями преломления $n_1 > n_2$ и идет по пути BC (см. рисунок). Если изменить угол падения луча и направить падающий луч по пути DB , то преломленный луч

- 1) пойдет по пути 1;
- 2) пойдет по пути 2;
- 3) пойдет по пути 3;
- 4) исчезнет.



25. Для точки A оптическая разность хода лучей от двух когерентных источников S_1 и S_2 равна $1,2 \text{ мкм}$. Если длина волны в вакууме 600 нм , то в точке A будет наблюдаться...

- 1) минимум интерференции, так как разность хода равна нечетному числу полуволен;
- 2) максимум интерференции, так как разность хода равна четному числу полуволен;
- 3) минимум интерференции, так как разность хода равна четному числу полуволен;
- 4) максимум интерференции, так как разность хода равна нечетному числу полуволен.



26. Луч лазера направляется перпендикулярно плоскости дифракционной решетки. Расстояние между нулевым и первым дифракционными максимумами на удаленно) экране равно 10 см . Расстояние между нулевым и вторым дифракционными максимумами примерно равно

- 1) 5 см ;
- 2) 10 см ;
- 3) 20 см ;
- 4) 40 см .

27. Суммарная мощность теплового излучения абсолютно черного тела возросла в 16 раз. Как изменится длина волны, на которую приходится максимум излучательной способности?

- 1) Уменьшится в 16 раз;
- 2) уменьшится в 2 раза;
- 3) не изменится;
- 4) увеличится в 2 раза.

28. Масса фотона может быть рассчитана так:

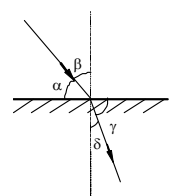
1) $\frac{h\nu}{c^2}$;

2) $\frac{c}{\nu}$;

3) $\frac{hc}{\lambda}$;

4) $h\nu$.

29. На рисунке показаны направления падающего и преломленного лучей света на границе раздела "воздух-стекло". Показатель преломления стекла равен отношению



- 1) $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$; 2) $\frac{\sin \alpha}{\sin \delta}$;
 3) $\frac{\sin \beta}{\sin \gamma}$; 4) $\frac{\sin \beta}{\sin \delta}$.

30. Укажите формулу, представляющую собой условие максимума при интерференции света.

- 1) $\Delta = d \sin \varphi$; 2) $\Delta = k\lambda$;
 3) $\Delta = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}$; 4) $\Delta = (2k - 1)\frac{\lambda}{2}$.

31. Что такое дисперсия света?

- 1) Разложение света на монохроматические составляющие при преломлении в призме;
- 2) изменение направления распространения света при переходе из одной среды в другую;
- 3) огибание светом препятствий;
- 4) перераспределение интенсивности света с образованием чередующихся максимумов и минимумов.

32. Согласно гипотезе Планка...

- 1) свет испускается и поглощается дискретными порциями (квантами);
- 2) свет испускается и поглощается непрерывно;
- 3) свет испускается непрерывно, а поглощается квантами;
- 4) свет испускается квантами, а поглощается непрерывно.

33. Суммарная мощность теплового излучения возросла в два раза, Как изменилась температура тела?

- 1) Уменьшилась в 2 раза;
- 2) возросла в 2^4 раз;
- 3) возросла в 2 раза;
- 4) возросла в $\sqrt[4]{2}$ раз.

34. Укажите формулу, представляющую собой условие минимума при интерференции света.

- 1) $\Delta = k\lambda$; 2) $\Delta = (2k - 1)\frac{\lambda}{2}$;
 3) $\Delta = 2dn \pm \frac{\lambda}{2}$; 4) $\Delta = 2d \pm \frac{\lambda}{2}$.

35. Укажите формулу, представляющую собой условие максимумов при дифракции Фраунгофера на одной щели.

- 1) $a \sin \varphi = k\lambda$; 2) $a \sin \varphi = (2k - 1)\frac{\lambda}{2}$; 3) $2d = k\lambda$; 4) $2dn = k\lambda$.

36. В чем причина дисперсии света? Укажите неверное утверждение

- 1) В том, что показатель преломления зависит от длины волны;
- 2) в том, что скорость распространения света разных частот различна;
- 3) в том, что свет с разной длиной волны по-разному поглощается веществом;
- 4) в том, что свет с разной длиной волны распространяется в веществе с разной скоростью.

37. Абсолютно черное тело - это тело...

- 1) рассеивающее все излучение, падающее на него;
- 2) не излучающее электромагнитные волны;
- 3) абсолютно черного цвета;
- 4) поглощающее все излучение, падающее на него.

38. Укажите формулу, представляющую собой закон Стефана-Больцмана для абсолютно черного тела.

1) $R_{\text{ж}} = \sigma T^4$;	2) $R_{\text{ж}} = \varepsilon(T) \sigma T^4$;
3) $R_{\text{ж}} = \int_0^{\infty} r(\lambda, T) d\lambda$;	4) $R_{\text{ж}} = \frac{dW}{S dt}$

39. Укажите формулу, представляющую собой уравнение Эйнштейна для фотоэффекта. .

- 1) $eU_{\text{з}} = \frac{mv_{\text{max}}^2}{2}$; 2) $\frac{hc}{\lambda_0} = eU$; 3) $\frac{hc}{\lambda} = A_{\text{с}} + \frac{mv_{\text{max}}^2}{2}$; 4) $\frac{hc}{\lambda_0} = A_{\text{с}}$

40. Укажите формулу, представляющую собой разность хода лучей при интерференции от двух источников.

1) $\Delta = 2d \pm \frac{\lambda}{2}$;	2) $\Delta = d \sin \varphi$;
3) $\Delta = 2d \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}$;	4) $\Delta = \frac{dx}{L}$.

41. Укажите формулу, представляющую собой условие минимумов при дифракции Фраунгофера на одной щели.

1) $a \sin \varphi = k\lambda$;	2) $a \sin \varphi = (2k - 1) \frac{\lambda}{2}$;
3) $2d = k\lambda$;	4) $2dn = k\lambda$.

42. Какой из законов теплового излучения относится к излучению любого тела?

- 1) закон Стефана–Больцмана;
- 2) закон Вина;
- 3) закон Кирхгофа;
- 4) формула Планка.

43. Укажите формулу, представляющую собой закон Стефана-Больцмана для нечерного тела.

$$1) R_3 = \sigma T^4;$$

$$2) R_{\text{э}} = \varepsilon(T)\sigma T^4;$$

$$3) \ R_9 = \int_0^{\infty} r(\lambda, T) d\lambda;$$

$$4) R_{\vartheta} = \frac{dW}{S dt}.$$

44. Укажите формулу, представляющую собой условие красной границы фотоэффекта. .

$$1) \ \varepsilon = \frac{hc}{\lambda}; \quad 2) \ \frac{hc}{\lambda_0} = eU; \quad 3) \ \frac{hc}{\lambda} = A_{\text{с}} + \frac{mv_{\text{max}}^2}{2}; \quad 4) \ \frac{hc}{\lambda_0} = A_{\text{с}}.$$

$$2) \frac{hc}{\lambda_0} = eU;$$

$$3) \frac{hc}{\lambda} = A_0 + \frac{mv_{\max}^2}{2};$$

$$4) \frac{hc}{\lambda_0} = A_e.$$

45. Укажите формулу, представляющую закон связи между энергетической светимостью и спектральной плотностью энергетической светимости.

$$1) R_{\text{э}} = \sigma T^4 \%; \quad 2) R_{\text{э}} = \varepsilon(T) \sigma T^4;$$

$$2) \ R_3 = \varepsilon(T)\sigma T^4;$$

$$3) R_g = \int_0^{\infty} r(\lambda, T) d\lambda;$$

$$4) R_9 = \frac{dW}{S dt}.$$

46. Укажите формулу, представляющую собой условие прекращения фототока при фотоэффекте..

$$1) h\nu = A_{\beta} + eU_3; \quad 2) \frac{hc}{\lambda_0} = eU;$$

$$2) \frac{hc}{\lambda_0} = eU;$$

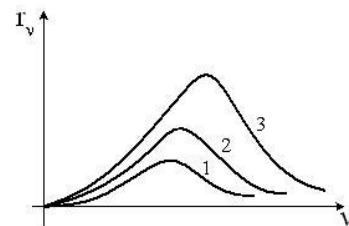
$$3) eU_3 = \frac{mv_{\max}^2}{2}; \quad 4) \frac{hc}{\lambda_0} = A_g.$$

$$4) \frac{hc}{\lambda_0} = A_e.$$

$$3) L_2 - L_1 = 2k \frac{\lambda}{2};$$

$$4) L_2 - L_1 = k \frac{\lambda}{2}.$$

47. На рисунке представлены графики зависимости спектральной плотности энергетической светимости абсолютно черного тела от частоты при различных температурах. Наибольшей температуре соответствует график.



- 1) 1;
- 2) 2;
- 3) 3;
- 4) все графики соответствуют одинаковой температуре

48. Что такое фотоэффект?

- 1) Испускание электронов веществом при нагревании;
- 2) электризация вещества при трении;
- 3) ионизация газа под действием ионизирующего излучения;

4) испускание электронов веществом под действием света.

49. Дифракция Фраунгофера – это

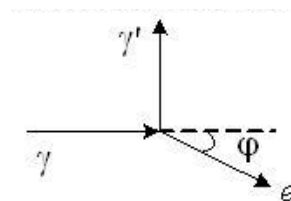
- 1) дифракция в параллельных световых пучках;
- 2) дифракция на двух щелях;
- 3) дифракция в расходящихся световых пучках;
- 4) дифракция на решетке.

50. Явление испускания электронов веществом под действием электромагнитного излучения называется ...

- 1) ударной ионизацией;
- 2) фотосинтезом;
- 3) фотоэффектом;
- 4) электризацией.

51. На рисунке показаны направления падающего фотона (γ), рассеянного фотона (γ') и электрона отдачи (e). Угол рассеяния 90° , направление движения электрона отдачи составляет с направлением падающего фотона угол $\varphi = 30^\circ$. Если импульс падающего фотона p_γ , то импульс рассеянного фотона равен...

- 1) $1,5\sqrt{3}p_\gamma$;
- 2) $p_\gamma/\sqrt{3}$;
- 3) $0,5p_\gamma$;
- 4) $\sqrt{3}p_\gamma$.

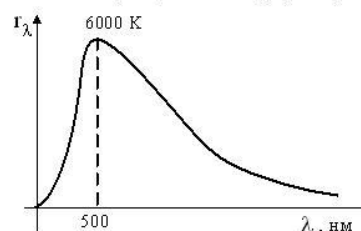


52. На пути естественного света помещены две пластинки турмалина. После прохождения пластинки 1 свет полностью поляризован. Угол между направлениями OO и $O'O'$ равен 45° , тогда отношение интенсивностей света J_1/J_2 равно...

- 1) 1;
- 2) 2;
- 3) 4;
- 4) 0.

53. На рисунке показана кривая зависимости спектральной плотности энергетической светимости абсолютно черного тела от длины волны при $T = 6000\text{ K}$. Если температуру тела уменьшить в 4 раза, то длина волны, соответствующая максимуму излучения абсолютно черного тела, ...

- 1) увеличится в 4 раза;
- 2) уменьшится в 2 раза;
- 3) увеличится в 2 раза;
- 4) уменьшится в 4 раза.

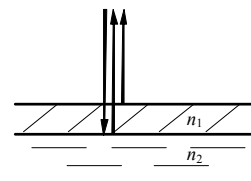


54. При освещении тонкой пленки параллельными лучами белого света наблюдается радужная окраска пленки. Чем это можно объяснить? Поясните ответ.

- 1) Пленка неоднородна по составу.
- 2) Пленка в разных местах имеет разную толщину.
- 3) Пленка в разных местах неодинаково отражает свет.
- 4) В пленку в разных местах добавлены различные красители.

55. На поверхность стекла нанесен тонкий слой диэлектрика. Укажите формулу для разности хода отраженных лучей, если $n_1 < n_2$.

- 1) $\Delta = 2dn_2$;
- 2) $\Delta = 2d \pm \frac{\lambda}{2}$;
- 3) $\Delta = 2dn_2 \pm \frac{\lambda}{2}$;
- 4) $\Delta = 2dn_1$;
- 5) $\Delta = 2dn_1 \pm \frac{\lambda}{2}$;
- 6) $\Delta = 2d$.



56. При каких условиях происходит фотоэффект?

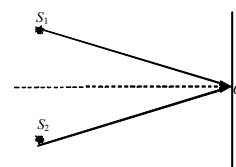
- 1) При любых интенсивностях и частотах света;
- 2) при любых интенсивностях и при частотах, превышающих некоторое минимальное значение;
- 3) При любых частотах и при интенсивностях, превышающих некоторое минимальное значение;
- 4) при условии, что частота и интенсивность превышают некоторое минимальное значение.

57. Укажите формулу для изменения длины волны рентгеновского излучения при комптоновском рассеянии.

- 1) $\lambda = \frac{h}{p_\gamma}$;
- 2) $\lambda = \frac{hc}{\nu}$;
- 3) $\Delta\lambda = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\theta)$;
- 4) $\lambda = \frac{v}{c}$.

58. Если S_1 и S_2 — источники когерентных волн, то разность фаз колебаний, возбуждаемых этими волнами в т. О (центральный максимум), равна...

- 1) $\pi/2$;
- 2) 2π ;
- 3) 0;
- 4) π



59. Что принимается за направление колебаний в световой волне?

- 1) Направление колебаний вектора напряженности электрического поля $\vec{E}$.
- 2) Направление колебаний вектора напряженности магнитного поля $\vec{H}$.
- 3) Направление распространения световой волны.
- 4) Направление, составляющее угол 45° к направлениям колебаний векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$.

60. Какая из формулировок не соответствует определению теплового излучения?

- 1) Электромагнитное излучение, находящееся в равновесии со стенками замкнутой полости, в которой оно заключено.
- 2) Свечение тела, потери энергии которого на излучение, полностью компенсируется подводом энергии за счет нагревания.
- 3) Электромагнитное излучение тела, температура которого поддерживается постоянной.
- 4) Электромагнитное излучение тела, появляющееся в результате хаотического движения частиц, из которых оно состоит.

спектральная плотность энергетической светимости абсолютно черного тела.

61. При фотоэффекте задерживающая разность потенциалов НЕ зависит от

- А) Частоты падающего света.
- Б) Интенсивности падающего света.
- В) Угла падения света.

Какие утверждения правильны?

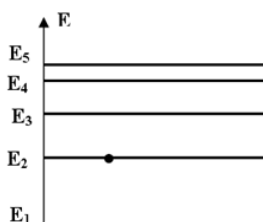
- 1) А и Б;
- 2) Б и В;
- 3) А и В;
- 4) А, Б и В.

62. Несостоятельность планетарной модели атомов по Резерфорду заключается в следующем:

- А) Силы притяжения между электроном и ядром настолько велики, что электроны должны упасть на ядро.
- Б) Спектр излучения атомов должен быть сплошным, а не линейчатым.

- 1) только А;
- 2) только Б;
- 3) А и Б;
- 4) ни А, ни Б.

63. На рисунке приведена диаграмма энергетических уровней некоторого атома. Электрон находится на втором стационарном уровне. Сколько спектральных линий могут наблюдаться в спектре поглощения этого атома?



- 1) 1;
- 2) 2;
- 3) 3;
- 4) 4;
- 5) 5.

64. В таблице приведены значения энергии для первых четырех энергетических уровней атома водорода. Излучение с наибольшей длиной волны, наблюдаемое как отдельная линия в спектре испускания водорода, может быть получено при переходе между энергетическими уровнями

n	Энергия, 10^{-19} Дж
1	-21,8
2	-5,3

- 1) с $n = 4$ на $n = 1$
 2) с $n = 1$ на $n = 4$
 3) с $n = 4$ на $n = 3$
 4) с $n = 3$ на $n = 4$

3	-2,4
4	-1,3

65. Согласно постулатам Бора, частота электромагнитного излучения, возникающего при переходе атома из возбужденного состояния с энергией E_1 в основное состояние с энергией E_0 , вычисляется по формуле (с — скорость света, h — постоянная Планка)

$$1) \frac{E_1 + E_0}{h} \quad 2) \frac{E_1 - E_0}{h} \quad 3) \frac{ch}{E_1 - E_0} \quad 4) \frac{ch}{E_0 + E_1}$$

66. Какие утверждения справедливы в случае соотношения неопределенностей для энергии и времени?

- А.) Частота излученного фотона имеет неопределенность $\Delta\nu = \Delta E/h$, т.е. линии спектра характеризуются частотой $\nu \pm \Delta E/h$ и должны быть размыты;
 В.) Невозможно с бесконечной точностью знать энергию частицы и время ее пребывания в этом энергетическом состоянии;
 С.) Если частица существует в каком то состоянии бесконечно долго, то энергия этого состояния известна точно;
 Д.) Зная ширину спектральной линии, можно оценить порядок времени пребывания атома в возбужденном состоянии.
- 1) А,В,С. 2) В,С,Д. 3) В,Д. 4) А,В,С,Д.

67. Стационарным уравнением Шредингера для линейного гармонического осциллятора является уравнение ...

$$1) \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E \psi = 0 \quad 2) \Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2} E \psi = 0$$

$$3) \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E - \frac{m\alpha_0^2 x^2}{2} \right) \psi = 0 \quad 4) \Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E + \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) \psi = 0$$

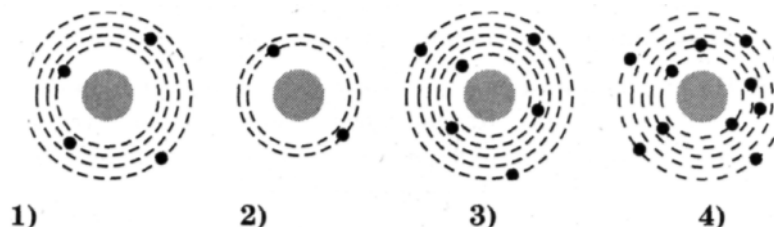
68. Какие утверждения справедливы при описании состояния электрона?

- А) Если орбитальное квантовое число ($l = 0$), то состояние электрона называется s - состоянием; ($l = 1$) - p - состоянием; ($l = 2$) - d - состоянием.
 В) Значение главного квантового числа n указывается перед условным обозначением орбитального квантового числа и определяет энергетические уровни электрона в атоме: 3s ($n = 3, l = 0$).
 С) Орбитальное квантовое число (l) определяет момент импульса электрона в атоме: ($l = 0, 1, 2, \dots$).
 Д) Квантовые числа n и l характеризуют ориентацию электронного облака в пространстве.
- 1) А,В,Д; 2) А,В,С,Д; 3) В,С; 4) А,В,С.

69. Частица в потенциальной яме шириной l находится в низшем возбужденном состоянии. Определить вероятность нахождения частицы в интервале $l/4$, равноудаленном от стенок ямы.

- 1) 0,091; 2) 0,027; 3) 0,5; 4) 0,91.

9. На рисунке изображены схемы четырех атомов. Черными точками обозначены электроны. Атому ${}^6\text{C}^{12}$ соответствует схема



70. Атом находится в состоянии с энергией $E_1 = -3$ эВ. Минимальная энергия, необходимая для отрыва электрона от атома, равна

- 1) 0 2) E_1 3) $-E_1$ 4) $-0,5E_1$

71. Длина волны де Бройля частицы уменьшилась вдвое. Скорость этой частицы ...

- 1) увеличилась в 4 раза;
2) уменьшилась вдвое;
3) уменьшилась в 4 раза;
4) увеличилась вдвое;
5) не изменилась.

72. Длина волны де Бройля для электрона с кинетической энергией I кэВ равна ...

- 1) 0,019 нм; 2) 0,039 нм; 3) 1 нм; 4) 39 нм.

73. Кинетическая энергия электрона в атоме водорода составляет величину порядка 10 эВ. Используя соотношение неопределенностей оцените минимальные размеры атома.

- 1) $1,24 \cdot 10^{-10}$ м; 2) $4,24 \cdot 10^{-10}$ м; 3) $0,2 \cdot 10^{-10}$ м; 4) $3,22 \cdot 10^{-10}$ м

74. При движении свободной частицы справедливы следующие утверждения...

- а) энергия может принимать любые значения, т.е. энергетический спектр свободной частицы непрерывный;
б) энергия может принимать только дискретные значения и квантуется главным квантовым числом n ;
в) плотность вероятности обнаружения частицы в данной точке пространства $|\Psi|^2$ не зависит от времени, т.е. все положения свободной частицы в пространстве равновероятны;
г) плотность вероятности обнаружения частицы в данной точке пространства определяется выражением $|\Psi_n(x)|^2 = \Psi_n(x) \Psi_n^*(x)$ и зависит от x и n .

- 1) а,б,в,г; 2) а,б,в; 3) а,в; 4) б,г.

75. Величина момента импульса L орбитального движения электрона, находящегося в атоме водорода в s-состоянии, равна

- 1) $1,49 \cdot 10^{-34}$ Дж·с; 2) 0; 3) $2,08 \cdot 10^{-34}$ Дж·с; 4) $2,58 \cdot 10^{-34}$ Дж·с.

76. Для какого из перечисленных состояний в изолированном атоме водорода кратность вырождения наибольшая?

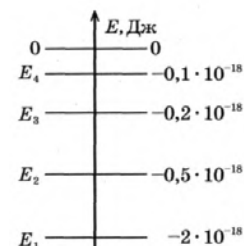
- 1) 1s; 2) 3s; 3) 3p; 4) 4d.

77. Длина волны де Бройля для электрона, движущегося по первой Боровской орбите в атоме водорода, равна...

- 1) $3,4 \cdot 10^{-10}$ м; 2) $2,13 \cdot 10^{-10}$ м; 3) $1,67 \cdot 10^{-10}$ м; 4) $8,8 \cdot 10^{-10}$ м.

78. На рисунке изображена схема возможных значений энергии атомов газа. Какие фотоны могут поглощать те атомы, которые находятся в состоянии с энергией E_3 ?

- 1) Фотоны с любой энергией, большей $0,2 \times 10^{-18}$ Дж
 2) Фотоны с любой энергией в пределах от 0 до $0,2 \times 10^{-18}$ Дж
 5) Фотоны с энергией $0,1 \times 10^{-18}$ Дж и $0,2 \times 10^{-18}$ Дж
 6) Фотоны с энергией $0,1 \times 10^{-18}$ Дж, $0,2 \times 10^{-18}$ Дж и любой, большей $0,2 \times 10^{-18}$ Дж



79. Энергия испущенного фотона при переходе с четвертого уровня атома водорода в серии Бальмера равна...

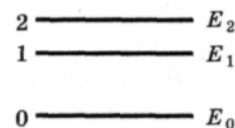
- 1) -13, эВ; 2) 10,2 эВ; 3) -10,2 эВ; 4) 3,4 эВ.

80. Атом водорода поглотил квант с энергией 15 эВ. Энергия электрона вне атома равна...

- 1) 1,4 эВ; 2) -1,4 эВ; 3) 2,4 эВ; 4) 13,6 эВ.

81. Сколько фотонов различной частоты могут испускать атомы водорода, находившиеся во втором возбужденном состоянии E_2 , согласно постулатам Бора?

- 1)1 2)2 3)3 4)4



82. Стационарным уравнением Шредингера для частицы в потенциальной яме с бесконечно высокими стенками является уравнение ...

- 1) $\frac{d^2 \psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E \psi = 0$ 2) $\Delta \psi + \frac{2m}{\hbar^2} E \psi = 0$
 3) $\frac{d^2 \psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - \frac{m \omega_0^2 x^2}{2}) \psi = 0$ 4) $\Delta \psi + \frac{2m}{\hbar^2} (E + \frac{Ze^2}{4\pi \epsilon_0 r}) \psi = 0$

83. Частица в потенциальной яме шириной l находится в возбужденном состоянии ($n = 2$). Плотность вероятности нахождения частицы в центре ямы равна...

- 1) 0,5; 2) 0,25; 3) 0,5; 4) 0.

84. Вычислить величину момента импульса L орбитального движения электрона, находящегося в атоме водорода в p -состоянии.

- 1) $1,49 \cdot 10^{-34}$ Дж·с; 2) 0; 3) $2,49 \cdot 10^{-34}$ Дж·с 4) $1,58 \cdot 10^{-34}$ Дж·с

85. Сколько квантов различной энергии могут испускать атомы водорода, если их электроны находятся на третьей орбите?

- 1) кванты двух различных энергий;
2) кванты трех различных энергий;
3) кванты четырех различных энергий;
4) кванты пяти различных энергий;

86. Средняя кинетическая энергия электрона в невозбужденном атоме водорода равна 13,6 эВ. Исходя из соотношения неопределенностей наименьшая неточность, с которой можно вычислить координату электрона, равна...

- 1) $\Delta x \geq 10^{-10}$ м; 2) $\Delta x \geq 10^{-9}$ м; 3) $\Delta x \geq 10^{-11}$ м; 4) $\Delta x \geq 10^{-8}$ м.

87. В опыте Резерфорда большая часть α -частиц свободно проходит сквозь фольгу, практически не отклоняясь от прямолинейных траекторий, потому что

- 5) ядро атома имеет положительный заряд
6) электроны имеют отрицательный заряд
7) ядро атома имеет малые (по сравнению с атомом) размеры
8) α -частицы имеют большую (по сравнению с ядрами атомов) массу

88. Энергия испущенного фотона при переходе с четвертого уровня в атоме водорода в серии Бальмера равна...

- 1) 10,2 эВ; 2) -10,2 эВ; 3) 3,4 эВ; 4) -3,4 эВ.

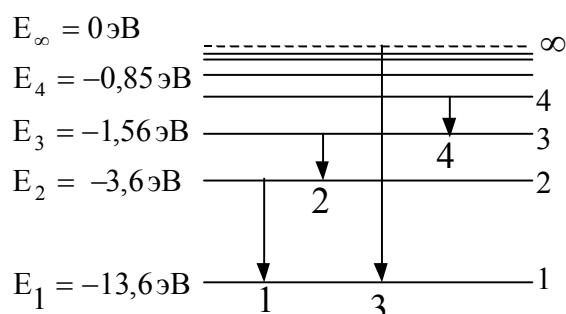
89. В атоме водорода уровню энергии номера n отвечает (без учета спина) ...

- 1) $n + 1$ различных квантовых состояний;
2) n^2 различных квантовых состояний;
3) $2 n^2$ различных квантовых состояний;
4) $(n + 1)^2$ различных квантовых состояний.

90. Частица в потенциальном ящике шириной L находится в возбужденном состоянии ($n = 2$). В каких точках интервала ($0 < x < L$) плотность вероятности $|\psi(x)|^2$ нахождения частицы минимальна?

- 1) $x = L/2$; 2) $x = L/3$; 3) $x = L/4$; 4) $x = 3L/4$.

91. На рисунке показана схема энергетических уровней атома водорода и некоторые возможные переходы электрона из одного состояния в другое. Укажите, какому переходу соответствует спектральная линия, лежащая в видимой области спектра.



1) 1

2) 2

3) 3

4) 4

92. Электрон и α - частица имеют одинаковые импульсы. Длина волны де Бройля какой частицы больше?

- 1) электрона, т.к. его электрический заряд меньше;
- 2) длины волн одинаковы;
- 3) α - частицы, т.к. ее масса больше;
- 4) α - частица не обладает волновыми свойствами.

93. Какое из приведенных ниже утверждений является серьезным доводом против планетарной модели атомов по Резерфорду?

- 1) силы электростатического притяжения ядра так велики, что электрон должен упасть на ядро;
- 2) из-за большой удаленности от ядра силы кулоновского притяжения так малы, что электроны должны легко их преодолевать и покидать атомное ядро;
- 3) электрон должен терять энергию на электромагнитное излучение и быстро упасть на ядро;
- 4) из-за большой массы ядра гравитационные силы притяжения должны вызывать падение электрона на ядро.

94. Определить длину дебройлевской волны электрона, находящегося на второй орбите атома водорода.

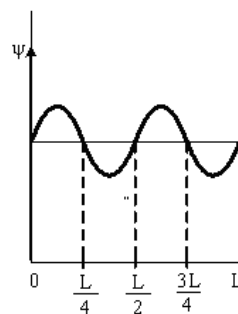
- 1) 0,67 нм;
- 2) 120 нм;
- 3) 0.39 нм;
- 4) 0,12 нм.

95. Определить первый потенциал возбуждения водородоподобного атома гелия.

- 1) 40,8 В;
- 2) 54,4 В;
- 3) 10,2 В ;
- 4) 13,6 В.

96. Вероятность обнаружить электрон на участке $\frac{L}{8} < x < \frac{L}{2}$ одномерного потенциально-го ящика с бесконечно высокими стенками, если ψ - функция имеет вид, указанный на рисунке, равна...

- 1) $3/8$;
- 2) $5/8$;
- 3) $1/4$;
- 4) $1/2$.



97. Установите соответствие квантовых чисел, определяющих волновую функцию электрона в атоме водорода их физическому смыслу.

1) n	А. Определяет ориентацию электронного облака в пространстве.
2) l	Б. Определяет форму электронного облака

3) m

В. Определяет размеры электронного облака

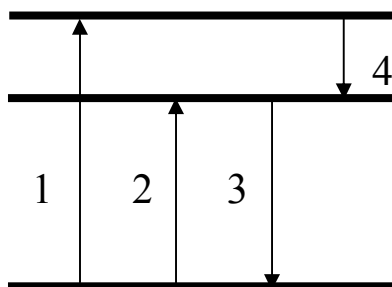
Г. Собственный механический момент электрона

- 1) 1 – Г, 2-Б, 3 – А; 2) 1 –А, 2 – Б, 3 – В; 3) 1- В, 2 –Б, 3 –А; 4) 1 –В, 2 – А, 3 – Г.

98. Величина момента импульса L орбитального движения электрона, находящегося в атоме водорода в р-состоянии, равна...

- 1) $1,49 \cdot 10^{-34}$ Дж·с;
2) $2,58 \cdot 10^{-34}$ Дж·с;
3) $1,054 \cdot 10^{-34}$ Дж·с;
4) $2,108 \cdot 10^{-34}$ Дж·с.

99. На рисунке представлена диаграмма энергетических уровней атома. Какой цифрой обозначен переход, соответствующий поглощению атомом фотона самой большой частоты?



- 1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4.

100. Атом водорода находился в нормальном состоянии. При первом столкновении с другим атомом, он перешел в возбужденное состояние, а при следующем столкновении был ионизирован. Энергия системы «ядро – электрон» имела

- 1) максимальное значение в нормальном состоянии атома;
2) максимальное значение в возбужденном состоянии атома;
3) максимальное значение в ионизированном состоянии атома;
4) одинаковое значение во всех трех состояниях;

101. Длина волны де Бройля для электрона больше, чем для α -частицы. Импульс какой частицы больше?

- 6) электрона
7) α -частицы
8) импульсы одинаковы
9) величина импульса не связана с длиной волны

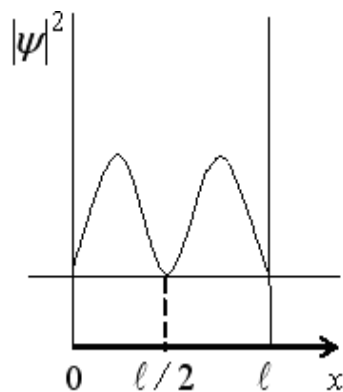
102. Определить длину волны, соответствующую границе серии Бальмера для водорода. Постоянная Ридберга равна $1,097 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}$.

- 1) 500 нм; 2) 364,7 нм; 3) 293,4 нм; 4) 1290 нм.

103. Воспользовавшись соотношением неопределенностей оцените размытость энергетического уровня для возбужденного состояния, время жизни в котором составляет 10^{-8} с.

- 1) 414 нэВ; 2) 21,8 эВ; 3) 912 нэВ; 4) 912 мкэВ.

104. На рисунке изображена плотность вероятности обнаружения микрочастицы на различных расстояниях от «стенок» ямы.



Вероятность ее обнаружения на участке $\ell/4 < x < 3\ell/4$ равна...

- 1) $\frac{1}{2}$; 2) 0; 3) $\frac{3}{4}$; 4) $\frac{1}{4}$.

105. Квадрат модуля волновой функции ψ , входящей в уравнение Шредингера, равен...

- 1) импульсу частицы в соответствующем месте пространства;
 2) энергии частицы в соответствующем месте пространства;
 3) плотности вероятности обнаружения частицы в соответствующем месте пространства;
 4) квадрату энергии частицы в соответствующем месте пространства.

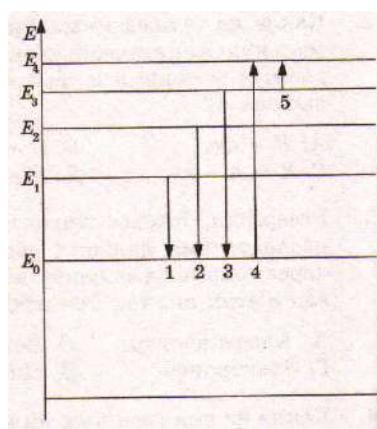
106. Частица в потенциальной яме находится в основном состоянии. Какова вероятность обнаружить частицу в крайней трети ямы?

- 1) $\frac{1}{3}$; 2) 0,195; 3) $\frac{2}{3}$; 4) 0,279.

107. Используя принцип Паули, укажите какое максимальное число электронов в атоме могут иметь одинаковые следующие квантовые числа: n, l, m

- 1) 2; 2) 1; 3) 4; 4) 6.

108. На рисунке представлена диаграмма энергетических уровней атома. Какой стрелкой обозначен переход с излучением фотона наименьшей частоты?



- 1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4; 5) 5.

109. Используя теорию Бора для атома водорода, определите скорость движения электрона по первой боровской орбите.

- 1) 2,56 Мм/с; 2) 1,29 Мм/с; 3) 2,19 Мм/с; 4) 60 Мм/с.

110. Электрон в атоме водорода перешел из основного состояния в возбужденное с $n = 3$. Радиус его боровской орбиты ...

- 1) увеличился в 3 раза;
- 2) уменьшился в 3 раза;
- 3) увеличился в 9 раз;
- 4) уменьшился в 9 раз;
- 5) увеличился в 2 раза.

111. Электрон и протон движутся с одинаковыми скоростями. У какой из этих частиц большая длина волны де Бройля?

- 6) у электрона
- 7) у протона
- 8) длины волн этих частиц одинаковы
- 9) частицы нельзя характеризовать длиной волны

112. Орбитальное квантовое число l определяет...

- 1) проекцию орбитального момента импульса электрона на заданное направление;
- 2) момент импульса электрона в атоме;
- 3) энергию стационарного состояния электрона в атоме;
- 4) собственный механический момент электрона в атоме.

113. Энергия фотона, испускаемого при переходе электрона в атоме водорода с третьего энергетического уровня на первый, равна...

- 13,6 эВ; 2) 12,1 эВ; 3) 10,2 эВ; 4) 3,4 эВ.

114. Какое из перечисленных условий определяет возможность обнаружить волновые свойства микрочастицы?

- 1) Движение с релятивистской скоростью;
- 2) наличие электрического заряда;
- 3) наличие магнитного момента;
- 4) малая масса частицы.

115. Какое из утверждений ошибочно?

- 1) Соотношение неопределенностей является следствием невозможности изучить свойства микрочастиц в связи с волновым характером их движения.
- 2) Произведение неопределенностей координаты и соответствующего ей импульса не может быть меньше величины порядка $\hbar$.
- 3) Чем точнее определена координата микрочастицы, тем менее точно определено значение импульса микрочастицы, и наоборот.
- 4) Для тел с координатами, определенными с одной и той же точностью Δx , точность определения скорости зависит от массы этих тел.

116. Потенциал ионизации водородоподобного атома гелия равен...

- 1) 13,6 эВ; 2) 40,8 эВ; 3) 54,4 эВ; 4) 10,2 эВ.

117. Частица в потенциальном ящике шириной L находится в состоянии с главным квантовым числом $n = 3$. Какова вероятность нахождения частицы в крайней трети ящика?

- 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{1}{3}$; 3) $\frac{1}{4}$; 4) $\frac{3}{8}$.

57. Найти кинетическую энергию электрона, если длина волны де Бройля $0,10$ нм.

- 1) 120 эВ; 2) 73 эВ; 3) 150 эВ; 4) $13,6$ эВ.

118. Положение пылинки массой $m = 10^{-9}$ кг можно установить с неопределенностью $\Delta x = 0,1$ мкм. Учитывая, что постоянная Планка $\hbar = 1,054 \cdot 10^{-34}$ Дж·с, неопределенность скорости ΔV_x (в м/с) будет не менее...

- 1) $1,05 \cdot 10^{-18}$ 2) $1,05 \cdot 10^{-24}$ 3) $1,05 \cdot 10^{-27}$ 4) $1,054 \cdot 10^{-21}$.

3) .

119. Какое из перечисленных свойств не является обязательным для ψ - функции?

- 1) ψ - функция непрерывна;
- 2) ψ - функция конечна;
- 3) ψ - функция должна быть функцией комплексного переменного;
- 4) ψ - функция должна иметь непрерывные частные производные первого порядка по координатам.

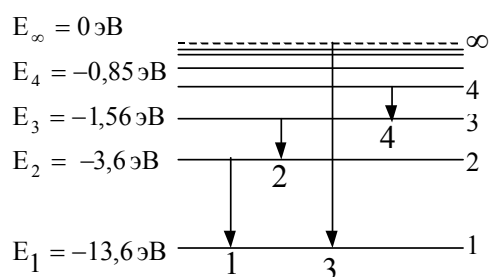
120. Определите, во сколько раз орбитальный момент импульса L_l электрона, находящегося в f – состоянии, больше, чем для электрона в p - состоянии.

- 1) $1,5$; 2) $2,45$; 3) 5 ; 4) $3,43$.

121. В атоме К и L оболочки заполнены полностью. Общее число электронов в атоме равно...

- 1) 6 ; 2) 8 ; 3) 18 ; 4) 10 .

122. На рисунке представлена схема энергетических уровней атома водорода. Какой цифрой обозначен переход с излучением фотона, имеющего максимальный импульс?



- 1) 1 ; 2) 2 ; 3) 3 ; 4) 4 .

123. Какова природа сил, отклоняющих α - частицы от прямолинейной траектории в опытах Резерфорда?

- 1) Гравитационная;
- 2) электромагнитная;
- 3) ядерная;
- 10) упругая.

124. Если неопределенность координаты электрона ($m_e = 9,11 \cdot 10^{-31}$ кг) при его движении в атоме $\Delta x = 10^{-10}$ м, то неопределенность скорости его движения составляет...

- 1) $1,16 \cdot 10^6$ м/с;
- 2) $7,27 \cdot 10^6$ м/с;
- 3) $1,16 \cdot 10^{-10}$ м/с;
- 4) ∞ .

$$\hbar = 1,054 \cdot 10^{-34} \text{ Дж}\cdot\text{с}.$$

125. Какую энергию необходимо дополнительно сообщить электрону, чтобы его дебройлевская длина волны уменьшилась от 0,1 нм до 0,05 нм?

- 1) 450 эВ;
- 2) 150 эВ;
- 3) 100 эВ;
- 4) 1050 эВ.

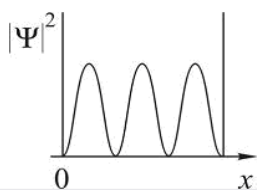
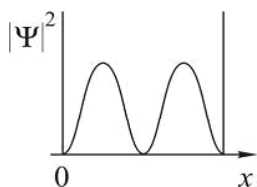
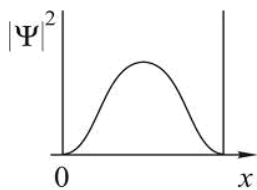
126. Какое из следующих утверждений ошибочно для атома водорода?

- 1) Главное квантовое число n может принимать любые целочисленные положительные значения, начиная с единицы.
- 2) Главное квантовое число n определяет возможные значения энергии электрона в атоме.
- 3) Зная главное квантовое число n , можно однозначно определить квантовые состояния электрона: его энергию, момент импульса, магнитный момент и т.п.
- 4) При заданном n орбитальное квантовое число ℓ может принимать всего n значений.

127. Для какого из перечисленных состояний кратность вырождения наибольшая?

- 1) 1s;
- 2) 2s;
- 3) 2p;
- 4) 3d.

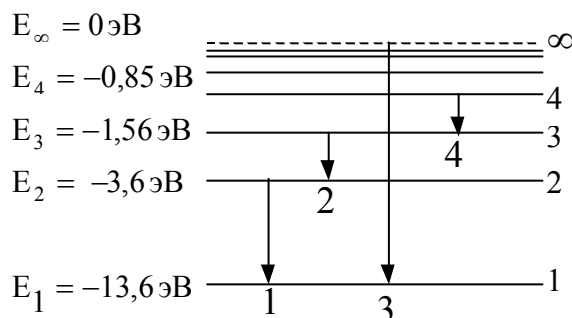
128. На рисунках приведены картины распределения плотности вероятности нахождения микрочастицы в потенциальной яме с бесконечно высокими стенками



Состоянию с $n = 3$ соответствует...

- 1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) необходимый рисунок отсутствует.

129. На рисунке представлена схема энергетических уровней атома водорода.



Какой цифрой обозначен переход, соответствующий серии Пашена?

- 1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4.

130. Электрон движется в атоме водорода по первой боровской орбите. Принимая, что допускаемая неопределенность скорости составляет 10% от ее числового значения, определите неопределенность координаты электрона.

- 1) $\Delta x = 3,34$ пм; 2) $\Delta x = 3,34$ нм; 3) $\Delta x = 2,16$ пм; 4) $\Delta x = 2,16$ нм.

131. При движении какого из перечисленных тел волновые свойства могут быть обнаружены экспериментально?

- 5) Пылинка с массой $m = 10^{-15}$ кг летит со скоростью 100 м/с.
6) Электрон движется со скоростью 10^5 м/с.
7) Земля движется по орбите со скоростью $3 \cdot 10^4$ м/с.
8) Ракета летит со второй космической скоростью 11,2 км/с.

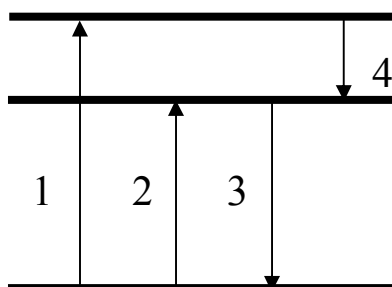
132. В каком из перечисленных случаев энергетический спектр электрона сплошной?

- 5) Электрон в потенциальной яме шириной 10^{-6} м.
6) Электрон в атоме.
7) Электрон в молекуле водорода.
8) Свободный электрон.

133. Электрон в атоме находится в d – состоянии. Максимальное значение проекции момента импульса на направление внешнего магнитного поля равно...

- 1) $2\hbar$; 2) $3\hbar$; 3) $32\hbar$; 4) $1\hbar$.

134. На рисунке представлена диаграмма энергетических уровней атома. Какой цифрой обозначен переход, соответствующий поглощению атомом фотона наименьшей длины волны?



- 1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4.

135. Определите отношение неопределенностей скорости электрона, если его координата установлена с точностью до 10^{-5} м, и пылинки массой 10^{-12} кг ($\Delta v_e / \Delta v_p$), если ее координата установлена с такой же точностью.

- 1) $2,8 \cdot 10^{18}$; 2) $1,1 \cdot 10^{18}$; 3) $1,1 \cdot 10^{10}$; 4) $1,9 \cdot 10^8$.

136. На какой вопрос о соотношении неопределенностей для энергии и времени Вы ответите «нет»?

1) Невозможно с бесконечной точностью знать энергию частицы и время его пребывания в этом энергетическом состоянии.

2) Если частица существует в каком либо состоянии достаточно долго, то энергия этого состояния известна точно.

3) Зная ширину спектральной линии, можно оценить порядок времени пребывания атома в возбужденном состоянии.

4) В соотношении неопределенностей ΔE – разность энергий двух соседних состояний; Δt – неопределенность длительности перехода между этими состояниями.

137. Укажите размерность ψ - функции.

- 1) м; 2) 1/м; 3) 1/с; 4) безразмерная величина.

138. В каком из указанных ниже состояний в атоме водорода электрон обладает меньшей энергией?

- 1) 1d; 2) 2p; 3) $n = 3, l = 1$; 4) $n = 4, l = 2$.

139. Какие из приведенных утверждений соответствуют смыслу постулатов Бора?

А) В атоме электроны движутся по круговым орбитам и излучают при этом электромагнитные волны.

Б) Атом может находиться только в одном из стационарных состояний, в которых атом не излучает энергию.

В) При переходе из одного стационарного состояния в другое атом поглощает или излучает квант электромагнитного излучения.

- 1) только А; 2) только Б; 3) только В; 4) Б и В.

140. Электрон в атоме находится в f – состоянии. Максимальное значение проекции момента импульса на направление внешнего магнитного поля равно...

- 1) $2\hbar$; 2) $3\hbar$; 3) $12\hbar$; 4) $1\hbar$.

141. Используя принцип Паули, укажите какое максимальное число электронов в атоме могут иметь одинаковые следующие квантовые числа n, l, m_l, m_s ?

- 1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4.

142. Укажите число вопросов, на которые вы ответите «Да».

1) Можно ли точно определить одновременно кинетическую и потенциальную энергию микрочастицы?

2) Верно ли, что нельзя одновременно определить точные значения координаты и импульса микрочастицы?

3) Согласны ли Вы, что классические понятия координаты и импульса могут быть применимы к микрочастицам?

4) Можно ли одновременно определить точные значения энергии микрочастицы и времени, в течение которого она обладает этой энергией?

1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4.

143. Какие опыты подтверждают наличие у микрочастиц волновых свойств?

1) дифракция света;

2) дифракция электронов;

3) фотоэффект;

4) интерференция света.

144. Выполняется ли соотношение неопределенностей Гейзенберга при движении электрона в электроннолучевой трубке?

1) нет; 2) да; 3) зависит от ускоряющего напряжения; 4) зависит от силы тока в трубке.

145. Частица в потенциальном ящике находится в основном состоянии. Какова вероятность W нахождения частицы в средней трети ящика?

1) 0,609; 2) 0,195; 3) 0,25; 4) 0,755.

146. В каком из состояний атом водорода обладает наименьшим орбитальным моментом импульса?

1) $n = 3, \ell = 1$; 2) $n = 3, \ell = 2$; 3) $2p$; 4) $n = 3, \ell = 0$.

147. Максимальное число электронов в M – оболочке равно...

1) 2; 2) 8; 3) 32; 4) 28.

148. Волновая функция частицы в потенциальной яме с бесконечно высокими стенками шириной L имеет вид $\psi = A \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$. Величина импульса этой частицы в основном состоянии равна...

1) $\frac{\pi\hbar}{2L}$; 2) $\frac{2\pi\hbar}{3L}$; 3) $\frac{3\pi\hbar}{2L}$; 4) $\frac{\pi\hbar}{L}$.

149. Время жизни электронов в атоме в метастабильном состоянии составляет 10^{-6} с. Учитывая, что постоянная Планка $\hbar = 6,6 \cdot 10^{-16}$ эВ·с, ширина метастабильного уровня (в эВ) будет не мене ...

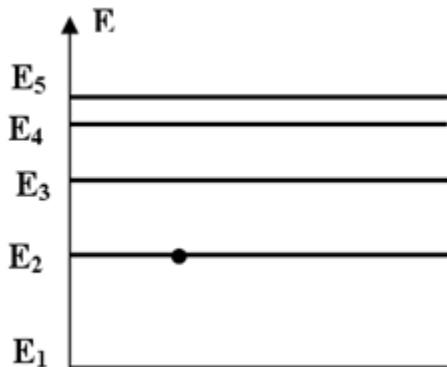
1) $6,6 \cdot 10^{-10}$;

2) $1,5 \cdot 10^{-10}$;

3) $6,6 \cdot 10^{-13}$;

4) $1,5 \cdot 10^{-13}$.

150. На рисунке приведена диаграмма энергетических уровней некоторого атома. Электрон находится на втором стационарном уровне. Сколько спектральных линий могут наблюдаться в спектре поглощения этого атома?



- 1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4; 5) 5.

151. Какое утверждение неверно?

- 1) Магнитный момент ядра может быть равен нулю;
- 2) Спин ядра не зависит от числа нуклонов в ядре;
- 3) Магнитный момент ядра значительно меньше собственного магнитного момента электрона;
- 4) Спин ядра полуцелый, если число нуклонов в ядре нечетное.

152. Укажите число регистрирующих приборов, в которых используется ионизирующее действие быстрых заряженных частиц:

- 1) Камера Вильсона;
- 2) Пузырьковая камера;
- 3) Счетчик Гейгера;
- 4) Счетчик Черенкова.

153. Какое утверждение ошибочно?

- 1) Период полураспада – это время, в течение которого распадается половина имеющихся ядер;
- 2) Среднее время жизни – это время, в течении которого число нераспавшихся ядер убывает в e раз;
- 3) Закон $N=N_0 e^{-\lambda t}$ справедлив для всех видов радиоактивных превращений;
- 4) Постоянная радиоактивного распада λ одинакова для всех радиоактивных изотопов одного и того же элемента.

154. Какое утверждение ошибочно?

- 1) Масса ядра всегда меньше суммы масс нуклонов, из которых оно состоит;
- 2) Удельная энергия связи ядра – это энергия связи, отнесенная к одному нуклону;

- 3) Энергия связи ядра может быть определена по равенности масс ядра и составляющих его нуклонов;
- 4) Энергия сильного взаимодействия нуклонов в ядре зависит от их электрического заряда.

155. Какое утверждение ошибочно?

- 1) Тепловой эффект ядерной реакции может быть положительным и отрицательным;
- 2) Тепловой эффект ядерной реакции можно определить по разности масс покоя исходных частиц и конечных продуктов реакции;
- 3) При ядерных реакциях всегда наблюдается выделение энергии;
- 4) Если масса покоя частиц, вступающих в ядерную реакцию, больше массы покоя продуктов реакции, то происходит выделение энергии.

156. Какая из строчек таблицы правильно отражает структуру ядра ${}_{18}^{37}\text{Ar}$?

	Число протонов	Число нейтронов
1)	18	19
2)	18	37
3)	37	18
4)	37	55

157. Сколько α - и β^- -распадов должно произойти, чтобы ${}_{92}^{238}\text{U}$ превратился в стабильный изотоп свинца ${}_{82}^{206}\text{Pb}$.

- 1) 10 α -распадов и 4 β^- -распадов;
- 2) 9 α -распадов и 5 β^- -распадов;
- 3) 6 α -распадов и 8 β^- -распадов;
- 4) 8 α -распадов и 6 β^- -распадов.

158. Сколько атомов радона распадается за сутки из 10^6 исходных атомов? Период полураспада радона 3,82 суток.

- 1) $1,66 \times 10^5$;
- 2) $2,44 \times 10^4$;
- 3) $2,46 \times 10^3$;
- 4) $3,12 \times 10^5$.

159. Реакция распада электрона по схеме

$$e^- \rightarrow \gamma^- + \gamma + \bar{\nu}$$
 невозможна вследствие невыполнения закона сохранения...

- 1) электрического заряда;
- 2) лептонного заряда;
- 3) энергии.
- 4) импульса

160. Один из видов радиоактивного излучения представляет собой поток быстро движущихся электронов. Это...

- 1) γ – излучение;
- 2) α – излучение;
- 3) β^- - излучение;
- 4) β^+ - излучение.

161. Ядерной реакцией деления является

- 1) ${}_{77}^{174}\text{Ir} \longrightarrow {}_{73}^{170}\text{Tl} + {}_2^4\text{He}$
- 2) ${}_4^9\text{Be} + {}_2^4\text{He} \longrightarrow {}_6^{12}\text{C} + {}_0^1\text{n}$
- 3) ${}_{100}^{246}\text{Fm} \longrightarrow {}_{51}^{123}\text{Sb} + {}_{49}^{120}\text{In} + 3{}_0^1\text{n}$
- 4) ${}_0^1\text{n} \longrightarrow {}_1^1\text{p} + {}_{-1}^0\text{e}$

162. Неизвестный радиоактивный химический элемент самопроизвольно распадается по схеме: $\text{X} \rightarrow {}_{36}^{91}\text{Kr} + {}_{56}^{142}\text{Ba} + 3\text{n}$. Ядро этого элемента содержит...

1. 92 протона и 142 нейтрона;
2. 94 протона и 144 нейтрона;
3. 94 протона и 142 нейтрона;
4. 92 протона и 144 нейтрона.

163. Испусканием ядер гелия обязательно сопровождается...

- 1) β^- - распад;
 - 2) К- захват;
 - 3) β^+ - распад;
 - 4) α – распад
-
- 3) β^+ - распад;
 - 4) α – распад.

164. Период полураспада некоторого радиоактивного изотопа равен 1 месяц. За какое время число ядер этого изотопа уменьшится в 32 раза?

- 1) 3 месяца;
- 2) 4 месяца;
- 3) 5 месяцев;
- 4) 6 месяцев.

165. Ядро ${}_{93}^{237}\text{Np}$, испытав серию α – распадов и β – распадов, превратилось в ядро ${}_{83}^{213}\text{Bi}$. Определите число α – распадов.

- 1) 6
- 2) 2
- 3) 24
- 4) 4

166. Позитрон является античастицей по отношению к...

- 1) нейтрону;
- 2) протону;
- 3) фотону;
- 4) электрону.

167. Какое утверждение неверно?

- 1) Изотопами называются ядра с одинаковым числом протонов.
- 2) Атомы, ядра которых являются изотопами, обладают совершенно одинаковыми физическими свойствами.
- 3) Изобарами называются ядра с одинаковыми числом нуклонов.
- 4) Элементы, ядра которых являются изобарами, имеют различные химические свойства.

168. Следствием каких законов сохранения являются правила смещения при радиоактивном распаде?

- 1) Закона сохранения энергии.
- 2) Закона сохранения момента импульса.
- 3) Закона сохранения электрического заряда.
- 4) Закона сохранения импульса.

169. Какая ядерная реакция может быть использована для получения цепной реакции деления?

- 1) ${}_{96}^{243}\text{Cm} + {}_0^1n \rightarrow 4{}_0^1n + {}_{42}^{108}\text{Mo} + {}_{54}^{132}\text{Xe}$
- 2) ${}_{6}^{12}\text{C} \rightarrow {}_3^6\text{Li} + {}_3^6\text{Li}$
- 3) ${}_{90}^{227}\text{Th} + {}_0^1n \rightarrow {}_{49}^{129}\text{In} + {}_{41}^{99}\text{Nb}$
- 4) ${}_{96}^{243}\text{Cm} \rightarrow {}_{43}^{108}\text{Tc} + {}_{53}^{141}\text{I}$

170. Нагретый газ углерод ${}_6\text{C}^{15}$ излучает свет. Этот изотоп испытывает β - распад с периодом полураспада 2,5 с. Как изменится спектр излучения всего газа за 5 с?

- 1) Спектр углерода исчезнет и заменится спектром азота ${}_7\text{N}^{15}$
- 2) Спектр станет ярче из – за выделяющейся энергии.
- 3) Спектр сдвинется из – за уменьшения числа атомов углерода.
- 4) Спектр углерода станет менее ярким, и добавляется линии азота ${}_7\text{N}^{15}$.

171. Какие частицы не входят в состав атомного ядра?

- 1) протоны.
- 2) нейтроны.
- 3) нуклоны.
- 4) электроны.

172. Ядро урана 235 разделилось на два ядра – осколка. Укажите число верных утверждений.

- А) процесс сопровождается выделением энергии.
- Б) удельная энергия связи новых ядер больше, чем исходного.
- В) Относительное число нейтронов в ядрах – осколках меньше, чем в исходном ядре.
- Г) Ядра урана 235 делятся под действием медленных нейтронов.

1. 2. 3. 4.

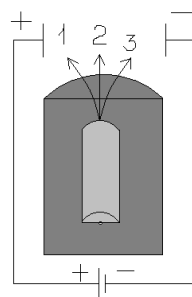
173. Укажите число верных утверждений.

- А) время, в течение которого распадается половина радиоактивных ядер, называется периодом полураспада.
- Б) периоды полураспада у всех радиоактивных изотопов данного химического элемента одинаковы.
- В) время, за которое число нераспавшихся радиоактивных ядер убывает в e – раз, называется средним временем жизни.
- Г) активность радиоактивного препарата зависит от числа имеющихся ядер и от постоянной распада.
1. 2. 3. 4.

174. Какая доля радиоактивных атомов распадется через интервал времени равный двум периодам полураспада?

- 1) 25%
- 2) 75%
- 3) 50%
- 4) 90%
- 5) все атомы распадутся

175. Какими цифрами обозначены α –, β –, γ – излучение на рисунке?



- 1) 1 – α , 2 – β , 3 – γ
- 2) 1 – β , 2 – α , 3 – γ
- 3) 1 – α , 2 – γ , 3 – β
- 4) 1 – β , 2 – γ , 3 – α

176. В процессе электромагнитного взаимодействия принимают участие...

- 1) фотоны
- 2) нейтрино
- 3) нейтроны
- 4) протоны

177. Какое утверждение ошибочно?

- 1) Заряд ядра определяется зарядом протонов, входящих в его состав;
- 2) В стабильных ядрах число нейтронов всегда меньше числа протонов;
- 3) В ядрах тяжелых элементов отношение числа нейтронов к числу протонов больше, чем в легких ядрах;
- 4) Нейтрон, как и протон, имеет механический и магнитный моменты.

178. На сколько вопросов относящихся к закону радиоактивного распада $N = N_0 e^{-\lambda t}$ вы ответите «да» ?

- А) Является ли этот закон статистическим?
 Б) Справедлив ли этот закон для всех видов радиоактивности?
 В) Обозначает ли N в этом законе число распавшихся ядер?
 Г) Можно ли записать этот закон в виде $N = N_0 e^{-t/\tau}$, где τ – среднее время жизни радиоактивных ядер?

1. 2. 3. 4.

179. На какой вопрос об активности радиоактивного вещества Вы ответите нет ?

- 1) Зависит ли активность от числа атомов радиоактивного вещества?
- 2) Зависит ли активность от постоянного распада?
- 3) Изменяется ли со временем активность одного и того же вещества?
- 4) Зависит ли активность от температуры радиоактивного вещества?

180. Какое вещество образуется в ходе ядерной реакции ${}_{13}^{27}\text{Al} (\gamma, x) {}_{12}^{26}\text{Mg}$?

- 1) Обычный водород
- 2) Дейтерий
- 3) Тритий
- 4) Гелий

181. Какое утверждение ошибочно?

- 1) Реакция синтеза гелия из более легких ядер является цепной;
- 2) Реакция синтеза гелия из дейтерия и трития идет с выделением нейтронов;
- 3) Термоядерная реакция синтеза ядер легких элементов может происходить только при очень высокой температуре;
- 4) Термоядерная реакция идет с выделением энергии.

182. Сколько α – и β – распадов должно произойти при радиоактивном распаде ядра урана ${}_{92}^{238}\text{U}$ и конечном превращении его в ядро свинца ${}_{82}^{206}\text{Pb}$?

- 1) 8 α - распадов и 10 β - распадов;
- 2) 10 – распадов и 8 β - распадов;
- 4) 10 – распадов и 10 β – распадов;
- 4) 10 α - распадов и 9 β – распадов.

183. α - излучение представляет собой поток:

- 1) Электронов;
- 2) Квантов электромагнитного излучения, испускаемых атомными ядрами при переходе из возбужденного состояния в основное;
- 3) Протонов;
- 4) Ядер атомов гелия.

184. Какая из приведенных пар является изобарной?

- 1) ${}^3_1\text{H}$, ${}^2_1\text{H}$;
- 2) ${}^3_1\text{H}$, ${}^3_2\text{He}$;
- 3) ${}^3_2\text{He}$, ${}^4_2\text{He}$;
- 4) ${}^4_2\text{He}$, ${}^3_1\text{H}$.

185. Ядерные силы:

- 1) Центральные;
- 2) Короткодействующие;
- 3) Обладают свойством насыщения;
- 4) Имеют обменный характер.

Какое утверждение ошибочно?

186. Зависит ли активность $\frac{dN}{dt}$ некоторого радиоактивного препарата от:

- 1) Его массы;
- 2) Числа радиоактивных ядер;
- 3) Температуры;
- 4) Периода полураспада.

На какой вопрос Вы ответите «Нет» ?

187. В какой из приведенных ядерных реакций частица X является нейтроном?

- 1) ${}_1^2\text{H} + \text{X} \rightarrow \text{p} + {}_2^4\text{He}$;
- 2) ${}_3^6\text{Li} + \text{D} \rightarrow \text{X} + {}_2^4\text{He}$;
- 3) ${}_3^7\text{Li} + \text{p} \rightarrow \text{X} + {}_2^4\text{He}$;
- 4) ${}_7^{14}\text{N} + \text{X} \rightarrow \text{p} + {}_6^{14}\text{C}$.

188. Какая доля радиоактивных ядер некоторого элемента распадается за время, равное половине периода полураспада?

- 1) 0,71 ;
- 2) 0,5 ;
- 3) 0,29 ;
- 4) 0,14.

189. Даны массы нейтральных атомов в атомных единицах:

- 1) H^2 - 2,014102;
- 2) H^3 -3,016049;
- 3) He^3 -3,016030;
- 4) Li^6 -6,015126.

Кроме того известны массы:

H^1 -1,007825;

n-1,008665.

Ядро какого атома самое прочное?

190. Начальное число атомов в различных радиоактивных препаратах одинаково и равно $N_0=10^{16}$. Периоды полураспада:

- 1) $6,9 \cdot 10^5$ с (I^{131});
- 2) $5,12 \cdot 10^{10}$ с (Ra^{226});

- 3) $1,7 \cdot 10^8$ с (Co^{60});
 4) $6,3 \cdot 10^8$ с (Sr^{90}).

У какого из препаратов начальная активность равна $10^{10} \frac{\text{расп}}{\text{с}}$?

191. Ядро урана ${}_{92}^{233}\text{U}$ претерпело шесть α и три β^- превращений. Какое ядро образовалось?

- 1) ${}_{82}^{207}\text{Pb}$;
 2) ${}_{83}^{213}\text{Bi}$;
 3) ${}_{83}^{209}\text{Bi}$;
 4) ${}_{82}^{211}\text{Pb}$.

192. В какой из приведенных ядерных реакций частица X это протон?

- 1) ${}_{13}^{27}\text{Al} (n, X) {}_{11}^{24}\text{Na}$;
 2) ${}_{7}^{14}\text{N} (n, X) {}_{6}^{14}\text{C}$;
 3) ${}_{13}^{27}\text{Al} (\gamma, X) {}_{13}^{28}\text{Al}$;
 4) ${}_{1}^2\text{H} (X, n) {}_{2}^4\text{He}$.

193. Ядро урана делится на два ядра-осколка. Укажите с каким из приведенных утверждений Вы не согласны?

- 1) Процесс сопровождается выделением энергии;
 2) Удельная энергия связи новых ядер больше, чем исходного;
 3) Относительное число нейтронов в ядрах-осколках больше, чем в исходном ядре;
 4) Ядра-осколки радиоактивны.

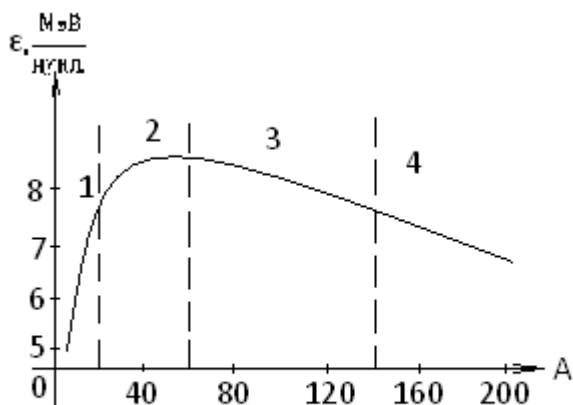
194. Как изменяется полная энергия двух ядер дейтерия ${}_{1}^2\text{H}$, при соединении их в ядро гелия ${}_{2}^4\text{He}$?

- 1) Увеличивается;
 2) Уменьшается;
 3) Не изменяется;
 4) Увеличивается или уменьшается в зависимости от начального расстояния между ядрами дейтерия.

195. Укажите ошибочное утверждение. У любого атомного ядра:

- 1) Заряд положительный, кратный заряду протона;
 2) Массовое число совпадает с числом нуклонов;
 3) Спин полуцелый;
 4) Плотность порядка $10^{17} \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$.

196. На графике представлена усредненная зависимость удельной энергии связи стабильных ядер ϵ от числа нуклонов в ядре A. Какой интервал значений A соответствует ядрам, обладающим наибольшей устойчивостью?



197. Активность препаратов уменьшилась вдвое за время равное:

- 5) 8 суток (I^{131});
- 6) 75 суток (Ir^{192});
- 7) 3,82 суток (Rn^{222});
- 8) 14,3 суток (P^{32}).

У какого из препаратов постоянная распада λ равна $0,18 \text{ суток}^{-1}$?

198. За 8 часов начальное количество радиоактивного изотопа уменьшилось в три раза. За какое время оно уменьшится в 27 раз?

- 1) За сутки;
- 2) За 36 часов;
- 3) За трое суток;
- 4) За 72 часа.

199. При какой из ядерных реакций энергия поглощается?

- 1) $Li^7 + H^2 \rightarrow Be^8 + n$;
- 2) $Be^9 + H^2 \rightarrow B^{10} + n$;
- 3) $N^{14} + He^4 \rightarrow H^1 + O^{17}$;
- 4) $Li^7 + H^1 \rightarrow He^4 + He^4$.

Массы в атомных единицах:

$H^1 - 1,08814$	$Li^7 - 7,01823$	$B^{10} - 10,01612$
$n - 1,00899$	$Be^8 - 8,00785$	$N^{14} - 14,00752$
$H^2 - 2,01474$	$Be^9 - 9,01505$	$O^{17} - 17,00453$
$He^4 - 4,00388$		

200. Укажите ошибочное утверждение:

- 1) Спонтанная реакция деления атомного ядра наблюдается только на тяжелых ядрах;
- 2) Цепная реакция деления атомных ядер возможна, если при каждом акте деления образуются свободные нейтроны;

- 3) При реакции деления ядра удельная энергия связи осколков больше, чем исходного ядра;
 4) Число нейтронов в ходе цепной реакции нельзя регулировать.

201. В результате реакции ядра ${}_{13}^{27}\text{Al}$ с α -частицей ${}_2^4\text{He}$ появился протон ${}_1^1\text{H}$ и ядро:

- 1) ${}_{14}^{30}\text{Si}$;
- 2) ${}_{16}^{32}\text{S}$;
- 3) ${}_{14}^{28}\text{Si}$;
- 4) ${}_{17}^{35}\text{Cl}$.

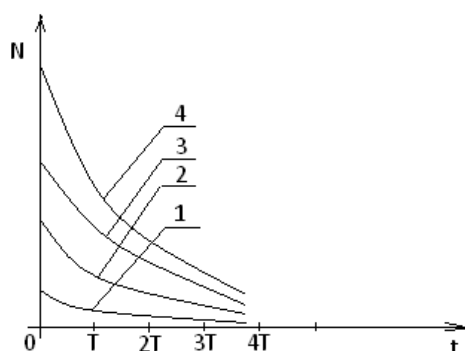
202. Верно ли, что нейтрон:

- 1) Имеет массу большую, чем нейтрон;
- 2) Вне ядра стабилен;
- 3) Имеет полуцелый спин;
- 4) Обладает магнитным моментом.

На какой вопрос вы ответили «нет»?

203. На графике изображены кривые распада радиоактивных препаратов. Какой график соответствует препарату с наибольшей активностью в момент времени $t=0$?

N - число нераспавшихся ядер в момент времени t



204. В каком из приведенных примеров радиоактивного распада появляется позитроны?

- 1) ${}_{35}^{78}\text{Br} \longrightarrow {}_{34}^{78}\text{Se} + \dots$
- 2) ${}_{35}^{80}\text{Br} \longrightarrow {}_{36}^{80}\text{Kr} + \dots$
- 3) ${}_{90}^{234}\text{Th} \longrightarrow {}_{91}^{234}\text{Pa} + \dots$
- 4) ${}_{92}^{238}\text{U} \longrightarrow {}_{90}^{234}\text{Th} + \dots$

205. При ядерных реакциях соблюдаются законы сохранения:

- 1) Электрического заряда;
- 2) Массового числа;
- 3) Энергии;
- 4) Моента импульса.

206. В результате деления тяжелого атомного ядра происходит:

- 1) Разделение ядра на меньшее ядро и α -частицу;

- 2) Разделение ядра на два соразмерных по массе ядра и испускание нейтронов;
- 3) Разделение ядра на отдельные протоны и нейтроны;
- 4) Испускание ядром одного или нескольких нейтронов.

207. Верно ли, что удельная энергия связи :

- 1) ${}_{92}\text{U}^{238}$ меньше, чем ${}_{82}\text{Pb}^{206}$
- 2) ${}_2\text{He}^3$ меньше, чем ${}_2\text{He}^4$
- 3) ${}_2\text{He}^4$ больше, чем ${}_1\text{H}^3$
- 4) ${}_2\text{He}^4$ больше, чем ${}_8\text{O}^{16}$

На какой вопрос Вы ответили «Нет»?

208. α – частица столкнулась с ядром азота ${}_7\text{N}^{14}$. При этом образовались ядро водорода и ядро...

- 1) кислорода с массовым числом 17.
- 2) азота с массовым числом 14.
- 3) кислорода с массовым числом 16.
- 4) фтора с массовым числом 19.

209. При облучении нейтронами ядра урана 235 делятся на:

- 1) 2 сравнимых по массе осколка деления и нейтроны.
- 2) альфа – и бета – частицы.
- 3.) нейтроны и протоны.
- 4) нейтроны, протоны и электроны.

210. При бомбардировке ядер изотопа азота ${}_7^{14}\text{N}$ нейтронами образуется изотоп бора ${}_5^{11}\text{B}$.
Еще в этой ядерной реакции образуется...

- 1) протон
- 2) α – частица
- 3) нейтрон
- 4) 2 нейтрона
- 5) 2 протона

211. Незвестный радиоактивный химический элемент самопроизвольно распадается по схеме: $X \rightarrow {}_{36}^{91}\text{Kr} + {}_{56}^{142}\text{Ba} + 3n$. Ядро этого элемента содержит...

- 1) 92 протона и 144 нейтрона
- 2) 92 протона и 142 нейтрона
- 3) 94 протона и 144 нейтрона
- 4) 94 протона и 142 нейтрона

212. Ядро атома состоит из

- 1) нейтронов и электронов
- 2) протонов и нейтронов
- 3) протонов и электронов
- 4) нейтронов

213. Детектор радиоактивных излучений помещен в закрытую картонную коробку с толщиной стенок - 1 мм. Какие излучения он может зарегистрировать?

- 1) α и β
- 2) α и γ
- 3) β и γ
- 4) α , β , γ

214. Ядерная реакция ${}_{92}^{235}\text{U} + {}_0^1\text{n} \rightarrow {}_{54}^{140}\text{Xe} + {}_{38}^{94}\text{Sc} + 2{}_0^1\text{n}$ идет с большим выделением энергии. Энергия выделяется в основном в виде

- 1) Энергия α – частиц
- 2) Энергия γ – частиц
- 3) Энергия β – частиц
- 4) Кинетической энергии ядер – осколков

215. Ядро изотопа урана ${}_{92}\text{U}^{238}$ после нескольких радиоактивных распадов превратилось в ядро изотопа ${}_{92}\text{U}^{234}$. Какие это были распады?

- 1) Один α и два β
- 2) Один α и один β
- 3) Два α и один β
- 4) Такое превращение невозможно

216. Из перечисленных ниже превращений к β^- - распаду отнесется...

- 1) ${}^A\text{X}_Z + e^- \rightarrow {}^A\text{X}_{Z-1} + \nu$
- 2) ${}^A\text{X}_Z \rightarrow {}^{A-4}\text{X}_{Z-2} + {}^4\text{He}_2$
- 3) ${}^A\text{X}_Z \rightarrow {}^A\text{X}_{Z+1} + e^- + \bar{\nu}_e$
- 4) ${}^A\text{X}_Z \rightarrow {}^A\text{X}_{Z-1} + e^+ + \nu_e$

217. Установить соответствие процессов взаимопревращения частиц:

1) β^- - распад	А. ${}_{-1}^0e + {}_{+1}^0e \rightarrow 2\gamma$
2) К – захват	Б. ${}_1^1p \rightarrow {}_0^1n + {}_{+1}^0e + \nu_e$
3) β^+ - распад	В. ${}_1^1p + {}_{-1}^0e \rightarrow {}_0^1n + \nu_e$
4) аннигиляция	Г. ${}_0^1n \rightarrow {}_1^1p + {}_{-1}^0e + \nu_e$
	Д. ${}_0^1n + {}_{-1}^0e \rightarrow {}_1^1p + \nu_e$

1. 1-А, 2-Б, 3-Г, 4-Д
2. 1-Г, 2-Б, 3-В, 4-А
3. 1-Б, 2-Г, 3-А, 4-Д
4. 1-Б, 2-В, 3-А, 4-Д

218. Нуклидами с одинаковым атомным номером называют...

- 1) изомеры
- 2) изобары
- 3) изотопы
- 4) электроны в свободном состоянии

219. Чему равно число нейтронов в ядре урана ${}_{92}\text{U}^{238}$?

- 1) 0
- 2) 92
- 3) 146

4) 238

220. Удельные энергии связи нуклонов в ядрах плутония ${}_{94}\text{Pu}^{240}$, кюрия ${}_{96}\text{Cm}^{245}$ и америдия ${}_{95}\text{Am}^{246}$ равны соответственно 0,21; 0,22; 0,23 МэВ/нуклон. Из какого ядра труднее выбить нейтрон?

- 1) из ядра ${}_{94}\text{Pu}^{240}$
- 2) из ядра ${}_{96}\text{Cm}^{245}$
- 3) из ядра ${}_{95}\text{Am}^{246}$
- 4) все ядра одинаково устойчивы

221. α – излучение – это ...

- 1) поток ядер гелия
- 2) поток протонов
- 3) поток электронов
- 4) электромагнитные волны

222. Если ΔN – уменьшение числа нейтронов в ядре, а ΔZ – уменьшение числа протонов в ядре, то какие изменения в составе ядра произошли в результате радиоактивного альфа – распада?

- 1) $\Delta N = 4$
- 2) $\Delta Z = 4$
- 3) $\Delta N = 0$
- 4) $\Delta N = 2$

223. γ – излучение представляет собой поток...

- 1) электронов
- 2) ядер атомов гелия
- 3) протонов
- 4) квантов электромагнитного излучения, испускаемых атомными ядрами при переходе из возбужденного состояния в основное.

224. В процессе электромагнитного взаимодействия принимают участие...

- 1) Фотоны
- 2) Нейтрино
- 3) Нейтроны
- 4) Протоны

225. Какой порядковый номер в таблице Менделеева имеет элемент, который образуется в результате α – распада и последующего β – распада ядра элемента с порядковым номером Z ?

- 1) $Z + 2$
- 2) $Z + 1$
- 3) $Z - 2$
- 4) $Z - 1$

226. При самопроизвольном распаде ядра энергия

- 1) Выделяется
- 2) Поглощается
- 3) Сначала поглощается, потом выделяется
- 4) Не выделяется и не поглощается

227. Активность некоторого изотопа за 10 суток уменьшилась на 50 %.
Период полураспада этого изотопа....

- 1) 10 суток
- 2) 7 суток
- 3) 30 суток
- 4) 20 суток
- 5) 5 суток

228. Изобарами называются нуклиды...

- 1) Обладающие одинаковым спином
- 2) С невозбужденной оболочкой
- 3) С одинаковым числом нейтронов
- 4) С одинаковым массовым числом

229. Радиоактивный изотоп нептуния ${}_{93}^{237}\text{Np}$ после одного α – распада превращается в изотоп

- 1) ${}_{91}^{233}\text{Pa}$
- 2) ${}_{92}^{238}\text{U}$
- 3) ${}_{90}^{230}\text{Th}$
- 4) ${}_{94}^{241}\text{Pu}$

230. При распаде ядра изотопа лития ${}_3\text{Li}^8$ образовались два одинаковых ядра и β – частица. Два одинаковых ядра – это ядра...

- 1) Водорода
- 2) Гелия
- 3) Бора
- 4) Дейтерия

231. Устройство, в котором регистрация траектории быстрых заряженных частиц осуществляется за счет конденсации пересыщенных паров воды при ионизации воздуха пролетающими частицами, называется...

- 1) Счетчик Гейгера
- 2) Камера Вильсона
- 3) Пузырьковая камера
- 4) Толстослойная фотоэмульсия

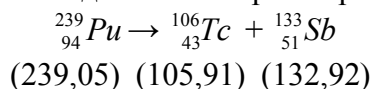
232. Значение зарядового числа Z при β – распаде меняется...

- 1) На три
- 2) На единицу
- 3) Не меняется
- 4) На четыре

233. В первой ядерной реакции, осуществленной Резерфордом, ядра азота ${}^{14}_7\text{N}$ при бомбардировке α – частицами, превращались в ядра изотопа кислорода ${}^{17}_8\text{O}$. Какие еще частицы были продуктом реакции?

- 1) Протон
- 2) Два протона
- 3) Нейтрон
- 4) Два нейтрона

234. Ниже записана ядерная реакция, а в скобках указаны массы (в а.е.м.) участвующих в ней частиц. Поглощается или выделяется энергия при этой реакции?



- 1) Выделяется
- 2) Поглощается
- 3) Не поглощается и не выделяется
- 4) Недостаточно данных для ответа

235. Имеется 10^8 атомов радиоактивного изотопа йода ${}^{128}_{53}\text{I}$, период полураспада которого 25 мин. Какое количество ядер изотопа распадается за 50 мин?

- 1) $2,5 \cdot 10^7$
- 2) $7,5 \cdot 10^7$
- 3) $5 \cdot 10^7$
- 4) 10^8

236. Сколько α – и β – распадов должно произойти, чтобы ${}^{238}_{92}\text{U}$ превратился в стабильный изотоп свинца ${}^{207}_{82}\text{Pb}$:

- 5) 6 α – распадов и 8 β – распадов;
- 6) 8 α – распадов и 6 β – распадов;
- 7) 9 α – распадов и 5 β – распадов;
- 8) 10 α – распадов и 4 β – распадов.

237. Испусканием ядер гелия обязательно сопровождается...

- 1) β^- – распад
- 2) К – захват
- 3) β^+ – распад
- 4) любой радиоактивный распад.

Критерии оценивания: правильность ответов

Правила оценивания:

Правильный ответ – 1 балл

Неправильный ответ, ответ с ошибкой – 0 баллов

Составил: Коршунов И.Г., д.ф.-м.н., профессор

ФГБОУ ВО «УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГОРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ФАКУЛЬТЕТ ГЕОЛОГИИ И ГЕОФИЗИКИ

Кафедра физики

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ

для экзамена

дисциплина **ФИЗИКА**

Теоретические вопросы для экзамена направлены на оценку знаний, умений и владений, формирующих компетенции ОК-7 и ПКД-2

1. Развитие представлений о природе света. Закон отражения. Закон преломления. Современные представления о природе света.
2. Интерференция света. Оптическая длина пути и оптическая разность хода. Условия усиления и ослабления света при интерференции.
3. Методы наблюдения интерференции света. Расчет интерференционной картины от двух источников.
4. Интерференция от тонкой плоскопараллельной пластинки (полосы равного наклона и равной толщины).
5. Интерференция от клинообразной пластинки.
6. Кольца Ньютона.
7. Дифракция света. Метод зон Френеля. Прямолинейное распространение света.
8. Дифракция Френеля на круглом отверстии.
9. Дифракция Френеля на диске.
10. Дифракция в параллельных лучах на одной узкой щели (дифракция Фраунгофера).
11. Дифракция Фраунгофера на дифракционной решетке.
12. Естественный и поляризованный свет. Поляроиды. Закон Малюса.
13. Поляризация света при отражении и преломлении. Закон Брюстера.
14. Двойное лучепреломление.
15. Поляроиды и поляризационные призмы. Призма Николя.
16. Двойкопреломляющие призмы. Дихроизм.
17. Вращение плоскости поляризации.
18. Тепловое излучение. Свойства теплового излучения.
19. Испускательная и поглощательная способности тел. Абсолютно черное тело.
20. Закон Кирхгофа. Следствия из закона Кирхгофа.
21. Закон Стефана – Больцмана. Закон смещения Вина.
22. Формула Релея - Джинса и ультрафиолетовая катастрофа. Формула Планка для теплового излучения.
23. Фотоны, их свойства: энергия, масса, импульс.
24. Фотоэффект. Внутренний. ВАХ для внешнего фотоэффекта.
25. Законы Столетова для внешнего фотоэффекта. Уравнение Эйнштейна для внешнего фотоэффекта.
26. Давление света. Опыты Лебедева. Квантовое и волновое объяснение давления све-

- та.
27. Диалектическое единство корпускулярных и волновых свойств электромагнитного излучения.
 28. Эффект Комптона.
 29. Спектры рентгеновских лучей. Закон Мозли
 30. Спектр атома водорода. Линейчатый спектр атома водорода. Обобщенная формула Бальмера.
 31. Опыты Резерфорда. Ядерная модель атома. Недостатки модели.
 32. Боровская теория атома водорода. Постулаты Бора. Радиус n -ой стационарной орбиты, скорость на этой орбите; полная энергия в водородоподобном атоме (выводы). Схема возможных энергий в атоме водорода.
 33. Гипотеза де Бройля о корпускулярно-волновом дуализме микрочастиц и подтверждение ее опытом. Волны де Бройля.
 34. Соотношение неопределенностей Гейзенберга для импульса и энергии.
 35. Волновая функция, ее статистический смысл и нормировка. Вероятностный подход к описанию микрочастиц.
 36. Уравнение Шредингера, содержащее и не содержащее время. Собственные волновые функции. Собственные значения энергии микрочастицы.
 37. Решение уравнения Шредингера для частиц в одномерной бесконечно глубокой потенциальной яме.
 38. Частица в одномерной бесконечно глубокой потенциальной яме. Нахождение вероятности нахождения микрочастицы в любой области этой потенциальной ямы.
Собственные значения энергии частицы. Граничные условия.
 39. Туннельный эффект
 40. Линейный гармонический осциллятор в квантовой механике
 41. Решение уравнения Шредингера для атома водорода. Основное состояние электрона для атома водорода.
 42. Квантовые числа электронов в атоме: главное, орбитальное, магнитное и магнитное спиновое квантовые числа и физические характеристики атома, которые определяются ими.
 43. Спин электрона. Схема энергетических уровней атома водорода. Спектр атома водорода. Правила отбора.
 44. Принцип Паули. Электронные оболочки. Периодическая система элементов Менделеева.
 45. Заряд, масса, размер атомного ядра. Состав ядра. Нуклоны. Изотопы. Радиус ядра. Ядерные силы.
 46. Дефект массы и энергия связи ядер. Удельная энергия связи.
 47. Естественная радиоактивность. Закон радиоактивного распада. Период полураспада. Активность препарата.
 48. Правило смещения при радиоактивном распаде. Виды радиоактивного распада (α ,-распад β -распад). Применение правил смещения.
 49. Ядерные реакции. Энергетический эффект ядерной реакции.
 50. Реакции деления тяжелых ядер.
 51. Реакции синтеза легких ядер.
 52. Цепные реакции деления.
 53. Радиоуглеродный метод датировки.

<i>Критерии оценивания:</i>	<i>Количество баллов</i>
Полнота ответа на вопрос	0-3
Последовательность ответа на вопрос	0-2
Степень использования и понимания теоретических (научных) источников	0-2
Демонстрация умения анализировать материал	0-1
Соблюдение норм литературной речи	0-1
Использование профессиональной лексики	0-1

Критерии оценки:

оценка «отлично» выставляется обучающемуся, если он набрал 9-10 баллов

оценка «хорошо» выставляется обучающемуся, если он набрал 7-8 баллов

оценка «удовлетворительно» выставляется обучающемуся, если он набрал 5-6 баллов

оценка «неудовлетворительно» выставляется обучающемуся, если он набрал 0-4 балла.

Автор: Коршунов И.Г., д.ф-м.н., профессор.

ЗАДАЧИ ПО ФИЗИКЕ С ГОРНО-ТЕХНИЧЕСКИМ УКЛОНОМ

для экзамена

дисциплина **ФИЗИКА**

**Задачи по физике с горно-техническим уклоном для экзамена направленные на
оценку знаний, умений и владений, формирующих компетенции ОК-7 и ПКД-2**

1. Расстояние между двумя щелями в опыте Юнга 1 мм, расстояние от щелей до экрана 3 м, расстояние между соседними интерференционными максимумами на экране 1,5 мм. Найти длину волны источника монохроматического света.
2. Оранжевые лучи с длиной волны 650 нм от двух когерентных источников, расстояние между которыми 120 мкм, падают на экран. Расстояние от источников до экрана 3,6 м. Найти расстояние между центрами соседних темных полос на экране.
3. Какую наименьшую толщину должна иметь пластинка, сделанная из материала с показателем преломления 1,54, чтобы при освещении ее лучами с длиной волны 750 нм, перпендикулярными к пластинке, она в отраженном свете казалась красной?
4. Между двумя плоскопараллельными пластинками лежит проволочка, отчего образовался воздушный клин. Пластинки освещаются светом с длиной волны 500 нм. Угол падения лучей 0° , длина пластинки 10 см. Расстояние между интерференционными полосами в отраженном свете 1,8 мм. Найти толщину проволочки.
5. Плосковыпуклая линза ($n=1,5$) с оптической силой 0,5 диоптрий выпуклой стороной лежит на стеклянной пластинке. Найти радиус пятого темного кольца Ньютона в проходящем свете ($\lambda=600$ нм).
6. Радиус кривизны плосковыпуклой линзы 4 м. Чему равна длина волны падающего света, если радиус 5-го светлого кольца Ньютона в отраженном свете равен 3,6 мм?
7. На щель шириной 0,2 мм падает нормально монохроматический свет с длиной волны 640 нм. Определить угол отклонения лучей, соответствующих первой светлой дифракционной полосе.
8. На пластинку со щелью падает нормально монохроматический свет. Угол отклонения лучей, соответствующих второму дифракционному минимуму, равен 1° . Сколько длин волн падающего света составляет ширина щели?
9. На щель шириной 0,05 мм падает нормально монохроматический свет ($\lambda=0,6$ мкм). Найти угол между первоначальным направлением пучка света и направлением на четвертую темную дифракционную полосу.
10. На дифракционную решетку нормально падает пучок света от разрядной трубки, наполненной гелием. На какую линию в спектре третьего порядка накладывается красная линия гелия с длиной волны 670 нм спектра второго порядка?
11. При освещении дифракционной решетки белым светом спектры второго и третьего порядка накладываются друг на друга. На какую длину волны в спектре второго порядка накладывается фиолетовая граница (400 нм) спектра третьего порядка?

12. На дифракционную решетку, имеющую 800 штрихов на 1 мм, падает параллельный пучок белого света. Какова разность углов отклонения конца первого и начала второго спектров? Принять длину волны красного света 760 нм, фиолетового 400 нм.
13. На дифракционную решетку, содержащую 50 штрихов на миллиметр, падает в направлении нормали к ее поверхности белый свет. Спектр проектируется на экран с помощью линзы, помещенной вблизи решетки. Определить длину спектра первого порядка на экране, если расстояние от линзы до экрана 3 м. Границы видимого спектра 400 нм и 760 нм.
14. Угол преломления луча света в жидкости равен 35° . Определить показатель преломления этой жидкости, если отраженный луч максимально поляризован.
15. Под каким углом к горизонту должно находиться Солнце, чтобы его лучи, отраженные от поверхности озера, были бы наиболее полно поляризованы.
16. Предельный угол полного внутреннего отражения луча на границе жидкости с воздухом равен 43° . Каков должен быть угол падения луча из воздуха на поверхность жидкости, чтобы отраженный луч был максимально поляризован?
17. Угол максимальной поляризации при отражении света от кристалла каменной соли равен 57° . Определить скорость распространения света в этом кристалле.
18. Угол между плоскостями поляризации двух призм Николя равен 45° . Во сколько раз уменьшится интенсивность света, прошедшего через николи, если этот угол увеличить до 60° ?
19. Температура «голубой» звезды $3 \cdot 10^4$ К. Определить интегральную интенсивность излучения и длину волны, соответствующую максимуму излучательной способности.
20. Приняв температуру поверхности Солнца равной 6000 К, определить энергию, излучаемую с одного квадратного метра за секунду и длину волны, соответствующую максимуму излучательной способности.
21. Поток энергии, излучаемой из смотрового окошка печи за секунду, равен 34 Вт. Найти температуру печи, если площадь отверстия 6 см^2 .
22. Средняя величина энергии, теряемой вследствие излучения с одного квадратного сантиметра поверхности Земли за минуту, равна 0,55 Дж. Какую температуру должно иметь абсолютно черное тело, излучающее такое же количество энергии?
23. Печь при температуре 1100 К посылает на измерительный прибор некоторое тепловое излучение. Какова должна быть температура печи, чтобы получаемое прибором излучение увеличилось в два, четыре и шестнадцать раз?
24. Максимальная лучеиспускательная способность абсолютность черного тела приходится на длину волны 800 нм. Какая мощность должна быть подведена к этому телу, поверхность которого 100 см^2 , чтобы поддерживать его при постоянной температуре.
25. Вследствие изменения температуры абсолютно черного тела, максимум испускательной способности сместился с 500 нм на 750 нм. Во сколько раз уменьшилась суммарная мощность излучения?
26. Какая доля энергии фотона израсходована на работу вырывания фотоэлектрона, если красная граница фотоэффекта равна 307 нм и кинетическая энергия фотоэлектрона 1 эВ?
27. Калий (работа выхода 2 эВ) освещается монохроматическим светом с длиной волны 509 нм. Определить максимально возможную кинетическую энергию фотоэлектронов.
28. Определить работу выхода электрона из цезия и серебра, если красная граница фотоэффекта у этих металлов составляет соответственно 660 нм и 260 нм.
29. Определить энергию, импульс и массу фотона, длина волны которого соответствует видимой части спектра с длиной волны 500 нм.
30. Определить давление света на стенки электрической стоваттной лампы. Колба лампы представляет собой сферический сосуд радиусом 5 см. Стенки лампы отражают 10 % падающего на них света. Считать, что вся потребляемая мощность идет на излучение.

31. На поверхность площадью 100 см^2 ежеминутно падает 63 Дж световой энергии. Найти величину светового давления, если поверхность полностью отражает все лучи и если полностью поглощает все лучи.
32. Давление света с длиной волны 600 нм на черную поверхность равно $2,2 \cdot 10^{-7} \text{ Н/м}^2$. Сколько фотонов падает на 1 см^2 за одну секунду?
33. Определить длину волны, соответствующую границе серии Бальмера для водорода. Выделить эту спектральную линию на схеме энергетических уровней атома водорода. Постоянная Ридберга равна $1,097 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}$.
34. Найти наибольшую и наименьшую длины волн в первой инфракрасной серии спектра водорода (серии Пашена). Начертить схему энергетических уровней атома водорода.
35. Атом водорода в основном состоянии поглотил квант света с длиной волны 121,5 нм. Определить радиус электронной орбиты возбужденного атома водорода.
36. Вычислить энергию фотона, испускаемого при переходе электрона в атоме водорода с третьего энергетического уровня на первый.
37. Определить длины волн де Бройля для электрона и протона, движущихся со скоростью 1000 км/с. Масса электрона $9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$, масса протона $1,67 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$.
38. Какую ускоряющую разность потенциалов должен пройти электрон, чтобы длина волны де Бройля была равна 0,10 нм?
39. Определить длину волны де Бройля для электрона, движущегося по круговой орбите атома водорода, находящегося в основном состоянии.
40. Электрон, движущийся со скоростью $6 \cdot 10^6 \text{ м/с}$, попадает в продольное ускоряющее однородное электрическое поле напряженностью 5 В/см. Какое расстояние должен пройти электрон в таком поле, чтобы его длина волны стала равной 0,10 нм?
41. Рассчитать дебройлевскую длину волны для протона с кинетической энергией, равной энергии покоя электрона 0,51 МэВ.
42. Найти коротковолновую границу непрерывного рентгеновского спектра, если известно, что уменьшение приложенного к рентгеновской трубке напряжения на 23 кВ увеличивает искомую длину волны в два раза.
43. Найти длину волны коротковолновой границы сплошного рентгеновского спектра, если скорость электронов, подлетающих к антикатоде трубки, составляет 0,85 скорости света.
44. Для определения постоянной Планка к рентгеновской трубке приложили напряжение 16 кВ и определили минимальную длину волны сплошного рентгеновского излучения ($\lambda_{\text{мин}} = 77,6 \text{ пм}$). Вычислить по этим данным постоянную Планка.
45. Частица в потенциальной яме шириной l находится в возбужденном состоянии ($n=2$). Вычислить вероятность нахождения частицы в крайней четверти ямы.
46. Частица в потенциальной яме находится в основном состоянии. Какова вероятность обнаружить частицу в крайней трети ямы?
47. В одномерной потенциальной яме шириной l находится электрон. Найти вероятность нахождения электрона на первом энергетическом уровне в интервале $l/4$, равноудаленном от стенок ямы.
48. Вычислить величину момента импульса L орбитального движения электрона, находящегося в атоме водорода в s-состоянии и в p-состоянии.
49. Частица в потенциальной яме шириной l находится в низшем возбужденном состоянии. Определить вероятность нахождения частицы в интервале $l/4$, равноудаленном от стенок ямы.
50. Определить возможные значения проекции момента импульса L_z орбитального движения электрона в атоме водорода на направление внешнего магнитного поля. Электрон находится в d-состоянии.
51. Электрон находится в одномерной прямоугольной потенциальной яме шириной l с бесконечно высокими стенками. Определить вероятность обнаружения электрона в средней трети ямы, если электрон находится в возбужденном состоянии ($n=3$).

52. Активность препарата пропорциональна числу ядер, распадающихся за секунду. Во сколько раз уменьшится активность препарата стронция ${}_{38}\text{Sr}^{90}$ через 100 лет? Период полураспада равен 28 лет.
53. Сколько β -частиц испускает в течение одного часа 1 мкг изотопа ${}_{11}\text{Na}^{24}$, период полураспада которого составляет 15 часов?
54. Препарат ${}_{92}\text{U}^{238}$ массой 1 г излучает $1,24 \cdot 10^4$ α -частиц в секунду. Найти период полураспада этого изотопа урана и активность препарата.
55. Найти число распадов за одну секунду в 1 г радия, период полураспада которого 1590 лет. Молярная масса радия 0,226 кг/моль.
56. Активность препарата пропорциональна числу ядер, распадающихся за одну секунду. Во сколько раз уменьшится активность иода ${}_{53}\text{I}^{124}$ спустя 12 суток? Период полураспада равен четырем суткам.
57. Сколько β -частиц испускается в течение суток при распаде изотопа фосфора ${}_{15}\text{P}^{32}$ массой 1 мкг? Период полураспада 14,3 суток.
58. Активность препарата уменьшилась в 256 раз. Сколько периодов полураспада составляет промежуток времени, за который произошло такое уменьшение активности?
59. За один год начальное количество радиоактивного вещества уменьшилось в три раза. Во сколько раз оно уменьшится за два года?
60. Какая доля начального количества радиоактивного вещества останется нераспавшейся через промежуток времени, равный двум периодам полураспада?
61. Дефект массы ядра ${}_{7}\text{N}^{15}$ равен 0,12396 а.е.м. Определить массу атома. ($m_{{}_1\text{H}}^1 = 1,00783$ а.е.м.; $m_{{}_0\text{n}}^1 = 1,00867$ а.е.м.).
62. Найти удельную энергию связи ядра ${}_{6}\text{C}^{12}$, если известно, что $m_{{}_1\text{H}}^1 = 1,00783$ а.е.м.; $m_{{}_0\text{n}}^1 = 1,00867$ а.е.м.; $m_{{}_{12}\text{C}}^6 = 12,00000$ а.е.м.
63. Рассчитать массу нейтрального атома, если ядро его состоит из трех протонов и двух нейтронов, а энергия связи ядра равна 26,3 Мэв. ($m_{{}_1\text{H}}^1 = 1,00783$ а.е.м.; $m_{{}_0\text{n}}^1 = 1,00867$ а.е.м.).
64. Определить энергию связи ядра изотопа кислорода ${}_{8}\text{O}^{16}$, если $m_{{}_1\text{H}}^1 = 1,00783$ а.е.м.; $m_{{}_0\text{n}}^1 = 1,00867$ а.е.м.; $m_{{}_8\text{O}}^{16} = 15,99491$ а.е.м.
65. Определить энергию связи, приходящуюся на один нуклон ядра атома ${}_{11}\text{Na}^{23}$, если $m_{{}_{11}\text{Na}}^{23} = 22,98977$ а.е.м.; $m_{{}_1\text{H}}^1 = 1,00783$ а.е.м.; $m_{{}_0\text{n}}^1 = 1,00867$ а.е.м.
66. Найти дефект массы, энергию связи и удельную энергию связи ядра ${}_{3}\text{Li}^7$, если известно, что $m_{{}_3\text{Li}}^7 = 7,01601$ а.е.м.; $m_{{}_1\text{H}}^1 = 1,00783$ а.е.м.; $m_{{}_0\text{n}}^1 = 1,00867$ а.е.м.
67. Энергия связи электрона с ядром невозбужденного атома водорода ${}_1\text{H}^1$ равна 13,6 эВ. Определить, насколько масса атома водорода меньше суммы масс свободных протона и электрона.
68. Вычислить дефект массы и энергию связи ядра ${}_{5}\text{B}^{11}$, если известны следующие массы: $m_{{}_5\text{B}}^{11} = 11,00931$ а.е.м.; $m_{{}_1\text{H}}^1 = 1,00783$ а.е.м.; $m_{{}_0\text{n}}^1 = 1,00867$ а.е.м.
69. Найти энергию, которую нужно затратить для отрыва нейтрона от ядра ${}_{11}\text{Na}^{23}$, если известны следующие массы: $m_{{}_0\text{n}}^1 = 1,00867$ а.е.м.; $m_{{}_{11}\text{Na}}^{23} = 22,98977$ а.е.м.; $m_{{}_{11}\text{Na}}^{22} = 21,99444$ а.е.м.
70. Найти энергию отрыва нейтрона от ядра ${}_{2}\text{He}^4$, если известны массы: $m_{{}_0\text{n}}^1 = 1,00867$ а.е.м.; $m_{{}_2\text{He}}^4 = 4,00260$ а.е.м.; $m_{{}_2\text{He}}^3 = 3,01603$ а.е.м.
71. Найти энергию, необходимую для удаления одного протона из ядра ${}_{8}\text{O}^{16}$ (${}_{8}\text{O}^{16} \rightarrow {}_{7}\text{N}^{15} + {}_1\text{H}^1$). $m_{{}_1\text{H}}^1 = 1,00783$ а.е.м.; $m_{{}_8\text{O}}^{16} = 15,99491$ а.е.м.; $m_{{}_7\text{N}}^{15} = 15,00011$ а.е.м.
72. Найти изменение массы при следующей ядерной реакции:
 ${}_{13}\text{Al}^{27} + {}_{2}\text{He}^4 \rightarrow {}_{15}\text{P}^{30} + {}_0\text{n}^1$, если $m_{{}_{13}\text{Al}}^{27} = 26,98154$ а.е.м.; $m_{{}_2\text{He}}^4 = 4,00260$ а.е.м.; $m_{{}_{15}\text{P}}^{30} = 29,97263$ а.е.м.; $m_{{}_0\text{n}}^1 = 1,00867$ а.е.м.
73. Вычислить энергетический эффект ядерной реакции: ${}_1\text{H}^2 + {}_1\text{H}^3 \rightarrow {}_{2}\text{He}^4 + {}_0\text{n}^1$, если $m_{{}_1\text{H}}^2 = 2,01410$ а.е.м.; $m_{{}_1\text{H}}^3 = 3,01605$ а.е.м.; $m_{{}_0\text{n}}^1 = 1,00867$ а.е.м.; $m_{{}_2\text{He}}^4 = 4,00260$ а.е.м.

74. В термоядерном реакторе с дейтериевым горючим может происходить вторичная термоядерная реакция ${}^3_2\text{He} + {}^2_1\text{H} \rightarrow {}^4_2\text{He} + {}^1_1\text{H}$. Вычислить энергию этой реакции. ($m_{{}^3_2\text{He}} = 3,01603$ а.е.м.; $m_{{}^2_1\text{H}} = 2,01410$ а.е.м.; $m_{{}^4_2\text{He}} = 4,00260$ а.е.м.; $m_{{}^1_1\text{H}} = 1,00783$ а.е.м.).
75. Вычислить энергию ядерной реакции ${}^{14}_7\text{N} + {}^1_0\text{n} \rightarrow {}^{14}_6\text{C} + {}^1_1\text{H}$. ($m_{{}^{14}_7\text{N}} = 14,00307$ а.е.м.; $m_{{}^1_0\text{n}} = 1,00867$ а.е.м.; $m_{{}^{14}_6\text{C}} = 14,00324$ а.е.м.; $m_{{}^1_1\text{H}} = 1,00783$ а.е.м.).
76. Определить энергию ядерной реакции ${}^6_3\text{Li} + {}^2_1\text{H} \rightarrow {}^4_2\text{He} + {}^4_2\text{He}$. ($m_{{}^6_3\text{Li}} = 6,01513$ а.е.м.; $m_{{}^2_1\text{H}} = 2,01410$ а.е.м.; $m_{{}^4_2\text{He}} = 4,00260$ а.е.м.).
77. Какую минимальную энергию должен иметь квант для вырывания нейтрона из ядра ${}^{14}_6\text{C}$? Известны массы: $m_{{}^{14}_6\text{C}} = 14,00324$ а.е.м.; $m_{{}^1_0\text{n}} = 1,00867$ а.е.м.; $m_{{}^{13}_6\text{C}} = 13,00335$ а.е.м.
78. Какую минимальную энергию необходимо затратить, чтобы разделить ${}^{12}_6\text{C}$ на три равные части. ($m_{{}^{12}_6\text{C}} = 12,00000$ а.е.м.; $m_{{}^4_2\text{He}} = 4,00260$ а.е.м.).
79. Определить энергию ядерной реакции ${}^{44}_{20}\text{Ca} + {}^1_1\text{H} \rightarrow {}^{41}_{19}\text{K} + 2{}^4_2\text{He}$. ($m_{{}^{44}_{20}\text{Ca}} = 43,95549$ а.е.м.; $m_{{}^1_1\text{H}} = 1,00783$ а.е.м.; $m_{{}^4_2\text{He}} = 4,00260$ а.е.м.; $m_{{}^{41}_{19}\text{K}} = 40,96184$ а.е.м.)

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»



МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по выполнению контрольной работы
задачи и вопросы часть II

Окислительно-восстановительные реакции

Б1.О.14 ХИМИЯ

Специальность
21.05.04 Горное дело

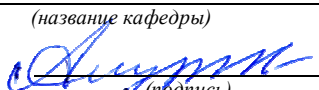
Направленность (профиль) подготовки
Горные машины и оборудование

Форма обучения: **очная, заочная**

Год набора: **2022**

Автор: **Зайцева Н. А.**, к.х.н., доцент

Одобрены на заседании кафедры

Химии
(название кафедры)
Зав.кафедрой 
(подпись)
Амдур А. М.
(Фамилия И.О.)
Протокол № 1 от 16.09.2021
(Дата)

Рассмотрены методической комиссией
факультета

Горно-механического
(название факультета)
Председатель 
(подпись)
Осипов П. А.
(Фамилия И.О.)
Протокол № 2 от 12.10.2021
(Дата)

Екатеринбург

ОГЛАВЛЕНИЕ

1 Степени окисления элементов. Окислители и восстановители.....	6
2. Классификация окислительно-восстановительных реакций.....	8
3. Составление уравнений окислительно-восстановительных реакций. Метод электронного баланса.....	10
4. Составление уравнений окислительно-восстановительных реакций. Метод электронно - ионного баланса (метод полуреакций).....	13
5. Направление протекания окислительно-восстановительных реакций.....	22
Список литературы.....	20

Окислительно-восстановительными реакциями (ОВР) называют реакции, протекающие с изменением степени окисления элементов.

1. Степени окисления элементов. Окислители и восстановители.

Степень окисления – условный заряд атома, рассчитанный из предположения, что все связи в соединении ионные.

Правила вычисления степени окисления:

1. Сумма степеней окисления всех атомов, входящих в молекулу равно нулю, а всех атомов, составляющих сложный ион – заряду иона.

2. Степень окисления атома в простом веществе равна нулю.

3. Некоторые элементы имеют в соединениях постоянную степень окисления:

Фтор – только -1

Щелочные металлы (Na, K, Li, Rb, Cs) – только $+1$

Щелочноземельные металлы (Ca, Sr, Ba), Zn, Mg, Be - только $+2$

Алюминий – только $+3$.

4. Водород почти во всех соединениях имеет степень окисления $+1$. Исключение составляют гидриды металлов (NaH , CaH_2 и др.), где степень окисления водорода отрицательна (-1). Кислород почти во всех соединениях имеет степень окисления -2 . Исключение составляют фторид кислорода OF_2 , (степень окисления кислорода $+1$) и пероксиды H_2O_2 , Na_2O_2 и т.д. (степень окисления кислорода -1).

5. Максимальная положительная степень окисления элемента обычно совпадает с номером его группы в периодической системе. Максимальная отрицательная степень окисления элемента равна максимальной положительной степени окисления минус восемь. Исключение составляют фтор, кислород, железо: их высшая степень окисления выражается числом, значение которого ниже, чем номер группы, к которой они относятся. У элементов подгруппы меди, наоборот, высшая степень окисления больше единицы, хотя они и относятся к I группе.

Во время ОВР происходит обмен электронами: окислитель присоединяет электроны (сам при этом восстанавливается), восстановитель отдает электроны

(сам при этом окисляется). Окисление всегда сопровождается восстановлением и наоборот. Число электронов, отдаваемых восстановителем, всегда равно числу электронов, принимаемых окислителем.

Важнейшими окислителями и восстановителями могут быть как простые, так и сложные вещества. Так как окислитель содержит в своем составе элемент, понижающий степень окисления, а восстановитель содержит элемент, степень окисления которого повышается в ходе реакции, окислителями могут быть прежде всего соединения высших ступеней окисления, а восстановителями - низших степеней окисления, присущих данному элементу.

Из простых веществ сильными окислителями являются неметаллы верхней части VI и VII групп периодической системы, за счёт высокой электроотрицательности их атомов. Сильнее всего окислительные свойства выражены у фтора F_2 , но в практике чаще пользуются в качестве окислителей кислородом O_2 , озоном O_3 , хлором Cl_2 и бромом Br_2 . К простым веществам – восстановителям относятся водород H_2 , углерод C и металлы, из которых на практике чаще применяют алюминий, магний, натрий и цинк.

Из сложных веществ в лабораторной практике наиболее часто используются следующие окислители: перманганат калия $KMnO_4$; дихромат калия $K_2Cr_2O_7$; растворы азотной кислоты HNO_3 различных концентраций; концентрированная серная кислота H_2SO_4 ; пероксид (перекись) водорода; оксиды марганца (IV) MnO_2 , и свинца (IV) PbO_2 ; смесь концентрированных азотной и соляной кислот (1:3, «царская водка»), хлорная кислота $HClO_4$.

Из сложных веществ в лабораторной практике наиболее часто используются следующие восстановители: иодид калия KI ; сульфит натрия Na_2SO_3 ; сульфид натрия Na_2S и сероводород H_2S ; хлорид олова $SnCl_2$, монооксид углерода (угарный газ) аммиак NH_3 .

Некоторые из этих веществ проявляют как окислительные, так и восстановительные свойства в зависимости от ОВР: CO , H_2O_2 , MnO_2 , так как содержат элемент в промежуточной степени окисления.

Вопросы для самостоятельной работы

1. Определите степени окисления всех элементов, входящих в состав следующих веществ:

Номер варианта	Вещества	Номер варианта	Вещества
1	MnO ₂ , CH ₄ , Cl ₂ , KMnO ₄	11	HF, Zn, H ₃ PO ₄ , NH ₄ Cl
2	H ₂ O ₂ , H ₂ SO ₄ , I ₂ , K ₂ Cr ₂ O ₇	12	H ₂ SO ₃ , NaH ₂ SbO ₃ , Au, ZnCl ₂
3	NaH, F ₂ , K ₂ HPO ₄ , N ₂ H ₄	13	NH ₄ HS, P, C ₆ H ₆ , Ba(ClO ₄) ₂
4	OF ₂ , C ₂ H ₆ , O ₂ , K ₂ MnO ₄	14	NaNO ₂ , Ca(HS) ₂ , Ag, PH ₃
5	CaH ₂ , C ₂ H ₄ , Br ₂ , Fe ₂ (SO ₄) ₃	15	BaCO ₃ , AsH ₃ , Ca, Na ₃ SbO ₄
6	PbO ₂ , C ₂ H ₂ , O ₃ , MnOHNO ₃	16	HNO ₃ , Xe, KClO ₄ , NH ₄ OH
7	Na ₂ O ₂ , N ₂ , H ₂ O, K ₂ SiO ₃	17	Sn(OH) ₂ , CuCl ₂ , K ₂ S, Mn
8	H ₂ S, Mg, Na ₃ SbO ₃ , Cr(OH) ₃	18	Al ₂ S ₃ , Na ₂ SO ₃ , NaClO, Se
9	Na ₂ S, NH ₃ , H ₂ , KHCO ₃	19	NaClO ₂ , Al ₄ C ₃ , He, Bi(NO ₃) ₃ ,
10	AlP, CO, HCl, NH ₄ NO ₃	20	NaHSO ₃ , Si, Na ₃ AsO ₃ , Cr(OH) ₃

2. В каких из перечисленных соединений хлор может проявлять только окислительные свойства: NaCl, NaClO, HCl, KClO₃, NaClO₄, Cl₂O₇, HClO₂ ?

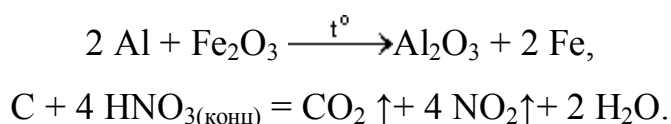
3. В каких из перечисленных соединений азот может проявлять только восстановительные свойства: NaNO₂, NO, N₂O₃, N₂H₄, N₂O, HNO₃, N₂O₅, NH₄NO₃, NH₃, NH₄Cl?

4. В каких из перечисленных соединений сера может быть как окислителем, так и восстановителем: H₂SO₄, Ca(HS)₂, H₂S, Na₂SO₃, Na₂S, SO₂, Na₂S₂O₃, SO₃, SO?

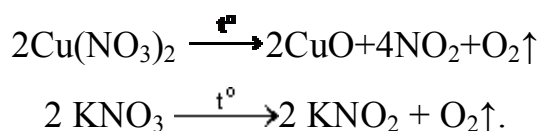
2. Классификация окислительно–восстановительных реакций

Окислительно-восстановительные реакции обычно разделяют на три типа: межмолекулярные, внутримолекулярные и реакции диспропорционирования (самоокисления-самовосстановления). Иногда в эту классификацию добавляют четвертый тип – реакции конпропорционирования.

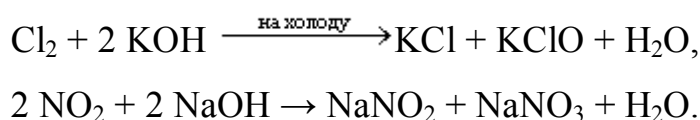
1) Межмолекулярные реакции протекают с изменением степени окисления атомов, которые находятся в различных молекулах. Например:



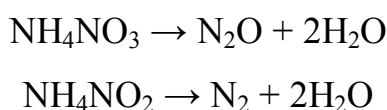
2) К внутримолекулярным реакциям относятся такие реакции, в которых окислитель и восстановитель входят в состав одной и той же молекулы, например:



3) В реакциях диспропорционирования (самоокисления-самовосстановления) один и тот же элемент является и окислителем, и восстановителем:



4) В реакциях конпропорционирования один и тот же химический элемент, имеющий разные степени окисления, в результате приводится к единой степени окисления:



Вопросы для самостоятельной работы

1. Какие из перечисленных веществ могут вступать в реакции диспропорционирования: HNO_3 , HNO_2 , H_2SO_4 , NH_4NO_3 , Br_2 , H_2O_2 , CaH_2 ?

2. Приведите пример реакции межмолекулярного конпропорционирования.

3. Является ли реакция разложения перманганата калия реакцией диспропорционирования? Реакцией конпропорционирования?



3. Составление уравнений окислительно-восстановительных реакций.

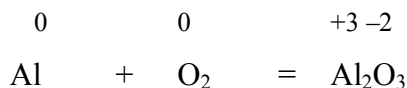
Метод электронного баланса

Для составления уравнений ОВР используются два метода: метод электронного баланса и метод полуреакций (электронно-ионного баланса). При использовании любого из этих методов прежде всего необходимо определить окислитель и восстановитель, рассчитав степени окисления всех элементов в левой и правой частях уравнения. Затем записать отдельно процесс окисления и процесс восстановления, соблюдая принцип электронного баланса: число электронов, отданных восстановителем, должно быть равно числу электронов, принятых окислителем.

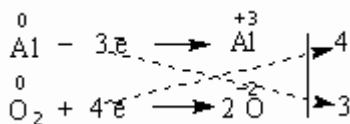
Метод электронного баланса универсален, он позволяет определить коэффициенты в реакциях, протекающих как в растворах, так и без растворителя, в веществах в любых агрегатных состояниях. Он удобен для написания реакций термического разложения, взаимодействия двух простых веществ

Пример 1. $\text{Al} + \text{O}_2 \rightarrow \text{Al}_2\text{O}_3$

Определим степени окисления:

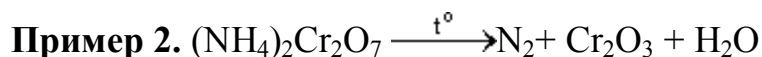
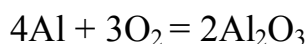


Алюминий отдает электроны (приобретает положительную степень окисления), а кислород – принимает электроны (приобретает отрицательную степень окисления). Чтобы получить степень окисления +3, атом алюминия должен отдать 3 электрона. Молекула кислорода, чтобы превратиться в кислородные атомы со степенью окисления –2, должна принять 4 электрона:

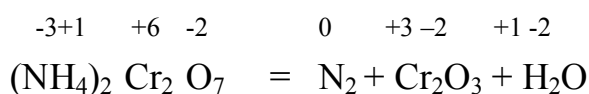


Чтобы количество отданных и принятых электронов выровнялось, первое уравнение надо умножить на 4, а второе – на 3. Для этого достаточно переместить числа отданных и принятых электронов против верхней и нижней строчки так, как показано на схеме вверху.

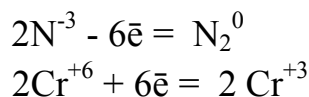
Если теперь в уравнении перед восстановителем (Al) мы поставим найденный нами коэффициент 4, а перед окислителем (O₂) – найденный нами коэффициент 3, то количество отданных и принятых электронов выравнивается и становится равным 12. Электронный баланс достигнут. Видно, что перед продуктом реакции Al₂O₃ необходим коэффициент 2. Теперь уравнение окислительно-восстановительной реакции уравнено:



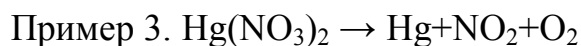
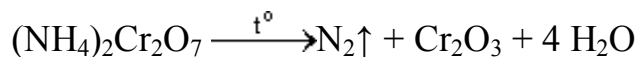
Определим степени окисления:



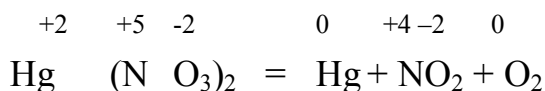
Азот отдаёт электроны, хром получает.



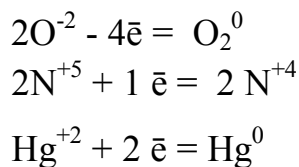
Число электронов отданных и принятых одинаково, электронный баланс достигнут. Видно, что перед продуктом реакции H₂O необходим коэффициент 4. Теперь уравнение окислительно-восстановительной реакции уравнено:



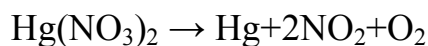
Определим степени окисления:



Кислород отдаёт электроны, ртуть и азот получают, здесь вместо привычных двух участников обмена электронами их сразу три:



Число электронов отданных и принятых одинаково, электронный баланс достигнут. Видно, что перед продуктом реакции NO₂ необходим коэффициент 2. Теперь уравнение окислительно-восстановительной реакции уравнено:



Задания для самостоятельной работы

1. Расставьте коэффициенты уравнениях реакций разложения методом электронного баланса (по вариантам). Укажите окислитель и восстановитель:

Номер варианта	Схема реакции	Номер варианта	Схема реакции
1	$\text{Mn}(\text{NO}_3)_2 \rightarrow \text{MnO}_2 + \text{NO}_2$	11	$\text{BaO}_2 \rightarrow \text{BaO} + \text{O}_2$
2	$\text{K}_2\text{MnO}_4 \rightarrow \text{K}_2\text{MnO}_4 + \text{MnO}_2 + \text{O}_2$	12	$\text{AgNO}_3 \rightarrow \text{Ag} + \text{NO}_2 + \text{O}_2$
3	$\text{Zn}(\text{NO}_3)_2 \rightarrow \text{ZnO} + \text{NO}_2 + \text{O}_2$	13	$\text{FeSO}_4 \rightarrow \text{Fe}_2\text{O}_3 + \text{SO}_2 + \text{SO}_3$
4	$\text{K}_2\text{Cr}_2\text{O}_7 \rightarrow \text{O}_2 + \text{Cr}_2\text{O}_3 + \text{K}_2\text{CrO}_4$	14	$\text{KClO}_4 \rightarrow \text{KCl} + \text{O}_2$
5	$\text{Fe}(\text{NO}_3)_2 \rightarrow \text{Fe}_2\text{O}_3 + \text{NO}_2 + \text{O}_2$	15	$\text{CdSO}_3 \rightarrow \text{CdSO}_4 + \text{CdS}$
6	$\text{KMnO}_4 \rightarrow \text{K}_2\text{MnO}_4 + \text{MnO}_2 + \text{O}_2$	16	$\text{HNO}_3 \rightarrow \text{H}_2\text{O} + \text{NO}_2 + \text{O}_2$
7	$\text{Fe}(\text{NO}_3)_2 \rightarrow \text{Fe}_2\text{O}_3 + \text{NO}_2 + \text{O}_2$	17	$\text{NaClO}_2 \rightarrow \text{NaClO}_3 + \text{NaCl}$
8	$\text{HNO}_2 \rightarrow \text{NO} + \text{NO}_2 + \text{H}_2\text{O}$	18	$\text{KClO}_3 \rightarrow \text{KCl} + \text{O}_2$
9	$\text{Co}(\text{NO}_3)_2 \rightarrow \text{CoO} + \text{NO}_2 + \text{O}_2$	19	$\text{SnSO}_4 \rightarrow \text{SnO}_2 + \text{SO}_2$
10	$\text{LiNO}_3 \rightarrow \text{Li}_2\text{O} + \text{NO}_2 + \text{O}_2$	20	$\text{Ni}(\text{NO}_3)_2 \rightarrow \text{Ni}(\text{NO}_2)_2 + \text{O}_2$

2. Расставьте коэффициенты уравнениях реакций замещения методом электронного баланса (по вариантам). Укажите окислитель и восстановитель:

Номер варианта	Схема реакции	Номер варианта	Схема реакции
1	$\text{Fe}_2\text{O}_3 + \text{C} \rightarrow \text{CO}_2 + \text{Fe}$	11	$\text{Zn} + \text{AgNO}_3 \rightarrow \text{Zn}(\text{NO}_3)_2 + \text{Ag}$
2	$\text{KBr} + \text{Cl}_2 \rightarrow \text{KCl} + \text{Br}_2$	12	$\text{Al}_2\text{O}_3 + \text{Mg} \rightarrow \text{MgO} + \text{Al}$
3	$\text{Fe}_2\text{O}_3 + \text{H}_2 \rightarrow \text{H}_2\text{O} + \text{Fe}$	13	$\text{MnO}_2 + \text{Al} \rightarrow \text{Al}_2\text{O}_3 + \text{Mn}$
4	$\text{Al} + \text{H}_2\text{SO}_4 \rightarrow \text{Al}_2(\text{SO}_4)_3 + \text{H}_2$	14	$\text{H}_2\text{S} + \text{Br}_2 \rightarrow \text{S} + \text{HBr}$
5	$\text{O}_2 + \text{HI} \rightarrow \text{H}_2\text{O} + \text{I}_2$	15	$\text{CuCl}_2 + \text{Cr} \rightarrow \text{Cu} + \text{CrCl}_3$
6	$\text{Al} + \text{CuSO}_4 \rightarrow \text{Al}_2(\text{SO}_4)_3 + \text{Cu}$	16	$\text{Mg} + \text{SiO}_2 \rightarrow \text{MgO} + \text{Si}$
7	$\text{Ca} + \text{H}_2\text{O} \rightarrow \text{H}_2 + \text{Ca}(\text{OH})_2$	17	$\text{NaI} + \text{Cl}_2 \rightarrow \text{NaCl} + \text{I}_2$
8	$\text{TiO}_2 + \text{Mg} \rightarrow \text{MgO} + \text{Ti}$	18	$\text{Na} + \text{H}_2\text{O} \rightarrow \text{H}_2 + \text{NaOH}$
9	$\text{Al} + \text{FeO} \rightarrow \text{Al}_2\text{O}_3 + \text{Fe}$	19	$\text{KClO}_3 + \text{I}_2 \rightarrow \text{KIO}_3 + \text{Cl}_2$
10	$\text{KI} + \text{Br}_2 \rightarrow \text{KBr} + \text{I}_2$	20	$\text{Al} + \text{H}_2\text{O} \rightarrow \text{Al}(\text{OH})_3 + \text{H}_2$

4. Составление уравнений окислительно-восстановительных реакций.

Метод электронно - ионного баланса (метод полуреакций).

Метод полуреакций применим преимущественно для реакций в растворах, зато он позволяет определить коэффициенты не только у окислителя и восстановителя, но и вещества, определяющего среду раствора (кислота, щёлочь, вода), и более удобен для тех реакций, где участвуют органические молекулы. От метода электронного баланса он отличается тем, что окисление и восстановление записывают не для отдельных атомов, а для частиц, реально присутствующих в растворе: катионов, анионов, молекул. Сильные электролиты записываются в виде ионов, слабые электролиты, газы, нерастворимые вещества – в виде молекул. Для материального баланса по кислороду и водороду используются ионы H^+ или OH^- и молекулы воды. При использовании этого метода, кроме алгоритма составления полуреакций, необходимо придерживаться нескольких правил:

1. В кислой среде ни в левой, ни в правой части не должно быть ионов OH^- . Уравнивание осуществляется за счет ионов H^+ и молекул воды.
2. В щелочной среде ни в левой, ни в правой части не должно быть ионов H^+ . Уравнивание осуществляется за счет ионов OH^- и молекул воды.
3. В нейтральной среде ни ионов H^+ , ни OH^- в левой части быть не должно. Однако в правой части среди продуктов реакции они могут появиться.

Алгоритм подбора коэффициентов в уравнениях ОВР методом ионно-электронного баланса:

1. Составить молекулярную схему реакции с указанием исходных веществ и продуктов реакции.
2. Составить полную ионно-молекулярную схему реакции, записывая слабые электролиты, малорастворимые, нерастворимые и газообразные вещества в молекулярном виде, а сильные электролиты – в ионном.
3. Исключив из ионно-молекулярной схемы ионы, не изменяющиеся в результате реакции (без учета их количества), переписать схему в кратком ионно-молекулярном виде.

4. Отметить элементы, изменяющие в результате реакции степень окисления; найти окислитель, восстановитель, продукты восстановления, окисления.

5. Составить схемы полуреакций окисления и восстановления, для этого:

а) указать восстановитель и продукт окисления, окислитель и продукт восстановления;

б) уравнивать число атомов каждого элемента в левой и правой частях полуреакций (выполнить баланс по элементам) в последовательности: элемент, изменяющий степень окисления, кислород, другие элементы; при этом следует помнить, что в водных растворах в реакциях могут участвовать молекулы H_2O , ионы H^+ или OH^- в зависимости от характера среды:

Процесс	Кислая среда	Нейтральная среда	Щелочная среда
Связывание избытка кислорода	$\text{O}^{2-} + 2\text{H}^+ = \text{H}_2\text{O}$	$\text{O}^{2-} + \text{H}_2\text{O} = 2\text{OH}^-$	$\text{O}^{2-} + \text{H}_2\text{O} = 2\text{OH}^-$
Восполнение недостатка кислорода	$\text{H}_2\text{O} = \text{O}^{2-} + 2\text{H}^+$	$\text{H}_2\text{O} = \text{O}^{2-} + 2\text{H}^+$	$2\text{OH}^- = \text{O}^{2-} + \text{H}_2\text{O}$

в) уравнивать суммарное число зарядов в обеих частях полуреакций; для этого прибавить или отнять в левой части полуреакций необходимое число электронов (баланс по зарядам).

6. Найти наименьшее общее кратное (НОК) для числа отданных и полученных электронов.

7. Найти основные коэффициенты при каждой полуреакции. Для этого полученное в п.6 число (НОК) разделить на число электронов, фигурирующих в данной полуреакции.

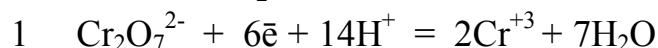
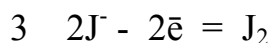
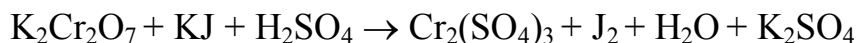
8. Умножить полуреакции на полученные основные коэффициенты, сложить их между собой: левую часть с левой, правую – с правой (получить ионно-молекулярное уравнение реакции). При необходимости “привести подобные” ионы с учетом взаимодействия между ионами водорода и гидроксид-ионами: $\text{H}^+ + \text{OH}^- = \text{H}_2\text{O}$.

9. Расставить коэффициенты в молекулярном уравнении реакции.

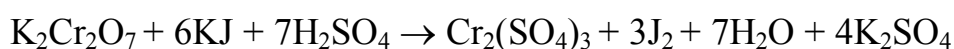
10. Провести проверку по частицам, не участвующим в ОВР, исключенным из полной ионно-молекулярной схемы (п.3). При необходимости коэффициенты для них находят подбором.

11. Провести окончательную проверку по кислороду.

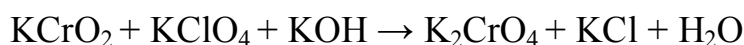
Пример 3. В кислой среде:



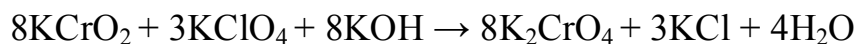
Суммарное молекулярное уравнение реакции:



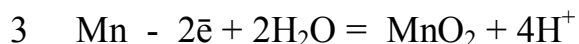
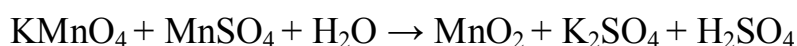
Пример 4. В щелочной среде:



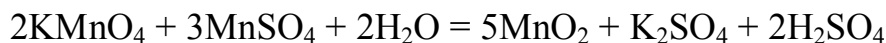
Суммарное молекулярное уравнение реакции



Пример 5. В нейтральной среде:



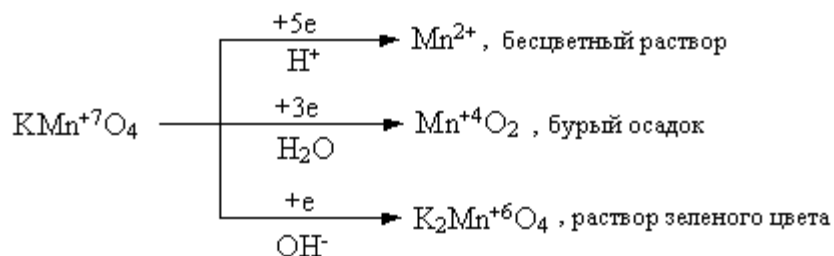
Суммарное молекулярное уравнение реакции:



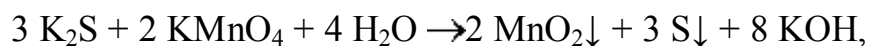
Примеры некоторых часто используемых ОВР:

1) Окислительно-восстановительные реакции с участием перманганата калия

В зависимости от среды (кислая, нейтральная, щелочная) перманганат калия, выступая в качестве окислителя, дает различные продукты восстановления:

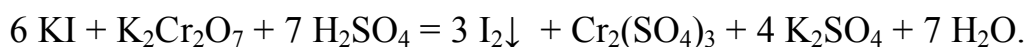
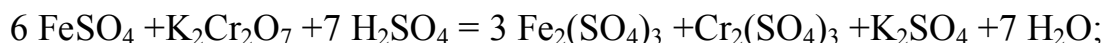


Ниже приведены реакции KMnO_4 с сульфидом калия в качестве восстановителя в различных средах. В этих реакциях продуктом окисления сульфид-иона является свободная сера. В щелочной среде молекулы KOH не принимают участие в реакции, а лишь определяют продукт восстановления перманганата калия.



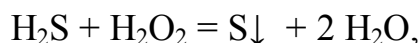
2) Окислительно-восстановительные реакции с участием дихромата калия

В кислой среде дихромат калия является сильным окислителем. Смесь $\text{K}_2\text{Cr}_2\text{O}_7$ и концентрированной H_2SO_4 (хромпик, хромовая смесь) широко используется в лабораторной практике в качестве окислителя. Взаимодействуя с восстановителем одна молекула дихромата калия принимает шесть электронов, образуя соединения трехвалентного хрома:

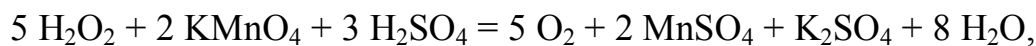


3) Окислительно-восстановительные реакции с участием пероксида водорода

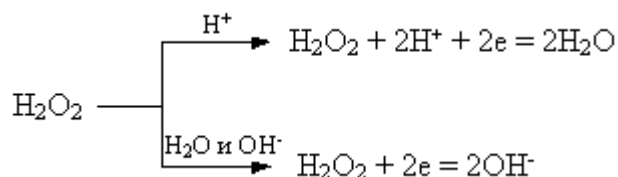
Пероксид водорода и нитрит калия проявляют преимущественно окислительные свойства:



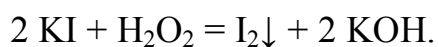
Однако, при взаимодействии с сильными окислителями (такими как, например, KMnO_4), пероксид водорода и нитрит калия выступают в качестве восстановителей:



Пероксид водорода в зависимости от среды восстанавливается по-разному:



При этом в результате реакций образуется вода или гидроксид-ионы:



Задания для самостоятельной работы

Расставьте коэффициенты уравнениях методом полуреакций. Укажите окислитель и восстановитель.

Вариант 1.

- 1) $\text{Zn} + \text{H}_2\text{SO}_{4(\text{конц.})} \rightarrow \text{ZnSO}_4 + \text{SO}_2\uparrow + \text{H}_2\text{O}$
- 2) $\text{Br}_2 + \text{KOH} \rightarrow \text{KBr} + \text{KBrO}_3 + \text{H}_2\text{O}$
- 3) $\text{K}_2\text{Cr}_2\text{O}_7 + \text{H}_2\text{SO}_4 + \text{H}_2\text{O}_2 \rightarrow \text{O}_2\uparrow + \text{Cr}_2(\text{SO}_4)_3 + \text{K}_2\text{SO}_4 + \text{H}_2\text{O}$
- 4) $\text{C}_3\text{H}_6 + \text{KMnO}_4 + \text{H}_2\text{O} \rightarrow \text{MnO}_2\downarrow + \text{C}_2\text{H}_6(\text{OH})_2 + \text{KOH}$

Вариант 2

- 1) $\text{Zn} + \text{H}_2\text{SO}_{4(\text{конц.})} \rightarrow \text{ZnSO}_4 + \text{S}\downarrow + \text{H}_2\text{O}$
- 2) $\text{S} + \text{KOH} \rightarrow \text{K}_2\text{S} + \text{K}_2\text{SO}_3 + \text{H}_2\text{O}.$
- 3) $\text{BaS} + \text{HNO}_{3(\text{конц.})} \rightarrow \text{Ba}(\text{NO}_3)_2 + \text{S}\downarrow + \text{NO}_2\uparrow + \text{H}_2\text{O}$
- 4) $\text{CH}_2=\text{C}(\text{CH}_3)_2 + \text{KMnO}_4 + \text{H}_2\text{SO}_4 \rightarrow \text{MnSO}_4 + \text{K}_2\text{SO}_4 + \text{CH}_3(\text{CO})\text{CH}_3 + \text{H}_2\text{O} + \text{CO}_2\uparrow$

Вариант 3

- 1) $\text{Zn} + \text{H}_2\text{SO}_{4(\text{конц.})} \rightarrow \text{ZnSO}_4 + \text{H}_2\text{S}\uparrow + \text{H}_2\text{O}$
- 2) $\text{NO}_2 + \text{NaOH} \rightarrow \text{NaNO}_2 + \text{NaNO}_3 + \text{H}_2\text{O}$
- 3) $\text{CrCl}_3 + \text{Cl}_2 + \text{H}_2\text{O} \rightarrow \text{K}_2\text{Cr}_2\text{O}_7 + \text{HCl}$
- 4) $\text{CH}_3\text{C}=\text{C}(\text{CH}_3)_2 + \text{KMnO}_4 + \text{H}_2\text{SO}_4 \rightarrow \text{MnSO}_4 + \text{K}_2\text{SO}_4 + \text{CH}_3(\text{CO})\text{CH}_3 + \text{H}_2\text{O} + \text{CH}_3\text{COOH}$

Вариант 4

- 1) $\text{Al} + \text{H}_2\text{SO}_{4(\text{конц., гор.})} \rightarrow \text{Al}_2(\text{SO}_4)_3 + \text{H}_2\text{S}\uparrow + \text{H}_2\text{O}$

- 2) $\text{AuCl}_3 + \text{H}_2\text{O}_2 + \text{KOH} \rightarrow \text{Au} + \text{H}_2\text{O} + \text{O}_2\uparrow + \text{KCl}$
- 3) $\text{KMnO}_4 + \text{Fe}(\text{OH})_2 + \text{H}_2\text{O} \rightarrow \text{MnO}_2\downarrow + \text{Fe}(\text{OH})_3\downarrow + \text{KOH}$
- 4) $\text{C}_5\text{H}_{10} + \text{KMnO}_4 + \text{H}_2\text{SO}_4 \rightarrow \text{MnSO}_4 + \text{K}_2\text{SO}_4 + \text{H}_2\text{O} + \text{C}_2\text{H}_5\text{COOH} + \text{CH}_3\text{COOH}$

Вариант 5

- 1) $\text{Ag} + \text{H}_2\text{SO}_{4(\text{конц., гор.})} \rightarrow \text{Ag}_2\text{SO}_4\downarrow + \text{SO}_2\uparrow + 2\text{H}_2\text{O}$
- 2) $\text{NH}_4\text{HS} + \text{HNO}_{3(\text{конц.})} \rightarrow \text{S}\downarrow + 2\text{NO}_2\uparrow + \text{NH}_4\text{NO}_3 + 2\text{H}_2\text{O}$
- 3) $\text{MnSO}_4 + \text{H}_2\text{O}_2 + \text{KOH} \rightarrow \text{MnO}_2\downarrow + \text{K}_2\text{SO}_4 + \text{H}_2\text{O}$
- 4) $\text{C}_6\text{H}_{12} + \text{KMnO}_4 + \text{H}_2\text{SO}_4 \rightarrow \text{MnSO}_4 + \text{K}_2\text{SO}_4 + \text{H}_2\text{O} + \text{C}_2\text{H}_5\text{COOH}$

Вариант 6

- 1) $\text{Bi} + \text{H}_2\text{SO}_4 \rightarrow \text{Bi}_2(\text{SO}_4)_3 + \text{SO}_2\uparrow + \text{H}_2\text{O}$
- 2) $\text{CuS} + \text{HNO}_3 \rightarrow \text{NO}_2\uparrow + \text{CuSO}_4 + \text{H}_2\text{O}$
- 3) $\text{C} + \text{H}_2\text{SO}_{4(\text{конц.})} + \text{K}_2\text{Cr}_2\text{O}_{7(\text{конц.})} \rightarrow \text{CO}_2\uparrow + \text{Cr}_2(\text{SO}_4)_3 + \text{K}_2\text{SO}_4 + \text{H}_2\text{O}$
- 4) $\text{HCOH} + \text{NaOH} + \text{I}_2 \rightarrow \text{HCOONa} + \text{NaI} + \text{H}_2\text{O}$

Вариант 7

- 1) $\text{Ag} + \text{HNO}_{3(\text{разб.})} \rightarrow \text{AgNO}_3 + \text{NO}\uparrow + \text{H}_2\text{O}$
- 2) $\text{Cr}_2(\text{SO}_4)_3 + \text{Br}_2 + \text{KOH} \rightarrow \text{K}_2\text{CrO}_4 + \text{KBr} + \text{K}_2\text{SO}_4 + \text{H}_2\text{O}$
- 3) $\text{Br}_2 + \text{S} + \text{H}_2\text{O} \rightarrow \text{H}_2\text{SO}_4 + \text{HBr}$
- 4) $\text{CH}_3\text{C}\equiv\text{CCH}_3 + \text{KMnO}_4 + \text{H}_2\text{SO}_4 \rightarrow \text{MnSO}_4 + \text{K}_2\text{SO}_4 + \text{CH}_3\text{COOH} + \text{H}_2\text{O}$

Вариант 8

- 1) $\text{Ba} + \text{HNO}_{3(\text{разб.})} \rightarrow \text{Ba}(\text{NO}_3)_2 + \text{N}_2\text{O}\uparrow + \text{H}_2\text{O}$
- 2) $\text{MnO}_2 + \text{HCl} \rightarrow \text{MnCl}_2 + \text{H}_2\text{O} + \text{Cl}_2\uparrow$
- 3) $\text{As}_2\text{O}_3 + \text{NaOH} + \text{NaNO}_3 \rightarrow \text{Na}_3\text{AsO}_4 + \text{NaNO}_2 + \text{H}_2\text{O}$
- 4) $\text{C}_6\text{H}_5\text{-CH}_3 + \text{KMnO}_4 \rightarrow \text{C}_6\text{H}_5\text{COOK} + \text{KOH} + \text{MnO}_2\downarrow + \text{H}_2\text{O}$

Вариант -9

- 1) $\text{Be} + \text{HNO}_{3(\text{разб., гор.})} \rightarrow \text{Be}(\text{NO}_3)_2 + \text{NO}\uparrow + \text{H}_2\text{O}$
- 2) $\text{P} + \text{H}_2\text{SO}_4 \rightarrow \text{H}_3\text{PO}_4 + \text{SO}_2\uparrow + \text{H}_2\text{O}$
- 3) $\text{Bi}(\text{NO}_3)_3 + \text{NaClO} + \text{NaOH}_{(\text{конц.})} \rightarrow \text{NaBiO}_3\downarrow + \text{NaNO}_3 + \text{NaCl} + \text{H}_2\text{O}$
- 4) $\text{C}_6\text{H}_5\text{-C}_2\text{H}_5 + \text{KMnO}_4 \rightarrow \text{C}_6\text{H}_5\text{COOK} + \text{K}_2\text{CO}_3 + \text{MnO}_2 + \text{H}_2\text{O}$

Вариант 10

- 1) $\text{Cd} + \text{HNO}_{3(\text{конц.})} \rightarrow \text{Cd}(\text{NO}_3)_2 + \text{NO}_2\uparrow + 2\text{H}_2\text{O}$
- 2) $\text{AlBr}_{3(\text{тв.})} + \text{H}_2\text{SO}_{4(\text{конц.})} \rightarrow \text{Al}_2(\text{SO}_4)_3 + \text{Br}_2 + \text{SO}_2\uparrow + \text{H}_2\text{O}$
- 3) $\text{AsH}_3 + \text{NaOH}_{(\text{разб.})} + \text{NaClO} \rightarrow \text{Na}_3\text{AsO}_4 + \text{NaCl} + \text{H}_2\text{O}$
- 4) $\text{C}_6\text{H}_5\text{-CH}_3 + \text{KMnO}_4 + \text{H}_2\text{SO}_4 \rightarrow \text{MnSO}_4 + \text{K}_2\text{SO}_4 + \text{C}_6\text{H}_5\text{-COOH} + \text{H}_2\text{O}$

Вариант 11

- 1) $\text{Ca} + \text{HNO}_{3(\text{разб.})} \rightarrow \text{Ca}(\text{NO}_3)_2 + \text{N}_2\text{O}\uparrow + \text{H}_2\text{O}$
- 2) $\text{NH}_4\text{I}_{(\text{тв.})} + \text{H}_2\text{SO}_{4(\text{конц.})} \rightarrow \text{I}_2\downarrow + \text{H}_2\text{S}\uparrow + \text{H}_2\text{O} + \text{NH}_4\text{HSO}_4$
- 3) $\text{Bi}(\text{OH})_3 + \text{KOH}_{(\text{конц.})} + \text{KMnO}_4 \rightarrow \text{KBiO}_3\downarrow + \text{K}_2\text{MnO}_4 + \text{H}_2\text{O}$
- 4) $\text{C}_6\text{H}_5\text{-CH}(\text{CH}_3)_2 + \text{KMnO}_4 + \text{H}_2\text{SO}_4 \rightarrow \text{MnSO}_4 + \text{K}_2\text{SO}_4 + \text{C}_6\text{H}_5\text{-COOH} + \text{H}_2\text{O} + \text{CO}_2\uparrow$

Вариант 12

- 1) $\text{Ba} + \text{HNO}_{3(\text{оч. разб.})} \rightarrow \text{Ba}(\text{NO}_3)_2 + \text{NH}_4\text{NO}_3 + \text{H}_2\text{O}$
- 2) $\text{Au}_2\text{S}_3 + \text{HNO}_{3(\text{конц.})} \rightarrow \text{Au}\downarrow + \text{H}_2\text{SO}_4 + \text{NO}_2\uparrow + \text{H}_2\text{O}$
- 3) $\text{HBrO}_3 + \text{H}_2\text{O} + \text{S} \rightarrow \text{HBr} + \text{H}_2\text{SO}_4$
- 4) $\text{C}_6\text{H}_5\text{-CH}_3 + \text{K}_2\text{Cr}_2\text{O}_4 + \text{H}_2\text{SO}_4 \rightarrow \text{Cr}_2(\text{SO}_4)_3 + \text{K}_2\text{SO}_4 + \text{C}_6\text{H}_5\text{-COOH} + \text{H}_2\text{O}$

Вариант 13

- 1) $\text{Bi} + \text{HNO}_{3(\text{разб.})} \rightarrow \text{Bi}(\text{NO}_3)_3 + \text{NO}\uparrow + \text{H}_2\text{O}$
- 2) $\text{PbO}_2 + \text{HCl} \rightarrow \text{PbCl}_2 + \text{Cl}_2 + \text{H}_2\text{O}$
- 3) $\text{AsH}_3 + \text{H}_2\text{O} + \text{AgNO}_3 \rightarrow \text{As}_2\text{O}_3\downarrow + \text{Ag}\downarrow + \text{HNO}_3$
- 4) $\text{CH}_3\equiv\text{CCH}_3 + \text{KMnO}_4 + \text{H}_2\text{SO}_4 \rightarrow \text{MnSO}_4 + \text{K}_2\text{SO}_4 + \text{CH}_3\text{COOH} + \text{H}_2\text{O} + \text{CO}_2$

Вариант 14

- 1) $\text{Cd} + \text{HNO}_{3(\text{конц.})} \rightarrow \text{Cd}(\text{NO}_3)_2 + \text{NO}_2\uparrow + \text{H}_2\text{O}$
- 2) $\text{C}_2\text{N}_2 + \text{KOH} \rightarrow \text{KCN} + \text{KCNO} + \text{H}_2\text{O}$
- 3) $\text{H}_2\text{SO}_3 + \text{I}_2 + \text{H}_2\text{O} \rightarrow \text{H}_2\text{SO}_4 + \text{HI}$
- 4) $\text{C}_4\text{H}_8 + \text{KMnO}_4 + \text{H}_2\text{SO}_4 \rightarrow \text{MnSO}_4 + \text{K}_2\text{SO}_4 + \text{CO}_2\uparrow + \text{H}_2\text{O} + \text{C}_2\text{H}_5\text{COOH}$

Вариант 15

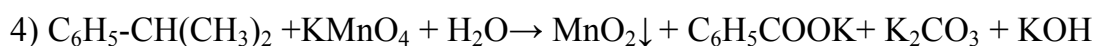
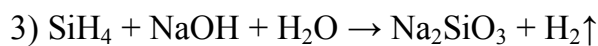
- 1) $\text{Cu} + \text{H}_2\text{SO}_4 \rightarrow \text{CuSO}_4 + \text{SO}_2\uparrow + \text{H}_2\text{O}$
- 2) $\text{AlP} + \text{HNO}_{3(\text{конц., гор.})} \rightarrow \text{Al}(\text{NO}_3)_3 + \text{H}_3\text{PO}_4 + \text{NO}_2\uparrow + \text{H}_2\text{O}$
- 3) $\text{Br}_2 + \text{SO}_2 + \text{H}_2\text{O} \rightarrow \text{HBr} + \text{H}_2\text{SO}_4$
- 4) $\text{C}_2\text{H}_4 + \text{KMnO}_4 + \text{H}_2\text{SO}_4 \rightarrow \text{MnSO}_4 + \text{K}_2\text{SO}_4 + \text{CO}_2\uparrow + \text{H}_2\text{O}$

Вариант 16

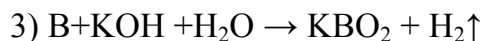
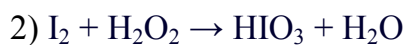
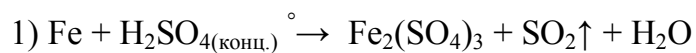
- 1) $\text{Cu} + \text{HNO}_3 \rightarrow \text{Cu}(\text{NO}_3)_2 + \text{NO} + \text{H}_2\text{O}$
- 2) $\text{H}_2\text{Cr}_2\text{O}_7 + \text{H}_2\text{O}_2 \rightarrow \text{H}_2\text{CrO}_6 + \text{H}_2\text{O}$
- 3) $\text{Si} + \text{NaOH} + \text{H}_2\text{O} \rightarrow \text{Na}_2\text{SiO}_3 + \text{H}_2\uparrow$
- 4) $\text{C}_2\text{H}_2 + \text{KMnO}_4 + \text{H}_2\text{SO}_4 \rightarrow \text{MnSO}_4 + \text{K}_2\text{SO}_4 + \text{CO}_2\uparrow + \text{H}_2\text{O}$

Вариант 17

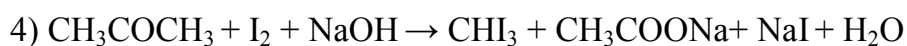
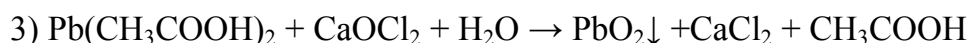
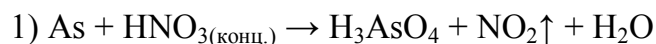
- 1) $\text{As} + \text{H}_2\text{SO}_{4(\text{конц., гор.})} \rightarrow \text{As}_2\text{O}_3\downarrow + \text{SO}_2\uparrow + \text{H}_2\text{O}$
- 2) $\text{B}_2\text{S}_3 + \text{HNO}_{3(\text{конц.})} \rightarrow \text{H}_3\text{BO}_3\downarrow + \text{H}_2\text{SO}_4 + \text{NO}_2\uparrow + \text{H}_2\text{O}$



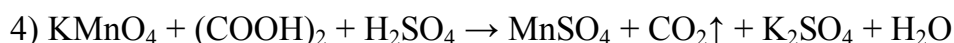
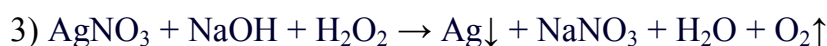
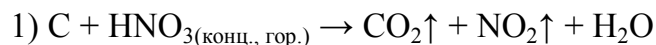
Вариант 18



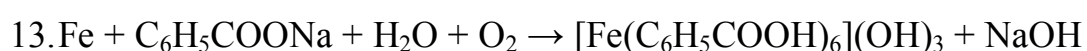
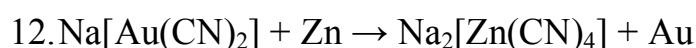
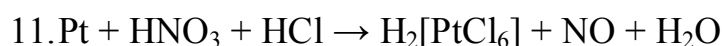
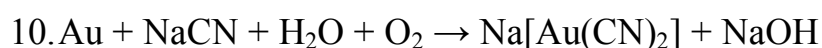
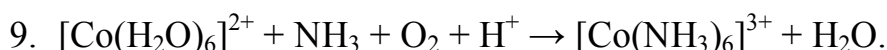
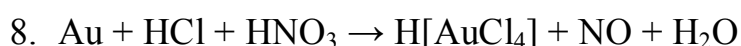
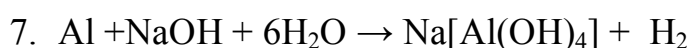
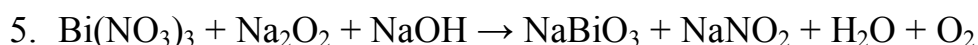
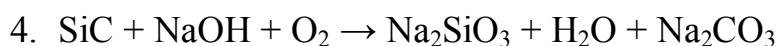
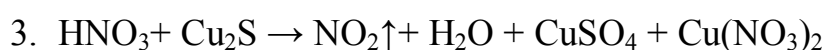
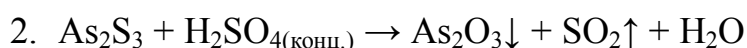
Вариант 19



Вариант 20

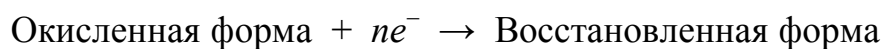


Дополнительные уравнения



Направление протекания окислительно-восстановительных реакций

Направление протекания ОВР в водном растворе устанавливается в стандартных условиях по значениям **стандартных потенциалов** φ° полуреакций восстановления:



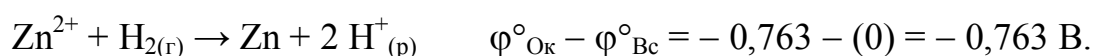
Окислительно-восстановительные реакции протекают самопроизвольно, если разность стандартных электродных потенциалов окислителя и восстановителя, или э.д.с. окислительно-восстановительной реакции $\Delta E > 0$.

Стандартные условия протекания реакции: температура 298,15 К, давление в системе при отсутствии газообразных реагентов или продуктов 1 атмосфера (101325 Па), парциальное давление каждого газообразного реагента или продукта при их наличии 1 атмосфера. Стандартная концентрация каждой окисленной и восстановленной формы в растворе 1 моль/л. Стандартные потенциалы измеряют по отношению к стандартному водородному электроду, потенциал которого условно принят равным нулю.

Если значение φ° для окислительно-восстановительной пары, отрицательное, например

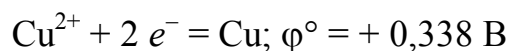


то реакция, в которой Zn^{2+} – окислитель и H_2 – восстановитель, характеризуется отрицательным значением разности стандартных потенциалов соответствующих пар.

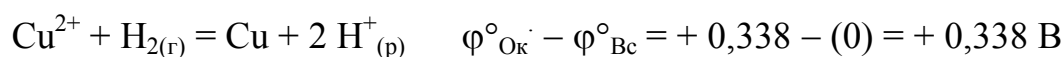


Направление ОВР определяет окислитель, у которого значение электродного потенциала больше. На практике самопроизвольно осуществляется обратный процесс: $\text{Zn} + 2\text{H}^+_{(\text{р})} \rightarrow \text{Zn}^{2+} + \text{H}_{2(\text{г})}$ $\varphi^\circ_{\text{Ок}} - \varphi^\circ_{\text{Вс}} = 0 - (-0,763) = +0,763 \text{ В}$

Для положительных значений φ° , например пары $\text{Cu}^{2+} / \text{Cu}$

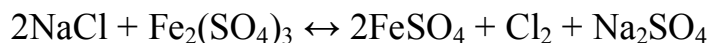


реакция



где $2\text{H}^+_{(\text{p})}$ – окислитель и H_2 – восстановитель, характеризуется положительным значением разности потенциалов, и может протекать самопроизвольно.

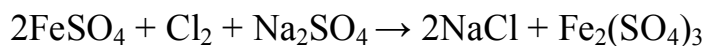
Пример 1. Установить, в каком направлении возможно самопроизвольное протекание реакции



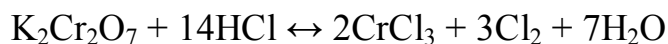
Запишем уравнения электронного баланса и стандартные электродные потенциалы электрохимических систем, участвующих в реакции :



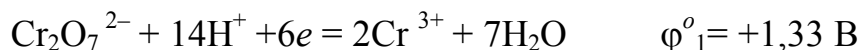
Поскольку $\varphi_1^\circ > \varphi_2^\circ$, то окислителем будет служить хлор, а восстановителем – ион Fe^{2+} ; рассматриваемая реакция будет протекать так:



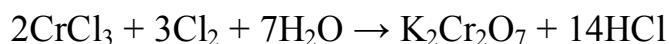
Пример 2. Установить, в каком направлении возможно самопроизвольное протекание реакции



Запишем уравнения электронно-ионного баланса и стандартные электродные потенциалы электрохимических систем, участвующих в реакции:



Поскольку $\varphi_2^\circ > \varphi_1^\circ$, то окислителем будет служить хлор, а восстановителем – бихромат-ион; рассматриваемая реакция будет протекать так::



В примере 1 стандартные электродные потенциалы взаимодействующих электрохимических систем существенно различались, так что направление протекания процесса однозначно определялось значениями φ° при любых концентрациях реагирующих веществ. В тех случаях, когда сравниваемые

значения φ^0 близки (разность не более 0,3 В), направление протекания процесса может изменяться в зависимости от концентраций участников реакции (пример 2).

Величина окислительно-восстановительного потенциала в условиях, отличающихся от стандартных, определяется уравнением Нернста:

$$\varphi = \varphi^0 + \frac{RT}{nF} \cdot \ln \frac{[Ox]}{[Red]},$$

где φ – окислительно-восстановительный потенциал в данных условиях, В;

φ^0 – стандартный окислительно-восстановительный потенциал, В;

R – универсальная газовая постоянная (8.314 Дж/(моль·К));

T – абсолютная температура, К;

n – число электронов, принимающих участие в потенциалоопределяющей полуреакции;

F – постоянная Фарадея ($F = 96484.56$ Кл/моль);

$[Ox]$ – концентрация окисленной формы ионов;

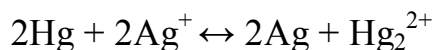
$[Red]$ – концентрация восстановленной формы ионов.

Концентрация твердой фазы принимается за единицу.

Для стандартной температуры 298 К и с переходом от натурального логарифма к десятичному уравнение Нернста будет иметь вид

$$\varphi = \varphi^0 + \frac{0,059}{n} \cdot \lg \frac{[Ox]}{[Red]},$$

Пример 3. Определить направление возможного самопроизвольного протекания реакции



при стандартной температуре и следующих концентрациях ионов:

а) $[\text{Ag}^+] = 10^{-4}$ моль/л, $[\text{Hg}_2^{2+}] = 10^{-1}$ моль/л;

б) $[\text{Ag}^+] = 10^{-1}$ моль/л, $[\text{Hg}_2^{2+}] = 10^{-4}$ моль/л.

Выпишем значения стандартных электродных потенциалов взаимодействующих электрохимических систем:



По уравнению Нернста вычислим значения электродных потенциалов при указанных в условиях задачи концентрациях.

$$\text{а) } \varphi_1 = \varphi_1^\circ + 0,059/2 \cdot \lg [\text{Hg}_2^{2+}] = 0,79 + 0,030 \lg 10^{-1} = 0,79 - 0,03 = 0,76 \text{ В};$$

$$\varphi_2 = \varphi_2^\circ + 0,059 \cdot \lg [\text{Ag}^+] = 0,80 + 0,059 \lg 10^{-4} = 0,80 - 0,24 = 0,56 \text{ В}.$$

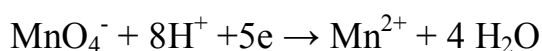
В данном случае $\varphi_1 > \varphi_2$, реакция будет протекать справа налево.

$$\text{б) } \varphi_1 = 0,79 + 0,030 \cdot \lg 10^{-4} = 0,79 - 0,12 = 0,67 \text{ В};$$

$$\varphi_2 = 0,80 + 0,059 \cdot \lg 10^{-1} = 0,80 - 0,06 = 0,74 \text{ В}.$$

Теперь $\varphi_1 < \varphi_2$, и реакция протекает слева направо.

Зависимость окислительной способности некоторых веществ от кислотности среды так же определяется уравнением Нернста. Например, для полуреакции



окислительно-восстановительный потенциал можно вычислить по формуле

$$\varphi = \varphi^\circ + \frac{0,059}{5} \cdot \lg \frac{[\text{MnO}_4^-] \cdot [\text{H}^+]^8}{[\text{Mn}^{2+}]}, \text{ или}$$

$$\varphi = 1,507 + 0,012 \cdot \lg \frac{[\text{MnO}_4^-]}{[\text{Mn}^{2+}]} - 0,095 \text{ pH}$$

Потенциалы процесса зависят от pH среды и будут тем больше, чем кислее раствор. Зависимость окислительного потенциала KMnO_4 от концентрации ионов водорода пользуются для фракционного окисления анионов галогенидов до свободных галогенов. При pH от 5 до 6 перманганат окисляет только йодиды до йода (не действуя на бромиды и хлориды), при pH = 3 окисляются бромиды, и только при значительно более высокой кислотности окисляются хлориды.

Задания для самостоятельной работы

Обоснуйте возможность самопроизвольного протекания реакций №1 вашего варианта на стр. 16-19, используя Приложение.

Приложение

Таблица 1

СТАНДАРТНЫЕ ЭЛЕКТРОДНЫЕ ПОТЕНЦИАЛЫ

Элемент	Реакция	E ⁰	Элемент	Реакция	E ⁰
Ag	$\alpha\text{-Ag}_2\text{S} + 2\bar{e} = 2\text{Ag} + \text{S}^{2-}$	-0,70	B	$\text{BF}_4^- + 3e = \text{B} + 4\text{F}^-$	-1,04
	$\text{Ag}(\text{CN})_2^- + \bar{e} = \text{Ag} + 2\text{CN}^-$	-0,29		$\text{H}_3\text{BO}_3 + 3\text{H}^+ + 3e = \text{B} + 3\text{H}_2\text{O}$	-0,869
	$\text{AgI} + \bar{e} = \text{Ag} + \text{I}^-$	-0,152		$\text{BO}_3^{3-} + 6\text{H}^+ + 3e = \text{B} + 3\text{H}_2\text{O}$	-0,165
	$\text{AgCN} + \bar{e} = \text{Ag} + \text{CN}^-$	-0,04	Ba	$\text{Ba}^{2+} + 2e = \text{Ba}$	-2,905
	$\text{Ag}(\text{S}_2\text{O}_3)_2^{3-} + \bar{e} = \text{Ag} + 2\text{S}_2\text{O}_3^{2-}$	0,01	Be	$\text{Be}^{2+} + 2e = \text{Be}$	-1,847
	$\text{AgBr} + \bar{e} = \text{Ag} + \text{Br}^-$	0,071		$\text{Be}(\text{OH})_2 + 2\text{H}^+ + 2e = \text{Be} + 2\text{H}_2\text{O}$	-1,820
	$\text{AgCl} + \bar{e} = \text{Ag} + \text{Cl}^-$	0,222		$\text{BeO}_2^{2-} + 4\text{H}^+ + 2e = \text{Be} + 2\text{H}_2\text{O}$	-0,909
	$\text{Ag}_2\text{O} + \text{H}_2\text{O} + 2\bar{e} = 2\text{Ag} + 2\text{OH}^-$	0,344	Bi	$\text{Bi}_2\text{O}_3 + 3\text{H}_2\text{O} + 6e = 2\text{Bi} + 6\text{OH}^-$	-0,46
	$\text{Ag}(\text{NH}_3)_2^+ + \bar{e} = \text{Ag} + 2\text{NH}_3$	0,373		$\text{BiOCl} + 2\text{H}^+ + 3e = \text{Bi} + \text{Cl}^- + \text{H}_2\text{O}$	0,16
	$\text{Ag}_2\text{CrO}_4 + 2\bar{e} = 2\text{Ag} + \text{CrO}_4^{2-}$	0,446		$\text{Bi}^{3+} + 3e = \text{Bi}$	0,215
	$\text{Ag}_2\text{C}_2\text{O}_4 + 2\bar{e} = 2\text{Ag} + \text{C}_2\text{O}_4^{2-}$	0,472		$\text{BiO}^+ + 2\text{H}^+ + 3e = \text{Bi} + \text{H}_2\text{O}$	0,32
	$\text{AgBrO}_3 + \bar{e} = \text{Ag} + \text{BrO}_3^-$	0,55		$\text{Bi}_2\text{O}_3 + 6\text{H}^+ + 6e = 2\text{Bi} + 3\text{H}_2\text{O}$	0,371
	$2\text{AgO} + \text{H}_2\text{O} + 2\bar{e} = \text{Ag}_2\text{O} + 2\text{OH}^-$	0,60		$\text{NaBiO}_3(\text{т}) + 6\text{H}^+ + 2e = \text{Bi}^{3+} + \text{Na}^+ + 3\text{H}_2\text{O}$	1,6 - 1,808
	$\text{Ag}^+ + \bar{e} = \text{Ag}$	0,799	Br	$2\text{BrO}^- + 2\text{H}_2\text{O} + 2e = \text{Br}_2 + 4\text{OH}^-$	0,45
	$\text{Ag}_2\text{O} + 2\text{H}^+ + 2\bar{e} = 2\text{Ag} + \text{H}_2\text{O}$	1,173		$2\text{BrO}_3^- + 6\text{H}_2\text{O} + 10e = \text{Br}_2 + 12\text{OH}^-$	0,50
	$2\text{AgO} + 2\text{H}^+ + 2\bar{e} = \text{Ag}_2\text{O} + \text{H}_2\text{O}$	1,398		$\text{BrO}_3^- + 2\text{H}_2\text{O} + 4e = \text{BrO}^- + 4\text{OH}^-$	0,54
Al	$\text{AlO}_2^- + 2\text{H}_2\text{O} + 3\bar{e} = \text{Al} + 4\text{OH}^-$	-2,35		$\text{BrO}_3^- + 3\text{H}_2\text{O} + 6e = \text{Br}^- + 6\text{OH}^-$	0,61
	$\text{Al}(\text{OH})_3 + 3\bar{e} = \text{Al} + 3\text{OH}^-$	-2,31		$\text{BrO}^- + \text{H}_2\text{O} + 2e = \text{Br}^- + 2\text{OH}^-$	0,76
	$\text{AlF}_6^{3-} + 3\bar{e} = \text{Al} + 6\text{F}^-$	-2,07		$\text{Br}_3^- + 2e = 3\text{Br}^-$	1,05
	$\text{Al}^{3+} + 3e = \text{Al}$	-1,663		$\text{Br}_2(\text{ж}) + 2e = 2\text{Br}^-$	1,065
	$\text{Al}(\text{OH})_3 + 3\text{H}^+ + 3e = \text{Al} + 3\text{H}_2\text{O}$	-1,471		$\text{BrO}_3^- + 6\text{H}^+ + 6e = \text{Br}^- + 3\text{H}_2\text{O}$	1,44
	$\text{AlO}_2^- + 4\text{H}^+ + 3e = \text{Al} + 2\text{H}_2\text{O}$	-1,262		$2\text{BrO}_3^- + 12\text{H}^+ + 10e = \text{Br}_2 + 6\text{H}_2\text{O}$	1,52
As	$\text{As} + 3\text{H}^+ + 3e = \text{AsH}_3$	-0,60	C	$2\text{HBrO} + 2\text{H}^+ + 2e = \text{Br}_2 + 2\text{H}_2\text{O}$	1,59
	$\text{HAsO}_2 + 3\text{H}^+ + 3e = \text{As} + 2\text{H}_2\text{O}$	0,248		$\text{HCOO}^- + 2\text{H}_2\text{O} + 2e = \text{HCHO} + 3\text{OH}^-$	-1,07
	$\text{H}_3\text{AsO}_4 + 2\text{H}^+ + 2e = \text{HAsO}_2 + 2\text{H}_2\text{O}$	0,559		$2\text{CO}_2 + 2\text{H}^+ + 2e = \text{H}_2\text{C}_2\text{O}_4$	-0,49
	$\text{H}_3\text{AsO}_4 + 2\text{H}^+ + 2e = \text{H}_3\text{AsO}_3 + \text{H}_2\text{O}$	0,58		$\text{CO}_2 + 2\text{H}^+ + 2e = \text{HCOOH}$	-0,20
Au	$\text{Au}(\text{CN})_2 + e = \text{Au} + 2\text{CN}^-$	-0,61		$\text{C}(\text{графит}) + 4\text{H}^+ + 4e = \text{CH}_4$	-0,132
	$\text{AuBr}_4^- + 2e = \text{AuBr}_2^- + 2\text{Br}^-$	0,802		$\text{CO}_2 + 2\text{H}^+ + 2e = \text{CO} + \text{H}_2\text{O}$	-0,12
	$\text{AuCl}_4^- + 2e = \text{AuCl}_2^- + 2\text{Cl}^-$	0,926		$\text{HCOOH} + 2\text{H}^+ + 2e = \text{HCHO} + \text{H}_2\text{O}$	-0,01
	$\text{AuBr}_2^- + e = \text{Au} + 2\text{Br}^-$	0,959		$\text{HCOOH} + 4\text{H}^+ + 4e = \text{CH}_3\text{OH} + \text{H}_2\text{O}$	0,145
	$\text{AuCl}_2^- + 2e = \text{Au} + 2\text{Cl}^-$	1,15		$\text{HCOO}^- + 3\text{H}^+ + 2e = \text{HCHO} + \text{H}_2\text{O}$	0,167
	$\text{Au}^{3+} + 2e = \text{Au}^+$	1,401		$\text{CH}_3\text{CHO} + 2\text{H}^+ + 2e = \text{C}_2\text{H}_5\text{OH}$	0,19
	$\text{Au}^{3+} + 3e = \text{Au}$	1,498		$\text{CO}_3^{2-} + 6\text{H}^+ + 4e = \text{HCHO} + 2\text{H}_2\text{O}$	0,197
	$\text{Au}^+ + 3e = \text{Au}$	1,692		$\text{HCOO}^- + 5\text{H}^+ + 4e = \text{CH}_3\text{OH} + \text{H}_2\text{O}$	0,199
Элемент	Реакция	E ⁰	Элемент	Реакция	E ⁰

C	$\text{CO}_3^{2-} + 8\text{H}^+ + 6\text{e} = \text{CH}_3\text{OH} + 2\text{H}_2\text{O}$	0,209	Co	$\text{Co}(\text{OH})_2 + 2\text{e} = \text{Co} + 2\text{OH}^-$	-0,73
	$\text{CO}_3^{2-} + 3\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{HCOO}^- + \text{H}_2\text{O}$	0,227		$\text{CoCO}_3 + 2\text{e} = \text{Co} + \text{CO}_3^{2-}$	-0,64
	$\text{HCHO} + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{CH}_3\text{OH}$	0,232		$\text{Co}(\text{NH}_3)_6^{2+} + 2\text{e} = \text{Co} + 6\text{NH}_3$	-0,42
	$2\text{CO}_3^{2-} + 4\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{C}_2\text{O}_4^{2-} + 2\text{H}_2\text{O}$	0,441		$\text{Co}^{2+} + 2\text{e} = \text{Co}$	-0,277
	$\text{C}_2\text{H}_5\text{OH} + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{C}_2\text{H}_6 + \text{H}_2\text{O}$	0,46		$\text{Co}(\text{OH})_2 + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{Co} + 2\text{H}_2\text{O}$	0,095
	$\text{CO}_3^{2-} + 6\text{H}^+ + 4\text{e} = \text{C}(\text{графит}) + 3\text{H}_2\text{O}$	0,475		$\text{Co}(\text{NH}_3)_6^{3+} + \text{e} = \text{Co}(\text{NH}_3)_6^{2+}$	0,1
	$\text{CO} + 6\text{H}^+ + 6\text{e} = \text{CH}_4 + \text{H}_2\text{O}$	0,497		$\text{CoO} + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{Co} + \text{H}_2\text{O}$	0,166
	$\text{CH}_3\text{OH} + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{CH}_4 + \text{H}_2\text{O}$	0,59		$\text{Co}(\text{OH})_3 + \text{e} = \text{Co}(\text{OH})_2 + \text{OH}^-$	0,17
Ca	$\text{Ca}^{2+} + 2\text{e} = \text{Ca}$	-2,866	Cr	$\text{Co}^{3+} + 3\text{e} = \text{Co}$	0,33
Cd	$\text{CdS} + 2\text{e} = \text{Cd} + \text{S}^{2-}$	-1,175		$\text{Co}^{3+} + \text{e} = \text{Co}^{2+}$	1,38 - 1,842
	$\text{Cd}(\text{CN})_4^{2-} + 2\text{e} = \text{Cd} + 4\text{CN}^-$	-1,09		$\text{Cr}(\text{OH})_2 + 2\text{e} = \text{Cr} + 2\text{OH}^-$	-1,4
	$\text{Cd}(\text{OH})_2 + 2\text{e} = \text{Cd} + 2\text{OH}^-$	-0,81		$\text{Cr}(\text{OH})_3 + 3\text{e} = \text{Cr} + 3\text{OH}^-$	-1,3
	$\text{Cd}(\text{NH}_3)_4^{2+} + 2\text{e} = \text{Cd} + 4\text{NH}_3$	-0,61		$\text{CrO}_2^- + 2\text{H}_2\text{O} + 3\text{e} = \text{Cr} + 4\text{OH}^-$	-1,2
	$\text{Cd}^{2+} + 2\text{e} = \text{Cd}$	-0,403		$\text{Cr}^{2+} + 2\text{e} = \text{Cr}$	-0,913
	$\text{Cd}(\text{OH})_2 + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{Cd} + 2\text{H}_2\text{O}$	0,005		$\text{Cr}^{3+} + 3\text{e} = \text{Cr}$	-0,744
	$\text{CdO} + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{Cd} + \text{H}_2\text{O}$	0,063		$\text{Cr}(\text{OH})_3 + 3\text{H}^+ + 3\text{e} = \text{Cr} + 3\text{H}_2\text{O}$	-0,654
Ce	$\text{Ce}^{3+} + 3\text{e} = \text{Ce}$	-2,48		$\text{Cr}^{3+} + \text{e} = \text{Cr}^{2+}$	-0,407
	$\text{Ce}^{4+} + \text{e} = \text{Ce}^{3+} (1\text{M H}_2\text{SO}_4)$	1,44	Cs	$\text{CrO}_4^{2-} + 4\text{H}_2\text{O} + 3\text{e} = \text{Cr}(\text{OH})_3 + 5\text{OH}^-$	-0,13
	$\text{Ce}^{4+} + \text{e} = \text{Ce}^{3+} (1\text{M HNO}_3)$	1,61		$\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-} + 14\text{H}^+ + 12\text{e} = 2\text{Cr} + 7\text{H}_2\text{O}$	0,294
	$\text{Ce}^{4+} + \text{e} = \text{Ce}^{3+} (1\text{M HClO}_4)$	1,70		$\text{CrO}_4^{2-} + 8\text{H}^+ + 6\text{e} = \text{Cr} + 4\text{H}_2\text{O}$	0,366
	$\text{Ce}^{4+} + \text{e} = \text{Ce}^{3+}$	1,77		$\text{CrO}_4^{2-} + 4\text{H}^+ + 3\text{e} = \text{CrO}_2^- + 2\text{H}_2\text{O}$	0,945
Cl	$\text{ClO}_4^- + \text{H}_2\text{O} + 2\text{e} = \text{ClO}_3^- + 2\text{OH}^-$	0,36		$\text{CrO}_2^- + 4\text{H}^+ + \text{e} = \text{Cr}^{2+} + 2\text{H}_2\text{O}$	1,188
	$2\text{ClO}^- + 2\text{H}_2\text{O} + 2\text{e} = \text{Cl}_2 + 4\text{OH}^-$	0,40	Cu	$\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-} + 14\text{H}^+ + 6\text{e} = 2\text{Cr}^{3+} + 7\text{H}_2\text{O}$	1,333
	$\text{ClO}_4^- + \text{H}_2\text{O} + 8\text{e} = \text{Cl}^- + 8\text{OH}^-$	0,56		$\text{CrO}_4^{2-} + 8\text{H}^+ + 3\text{e} = \text{Cr}^{3+} + 4\text{H}_2\text{O}$	1,477
	$\text{ClO}_3^- + 3\text{H}_2\text{O} + 6\text{e} = \text{Cl}^- + 6\text{OH}^-$	0,63		$\text{Cs}^+ + \text{e} = \text{Cs}$	-2,923
	$\text{ClO}_2 + 2\text{H}_2\text{O} + 5\text{e} = \text{Cl}^- + 4\text{OH}^-$	0,85		$\text{Cu}_2\text{S} + 2\text{e} = 2\text{Cu} + \text{S}^{2-}$	-0,89
	$\text{ClO}^- + \text{H}_2\text{O} + 2\text{e} = \text{Cl}^- + 2\text{OH}^-$	0,88		$\text{CuS} + 2\text{e} = \text{Cu} + \text{S}^{2-}$	-0,71
	$\text{ClO}_3^- + 2\text{H}^+ + \text{e} = \text{ClO}_2 + \text{H}_2\text{O}$	1,15		$\text{Cu}(\text{CN})_2^- + \text{e} = \text{Cu} + 2\text{CN}^-$	-0,43
	$\text{ClO}_4^- + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{ClO}_3^- + \text{H}_2\text{O}$	1,189		$\text{Cu}_2\text{O} + \text{H}_2\text{O} + 2\text{e} = 2\text{Cu} + 2\text{OH}^-$	-0,36
	$\text{ClO}_2 + 4\text{H}^+ + 4\text{e} = 2\text{HCl} + \text{H}_2\text{O}$	1,351		$\text{Cu}(\text{OH})_2 + 2\text{e} = \text{Cu} + 2\text{OH}^-$	-0,22
	$\text{Cl}_2 + 2\text{e} = 2\text{Cl}^-$	1,3595		$\text{CuI} + \text{e} = \text{Cu} + \text{I}^-$	-0,185
	$\text{ClO}_4^- + 8\text{H}^+ + 8\text{e} = \text{Cl}^- + 4\text{H}_2\text{O}$	1,38		$\text{Cu}(\text{NH}_3)_2^+ + \text{e} = \text{Cu} + 2\text{NH}_3$	-0,12
	$2\text{ClO}_4^- + 16\text{H}^+ + 14\text{e} = \text{Cl}_2 + 8\text{H}_2\text{O}$	1,39		$\text{Cu}(\text{NH}_3)_4^{2+} + 2\text{e} = \text{Cu} + 4\text{NH}_3$	-0,07
	$\text{ClO}_2 + 5\text{H}^+ + 5\text{e} = \text{HCl} + 2\text{H}_2\text{O}$	1,436		$\text{Cu}(\text{NH}_3)_4^{2+} + 2\text{e} = \text{Cu}(\text{NH}_3)_2^+ + 2\text{NH}_3$	-0,01
	$\text{ClO}_3^- + 6\text{H}^+ + 6\text{e} = \text{Cl}^- + 3\text{H}_2\text{O}$	1,451		$\text{CuI}_2^- + \text{e} = \text{Cu} + 2\text{I}^-$	0,00
	$2\text{ClO}_3^- + 12\text{H}^+ + 10\text{e} = \text{Cl}_2 + 6\text{H}_2\text{O}$	1,47		$\text{CuBr} + \text{e} = \text{Cu} + \text{Br}^-$	0,03
	$\text{HClO} + \text{H}^+ + 2\text{e} = \text{Cl}^- + \text{H}_2\text{O}$	1,494		$\text{CuCl} + \text{e} = \text{Cu} + \text{Cl}^-$	0,137
	$\text{ClO}_2 + 4\text{H}^+ + 5\text{e} = \text{Cl}^- + 2\text{H}_2\text{O}$	1,51		$\text{Cu}^{2+} + \text{e} = \text{Cu}^+$	0,153
	$2\text{ClO}_2 + 8\text{H}^+ + 8\text{e} = \text{Cl}_2 + 4\text{H}_2\text{O}$	1,549		$\text{CuCl}_2^- + \text{e} = \text{Cu} + 2\text{Cl}^-$	0,177
	$\text{HClO}_2 + 3\text{H}^+ + 4\text{e} = \text{Cl}^- + 2\text{H}_2\text{O}$	1,57		$2\text{Cu}^{2+} + \text{H}_2\text{O} + 2\text{e} = \text{Cu}_2\text{O} + 2\text{H}^+$	0,203
	$2\text{HClO} + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{Cl}_2 + 2\text{H}_2\text{O}$	1,63		$\text{Cu}^{2+} + 2\text{e} = \text{Cu}$	0,345
	$2\text{HClO}_2 + 6\text{H}^+ + 6\text{e} = \text{Cl}_2 + 4\text{H}_2\text{O}$	1,64		$\text{Cu}^{2+} + 2\text{Cl}^- + \text{e} = \text{CuCl}_2^-$	0,463
Co	$\beta\text{-CoS} + 2\text{e} = \text{Co} + \text{S}^{2-}$	-1,07	Hg	$\text{Cu}^+ + \text{e} = \text{Cu}$	0,520
	$\alpha\text{-CoS} + 2\text{e} = \text{Co} + \text{S}^{2-}$	-0,90		$\text{Cu}^{2+} + \text{Cl}^- + \text{e} = \text{CuCl}$	0,538
Cu	$\text{CuO} + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{Cu} + \text{H}_2\text{O}$	0,570		$\text{HgBr}_4^{2-} + 2\text{e} = \text{Hg} + 4\text{Br}^-$	0,21

	$\text{Cu(OH)}_2 + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{Cu} + 2\text{H}_2\text{O}$	0,609		$\text{Hg}_2\text{Cl}_2 + 2\text{K}^+ + 2\text{e} = 2\text{Hg} + 2\text{KCl (TB)}$	0,2415
	$\text{Cu}^{2+} + \text{Br}^- + \text{e} = \text{CuBr}$	0,640		$\text{Hg}_2\text{Cl}_2 + 2\text{e} = 2\text{Hg} + 2\text{Cl}^-$	0,268
	$2\text{CuO} + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{Cu}_2\text{O} + \text{H}_2\text{O}$	0,669		$\text{Hg}_2\text{Cl}_2 + 2\text{e} = 2\text{Hg} + 2\text{Cl}^- \text{ (1M KCl)}$	0,28
	$\text{Cu}^{2+} + \text{I}^- + \text{e} = \text{CuI}$	0,86		$\text{Hg}_2\text{Cl}_2 + 2\text{e} = 2\text{Hg} + 2\text{Cl}^- \text{ (0,1M KCl)}$	0,334
	$\text{Cu}^{2+} + 2\text{CN}^- + \text{e} = \text{Cu(CN)}_2$	1,12		$\text{HgCl}_4^{2-} + 2\text{e} = \text{Hg} + 4\text{Cl}^-$	0,48
Dy	$\text{Dy}^{3+} + 3\text{e} = \text{Dy}$	-2,353		$\text{Hg}_2\text{SO}_4 + 2\text{e} = 2\text{Hg} + \text{SO}_4^{2-}$	0,6151
Eu	$\text{Eu}^{2+} + 2\text{e} = \text{Eu}$	-3,395		$\text{Hg}_2^{2+} + 2\text{e} = 2\text{Hg}$	0,788
	$\text{Eu}^{3+} + \text{e} = \text{Eu}^{2+}$	-0,429		$\text{Hg}^{2+} + 2\text{e} = \text{Hg}$	0,850
F	$\text{F}_2\text{O} + 2\text{H}^+ + 4\text{e} = 2\text{F}^- + \text{H}_2\text{O}$	2,1		$2\text{Hg}^{2+} + 2\text{e} = \text{Hg}_2^{2+}$	0,920
	$\text{F}_2 + 2\text{e} = 2\text{F}^-$	2,87		$\text{HgO} + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{Hg} + \text{H}_2\text{O}$	0,926
Fe	$\text{FeS} + 2\text{e} = \text{Fe} + \text{S}^{2-}$	-0,95	Ho	$\text{Ho}^{3+} + 3\text{e} = \text{Ho}$	-2,319
	$\text{Fe(OH)}_2 + 2\text{e} = \text{Fe} + 2\text{OH}^-$	-0,877	I	$\text{IO}_3^- + 2\text{H}_2\text{O} + 4\text{e} = \text{IO}^- + 4\text{OH}^-$	0,14
	$\text{FeCO}_3 + 2\text{e} = \text{Fe} + \text{CO}_3^{2-}$	-0,756		$2\text{IO}_3^- + 6\text{H}_2\text{O} + 10\text{e} = \text{I}_2 + 12\text{OH}^-$	0,21
	$\text{Fe(OH)}_3 + \text{e} = \text{Fe(OH)}_2 + \text{OH}^-$	-0,56		$\text{IO}_3^- + 3\text{H}_2\text{O} + 6\text{e} = \text{I}^- + 6\text{OH}^-$	0,25
	$\text{Fe}^{2+} + 2\text{e} = \text{Fe}$	-0,440		$2\text{IO}^- + \text{H}_2\text{O} + 2\text{e} = \text{I}_2 + 4\text{OH}^-$	0,45
	$\text{Fe}_3\text{O}_4 + 8\text{H}^+ + 8\text{e} = 3\text{Fe} + 4\text{H}_2\text{O}$	-0,085		$\text{IO}^- + \text{H}_2\text{O} + 2\text{e} = \text{I}^- + 2\text{OH}^-$	0,49
	$\text{Fe}_2\text{O}_3 + \text{H}_2\text{O} + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = 2\text{Fe(OH)}_2$	-0,057		$\text{I}_2 + 2\text{e} = 2\text{I}^-$	0,536
	$\text{Fe}_2\text{O}_3 + 6\text{H}^+ + 6\text{e} = 2\text{Fe} + 3\text{H}_2\text{O}$	-0,051		$\text{I}_3^- + 2\text{e} = 3\text{I}^-$	0,545
	$\text{Fe(OH)}_2 + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{Fe} + 2\text{H}_2\text{O}$	-0,047		$\text{IO}_3^- + 2\text{H}_2\text{O} + 4\text{e} = \text{IO}^- + 4\text{OH}^-$	0,56
	$\text{Fe}^{3+} + 3\text{e} = \text{Fe}$	-0,037		$\text{HIO} + \text{H}^+ + 2\text{e} = \text{I}^- + \text{H}_2\text{O}$	0,99
	$\text{Fe(OH)}_3 + 3\text{H}^+ + 3\text{e} = \text{Fe} + 3\text{H}_2\text{O}$	0,059		$2\text{ICl}_2^- + 2\text{e} = \text{I}_2 + 4\text{Cl}^-$	1,06
	$\text{Fe(OH)}_3 + \text{H}^+ + \text{e} = \text{Fe(OH)}_2 + \text{H}_2\text{O}$	0,271		$\text{IO}_3^- + 6\text{H}^+ + 6\text{e} = \text{I}^- + 3\text{H}_2\text{O}$	1,085
	$\text{Fe(CN)}_6^{3-} + \text{e} = \text{Fe(CN)}_6^{4-}$	0,356		$\text{IO}_3^- + 5\text{H}^+ + 4\text{e} = \text{HIO} + 2\text{H}_2\text{O}$	1,14
	$\text{Fe}^{3+} + \text{e} = \text{Fe}^{2+} \text{ (1M H}_2\text{SO}_4\text{)}$	0,68		$2\text{IO}_3^- + 12\text{H}^+ + 10\text{e} = \text{I}_2 + 6\text{H}_2\text{O}$	1,19
	$\text{Fe}^{3+} + \text{e} = \text{Fe}^{2+} \text{ (1M HCl)}$	0,70		$2\text{HIO} + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{I}_2 + 2\text{H}_2\text{O}$	1,45
	$\text{Fe(CN)}_6^{3-} + \text{e} = \text{Fe(CN)}_6^{4-} \text{ (1M HCl)}$	0,71		$\text{H}_3\text{IO}_6 + \text{H}^+ + 2\text{e} = \text{IO}_3^- + 3\text{H}_2\text{O}$	1,60
	$\text{Fe}^{3+} + \text{e} = \text{Fe}^{2+}$	0,771	Ir	$\text{IrO}_2 + 4\text{H}^+ + 4\text{e} = \text{Ir} + \text{H}_2\text{O}$	0,93
	$\text{Fe}_3\text{O}_4 + 8\text{H}^+ + 2\text{e} = 3\text{Fe}^{2+} + 4\text{H}_2\text{O}$	0,980		$\text{Ir}^{3+} + 3\text{e} = \text{Ir}$	1,15
Ga	$\text{Ga}^{3+} + 3\text{e} = \text{Ga}$	-0,53	K	$\text{K}^+ + \text{e} = \text{K}$	-2,924
Gd	$\text{Gd}^{3+} + 3\text{e} = \text{Gd}$	-2,397	La	$\text{La}^{3+} + 3\text{e} = \text{La}$	-2,522
Ge	$\text{H}_2\text{GeO}_3 + 4\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{Ge}^{2+} + 3\text{H}_2\text{O}$	-0,363	Li	$\text{Li}^+ + \text{e} = \text{Li}$	-3,045
	$\text{GeO}_2 + 4\text{H}^+ + 4\text{e} = \text{Ge} + 2\text{H}_2\text{O}$	-0,15	Mg	$\text{Mg(OH)}_2 + 2\text{e} = \text{Mg} + 2\text{OH}^-$	-2,69
	$\text{H}_2\text{GeO}_3 + 4\text{H}^+ + 4\text{e} = \text{Ge} + 3\text{H}_2\text{O}$	-0,13		$\text{Mg}^{2+} + 2\text{e} = \text{Mg}$	-2,363
	$\text{Ge}^{2+} + 2\text{e} = \text{Ge}$	0,000		$\text{Mg(OH)}_2 + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{Mg} + 2\text{H}_2\text{O}$	-1,862
H	$2\text{H}_2\text{O} + 2\text{e} = \text{H}_2 + 2\text{OH}^-$	-0,828	Mn	$\text{MnCO}_3 + 2\text{e} = \text{Mn} + \text{CO}_3^{2-}$	-1,48
	$2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{H}_2$	0,0000		$\text{Mn}^{2+} + 2\text{e} = \text{Mn}$	-1,18
	$\text{H}_2\text{O}_2 + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = 2\text{H}_2\text{O}$	1,776		$\text{Mn(OH)}_2 + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{Mn} + 2\text{H}_2\text{O}$	-0,727
Hf	$\text{Hf}^{4+} + 4\text{e} = \text{Hf}$	-1,70		$\text{MnO}_4^- + \text{e} = \text{MnO}_4^{2-}$	0,564
	$\text{HfO}_2 + 4\text{H}^+ + 4\text{e} = \text{Hf} + 2\text{H}_2\text{O}$	-1,57		$\text{MnO}_4^- + 2\text{H}_2\text{O} + 3\text{e} = \text{MnO}_2 + 4\text{OH}^-$	0,60
Hg	$\text{HgS} + 2\text{e} = \text{Hg} + \text{S}^{2-}$	-0,69		$\text{MnO}_2 + 4\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{Mn}^{2+} + 2\text{H}_2\text{O}$	1,228
	$\text{Hg(CN)}_4^{2-} + 2\text{e} = \text{Hg} + 4\text{CN}^-$	-0,37		$\text{Mn}_2\text{O}_3 + 6\text{H}^+ + 2\text{e} = 2\text{Mn}^{2+} + 3\text{H}_2\text{O}$	1,443
	$\text{Hg}_2\text{I}_2 + 2\text{e} = 2\text{Hg} + 2\text{I}^-$	-0,041		$\text{MnO}_4^- + 8\text{H}^+ + 5\text{e} = \text{Mn}^{2+} + 4\text{H}_2\text{O}$	1,507
	$\text{HgI}_4^{2-} + 2\text{e} = \text{Hg} + 4\text{I}^-$	-0,04		$\text{Mn}^{3+} + \text{e} = \text{Mn}^{2+} \text{ (8M H}_2\text{SO}_4\text{)}$	1,509
	$\text{HgO(красная)} + \text{H}_2\text{O} + 2\text{e} = \text{Hg} + 2\text{OH}^-$	0,098		$\text{MnO}_4^- + 4\text{H}^+ + 3\text{e} = \text{MnO}_2 + 2\text{H}_2\text{O}$	1,692
	$\text{Hg}_2\text{Br}_2 + 2\text{e} = 2\text{Hg} + 2\text{Br}^-$	0,140		$\text{MnO}_4^{2-} + 4\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{MnO}_2 + 2\text{H}_2\text{O}$	2,257
Mo	$\text{H}_2\text{MoO}_4 + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{MoO}_2 + 2\text{H}_2\text{O}$	-1,091	Nd	$\text{Nd}^{3+} + 3\text{e} = \text{Nd}$	-2,431

	$\text{MoO}_4^{2-} + 4\text{H}_2\text{O} + 6\text{e} = \text{Mo} + 8\text{OH}^-$	-1,05	Ni	$\gamma\text{-NiS} + 2\text{e} = \text{Ni} + \text{S}^{2-}$	-1,04
	$\text{Mo}^{3+} + 3\text{e} = \text{Mo}$	-0,200		$\alpha\text{-NiS} + 2\text{e} = \text{Ni} + \text{S}^{2-}$	-0,83
	$\text{MoO}_2 + 4\text{H}^+ + 4\text{e} = \text{Mo} + 2\text{H}_2\text{O}$	-0,072		$\text{Ni}(\text{OH})_2 + 2\text{e} = \text{Ni} + 2\text{OH}^-$	-0,72
	$\text{MoO}_4^{2-} + 8\text{H}^+ + 6\text{e} = \text{Mo} + 4\text{H}_2\text{O}$	0,154		$\text{Ni}(\text{NH}_3)_6^{2+} + 2\text{e} = \text{Ni} + 6\text{NH}_3$	-0,49
	$\text{MoO}_3 + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{MoO}_2 + \text{H}_2\text{O}$	0,320		$\text{NiCO}_3 + 2\text{e} = \text{Ni} + \text{CO}_3^{2-}$	-0,45
	$\text{MoO}_4^{2-} + 4\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{MoO}_2 + 2\text{H}_2\text{O}$	0,606		$\text{Ni}^{2+} + 2\text{e} = \text{Ni}$	-0,25
N	$3\text{N}_2 + 2\bar{\text{e}} = 2\text{N}_3^-$	-3,4	O	$\text{Ni}(\text{OH})_2 + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{Ni} + 2\text{H}_2\text{O}$	0,110
	$3\text{N}_2 + 2\text{H}^+ + 2\bar{\text{e}} = 2\text{HN}_3$	-3,1		$\text{NiO} + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{Ni} + \text{H}_2\text{O}$	0,116
	$\text{N}_2 + 4\text{H}_2\text{O} + 2\bar{\text{e}} = 2\text{NH}_2\text{OH} + 2\text{OH}^-$	-3,04		$\text{NiO}_2 + 4\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{Ni}^{2+} + 2\text{H}_2\text{O}$	1,68
	$\text{N}_2 + 4\text{H}_2\text{O} + 4\bar{\text{e}} = \text{N}_2\text{H}_4 + 4\text{OH}^-$	-1,16		$\text{O}_2 + 2\text{H}_2\text{O} + 4\text{e} = 4\text{OH}^-$	0,401
	$\text{N}_2 + 8\text{H}_2\text{O} + 6\bar{\text{e}} = 2\text{NH}_4\text{OH} + 6\text{OH}^-$	-0,74		$\text{O}_2 + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{H}_2\text{O}_2$	0,682
	$\text{NO}_2^- + \text{H}_2\text{O} + \bar{\text{e}} = \text{NO} + 2\text{OH}^-$	-0,46		$\text{H}_2\text{O}_2 + 2\text{e} = 3\text{OH}^-$	0,88
	$\text{NO}_2^- + 6\text{H}_2\text{O} + 6\bar{\text{e}} = \text{NH}_4\text{OH} + 7\text{OH}^-$	-0,15		$\text{O}_2 + 4\text{H}^+ + 4\text{e} = 2\text{H}_2\text{O}$	1,229
	$\text{NO}_3^- + 2\text{H}_2\text{O} + 3\bar{\text{e}} = \text{NO} + 4\text{OH}^-$	-0,14		$\text{O}_3 + \text{H}_2\text{O} + 3\text{e} = \text{O}_2 + 2\text{OH}^-$	1,24
	$\text{NO}_3^- + 7\text{H}_2\text{O} + 8\bar{\text{e}} = \text{NH}_4\text{OH} + 9\text{OH}^-$	-0,12		$\text{O}_3 + 6\text{H}^+ + 6\text{e} = 3\text{H}_2\text{O}$	1,511
	$\text{NO}_3^- + \text{H}_2\text{O} + 2\bar{\text{e}} = \text{NO}_2^- + 2\text{OH}^-$	0,01		$\text{H}_2\text{O}_2 + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = 2\text{H}_2\text{O}$	1,776
	$\text{N}_2 + 6\text{H}^+ + 6\bar{\text{e}} = 2\text{NH}_3$	0,057		$\text{O}_3 + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{O}_2 + \text{H}_2\text{O}$	2,07
	$\text{N}_2\text{H}_4 + 4\text{H}_2\text{O} + 2\bar{\text{e}} = 2\text{NH}_4\text{OH} + 2\text{OH}^-$	0,1	Os	$\text{OsO}_2 + 2\text{H}_2\text{O} + 4\text{e} = \text{Os} + 4\text{OH}^-$	-0,15
	$\text{N}_2 + 8\text{H}^+ + 6\bar{\text{e}} = 2\text{NH}_4^+$	0,275		$\text{OsCl}_6^{3-} + \text{e} = \text{Os}^{2+} + 6\text{Cl}^-$	0,4
	$2\text{NO}_2^- + 4\text{H}_2\text{O} + 6\bar{\text{e}} = \text{N}_2 + 8\text{OH}^-$	0,41		$\text{OsO}_4 + 8\text{H}^+ + 8\text{e} = \text{Os} + 4\text{H}_2\text{O}$	0,85
	$\text{NH}_2\text{OH} + 2\text{H}_2\text{O} + 2\bar{\text{e}} = \text{NH}_4\text{OH} + 2\text{OH}^-$	0,42		$\text{OsCl}_6^{2-} + \text{e} = \text{OsCl}_6^{3-}$	0,85
	$2\text{NO}_2 + 4\text{H}_2\text{O} + 8\text{e} = \text{N}_2 + 8\text{OH}^-$	0,53		$\text{Os}^{2+} + 2\text{e} = \text{Os}$	0,85
	$\text{NO}_3^- + 2\text{H}^+ + \text{e} = \text{NO}_2 + \text{H}_2\text{O}$	0,78		$\text{OsO}_4 + 4\text{H}^+ + 4\text{e} = \text{OsO}_2 + 2\text{H}_2\text{O}$	0,96
	$\text{NO}_3^- + 2\text{H}^+ + \text{e} = \text{NO}_2 + \text{H}_2\text{O}$	0,80	P	$\text{H}_2\text{PO}_2^- + \text{e} = \text{P} + 2\text{OH}^-$	-2,05
	$2\text{NO} + 2\text{H}_2\text{O} + 4\text{e} = \text{N}_2 + 4\text{OH}^-$	0,85		$\text{HPO}_3^{2-} + 2\text{H}_2\text{O} + 2\text{e} = \text{H}_2\text{PO}_2^- + 3\text{OH}^-$	-1,57
	$\text{HNO}_2 + 7\text{H}^+ + 6\text{e} = \text{NH}_4^+ + 2\text{H}_2\text{O}$	0,864		$\text{PO}_4^{3-} + 2\text{H}_2\text{O} + 2\text{e} = \text{HPO}_3^{2-} + 3\text{OH}^-$	-1,12
	$\text{NO}_3^- + 10\text{H}^+ + 8\text{e} = \text{NH}_4^+ + 3\text{H}_2\text{O}$	0,87		$2\text{H}_3\text{PO}_4 + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{H}_4\text{P}_2\text{O}_6 + 2\text{H}_2\text{O}$	-0,94
	$2\text{NO}_2 + 2\text{e} = 2\text{NO}_2^-$	0,88		$\text{P} + 3\text{H}_2\text{O} + 3\text{e} = \text{PH}_3 + 3\text{OH}^-$	-0,89
	$\text{N}_2\text{O} + \text{H}_2\text{O} + 2\text{e} = \text{N}_2 + 2\text{OH}^-$	0,94		$\text{H}_3\text{PO}_2 + \text{H}^+ + \text{e} = \text{P} + 2\text{H}_2\text{O}$	-0,51
	$\text{NO}_3^- + 3\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{HNO}_2 + 2\text{H}_2\text{O}$	0,94		$\text{H}_3\text{PO}_3 + 3\text{H}^+ + 3\text{e} = \text{P}(\text{бел}) + 3\text{H}_2\text{O}$	-0,502
	$\text{NO}_3^- + 4\text{H}^+ + 3\text{e} = \text{NO} + 2\text{H}_2\text{O}$	0,957		$\text{H}_3\text{PO}_3 + 3\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{H}_3\text{PO}_2 + \text{H}_2\text{O}$	-0,50
	$\text{NO}_3^- + 4\text{H}^+ + 3\text{e} = \text{NO} + 2\text{H}_2\text{O}$	0,96		$\text{H}_3\text{PO}_3 + 3\text{H}^+ + 3\text{e} = \text{P}(\text{кр}) + 3\text{H}_2\text{O}$	-0,454
	$\text{HNO}_2 + \text{H}^+ + \text{e} = \text{NO} + \text{H}_2\text{O}$	1,00		$\text{H}_3\text{PO}_4 + 5\text{H}^+ + 5\text{e} = \text{P}(\text{бел}) + 4\text{H}_2\text{O}$	-0,411
	$\text{NO}_2 + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{NO} + \text{H}_2\text{O}$	1,03		$\text{H}_3\text{PO}_4 + 4\text{H}^+ + 4\text{e} = \text{H}_3\text{PO}_2 + 2\text{H}_2\text{O}$	-0,39
	$\text{NO}_2 + \text{H}^+ + \text{e} = \text{HNO}_2$	1,09		$\text{H}_3\text{PO}_4 + 5\text{H}^+ + 5\text{e} = \text{P}(\text{кр}) + 4\text{H}_2\text{O}$	-0,383
	$2\text{NO}_3^- + 10\text{H}^+ + 8\text{e} = \text{N}_2\text{O} + 5\text{H}_2\text{O}$	1,116		$\text{H}_3\text{PO}_4 + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{H}_3\text{PO}_3 + \text{H}_2\text{O}$	-0,276
	$2\text{NO}_3^- + 12\text{H}^+ + 10\text{e} = \text{N}_2 + 6\text{H}_2\text{O}$	1,246		$\text{H}_3\text{PO}_3 + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{H}_3\text{PO}_2 + \text{H}_2\text{O}$	-0,50
	$2\text{HNO}_2 + 4\text{H}^+ + 4\text{e} = \text{N}_2\text{O} + 3\text{H}_2\text{O}$	1,297		$\text{P} + 3\text{H}^+ + 3\text{e} = \text{PH}_3$	0,06
	$2\text{NO}_2 + 8\text{H}^+ + 8\text{e} = \text{N}_2 + 4\text{H}_2\text{O}$	1,36		$\text{H}_4\text{P}_2\text{O}_6 + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = 2\text{H}_3\text{PO}_3$	0,38
	$2\text{HNO}_2 + 6\text{H}^+ + 6\text{e} = \text{N}_2 + 4\text{H}_2\text{O}$	1,45	Pb	$\text{PbS} + 2\text{e} = \text{Pb} + \text{S}^{2-}$	-0,93
	$2\text{NO} + 4\text{H}^+ + 4\text{e} = \text{N}_2 + 2\text{H}_2\text{O}$	1,678		$\text{PbO} + \text{H}_2\text{O} + 2\text{e} = \text{Pb} + 2\text{OH}^-$	-0,58
	$\text{N}_2\text{O} + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{N}_2 + \text{H}_2\text{O}$	1,766		$\text{PbCO}_3 + 2\text{e} = \text{Pb} + \text{CO}_3^{2-}$	-0,506
				$\text{PbI}_2 + 2\text{e} = \text{Pb} + 2\text{I}^-$	0,365
Na	$\text{Na}^+ + \text{e} = \text{Na}$	-2,714	S	$\text{S} + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{H}_2\text{S}$	0,141
Pb	$\text{PbSO}_4 + 2\text{e} = \text{Pb} + \text{SO}_4^{2-}$	-0,3563			

	$\text{PbF}_2 + 2\text{e} = \text{Pb} + 2\text{F}^-$	-0,350		$\text{SO}_4^{2-} + 4\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{H}_2\text{SO}_3 + \text{H}_2\text{O}$	0,17
	$\text{PbBr}_2 + 2\text{e} = \text{Pb} + 2\text{Br}^-$	-0,280		$\text{SO}_3^{2-} + 6\text{H}^+ + 6\text{e} = \text{S}^{2-} + 3\text{H}_2\text{O}$	0,231
	$\text{PbCl}_2 + 2\text{e} = \text{Pb} + 2\text{Cl}^-$	-0,268		$2\text{SO}_4^{2-} + 10\text{H}^+ + 8\text{e} = \text{S}_2\text{O}_3^{2-} + 5\text{H}_2\text{O}$	0,29
	$\text{Pb}^{2+} + 2\text{e} = \text{Pb}$	-0,126		$\text{SO}_4^{2-} + 10\text{H}^+ + 8\text{e} = \text{H}_2\text{S} + 4\text{H}_2\text{O}$	0,311
	$\text{PbO}_3^{2-} + \text{H}_2\text{O} + 2\text{e} = \text{PbO}_2^{2-} + 2\text{OH}^-$	0,2		$\text{SO}_4^{2-} + 8\text{H}^+ + 6\text{e} = \text{S} + 4\text{H}_2\text{O}$	0,357
	$\text{PbO} + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{Pb} + \text{H}_2\text{O}$	0,248		$2\text{H}_2\text{SO}_3 + 2\text{H}^+ + 4\text{e} = \text{S}_2\text{O}_3^{2-} + 3\text{H}_2\text{O}$	0,40
	$\text{Pb}(\text{OH})_2 + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{Pb} + \text{H}_2\text{O}$	0,277		$\text{H}_2\text{SO}_3 + 4\text{H}^+ + 4\text{e} = \text{S} + 3\text{H}_2\text{O}$	0,449
	$\text{PbO}_2 + \text{H}_2\text{O} + 2\text{e} = \text{PbO} + 2\text{OH}^-$	0,28		$\text{S}_2\text{O}_3^{2-} + 6\text{H}^+ + 4\text{e} = 2\text{S} + 3\text{H}_2\text{O}$	0,5
	$\text{Pb}_3\text{O}_4 + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = 3\text{PbO} + \text{H}_2\text{O}$	0,972		$2\text{SO}_3^{2-} + 6\text{H}^+ + 4\text{e} = \text{S}_2\text{O}_3^{2-} + 3\text{H}_2\text{O}$	0,705
	$\text{PbO}_2 + 4\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{Pb}^{2+} + 2\text{H}_2\text{O}$	1,449-1,455		$\text{S}_2\text{O}_8^{2-} + 2\text{e} = 2\text{SO}_4^{2-}$	2,01
	$\text{PbO}_2 + \text{SO}_4^{2-} + 4\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{PbSO}_4 + 2\text{H}_2\text{O}$	1,685	Sb	$\text{SbO}_2^- + 2\text{H}_2\text{O} + 3\text{e} = \text{Sb} + 4\text{OH}^-$	-0,675
	$\text{Pb}^{4+} + 2\text{e} = \text{Pb}^{2+}$	1,694		$\text{Sb} + 3\text{H}^+ + 3\text{e} = \text{SbH}_3$	-0,51
Pd	$\text{Pd}(\text{OH})_2 + 2\text{e} = \text{Pd} + 2\text{OH}^-$	0,07		$\text{SbO}_3^- + \text{H}_2\text{O} + 2\text{e} = \text{SbO}_2^- + 2\text{OH}^-$	-0,43
	$\text{PdI}_6^{2-} + 2\text{e} = \text{PdI}_4^{2-} + 2\text{I}^-$	0,623		$\text{Sb}_2\text{O}_3 + 6\text{H}^+ + 6\text{e} = 2\text{Sb} + 3\text{H}_2\text{O}$	0,152
	$\text{PdCl}_4^{2-} + 2\text{e} = \text{Pd} + 4\text{Cl}^-$	0,623		$\text{SbO}^+ + 2\text{H}^+ + 3\text{e} = \text{Sb} + \text{H}_2\text{O}$	0,212
	$\text{PdO} + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{Pd} + \text{H}_2\text{O}$	0,896		$\text{SbO}_3^- + 2\text{H}^+ + 3\text{e} = \text{SbO}_2^- + \text{H}_2\text{O}$	0,353
	$\text{PdCl}_6^{2-} + 4\text{e} = \text{Pd} + 6\text{Cl}^-$	0,96		$\text{SbO}_2^- + 4\text{H}^+ + 3\text{e} = \text{Sb} + 2\text{H}_2\text{O}$	0,446
	$\text{Pd}^{2+} + 2\text{e} = \text{Pd}$	0,987		$\text{Sb}_2\text{O}_5 + 6\text{H}^+ + 4\text{e} = 2\text{SbO}^+ + 3\text{H}_2\text{O}$	0,581
	$\text{PdBr}_6^{2-} + 2\text{e} = \text{PdBr}_4^{2-} + 2\text{Br}^-$	0,993		$\text{Sb}_2\text{O}_5 + 4\text{H}^+ + 4\text{e} = \text{Sb}_2\text{O}_3 + 2\text{H}_2\text{O}$	0,671
	$\text{PdO}_2 + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{PdO} + \text{H}_2\text{O}$	1,283	Sc	$\text{Sc}^{3+} + 3\text{e} = \text{Sc}$	-2,077
	$\text{PdCl}_6^{2-} + 2\text{e} = \text{PdCl}_4^{2-} + 2\text{Cl}^-$	1,288	Se	$\text{Se} + 2\text{e} = \text{Se}^{2-}$	-0,92
Pt	$\text{PtS} + 2\text{e} = \text{Pt} + \text{S}^{2-}$	-0,95		$\text{Se} + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{H}_2\text{Se}$	-0,40
	$\text{PtS}_2 + 2\text{e} = \text{PtS} + \text{S}^{2-}$	-0,64		$\text{SeO}_3^{2-} + 3\text{H}_2\text{O} + 4\text{e} = \text{Se} + 6\text{OH}^-$	-0,366
	$\text{Pt}(\text{OH})_2 + 2\text{e} = \text{Pt} + 2\text{OH}^-$	0,15		$\text{SeO}_4^{2-} + \text{H}_2\text{O} + 2\text{e} = \text{SeO}_3^{2-} + 2\text{OH}^-$	0,05
	$\text{PtI}_6^{2-} + 2\text{e} = \text{PtI}_4^{2-} + 2\text{I}^-$	0,393		$\text{H}_2\text{SeO}_3 + 4\text{H}^+ + 4\text{e} = \text{Se} + 3\text{H}_2\text{O}$	0,741
	$\text{PtBr}_4^{2-} + 2\text{e} = \text{Pt} + 4\text{Br}^-$	0,58		$\text{SeO}_4^{2-} + 4\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{H}_2\text{SeO}_3 + \text{H}_2\text{O}$	1,15
	$\text{PtBr}_6^{2-} + 2\text{e} = \text{PtBr}_4^{2-} + 2\text{Br}^-$	0,59	Si	$\text{SiO}_3^{2-} + 3\text{H}_2\text{O} + 4\text{e} = \text{Si} + 6\text{OH}^-$	-1,7
	$\text{PtCl}_6^{2-} + 2\text{e} = \text{PtCl}_4^{2-} + 2\text{Cl}^-$	0,720		$\text{SiF}_6^{2-} + 4\text{e} = \text{Si} + 6\text{F}^-$	-1,2
	$\text{PtCl}_4^{2-} + 2\text{e} = \text{Pt} + 4\text{Cl}^-$	0,73		$\text{SiO}_3^{2-} + 6\text{H}^+ + 4\text{e} = \text{Si} + 3\text{H}_2\text{O}$	-0,455
	$\text{Pt}(\text{OH})_2 + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{Pt} + 2\text{H}_2\text{O}$	0,980		$\text{Si} + 4\text{H}^+ + 4\text{e} = \text{SiH}_4$	0,102
	$\text{PtO}_2 + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{Pt}(\text{OH})_2$	1,045	Sn	$\text{SnS} + 2\text{e} = \text{Sn} + \text{S}^{2-}$	-0,94
Ra	$\text{Ra}^{2+} + 2\text{e} = \text{Ra}$	-2,925		$\text{Sn}(\text{OH})_6^{2-} + 2\text{e} = \text{HSnO}_2^- + \text{H}_2\text{O} + 3\text{OH}^-$	-0,93
	$\text{Rb}^+ + \text{e} = \text{Rb}$	-2,925		$\text{HSnO}_2^- + \text{H}_2\text{O} + 2\text{e} = \text{Sn} + 3\text{OH}^-$	-0,91
S	$\text{SO}_4^{2-} + \text{H}_2\text{O} + 2\text{e} = \text{SO}_3^{2-} + 2\text{OH}^-$	-0,93		$\text{SnF}_6^{2-} + 4\text{e} = \text{Sn} + 6\text{F}^-$	-0,25
	$2\text{SO}_4^{2-} + 5\text{H}_2\text{O} + 8\text{e} = \text{S}_2\text{O}_3^{2-} + 10\text{OH}^-$	-0,76		$\text{Sn}^{2+} + 2\text{e} = \text{Sn}$	-0,136
	$\text{SO}_3^{2-} + 3\text{H}_2\text{O} + 4\text{e} = \text{S} + 6\text{OH}^-$	-0,66		$\text{SnO}_2 + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{SnO} + \text{H}_2\text{O}$	-0,108
	$2\text{SO}_3^{2-} + 3\text{H}_2\text{O} + 4\text{e} = \text{S}_2\text{O}_3^{2-} + 6\text{OH}^-$	-0,58		$\text{SnO}_2 + 4\text{H}^+ + 4\text{e} = \text{Sn} + 2\text{H}_2\text{O}$	-0,106
	$\text{S}_2^{2-} + 2\text{e} = 2\text{S}^{2-}$	-0,524		$\text{SnO} + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{Sn} + \text{H}_2\text{O}$	-0,104
	$\text{S} + 2\text{e} = \text{S}^{2-}$	-0,48		$\text{Sn}(\text{OH})_2 + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{Sn} + 2\text{H}_2\text{O}$	-0,091
	$2\text{S} + 2\text{e} = \text{S}_2^{2-}$	-0,476		$\text{SnCl}_6^{2-} + 2\text{e} = \text{SnCl}_4^{2-} + 2\text{Cl}^-$	0,14
	$\text{S} + \text{H}^+ + 2\text{e} = \text{HS}^-$	-0,065		$\text{Sn}^{4+} + 2\text{e} = \text{Sn}^{2+}$	0,151
	$\text{S}_2\text{O}_3^{2-} + 6\text{H}^+ + 8\text{e} = 2\text{S}^{2-} + 3\text{H}_2\text{O}$	-0,006	Sr	$\text{Sr}^{2+} + 2\text{e} = \text{Sr}$	-2,888
	$\text{S}_4\text{O}_6^{2-} + 2\text{e} = 2\text{S}_2\text{O}_3^{2-}$	0,08		$\text{Te} + 2\text{e} = \text{Te}^{2-}$	-1,14
	$\text{SO}_4^{2-} + 8\text{H}^+ + 8\text{e} = \text{S}^{2-} + 4\text{H}_2\text{O}$	0,149		$\text{Te} + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{H}_2\text{Te}$	-0,72
	$\text{TeO}_2 + 4\text{H}^+ + 4\text{e} = \text{Te} + 2\text{H}_2\text{O}$	0,529		$\text{TeO}_3^{2-} + 2\text{H}_2\text{O} + 4\text{e} = \text{Te} + 6\text{OH}^-$	-0,57
				$\text{V}^{2+} + 2\text{e} = \text{V}$	-1,175

	$\text{TeO}_4^{2-} + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{TeO}_3^{2-} + \text{H}_2\text{O}$	0,892		$\text{V}^{3+} + \text{e} = \text{V}^{2+}$	-0,255
	$\text{H}_6\text{TeO}_6 + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{TeO}_2 + 4\text{H}_2\text{O}$	1,02		$\text{VO}_2^+ + 4\text{H}^+ + 5\text{e} = \text{V} + 2\text{H}_2\text{O}$	-0,25
Ti	$\text{Ti}^{2+} + 2\text{e} = \text{Ti}$	-1,63		$\text{VO}_2^{2+} + \text{e} = \text{VO}^+$	-0,044
	$\text{TiO} + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{Ti} + \text{H}_2\text{O}$	-1,306		$\text{VO}_2^+ + 4\text{H}^+ + 3\text{e} = \text{V}^{2+} + 2\text{H}_2\text{O}$	0,360
	$\text{TiF}_6^{2-} + 4\text{e} = \text{Ti} + 6\text{F}^-$	-1,19	V	$\text{V}_2\text{O}_5 + 6\text{H}^+ + 2\text{e} = 2\text{VO}^{2+} + 3\text{H}_2\text{O}$	0,958
	$\text{TiO}_2 + 4\text{H}^+ + 4\text{e} = \text{Ti} + 2\text{H}_2\text{O}$	-0,86		$\text{VO}_2^+ + 2\text{H}^+ + \text{e} = \text{VO}^{2+} + \text{H}_2\text{O}$	1,004
	$\text{TiO}_2(\text{рутил}) + \text{H}^+ + 4\text{e} = \text{Ti}^{3+} + 2\text{H}_2\text{O}$	-0,666		$\text{VO}_4^{3-} + 6\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{VO}^+ + 3\text{H}_2\text{O}$	1,256
	$\text{TiO}_2(\text{рутил}) + 2\text{H}^+ + 4\text{e} = \text{Ti}^{2+} + 2\text{H}_2\text{O}$	-0,502		$\text{H}_2\text{VO}_4^- + 4\text{H}^+ + \text{e} = \text{VO}^{2+} + 3\text{H}_2\text{O}$	1,314
	$\text{Ti}^{3+} + \text{e} = \text{Ti}^{2+}$	-0,368		$\text{WO}_4^{2-} + 4\text{H}_2\text{O} + 6\text{e} = \text{W} + 8\text{OH}^-$	-1,05
	$\text{Ti}^{4+} + \text{e} = \text{Ti}^{3+} (5\text{M H}_3\text{PO}_4)$	-0,15	W	$\text{WO}_2 + 4\text{H}^+ + 4\text{e} = \text{W} + 2\text{H}_2\text{O}$	-0,119
	$\text{TiO}^{2+} + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{Ti}^{2+} + \text{H}_2\text{O}$	-0,135		$\text{WO}_3 + 6\text{H}^+ + 6\text{e} = \text{W} + 3\text{H}_2\text{O}$	-0,09
	$\text{TiO}^{2+} + 2\text{H}^+ + \text{e} = \text{Ti}^{3+} + \text{H}_2\text{O}$	0,10		$\text{W}_2\text{O}_5 + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = 2\text{WO}_2 + \text{H}_2\text{O}$	-0,031
Tl	$\text{Tl}_2\text{S} + 2\text{e} = 2\text{Tl} + \text{S}^{2-}$	-0,93		$2\text{WO}_3 + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{W}_2\text{O}_5 + \text{H}_2\text{O}$	-0,029
	$\text{TlI} + \text{e} = \text{Tl} + \text{I}^-$	-0,753		$\text{WO}_4^{2-} + 8\text{H}^+ + 6\text{e} = \text{W} + 4\text{H}_2\text{O}$	0,049
	$\text{TlBr} + \text{e} = \text{Tl} + \text{Br}^-$	-0,658		$2\text{WO}_4^{2-} + 6\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{W}_2\text{O}_5 + 3\text{H}_2\text{O}$	0,801
	$\text{TlCl} + \text{e} = \text{Tl} + \text{Cl}^-$	-0,557		$\text{ZnS} + 2\text{e} = \text{Zn} + \text{S}^{2-}$	-1,405
	$\text{TlOH} + \text{e} = \text{Tl} + \text{OH}^-$	-0,344	Zn	$\text{Zn}(\text{CN})_4^{2-} + 2\text{e} = \text{Zn} + 4\text{CN}^-$	-1,26
	$\text{Tl}^+ + \text{e} = \text{Tl}$	-0,3363		$\text{Zn}(\text{OH})_2 + 2\text{e} = \text{Zn} + 2\text{OH}^-$	-1,245
	$\text{Tl}(\text{OH})_3 + 2\text{e} = \text{TlOH} + 2\text{OH}^-$	-0,05		$\text{Zn}(\text{OH})_4^{2-} + 2\text{e} = \text{Zn} + 4\text{OH}^-$	-1,22
	$\text{Tl}_2\text{O}_3 + 3\text{H}_2\text{O} + 4\text{e} = 2\text{Tl}^+ + 6\text{OH}^-$	0,02		$\text{ZnO}_2^{2-} + 2\text{H}_2\text{O} + 2\text{e} = \text{Zn} + 4\text{OH}^-$	-1,216
	$\text{TlOH} + \text{H}^+ + \text{e} = \text{Tl} + \text{H}_2\text{O}$	0,778		$\text{ZnCO}_3 + 2\text{e} = \text{Zn} + \text{CO}_3^{2-}$	-1,06
	$\text{Tl}^{3+} + 2\text{e} = \text{Tl}^+$	1,252		$\text{Zn}(\text{NH}_3)_4^{2+} + 2\text{e} = \text{Zn} + 4\text{NH}_3$	-1,04
U	$\text{UO}_2 + 2\text{H}_2\text{O} + 4\text{e} = \text{U} + 4\text{OH}^-$	-2,39		$\text{Zn}^{2+} + 2\text{e} = \text{Zn}$	-0,763
	$\text{U}^{3+} + 3\text{e} = \text{U}$	-1,798		$\text{ZnO}_2^{2-} + 4\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{Zn} + 2\text{H}_2\text{O}$	0,441
	$\text{U}^{4+} + \text{e} = \text{U}^{3+}$	-0,607		$\text{ZrO}^{2+} + 2\text{H}^+ + 4\text{e} = \text{Zr} + \text{H}_2\text{O}$	-1,570
	$\text{UO}_2^{2+} = \text{UO}_2^+$	0,05	Zr	$\text{ZrO}_2 + 4\text{H}^+ + 4\text{e} = \text{Zr} + 2\text{H}_2\text{O}$	-1,553
	$\text{UO}_2^{2+} + 4\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{U}^{4+} + 2\text{H}_2\text{O}$	0,334		$\text{Zr}^{4+} + 4\text{e} = \text{Zr}$	-1,539
	$\text{UO}_2^+ + 4\text{H}^+ + \text{e} = \text{U}^{4+} + 2\text{H}_2\text{O}$	0,62			

Список литературы

Карпетьянц М.Х., Дракин С.И. Общая и неорганическая химия.: учебник 5-е изд. Изд-во Книжный дом «Либроком» 2015. 592 с.

Глинка Н.Л. Общая химия.: учебник / под ред. В.А. Попкова, А.В. Бабкова. 18-е изд., перераб. и доп. М.: Изд-во «Юрайт»; ИД «Юрайт», 2011. 886 с.

Глинка Н.Л. Общая химия. Задачи и упражнения: учебно-практическое пособие. Изд-во «Юрайт»; ИД «Юрайт», 2014. 240 с.

Хомченко И.Г. Общая химия. Сборник задач и упражнений. Изд-во «Новая волна», 2011. 256 с.

Учебное издание

Наталья Анатольевна Зайцева, Ирина Альбертовна Низова

ЗАДАЧИ И ВОПРОСЫ ПО КУРСУ «ХИМИЯ»

ЧАСТЬ II

Окислительно-восстановительные реакции

Учебное пособие

Редактор изд-ва

Компьютерная верстка Н.А.Зайцевой

Подписано в печать .Бумага писчая. Формат 60×84 1/16.

Печать на ризографе. Гарнитура Times New Roman.

Печ. л. Уч.-изд. л. 1,0 .Тираж 100 .Заказ

Издательство УГГУ

620144, Екатеринбург, ул. Куйбышева, 30

Уральский государственный горный университет

Отпечатано с оригинал-макета

в лаборатории множительной техники УГГУ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

Проректор по учебно-методическому комплексу



Б1.О.14 ХИМИЯ

Специальность
21.05.04 Горное дело

Направленность (профиль) подготовки
Горные машины и оборудование

Форма обучения: **очная, заочная**

Год набора: **2022**

Автор: Зайцева Н. А. ., к.х.н., доцент

Одобрены на заседании кафедры

Химии

(название кафедры)

Зав.кафедрой

Амдур А. М.

(Фамилия И.О.)

Протокол № 1 от 16.09.2021

(Дата)

Рассмотрены методической комиссией
факультета

Горно-механического

(название факультета)

Председатель

Осипов П. А.

(Фамилия И.О.)

Протокол № 2 от 12.10.2021

(Дата)

Екатеринбург

С О Д Е Р Ж А Н И Е

Введение	4
Общие правила работы в химической лаборатории	7
Правила техники безопасности при работе с химическими реактивами	7
Оказание первой медицинской помощи	8
Оформление лабораторного журнала	8
1. Периодичность изменения свойств оксидов и гидроксидов	9
1.1. Экспериментальная часть	11
1.2. Контрольные вопросы и задания	12
2. Химическая кинетика	14
2.1. Экспериментальная часть	16
2.2. Контрольные вопросы и задания	18
3. Химическое равновесие	19
3.1. Экспериментальная часть	20
3.2. Контрольные вопросы и задания	21
4. Ионные равновесия в растворах электролитов	23
4.1. Экспериментальная часть	25
4.2. Контрольные вопросы и задания	26
5. Реакции ионного обмена	27
5.1. Экспериментальная часть	29
5.2. Контрольные вопросы и задания	31
6. Гидролиз солей	32
6.1. Экспериментальная часть	34
6.2. Контрольные вопросы и задания	35
Список литературы	37

ВВЕДЕНИЕ

Горные инженеры, геологи и геофизики сталкиваются с самыми разнообразными явлениями природы, химическими по своей сущности: быстрой выветриваемостью, окисляемостью, различной смачиваемостью горных пород, с особенностями воздушной среды под землей, с обводненностью горных выработок, агрессивностью рудничных вод. Поэтому им требуются более глубокие знания по химии, чем любому другому специалисту. Инженеры горнодобывающей отрасли способны справиться с современными задачами горно-металлургической и горно-химической промышленности только зная весь путь от разведки полезного ископаемого до его переработки. Физико-химическая некомпетентность горных инженеров и геологов является причиной недостатков в развитии горной науки, техники и технологии, бедственного экологического положения горных предприятий.

Роль химии в подготовке инженеров непрерывно возрастает в связи с необходимостью решения задач по снижению уровня потерь полезных компонентов и увеличению комплексности использования руд, рациональному применению вскрышных пород, очистке и использованию шахтных вод и сточных вод обогатительных фабрик, защите от коррозии бурового и горнодобывающего оборудования, заблаговременной дегазации угольных месторождений, применению физико-химических методов упрочнения грунтов, геотехнологическим методам добычи полезных ископаемых.

В горном деле широко применяются химические материалы: химические растворы при бурении и тампонаже скважин, взрывчатые вещества при отбойке угля, руды и породы, химические добавки, препятствующие распылению угля и налипанию льда на конвейерную ленту, материалы для покрытия из пены, предохраняющей от промерзания участка разработки, компоненты для отвердевания закладочных смесей, огнетушащие составы, синтетические смолы для укрепления горных пород, реагенты для флотации и обогащения руд и большой ассортимент таких обычных химикатов как горючие и смазочные материалы, цемент, стекло, керамика, гидро-, термо- и электроизоляционные материалы, лаки, краски, пластмассы, резина.

Еще благодаря усилиям Д.И. Менделеева, химию, как одну из фундаментальных дисциплин, стали преподавать во всех высших школах России. Химия вместе с физикой и математикой составляет основу профессиональной подготовки специалистов высокой квалификации.

Будущие специалисты должны получить такой комплекс знаний по химии, который составит базу для успешного освоения последующих дисциплин и правильного использования материалов, применяемых в технике.

Теоретические разделы химии, такие как строение электронных оболочек атомов, основные виды химических связей, химическая кинетика и равновесие, окислительно-восстановительные потенциалы, водородный показатель, произведение растворимости, свойства комплексных соединений, позволяет правильно ориентироваться в вопросах, связанных непосредственно со свойствами и превращениями минералов и горных пород.

Горные породы и руды состоят из минералов. К минералам относят природные химические соединения. Неорганические минералы подразделяются на минеральные типы, названия которым присваиваются согласно классификации неорганических веществ и их номенклатуре. По химическому составу минералы подразделяют на:

- а) простые вещества (металлы, неметаллы),
- б) карбиды, нитриды, фосфиды, сульфиды, арсениды, селениды, оксиды, гидроксиды, галогениды и др.,
- в) соли кислородержащих кислот (силикаты, фосфаты, арсенаты, ванадаты, бораты, карбонаты, сульфаты, нитраты, вольфраматы, молибдаты, хроматы, иодаты и др.).

Основа химической номенклатуры - русские названия химических элементов, приведенные в периодической системе Д.И. Менделеева, которые не всегда совпадают с латинскими названиями, например, гидрогениум - водород, оксигениум - кислород.

К неметаллам относят:

He, Ne, Ar, Kr, Xe, Rn, F, Cl, Br, J, At, O, S, Se, Te, N, P, As, C, Si, B, H, остальные элементы - металлы.

Названия простых веществ состоят из одного слова - наименования химического элемента с числовой приставкой, например: O₃ - трикислород, P₄ - тетрафосфор, S₈ - октасера.

Используют также числовые приставки:

1 - моно	7 - гепта
2 - ди	8 - окта
3 - три	9 - нона
4 - тетра	10 - дека
5 - пента	11 - ундека
6 - гекса	12 - додека

В химических формулах сложных веществ на первом месте (слева) всегда записывают формульные обозначения электроположительных составляющих, а за ними указывают формульные обозначения электроотрицательных составляющих. Например, PCl_3 .

Названия сложных веществ составляются по их химическим формулам справа налево. Они складываются из двух слов - названий электроотрицательных составляющих (условных или реальных катионов) в именительном падеже и электроположительных составляющих (условных или реальных катионов) в родительном падеже, например: PCl_3 - трихлорид фосфора, CO - монооксид углерода.

Названия одноэлементных анионов оканчиваются на -ид, а названия многоэлементных анионов - на -ат.

Для построения названий сложных веществ используются корни (иногда усеченные) русских названий элементов, например, бериллий - бериллат, молибден - молибдат, фосфор - фосфид и фосфат. Традиционно применяются корни латинских названий для элементов: серебро, мышьяк, золото, углерод, медь, железо, ртуть, марганец, азот, никель, свинец, сера, сурьма, кремний, олово:

Ag - аргентат	N - нитрид, нитрат
As - арседид, арсенат	Ni - николат
Au – аурат	Pb - плюмбат
C - карбид, карбонат	S - сульфид, сульфат
Cu - купрат	Sb - стибид (антимонид), стибат
Fe - феррат	Si - силицид, силикат
Hg – меркурат	Sn - станнат
Mn - манганат	

В названиях сложных веществ употребляются как числовые приставки, так и степени окисления катиона (обычно металлического) при точно известном заряде аниона, например, P_4O_{10} - декаоксид тетрафосфора, V_2O_5 - оксид ванадия (V), $\text{Bi}(\text{OH})_3$ - гидроксид висмута (III).

Названия кислот и кислотных остатков приводятся в учебном пособии [1]. Названия кислотных остатков используют построении названий солей. Соли - продукты реакций нейтрализации. Соли, содержащие кислотные остатки с незамещенными атомами водорода, - к и с л ы е соли. Соли, содержащие гидроксид-ионы, называют о с н о в н ы м и солями.

$\text{Ca}(\text{H}_2\text{PO}_4)_2$ - дигидрофосфат кальция

KHSO_4 - гидросульфат калия

$\text{FeOH}(\text{NO}_3)_2$ - гидроксонитрат железа (III)

$(\text{CaOH})_2\text{SO}_4$ - гидроксосульфат кобальта (II)

$\text{Cu}_2\text{CO}_3(\text{OH})_2$ - дигидроксид-карбонат димеди

Если соли содержат два разных катиона, то их называют
д в о й н ы м и.

$\text{KAl}(\text{SO}_4)_2$ - сульфат алюминия-калия

$\text{CaMg}(\text{CO}_3)_2$ - карбонат магния-кальция

ОБЩИЕ ПРАВИЛА РАБОТЫ В ХИМИЧЕСКОЙ ЛАБОРАТОРИИ

Прежде чем приступить к работе по данной теме, следует изучить ее по описанию, уяснить цель задания и план его выполнения.

Не загромождайте рабочее место портфелями, свертками, сумками, перчатками и т.п. Для них отведены специальные этажерки. На рабочем столе должны находиться только необходимые приборы и лабораторный журнал.

Работайте тщательно, аккуратно, без лишней торопливости, соблюдайте в лаборатории тишину.

Внимательно наблюдайте за ходом опыта, отмечая и записывая каждую его особенность.

Категорически запрещается в лаборатории принимать пищу, пробовать химические вещества на вкус.

Без указания преподавателя не проводите никаких дополнительных опытов.

После окончания работы вымойте использованную посуду, выключите воду, электрические приборы и приведите в порядок рабочее место.

ПРАВИЛА ТЕХНИКИ БЕЗОПАСНОСТИ ПРИ РАБОТЕ С ХИМИЧЕСКИМИ РЕАКТИВАМИ

Для выполнения работ в лаборатории имеется определенный набор химических реактивов, часть которых размещается на лабораторных столах (водные растворы солей), а остальные - концентрированные и разбавленные кислоты и щелочи, сухие соли, дурно пахнущие вещества - в вытяжных шкафах.

При использовании реактивов следует соблюдать следующие правила:

1. Не разрешается уносить реактивы из вытяжного шкафа на рабочее

место.

2. Сухие реактивы набирают чистым шпателем или ложечкой.
3. Для проведения опыта в пробирке брать сухое вещество в количестве, закрывающем дно пробирки, а раствора - не более $1/6$ ее объема.
4. Избыток реактива нельзя высыпать (выливать) обратно в те склянки, из которых они были взяты.
5. Не следует путать пробирки от разных склянок. Крышки и пробки кладут на стол поверхностью, не соприкасающейся с реактивом.
6. При нагревании растворов в пробирке держать ее таким образом, чтобы отверстие пробирки было направлено в сторону от работающего и его соседей по рабочему месту.
7. При разбавлении концентрированных кислот вливать кислоту в воду, а не наоборот.
8. Остатки растворов, содержащих кусочки металлов, собирают в специальные склянки, находящиеся в вытяжных шкафах.

ОКАЗАНИЕ ПЕРВОЙ МЕДИЦИНСКОЙ ПОМОЩИ

При порезах стеклом удаляют осколки из раны, смазывают края раны раствором йода и перевязывают бинтом.

При ожоге горячей жидкостью или горячим предметом обожженное место обрабатывают раствором перманганата калия, накладывают мазь от ожога.

При ожогах кислотами сразу промывают обожженное место большим количеством воды, а затем 3%-ным раствором гидрокарбоната натрия.

При ожогах едкими щелочами хорошо и обильно промыть обожженное место проточной водой, затем разбавленным раствором уксусной кислоты и опять водой.

При попадании кислоты или щелочи в глаза немедленно промыть глаза в течение трех минут большим количеством воды, а затем раствором гидрокарбоната натрия или борной кислоты.

ОФОРМЛЕНИЕ ЛАБОРАТОРНОГО ЖУРНАЛА

Каждый студент должен иметь лабораторный журнал - отдельную тетрадь для записей.

В лабораторном журнале студент выполняет отчеты по лаборатор-

ным работам, домашние задания, решает задачи, отвечает на контрольные вопросы.

Все наблюдения и выводы по экспериментальной работе студент заносит в лабораторный журнал непосредственно после выполнения опыта.

Отчеты по выполненным лабораторным работам должны содержать:

- 1) название лабораторной работы,
- 2) названия всех проделанных опытов,
- 3) после названия опыта записывается уравнение проделанной реакции, в котором указываются осадки ($\downarrow$) и их окраска, газы ($\uparrow$), изменения окраски растворов,
- 4) задания, указанные в методическом руководстве,
- 5) выводы по каждому опыту и общий вывод по работе.

1. ПЕРИОДИЧНОСТЬ ИЗМЕНЕНИЯ СВОЙСТВ ОКСИДОВ И ГИДРОКСИДОВ

Цель работы - изучение изменения кислотно-основных свойств гидроксидов в периодах и группах периодической системы Д.И. Менделеева.

Периодическая система Д.И. Менделеева - естественная система химических элементов, созданная на основе периодического закона.

Положение элемента в периодической системе определяет физико-химические свойства соответствующих им простых веществ и химических соединений.

Периодичность свойств химических соединений удобно проследить на примере оксидов и гидроксидов. Оксиды и гидроксиды относятся к основным порообразующим минералам, они широко распространены и составляют 17% от массы земной коры.

В табл.1.1. приведены наиболее часто встречающиеся реакции взаимодействия оксидов и гидроксидов с водой.

Кислотно-основные свойства соединений можно объяснить на основе электростатических представлений. Ослабление основных и усиление кислотных свойств гидроксидов связано с изменением поляризующего действия элемента, образующего гидроксид, на группу OH^- . Поляризующее действие катиона сильно зависит от его строения и может быть охарактеризовано следующими закономерностями:

- 1) Поляризующее действие иона очень быстро возрастает с увеличением его заряда;

Таблица 1.1

Кислотно-основные реакции оксидов и гидроксидов

Тип оксида (гидроксида)	Типичная реакция
Сильно - кислый	$\text{SO}_3(\text{г}) + \text{H}_2\text{O} = \text{SO}_4^{2-}(\text{р}) + 2\text{H}^+(\text{р})$
Слабо - кислый	$\text{CO}_2 + \text{H}_2\text{O} \rightleftharpoons \text{HCO}_3^-(\text{р}) + \text{H}^+(\text{р})$
Амфотерный	$\text{Zn}(\text{OH})_2(\text{к}) \Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{\text{H}^+(\text{р})} \text{Zn}^{2+}(\text{р}) + \text{H}_2\text{O} \\ \xrightarrow{\text{OH}^-(\text{р})} [\text{Zn}(\text{OH})_4]^{2-}(\text{р}) \end{cases}$
Слабо - основной	$\text{Fe}(\text{OH})_2(\text{к}) \rightleftharpoons \text{FeOH}^+(\text{р}) + \text{OH}^-(\text{р})$
Сильно - основной	$\text{Li}_2\text{O}_3 + \text{H}_2\text{O} = 2\text{Li}^+(\text{р}) + 2\text{OH}^-(\text{р})$

2) большое значение имеет строение внешней электронной оболочки, по этому признаку катионы разделяются на ионы с незаконченным внешним слоем, переходным от 8-электронного и 18-электронному (Mg^{2+} , Fe^{2+} , Fe^{3+}) и ионы с 18-электронным внешним слоем (Zn^{2+} , Ag^+);

3) при сходном строении внешней электронной оболочки и равном заряде поляризующее действие иона возрастает по мере уменьшения его радиуса.

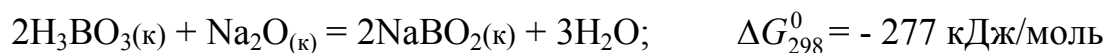
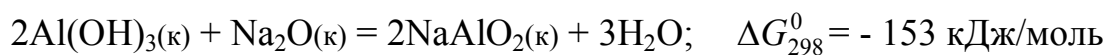
Итак, ослабление основных и усиление кислотных свойств гидроокисей связано с увеличением поляризующего действия катиона, т.е. с убыванием его радиуса и возрастанием положительной степени окисления, а также с увеличением числа внешних электронов. Например, если катион имеет малый заряд сравнительно большой радиус, его электростатическое притяжение к группе OH^- невелико и OH^- выступает в гидроксиде как единое целое. Поэтому типичными основаниями являются гидроксиды элементов, находящихся в главных подгруппах I и II групп периодической системы (KOH , NaOH), а также NH_4OH .

По мере увеличения поляризующего действия катиона возрастает ковалентность связей элемент-кислород и усиливается ионный характер связей $\text{O} - \text{H}$. Основные свойства гидроксидов ослабляются и появляются кислотные свойства. Из элементов II группы бериллий и цинк дают амфо-

дают атмосферные гидроксиды, в (III) группе амфотерны гидроксиды алюминия, галлия, индия. Амфотерность характерна для большинства элементов четвертой группы периодической системы.

Когда катион имеет большой положительный заряд и малый радиус (что типично для неметаллов), усиление его поляризующего действия приводит к тому, что водород становится подвижным и преобладает диссоциация по кислотному типу. Среди элементов третьей группы гидроксид бора - типичная кислота. В четвертой группе кислотами являются гидроксиды углерода и кремния, однако, эти кислоты еще очень слабые. Гидроксиды многих элементов с максимальной степенью окисления пятой, шестой, седьмой групп - сильные кислоты.

Способность веществ к взаимодействию определяется изменением изобарно-изотермического потенциала (ΔG) химической реакции. Чем меньше алгебраическая величина энергии Гиббса химического процесса, тем больше вероятность ее протекания в данном направлении.



Увеличение отрицательного значения ΔG_{298}^0 свидетельствует об усилении кислотных свойств гидроксида бора H_3BO_3 .

1.1. Экспериментальная часть

ОПЫТ 1. Гидроксиды магния и кальция

Поместите в пробирку небольшое количество оксида магния или кальция и прибавьте 5 мл воды. Взболтайте содержимое пробирки и испытайте реакцию среды 1-2 каплями фенолфталеина. Составьте уравнение реакции взаимодействия оксида с водой. Сделайте вывод о характере гидроксида.

ОПЫТ 2. Получение и свойства гидроксида алюминия

В пробирку налейте 2 мл раствора соли алюминия и прибавьте примерно такой же объем раствора гидроксида аммония. Содержимое пробирки распределите в две пробирки. В одну из пробирок при взбалтывании прилейте по каплям разбавленный раствор серной кислоты до полного рас-

творения осадка. Во вторую пробирку прилейте разбавленный раствор гидроксида натрия также до полного растворения осадка. Составить уравнение реакций. Сделайте вывод о характере гидроксида алюминия.

ОПЫТ 3. Двуокись углерода

Налейте в пробирку несколько мл воды и прибавьте 1-2 капли индикатора. Пропустите из аппарата Киппа в воду двуокись углерода до изменения окраски индикатора. Составьте уравнение реакции. Сделайте вывод о характере гидроксида.

ОПЫТ 4. Гидроксид кремния

В пробирку поместите раствор силиката натрия и пропустите через него углекислый газ из аппарата Киппа, при этом наблюдайте образование осадка гидроксида кремния. Напишите уравнение реакции. Сделайте вывод о кислотно-основном характере гидроксида кремния.

ОПЫТ 5. Оксид фосфора (V)

В пробирку поместите немного фосфорного ангидрида и добавьте несколько мл воды. Наблюдайте растворение, встряхивая пробирку. Испытайте реакцию среды индикаторами. Составьте уравнение реакции. Сделайте вывод о характере гидроксида.

ОПЫТ 6. Гидроксиды олова (II) и свинца (II)

а) Налейте в пробирку 2 мл раствора хлорида олова. Добавьте по каплям разбавленный раствор щелочи до образования осадка. Содержимое пробирки разделите на две части. Подействовать на одну концентрированным раствором щелочи, а на другую - соляной кислотой. Составьте уравнения реакций. Сделайте вывод о характере гидроксида олова.

б) Такой же опыт проделать с раствором соли азотнокислого свинца. На полученный гидроксид свинца подействовать азотной кислотой и щелочью. Почему для растворения гидроокиси свинца нельзя воспользоваться соляной или серной кислотами? Составьте уравнения реакций. Сделайте вывод о характере гидроксида свинца.

1.2. Контрольные вопросы и задания

1. Сравнив результаты опытов, сделайте вывод, как изменяется характер гидроксидов элементов: Mg, Al, Si, P в третьем периоде слева

направо. Чем объясняется это изменение характера гидроксидов? Как оно связано с изменением металлических свойств элементов?

2. По результатам опытов сделайте вывод об изменении кислотно-основных свойств гидроксидов элементов: C, Si, Sn, Pb в главных подгруппах сверху вниз. Как увязать такое изменение характера гидроксидов с возрастанием порядкового номера элемента и изменением металлических свойств элементов?

3. Запишите кислородные соединения марганца со степенями окисления II, IV, VI, VII и покажите, как с увеличением степени окисления изменяется характер оксидов и соответствующих им гидроксидов.

4. Укажите, какая из сравниваемых двух кислот H_2SO_3 или H_2SO_4 является более сильной и как объяснить такое явление.

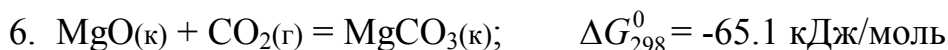
5. Какой из галогенов имеет наибольшее сродство к натрию, если энергия Гиббса для галогенидов натрия имеет следующую величину (кДж/моль):

$$\Delta G_{298}^0 \text{NaJ} = -237.2,$$

$$\Delta G_{298}^0 \text{NaBr} = -347.7,$$

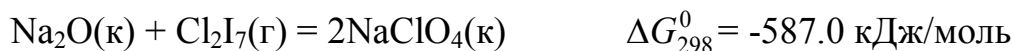
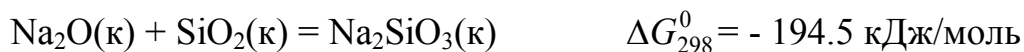
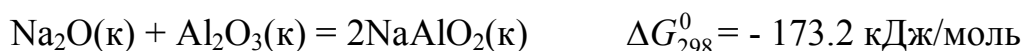
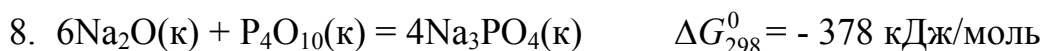
$$\Delta G_{298}^0 \text{NaCl} = -384.0,$$

$$\Delta G_{298}^0 \text{NaF} = -541.0.$$



Как изменяются кислотно-основные свойства оксидов (расположите их в ряд) и как это согласуется со значением ΔG_{298}^0 образования рассматриваемых карбонатов из оксидов?

7. Как изменяется сила кислот в ряду H_2SO_4 - H_2SeO_4 - H_2TeO_4 ?



Как изменяются кислотно-основные свойства оксидов (расположите их в ряд) и как это согласуется со значениями ΔG_{298}^0 образования рассматриваемых солей из оксидов?

9. Укажите, какое из рассматриваемых двух соединений является более сильным основанием: а) гидроксид натрия или гидроксид цезия; б) гидроксид бария или гидроксид кальция? Объясните это изменение характера гидроксидов, исходя из расположения элементов в таблице Д.И. Менделеева.

2. ХИМИЧЕСКАЯ КИНЕТИКА

Ц е л ь р а б о т ы - изучение скорости химической реакции и ее зависимости от концентрации и температуры.

Раздел химии, изучающей скорость химических реакций, называется химической кинетикой.

Скорость химической реакции - это изменение концентрации реагирующих веществ в единицу времени. Зависимость скорости химической реакции выражается законом действующих масс: при постоянной температуре скорость химической реакции прямо пропорциональна произведению концентраций реагирующих веществ, взятых в степенях, равных стехиометрическим коэффициентам в уравнении реакции.

Для реакции $aA + bB = cC + dD$ скорость выразится уравнением:

$$v = k \cdot [A]^a \cdot [B]^b \quad (\text{для гомогенной системы}),$$

где v - скорость реакции;

$[A]$, $[B]$ - молярные концентрации реагирующих веществ;

k - константа скорости реакции

(при $[A] = [B] = 1$ моль/л, k численно равна v).

Для реакции $2NO_{(г)} + O_{2(г)} = 2NO_{2(г)}$ выражение скорости имеет следующий вид:

$$v = k \cdot [NO]^2 \cdot [O_2].$$

Гомогенная система состоит из одной фазы - между реагентами нет поверхности раздела. Гетерогенная система состоит из двух и более фаз. Реакция в гетерогенной системе осуществляется на поверхности раздела фаз. Скорость гетерогенной реакции не зависит от площади поверхности раздела фаз, так же как скорость гомогенной реакции не зависит от объема системы.

Концентрация твердого вещества принимается за единицу.

Зависимость скорости химической реакции от температуры описывается экспериментально найденным уравнением Вант-Гоффа:

$$v_{t_2} = v_{t_1} \cdot \gamma^{\frac{t_2 - t_1}{10}},$$

где v_{t_1} , v_{t_2} - скорость реакции при температурах соответственно t_1 и t_2 ;

γ - температурный коэффициент скорости реакции,
равный обычно 2-4.

Эта зависимость может быть выражена в виде следующего правила: при увеличении температуры на каждые 10° скорость химической реакции увеличивается в 2-4 раза.

Зависимость скорости реакции от температуры более точно может быть выражена уравнением Аррениуса:

$$k = c \cdot e^{-\frac{E_{\text{акт}}}{RT}},$$

где k - константа скорости реакции;

c - постоянная;

$E_{\text{акт}}$ - энергия активации;

R - универсальная газовая постоянная (8.31 Дж/моль · К);

T - абсолютная температура.

Из уравнения Аррениуса следует, что скорость реакции с повышением температуры увеличивается по закону экспоненты, однако интенсивность теплоотвода в конкретных условиях реакции может возрасти только линейно. В этом случае возможен скачкообразный переход от стационарного режима к нестационарному, быстрое ускорение - самовоспламенение, или цепной взрыв. По такому механизму происходят взрывы метана и угольной пыли в шахтах. Например, при повышении концентрации метана на несколько процентов достигается нижний предел взрываемости метана в воздухе, в тысячи раз ускоряется реакция окисления метана кислородом воздуха $\text{CH}_4 + 2\text{O}_2 = \text{CO}_2 + 2\text{H}_2\text{O} + Q$. Концентрационные пределы взрываемости метана в воздухе от 5 до 15% по объему.

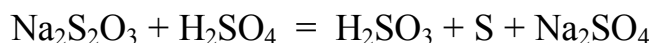
Одним из направлений в решении проблемы предупреждения взры-

вов метана и угольной пыли в шахтах, опасных по газу и пыли, является применение способов взрывозащиты, основанных на использовании распыленной воды или специальных химических соединений, которые играют роль отрицательных катализаторов (ингибиторов), теплопоглотителей в реакциях окисления углеводородов. Такие вещества носят общее название флегматизаторов горения. Этим свойством обладают гидрокарбонаты натрия и калия, гидрофосфаты аммония, бура и др.

2.1. Экспериментальная часть.

ОПЫТ 1. Зависимость скорости химической реакции от концентрации реагирующих веществ.

Соли тиосерной кислоты устойчивы в твердом состоянии и в растворе. Тиосерная кислота неустойчива и при получении распадается самопроизвольно по реакции



с образованием сернистой кислоты и свободной серы.

Постановка опыта основывается на следующем: в результате реакции между серной кислотой и тиосульфатом натрия образуется сера, выделяющаяся в виде белой мути. Время от начала реакции до момента появления мути зависит от скорости этой реакции.

В три пробирки налить по 6 мл раствора серной кислоты.

В первую пробирку влить 6 мл раствора $\text{Na}_2\text{S}_2\text{O}_3$, быстро перемешать ее содержимое и одновременно включить секундомер. Отсчитать время (τ) до начала появления белой мути - коллоидной серы.

Во вторую пробирку влить смесь 4 мл раствора тиосульфата натрия и 2 мл воды. Наблюдать, через сколько секунд растворы сделаются мутными.

Результаты наблюдений записать по следующей форме, выразив значения скоростей реакций в условных единицах (десятичных дробях!) в виде $v = 1/\tau$, где τ - время в секундах.

Относительная концентрация раствора тиосульфата натрия записана в условных единицах $C_{\text{Na}_2\text{S}_2\text{O}_3} = v_{\text{Na}_2\text{S}_2\text{O}_3} / V_{\text{раствора}}$, где $V_{\text{раствора}}$ - общий объем раствора 12 мл. Тогда для первого случая $C_{\text{Na}_2\text{S}_2\text{O}_3}$ 50%, для второго - 33% и третьего - 17%, что соответствует значениям 3а, 2в, а.

№ опы-та	Объем в мл			Относит. концентр. $C_{\text{Na}_2\text{S}_2\text{O}_3}$	Время до появления мути, τ	$v = \frac{1}{\tau}$
	раствора H_2SO_4	раствора $\text{Na}_2\text{S}_2\text{O}_3$	H_2O			
1	6	6	0	3a		
2	6	4	2	2a		
3	6	2	4	a		

Результаты измерений необходимо представить в виде графика. На ось абсцисс наносят значения относительных концентраций в виде трех точек, отстоящих от начала координат на a , $2a$, $3a$, где a - произвольно выбранный отрезок. Из каждой точки восстанавливается перпендикуляр, длина которого соответствует значениям скоростей реакции в условных единицах. Далее следует обдумать, каким образом, пользуясь верхними концами этих перпендикуляров, провести линию, характеризующую зависимость скорости реакции от концентрации. Подсказкой будет служить математическое выражение для скорости изучаемой реакции, которое нужно записать согласно закону действия масс.

Сделать вывод о зависимости скорости реакции от концентрации реагирующих веществ.

ОПЫТ 2. Зависимость скорости реакции от температуры опыта

Налить в одну пробирку 5 мл раствора $\text{Na}_2\text{S}_2\text{O}_3$, а другую - 5 мл раствора H_2SO_4 . Обе пробирки поместить в стакан с водопроводной водой. Спустя 5-7 минут измерить температуру воды и слить вместе содержимое обеих пробирок. Измерить время появления помутнения.

В две другие пробирки налить по 5 мл тех же растворов. Поместить пробирки в стакан с водой, нагретой на 10° выше, чем в предыдущем опыте. Через 5-7 минут слить содержимое пробирок. Измерить время до появления мути.

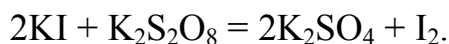
Повторить опыт, повысив температуру еще на 10° .

Результаты наблюдений выразить в виде графика, откладывая по оси абсцисс температуру опыта, по оси ординат - относительную скорость реакции.

Сделать вывод о зависимости скорости реакции от температуры.

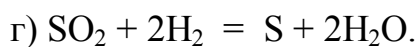
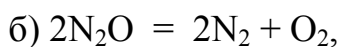
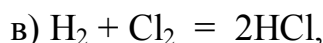
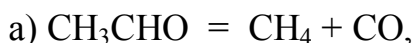
2.2. Контрольные вопросы и задания.

1. Реакция в водном растворе выражается уравнением:



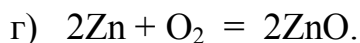
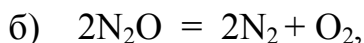
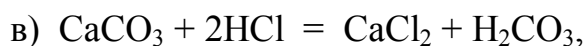
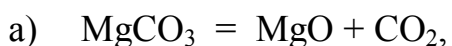
Как изменится скорость этой реакции при разбавлении реагирующей смеси в 2 раза?

2. Записать математические выражения для скорости следующих газовых реакций



Предсказать изменение скорости этих реакций при увеличении концентрации каждого из реагирующих веществ в 2 раза.

3. Записать выражения для скорости реакций



Как изменится скорость вышеуказанных реакций, если:

а) увеличить концентрацию исходных веществ в 2 раза;

б) увеличить давление в 2 раза.

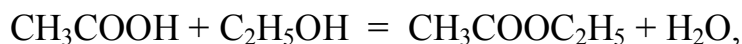
4. Срок хранения флотационного реагента, поступившего на обогательную фабрику, согласно техническим условиям составляет при температуре 20°C 2 месяца. Воспользовавшись правилом Вант-Гоффа, рассчитать срок годности этого флотореагента, если на складе фабрики поддерживается 0°C, а температурный коэффициент скорости разложения равен 2.

5. Во сколько раз изменится скорость реакции



если концентрация оксида азота уменьшится в 2 раза, а концентрация кислорода увеличивается в 2 раза?

6. Реакция протекает по уравнению



концентрацию CH_3COOH увеличили от 0.3 до 0.45 моль/л, а концентрацию $\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}$ увеличили от 0.4 до 0.8 моль/л. Во сколько раз возросла скорость прямой реакции?

7. Кальцинированная сода (безводная Na_2CO_3) используется в виде раствора в качестве регулятора щелочности флотационного процесса. При температуре 55°C сода растворяется в 6 раз быстрее, чем при 15° . Рассчитать температурный коэффициент скорости растворения соды.

8. Для приготовления раствора силиката натрия требуемой плотности, используемого в качестве подавителя пустой породы, твердые прозрачные куски силикат-глыбы Na_2SiO_3 загружают в воду: нагревают до 95° и ведут перемешивание в течение четырех часов. Какой срок потребуется для получения раствора необходимой концентрации, если поддерживать температуру 90° ($\gamma = 2$)?

3. ХИМИЧЕСКОЕ РАВНОВЕСИЕ

Ц е л ь р а б о т ы - Изучение влияния концентрации на сдвиг химического равновесия.

Многие реакции идут не до исчезновения исходных веществ, а до состояния, не изменяющегося во времени, когда в реакционной смеси можно обнаружить как исходные вещества, так и продукты реакции. Такое состояние системы называется химическим равновесием.

С термодинамической точки зрения состояние равновесия характеризуется тем, что система достигает минимального значения энергии Гиббса (при заданных температуре, давлении и общем составе).

С кинетической точки зрения при равновесии скорости процессов образования продуктов реакции из исходных веществ и исходных веществ из продуктов выравниваются. Скорость достижения равновесия в зависимости от природы процесса, условий, а также наличия подходящих катализаторов может варьировать от малых долей секунды до веков и тысячелетий.

Если равновесие достигнуто, то для реакции



называемая константой равновесия, принимает определенное значение. Константа равновесия зависит от температуры, но не зависит от конкретных количеств реагентов и порядка их взаимодействия.

Изменение равновесных концентраций при внешнем воздействии называется **с м е щ е н и е м х и м и ч е с к о г о р а в н о в е с и я**.

Основным законом, управляющим смещением равновесия, служит принцип Ле-Шателье: «Если на систему, находящуюся в равновесии, оказывается внешнее воздействие, то равновесие смещается в сторону, указываемую воздействием, до тех пор, пока нарастающее в системе противодействие не станет равно оказанному воздействию».

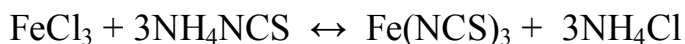
Внешним воздействием, смещающим равновесие, может быть изменение температуры, давления, концентрации одного или нескольких веществ, участвующих в реакции. «Смещение равновесия в сторону, указанную воздействием» означает, что при повышении давления преимущество получает процесс, ведущий к уменьшению объема, т.е. к тому же результату, что и само воздействие. Нагревание ведет к увеличению роли эндотермического процесса, т.е. процесса, увеличивающего запас энергии в системе (эндотермические реакции идут с поглощением тепла, а экзотермические - с его выделением).

Увеличение концентрации одного из веществ приводит к смещению равновесия в сторону расходования этого вещества.

3.1. Экспериментальная часть

ОПЫТ 1. Влияние концентрации веществ на смещение химического равновесия.

Реакция между хлоридом железа и тиоцианатом аммония протекает по уравнению:



Красная окраска образовавшегося раствора обусловлена содержанием в нем тиоционата (роданида) железа. По изменению интенсивности этой окраски можно судить о направлении смещения равновесия при изменении концентрации какого-либо реагирующего вещества.

В одной пробирке приготовить смесь (по 4 мл) разбавленных растворов FeCl_3 и NH_4NCS . Полученный окрашенный раствор разлить поровну в 4 пробирки.

В первую пробирку добавить 2 капли насыщенного раствора FeCl_3 . Во вторую пробирку добавить несколько кристалликов NH_4NCS (или KNCS). В третью пробирку всыпать немного твердой соли NH_4Cl (или KCl). Четвертую пробирку оставить для сравнения.

Записать уравнение химической реакции и выражение для константы

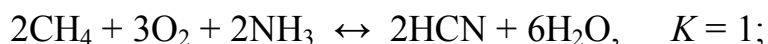
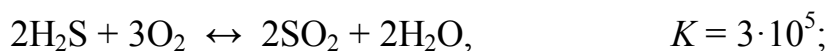
равновесия. Сделать выводы о влиянии концентрации веществ на смещение химического равновесия с использованием принципа Ле-Шателье.

Форма записи

Что добавлено	Изменение интенсивности окраски	Смещение равновесия
1. FeCl ₃	более интенсивная	вправо
2. NH ₄ NCS		
3. NH ₄ Cl		

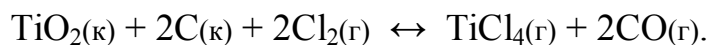
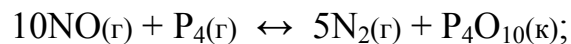
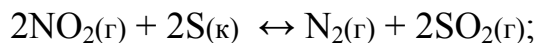
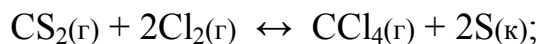
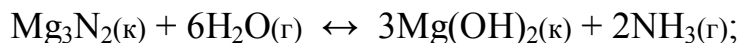
3.2. Контрольные вопросы и задания

1. К гомогенных химических системах при постоянных давлении и температуре установилось состояние равновесия:



По данным значениям констант равновесия укажите, реагенты или продукты будут преобладать в равновесной смеси веществ. На основании закона действующих масс составьте выражения для констант равновесия.

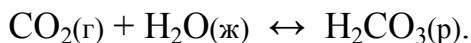
2. В гетерогенных химических системах установилось состояние равновесия:



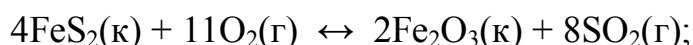
На основании закона действующих масс составьте выражения для

констант равновесия.

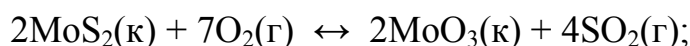
3. За последние 100 лет количество углекислого газа, поступающее за счет сжигания ископаемого топлива, возросло в 50 раз, а парциальное давление CO_2 в атмосфере за это же время увеличилось в 1.2 раза. Объясните это соотношение, допустив, что CO_2 поглощается океаном:



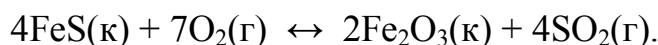
4. Рассчитать равновесный выход диоксида серы в реакциях окислительного обжига сульфидных минералов - пирита, молебденита, пирротина, если в состоянии равновесия количество SO_2 равно 0.4 моль, а начальный объем O_2 составлял 33.6 л (н.у.):



пирит



молибденит



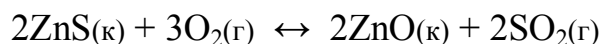
пирротин

5. Равновесный процесс, протекающий в подземных пещерах при образовании сталактитов и сталагмитов, можно описать уравнением



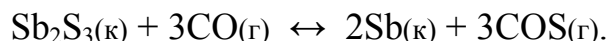
Напишите выражение для константы равновесия этого процесса. Укажите, в какую сторону сдвигается равновесие а) при улетучивании CO_2 , б) испарении воды, в) увлажнении атмосферы в пещерах.

6. Состояние равновесия реакции окисления сфалерита



установилось при равновесной концентрации диоксида серы, равной 0.25 моль/л. Рассчитать исходную концентрацию кислорода.

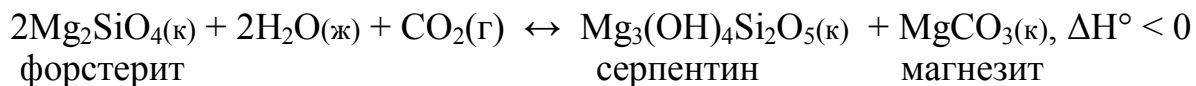
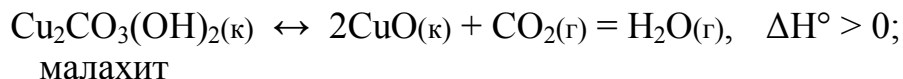
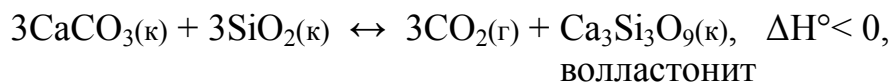
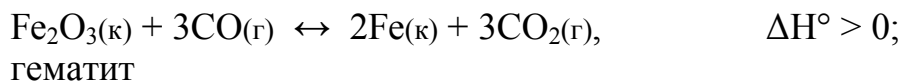
7. В герметически закрытом сосуде объемом 0.25 л проводят реакцию восстановления антимонита



Равновесная концентрация каждого газообразного вещества равна 0.3 моль/л. Для смещения равновесия добавляют 0.1 моль CO . Определить новые равновесные концентрации CO и COS .

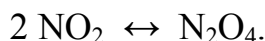
8. Определить, влево или вправо сместится положение равновесия

реакций



при следующих воздействиях: а) введение избытка диоксида углерода, б) нагревание, в) увеличение давления.

9. На некоторых предприятиях систематически из труб в атмосферу выбрасываются оксиды азота, что можно наблюдать как газ красно-желтого цвета (лисий хвост). Объяснить причину различной интенсивности окраски этого газа в зависимости от времени года (лето, зима), если известно, что NO_2 - бурый газ при -11°C превращается в димер N_2O_4 - бесцветные кристаллы, а при обычных условиях существует смесь NO_2 и N_2O_4



Укажите знак при ΔH в этом уравнении.

4. ИОННЫЕ РАВНОВЕСИЯ В РАСТВОРАХ ЭЛЕКТРОЛИТОВ

Ц е л ь р а б о т ы - Изучение смещения ионного равновесия в водных растворах.

Электrolитами называют вещества, диссоциирующие в растворах (или расплавах) на ионы и способные проводить электрический ток. Распад вещества на ионы называется электролитической диссоциацией. Перенос тока в растворах (и расплавах) электролитов осуществляется положительными и отрицательными ионами, которые называются катионами и анионами. К электролитам относятся соли, кислоты и основания.

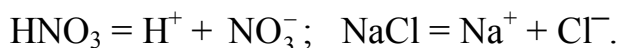
Для количественной характеристики электролитической диссоциации используется степень диссоциации α - доля моля электролита, существующая в растворе в виде ионов:

$$\alpha = C/C_0,$$

где C - концентрация молекул, распавшихся на ионы, моль/л;

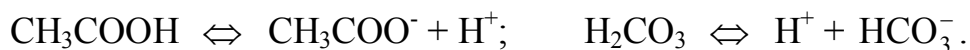
C_0 - исходная концентрация раствора, моль/л.

По величине степени диссоциации все электролиты делятся на сильные и слабые. К сильным относятся те электролиты, α - степень диссоциации которых равна единице, т.е. $C = C_0$. Распад на ионы сильных электролитов протекает необратимо. В растворе сильного электролита не может быть недиссоциированных молекул.



К сильным электролитам относятся практически все соли, гидроксиды щелочных и щелочно-земельных металлов и некоторые кислоты (например, HCl , HNO_3 , H_2SO_4 , HBr , HI , HClO_4)

Степень диссоциации слабых электролитов меньше единицы ($C < C_0$). Их ионизация протекает обратимо:



Константу равновесия электролитической диссоциации слабого электролита называют константой диссоциации. Например, при 298 К

$$K_{\text{CH}_3\text{COOH}} = \frac{C_{\text{CH}_3\text{COO}^-} \cdot C_{\text{H}^+}}{C_{\text{CH}_3\text{COOH}}} = 1.8 \cdot 10^{-5}.$$

$$K_{\text{H}_2\text{CO}_3} = \frac{C_{\text{H}^+} \cdot C_{\text{HCO}_3^-}}{C_{\text{H}_2\text{CO}_3}} = 4.4 \cdot 10^{-7}.$$

Из величин констант видно, что угольная кислота по первой ступени электролит более слабый, чем уксусная кислота.

Степень и константа ионизации слабого электролита связаны зависимостью (закон Оствальда):

$$K = \frac{\alpha^2 \cdot C_0}{1 - \alpha}.$$

Если степень ионизации электролита значительно меньше единицы, то уравнение можно записать $K = \alpha^2 \cdot C_0$, откуда следует, что α возрастает с разведением раствора.

В чистой воде кроме молекул H_2O содержатся протоны и гидроксид-ионы, при этом

$$[\text{H}^+] = [\text{OH}^-] = 1 \cdot 10^{-7} \text{ моль/л (25}^\circ \text{C)}.$$

Содержание протонов и гидроксид-ионов выражают также через водород-

ный показатель $pH = 1g [H^+]$. При $pH = 7$ среду водного раствора называют нейтральной, при $pH < 7$ - кислотной и при $pH > 7$ - щелочной.

Каковы пределы значений pH в природе? Рудничные воды выветривающихся колчеданных месторождений, содержащие свободную серную кислоту, имеют pH около 2, а воды окисляющихся месторождений самородной серы в песчаниках - еще ниже. Воды кратерных озер имеют pH 1-3, торфяных болот около 4, буроугольных месторождений около 5, pH дождевой воды примерно 5.5. Обычные грунтовые воды имеют pH 6.5 - 8.5, морская вода (в зависимости от времени года, ее температуры, количества растворенной в ней углекислоты, органических кислот, привнесенных реками) колеблется от 8.2 до 8.5. В содовых озерах pH достигает 9-10.

4.1. Экспериментальная часть

ОПЫТ 1. Сравнение относительной силы кислот

В одну пробирку наливают 1-2 мл 2М раствора уксусной кислоты, в другую - столько же раствора соляной кислоты той же концентрации. В обе пробирки добавляют небольшое количество мелко измельченного известняка. Взбалтывая пробирки с содержимым, наблюдать, одинаково ли быстро растворяется $CaCO_3$ во взятых кислотах.



Интенсивность выделения CO_2 при этой реакции служит относительным индикатором концентрации водородных ионов. Рассчитайте, во сколько раз концентрация протонов в растворе HCl больше, чем в растворе CH_3COOH , если $K_{CH_3COOH} = 1.8 \cdot 10^{-5}$.

Напишите уравнения диссоциации обеих кислот.

ОПЫТ 2. Влияние концентрации одноименных ионов на ионизацию слабой кислоты.

К 1-2 мл 2М раствора уксусной кислоты в двух пробирках прибавьте 2 капли метилоранжа. Отметьте окраску индикатора. Добавьте при перемешивании в одну пробирку несколько кристалликов ацетата аммония до изменения цвета раствора. Как изменился pH раствора? Объясните изменение pH , применяя правило Ле Шателье и используя выражение константы диссоциации CH_3COOH

ОПЫТ 3. Влияние концентрации одноименных ионов на ионизацию слабого основания.

В две пробирки наливают по 1-2 мл 2М раствора гидроксида аммония и по 2 капли фенолфталеина. В одну из пробирок добавляют при перемешивании несколько кристалликов ацетата аммония до изменения цвета раствора. Объясните причину наблюдаемого изменения окраски на основании уравнения диссоциации NH_4OH , принципа Ле Шателье и константы диссоциации NH_4OH .

ОПЫТ 4. Определение характера диссоциации гидроксидов

В три пробирки наливают по 2-3 мл растворов: в 1-ю - силиката натрия, во 2-ю - сульфата никеля, в 3-ю - сульфата цинка. До начала выпадения осадков гидроксидов добавляют по каплям в 1-ю - раствор серной кислоты, а во 2-ю - раствор гидроксида натрия.

Содержимое каждой пробирки взбалтывают и разливают каждый осадок гидроксидов на две пробирки. В одну пробирку добавляют разбавленной кислоты, а в другую концентрированной щелочи. На основании наблюдений за растворением осадков кремниевой кислоты, гидроксида никеля и гидроксида цинка в кислоте и щелочи сделайте вывод о кислотно-основном характере электролитической диссоциации этих гидроксидов.

Напишите уравнения диссоциации гидроксидов.

4.2. Контрольные вопросы и задания

1. Присутствие каких ионов можно ожидать в водном растворе сернистой кислоты H_2SO_3 ? Запишите выражения для констант диссоциаций этой кислоты.
2. Почему константа электролитической диссоциации служит более удобной характеристикой, чем степень диссоциации?
3. Объясните, почему соли являются сильными электролитами. На примере NaHCO_3 укажите характер химических связей, по которым электролитическая диссоциация протекает в водном растворе: а) практически полностью; б) частично; в) отсутствует.
4. Укажите, корректно ли сопоставлять такие свойства, как растворимость вещества и способность его к электролитической диссоциации.
5. В практике флотации используются процессы с низкими и высо-

кими значениями pH флотационной пульпы. Можно ли приготовить растворы с pH 0, -1, -2, 14, 15, 16?

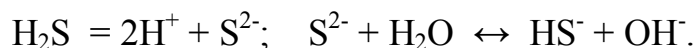
6. Вычислите концентрацию ионов водорода в 1М (9.45 %-ном) растворе серной кислоты, pH которого - 0.005. Объясните полученный результат.

7. В Первоуральске выпал кислотный дождь, водородный показатель которого равен 2.5. Во сколько раз превышена концентрация иона водорода, если обычная дождевая вода имеет pH = 5.5?

8. Шахтные воды Кизеловского бассейна содержат 0.01 г/л ионов водорода. Рассчитайте водородный показатель этих вод, концентрацию OH^- ионов. Укажите, кислотный или щелочной характер имеют эти воды.

9. Во сколько раз уменьшится концентрация ионов водорода, если к 1 литру раствора уксусной кислоты с концентрацией 0.005 моль/л прибавить 0.05 моль ацетата натрия, считая, что концентрация недиссоциированных молекул уксусной кислоты, как и объем раствора остаются практически постоянными? $K_{\text{CH}_3\text{COOH}} = 1.8 \cdot 10^{-5}$.

10. Для оценки pH раствора сероводорода студент записал следующие уравнения:



Таким образом, студент сделал вывод, что среда щелочная. Найдите ошибки в его рассуждениях.

5. РЕАКЦИИ ИОННОГО ОБМЕНА

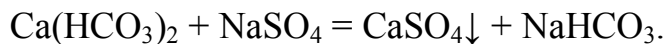
Ц е л ь р а б о т ы - выявление закономерностей протекания реакций ионного обмена в растворах электролитов.

Минералы и горные породы в условиях земной поверхности стремятся перейти в более устойчивые соединения. Известняки медленно растворяются в водах, содержащих углекислоту, образуя гидрокарбонат кальция. Грунтовые воды, содержащие $\text{Ca}(\text{HCO}_3)_2$, реагируют с сульфатно-хлоридно-магниевыми (морскими) водами. При этом осаждаются гипс и доломит:

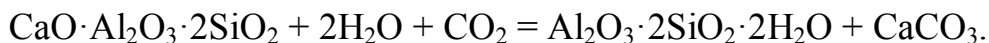


Так озера морского типа превращаются в озера континентального типа. Сульфатно-натриевые воды - результат выщелачивания горных по-

род, могут образовывать содовые озера.



Изверженные горные породы выветриваются, в полевых шпатах содержание алюминия увеличивается от ранних пород к поздним. При этом из них выносятся катионы щелочноземельных металлов. Например, из анорита образуется каолинит



В результате воздействия растворов, содержащих в повышенных концентрациях ионы Mg^{2+} и SO_4^{2-} , происходит доломитизация известняков



Если химическая реакция протекает, то она отличается следующими признаками:

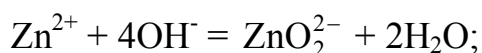
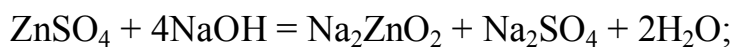
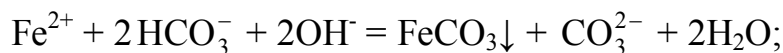
происходит образование осадка, или растворение осадка, или изменяется цвет осадка или раствора, или появляются пузырьки газа.

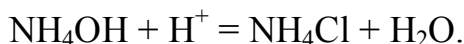
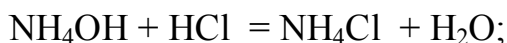
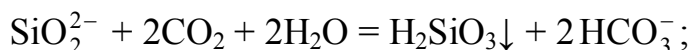
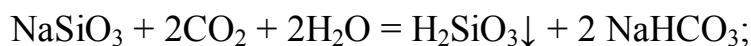
Сущность ионных реакций обмена сводится к соединению ионов в молекулы новых веществ. Равновесия ионных реакций в растворах смещаются в сторону образования слабых электролитов (слабых кислот, слабых оснований, воды) и сильных электролитов (осадков, летучих веществ).

Все кислые соли в воде растворяются, основные соли, как правило, нерастворимы.

В ионных уравнениях сильные, хорошо растворимые электролиты записываются в форме ионов, а слабые электролиты, газы и осадки - в виде молекул.

Рассмотрим следующие примеры реакций. Запишем их сначала в молекулярной форме, а затем в виде кратких ионных уравнений.





5.1. Экспериментальная часть

ОПЫТ 1. Образование осадков

а) В две пробирки наливают по 2 мл раствора хлорида бария и добавляют в одну пробирку сульфата натрия, а в другую - нитрата калия. Написать молекулярное и ионное уравнения и сделать вывод, в каком случае соль реагирует с другой солью;

б) В две пробирки наливают по 2 мл раствора сульфата меди. В одну пробирку добавляют 1 мл очень разбавленный (1%-ный) раствор гидроксида натрия, а в другую - столько же разбавленного раствора той же щелочи. Написать молекулярные и ионные уравнения, указав окраску образующихся осадков и учитывая, что в первом случае образуется основной сульфат меди $(\text{CuOH})_2\text{SO}_4$. Сделайте вывод об условиях образования основной соли и гидроксида. Осадки сохранить для выполнения опыта 2б;

в) В две пробирки наливают по 2 мл раствора хлорида кобальта. В одну пробирку добавляют разбавленного раствора щелочи до образования синего осадка основной соли. Во вторую пробирку приливают еще столько же щелочи и нагревают с целью получения гидроксида кобальта розового цвета. Содержимое пробирок оставляют для проведения опыта 2в. Написать молекулярное и ионные уравнения, указав цвет осадков.

ОПЫТ 2. Растворение осадков.

а) Наливают в пробирку известковую воду $\text{Ca}(\text{OH})_2$, через этот раствор пропускают углекислый газ из аппарата Киппа. Наблюдают образование белого осадка средней соли, продолжают пропускать пузырьки CO_2 до растворения белого осадка и получения бесцветного прозрачного раствора кислой соли $\text{Ca}(\text{HCO}_3)_2$. Написать молекулярные и ионные уравнения образования карбоната кальция и растворения его. Сделайте вывод об условии получения кислой соли.

б) В обе пробирки опыта 1б добавляют серной кислоты до растворения осадков. Написать молекулярные и ионные уравнения реакции растворения. Объяснить причину сдвига ионного равновесия;

в) Берут пробирки с осадками опыта 1в. В пробирку с синим осадком добавляют хлороводородной кислоты, в пробирку с розовым осадком - разбавленной щелочи. Напишите молекулярные и ионные уравнения. Наблюдать растворение одного из осадков. Дать объяснения наблюдениям.

О П Ы Т 3. Образование газообразного вещества

Все сульфиты, растворимые и нерастворимые в воде, разлагаются минеральными кислотами с выделением диоксида серы, который определяют как запах горящей серы.

К раствору сульфита натрия приливают разбавленной серной кислоты. Обнаруживают запах SO_2 , стараясь запомнить его. Это позволит впредь распознавать диоксид серы органолептически.

Написать молекулярное и ионное уравнение реакции.

О П Ы Т 4. Образование слабых электролитов

а) Наливают в пробирку 1-2 мл раствора ацетата натрия и добавляют разбавленной серной кислоты. Определяют по запаху образующуюся уксусную кислоту;

б) Наливают в пробирку 1-2 мл раствора хлорида аммония и добавляют разбавленной щелочи. Определяют по запаху выделяющийся аммиак;

в) Наливают в пробирку 3 мл раствора сульфата хрома (III) и приливают к нему по каплям раствор разбавленной щелочи до появления серо-зеленого осадка гидроксида хрома.

Содержимое пробирки разделяют на две части. К одной части приливают раствор серной кислоты, к другой - раствор щелочи. Сравнить цвет полученных растворов. Сделать вывод о характере гидроксида хрома.

Для опытов а), б), в) написать молекулярные и ионные уравнения реакций, объяснить причины сдвига ионных равновесий.

Сделать вывод, в каком направлении протекают реакции ионного обмена в растворах электролитов.

5.2. Контрольные вопросы и задания

1. Составить в молекулярном виде уравнения реакций растворения следующих малорастворимых минералов:

а) стронцианит SrCO_3 переводят в водный раствор насыщением CO_2 суспензии минерала в воде;

б) сассолин $\text{B}(\text{OH})_3$ обрабатывают избытком раствора едкого натра;

в) гиббсит $\text{Al}(\text{OH})_3$ хорошо растворяется известковым молоке;

г) азурит $\text{Cu}(\text{OH})_2 \cdot 2\text{CuCO}_3$ обрабатывают хлороводородной кислотой;

д) гетит Fe_2O_3 хорошо растворяется в серной кислоте;

е) гемиморфит $\text{Zn}(\text{OH})_2 \cdot \text{Zn}_3\text{Si}_2\text{O}_7$ нагревают в растворе гидроксида натрия;

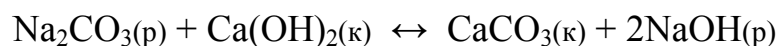
ж) брусит $\text{Mg}(\text{OH})_2$ разлагается раствором серной кислоты;

з) борнит $\text{FeS} \cdot \text{CuS} \cdot 2\text{Cu}_2\text{S}$ обрабатывают соляной кислотой.

2. При смещении водных растворов одного из следующих веществ: NaOH , KOH , CsOH концентрацией 1 моль/л с одинаковыми объемами 1М раствором HCl , HBr , HNO_3 , HClO_4 выделяется примерно одно и то же количество теплоты, составляющее 55-59 кДж/моль. О чем это свидетельствует? Напишите уравнения реакции в ионном виде.

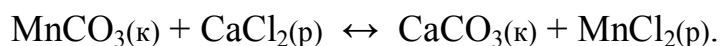
3. При смешении 1М водных растворов одной из следующих кислот: азотной, уксусной, бензойной с одинаковыми объемами 1М растворов KOH обнаруживаются различные тепловые эффекты. Объясните, приведя уравнения реакций в молекулярно-ионном виде.

4. Укажите причины, по которым реакция



обратима, составьте выражение для константы равновесия. Почему в этом процессе образуется только разбавленный раствор гидроксида натрия, а получение концентрированного раствора невозможно?

5. Для переработки карбонатных марганцевых руд предложен способ, основанный на выщелачивании их раствором хлорида кальция:



Можно ли регенерировать раствор хлорида кальция и вывести одновременно марганец в осадок добавлением к продуктам выщелачивания суспензии $\text{Ca}(\text{OH})_2$? Напишите уравнение реакции.

6. Растворение соли слабой кислоты в растворах кислот должно проходить тем быстрее, чем больше концентрация ионов водорода. Однако кальцит CaCO_3 растворяется в растворе уксусной кислоты быстрее, чем в растворе серной. Почему?

7. В 250 мл раствора содержится 1 г NaOH . Вычислите молярную концентрацию и pH этого раствора.

8. Кислые растворы имеют кислый вкус, щелочные - вкус мыла. Сливаются равные объемы растворов хлороводородной кислоты и гидроксида натрия одинаковой концентрации. Какой вкус полученного раствора?

9. Гашеную известь $\text{Ca}(\text{OH})_2$ используют при флотации для создания щелочной среды (pH 12 и более), отделения пирита от сфалерита и сульфидов меди. Как изменяется pH растворов извести при хранении их в открытых емкостях? Напишите уравнение реакции.

6. ГИДРОЛИЗ СОЛЕЙ

Ц е л ь р а б о т ы - Изучение свойств водных растворов, связанных с реакцией гидролиза солей.

Природные воды часто не бывают нейтральными, а имеют либо кислую, либо щелочную среду вследствие гидролиза. При химическом выветривании известняков образуются щелочные растворы, а пиритсодержащих - кислые. Изменение нейтральной реакции среды водного раствора - признак гидролиза соли, обменной химической реакции, протекающей с участием воды. Однако не все соли вступают в реакцию гидролиза. Если растворить в воде хлорид калия KCl , нейтральная реакция среды (pH = 7), характерная для чистой воды, не изменится. Соли, образованные сильным основанием и сильной кислотой (NaCl , LiNO_3 , CsBr и т.п.), в реакцию гидролиза не вступают.

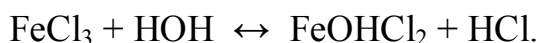
С водой взаимодействуют: 1) соли, образованные слабыми основаниями и сильными кислотами (NH_4Cl , CuSO_4 , $\text{Zn}(\text{NO}_3)_2$ и т.п.); 2) соли, образованные слабыми кислотами и сильными основаниями (Na_2S , KCN , BaCO_3 и т.п.); 3) соли, образованные слабыми основаниями и слабыми

кислотами ($\text{NH}_4\text{CH}_3\text{COO}$ и т.п.).

Из рассмотренных примеров следует, что в реакцию с водой вступают катионы слабых оснований и анионы слабых кислот. Если эти ионы многозарядны (Fe^{3+} , Cu^{2+} , CO_3^{2-} , SiO_3^{2-} и т.п.), их взаимодействие с водой обычно идет до образования основного или кислого иона (первая ступень гидролиза). Например, соль FeCl_3 , образованная слабым основанием с сильной кислотой, подвергается гидролизу по катиону:

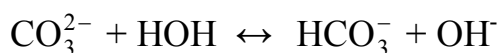


Или в молекулярной форме:

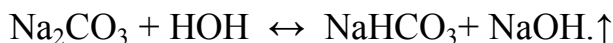


В результате гидролиза соли FeCl_3 появляется избыток катионов H^+ и раствор приобретает кислую реакцию, $\text{pH} < 7$.

Гидролизу по аниону подвергаются соли, образованные сильным основанием и слабой кислотой. В качестве примера запишем уравнение гидролиза соли Na_2CO_3 в ионном виде:

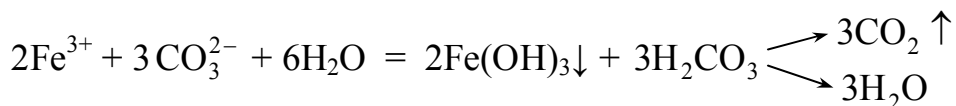
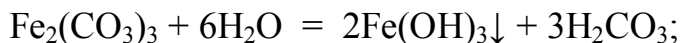


И в молекулярной форме:



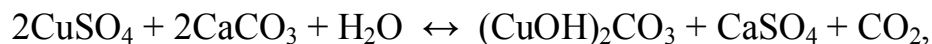
Избыток анионов OH^- придает раствору щелочную реакцию, $\text{pH} > 7$.

Если же соль образована слабым малорастворимым основанием и слабой летучей кислотой, то происходит полный необратимый гидролиз. В таблице растворимости такие соли обозначены прочерком, означающим, что эти соли в водных растворах не существуют. Например, гидролиз карбоната железа (III):

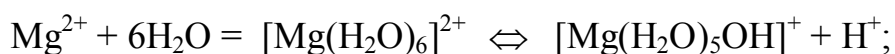


т.е. карбонат железа (III) может существовать только в виде сухой соли, а в растворе он подвергается полному гидролизу, образуя труднорастворимый гидроксид железа (III) и слабую летучую угольную кислоту. В подобных случаях в осадок выпадает наименее растворимый из возможных продуктов гидролиза. Так, растворимость $(\text{CuOH})_2\text{CO}_3$ меньше, чем $\text{Cu}(\text{OH})_2$,

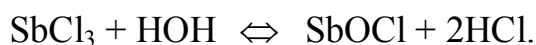
поэтому в зоне окисления минералов меди в известняках встречается малахит



В водном растворе положительные ионы металлов гидратированы. Многие из них связывают воду так прочно, что их можно рассматривать как комплексные ионы. Гидролиз солей, образованных слабыми основаниями и сильными кислотами, происходит за счет молекул воды, входящих в комплексный ион. При этом катион металла выталкивает за пределы внутренней сферы одноименно заряженный ион водорода из молекулы воды, среда становится кислой. Например, при гидролизе хлорида магния координационное число Mg^{2+} равно шести



Ионы Bi^{3+} , Sb^{3+} , Ti^{4+} , V^{4+} обладают настолько сильным поляризующим действием, что выталкивает из молекулы воды оба иона водорода, вследствие чего образуются ионы BiO^+ висмутил, SbO^+ антимонид, TiO^{2+} титанил, VO^{2+} ванадил.



6.1. Экспериментальная часть

О П Ы Т 1. Образование основной соли при гидролизе

В три пробирки наливают по 3-4 капли нейтрального раствора лакмуса и добавляют по 2 мл растворов: в одну пробирку - дистиллированной воды, в другую - сульфата натрия, в третью - сульфата алюминия. Сравнивают окраску индикатора в воде и растворах солей. Сделать вывод о возможности гидролиза.

Написать молекулярное и ионное уравнение реакции гидролиза: отразить отсутствие гидролиза в пробирке с раствором Na_2SO_4 .

О П Ы Т 2. Образование кислой соли при гидролизе

В две пробирки наливают по 3-4 капли нейтрального раствора фенолфталеина и добавляют по 2 мл растворов: хлорида натрия и карбоната натрия. Сравнивают окраску индикатора в воде и растворах солей.

Сделать вывод о возможности гидролиза.

Написать молекулярное и ионное уравнение реакции гидролиза: отразить отсутствие гидролиза в пробирке с раствором NaCl.

О П Ы Т 3. Смещение равновесия гидролиза

Налить в пробирку 1-2 мл раствора нитрата висмута $\text{Bi}(\text{NO}_3)_3$ и разбавить его водой в 3-5 раз. Наблюдать образование осадка, т.е. помутнение раствора. Составить молекулярное и ионное уравнение реакции гидролиза, зная, что труднорастворимым продуктом является соль BiONO_3 .

В пробирку с осадком BiONO_3 прибавить несколько капель концентрированной азотной кислоты. Наблюдать растворение осадка. Объяснить наблюдаемое, исходя из уравнения гидролиза.

О П Ы Т 4. Влияние нагревания на гидролиз ацетата натрия

К 3-4 мл раствора уксуснокислого натрия CH_3COONa прибавить 1-2 капли фенолфталеина и нагреть до кипения. Обратит внимание на появление розовой окраски, исчезающей при охлаждении раствора.

Написать ионное и молекулярное уравнение реакции гидролиза уксуснокислого натрия. Объясните различие окраски при нагревании и охлаждении раствора.

О П Ы Т 5. Полный гидролиз (совместный гидролиз)

К 1-2 мл раствора сернокислого алюминия $\text{Al}_2(\text{SO}_4)_3$ прилить такой же объем раствора карбоната натрия Na_2CO_3 . Наблюдать выделение углекислого газа и образование осадка гидроксида алюминия. Написать молекулярное и ионное уравнение совместного гидролиза взятых солей.

6.2. Контрольные вопросы и задания

1. На некоторых обогащательных фабриках иногда барабаны (емкости) из-под цианида натрия обезвреживают 10%-ным раствором железного купороса FeSO_4 . Напишите уравнения реакции, ведущих к образованию в этих условиях циановодородной кислоты, и покажите тем самым, что такой способ растворения цианидов абсолютно недопустим. При подкислении до $\text{pH} \leq 9$ работать с растворами цианида натрия опасно; безопасно при $\text{pH} > 10$.

2. Раствор основания и раствор кислоты смешивают в эквивалент-

ных соотношениях. Для каких из перечисленных пар раствор будет иметь нейтральную реакцию:

- а) $\text{NH}_4\text{OH} + \text{HCl}$, б) $\text{NH}_4\text{OH} + \text{CH}_3\text{COOH}$, в) $\text{NaOH} + \text{HCl}$,
г) $\text{NaOH} + \text{CH}_3\text{COOH}$?

3. Сточные воды обогатительных фабрик, содержащие гидрокарбонат кальция, очищают от коллоидных примесей (удалить которые отстаиванием и фильтрованием невозможно) добавлением к ним сульфата алюминия. Образующийся хлопьевидный $\text{Al}(\text{OH})_3$ обволакивает коллоидные частицы примесей и вызывает их осаждение. Объясните образование $\text{Al}(\text{OH})_3$ и напишите уравнение реакции.

4. Определить, возможна ли реакция окисления сфалерита кислородом воздуха в стандартных условиях, если



ΔG_{298}^0 , кДж/моль	-201	-237	-2564

Сделайте вывод о кислотности рудничных вод, содержащих в качестве продукта выветривания сульфат цинка, записав уравнение реакции гидролиза в молекулярном и ионном виде.

5. При окислении пирита, преобладающего в колчеданных рудах, кислородом, растворенным в воде, выделяется сульфат железа (III). Поступая с нисходящим током растворов в нижние горизонты, он реагирует с породой. Сделайте вывод о составе породы, если наблюдается совместное образование гипса $\text{CaSO}_4 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$ и лимонита $\text{Fe}(\text{OH})_3$. Напишите уравнение реакции взаимодействия сульфата железа (III) и породы.

6. Объясните, приведя молекулярно-ионное уравнение, почему при нагревании раствора NaHCO_3 реакция среды из слабощелочной переходит в сильнощелочную.

7. В водном растворе хлорида цинка при нагревании происходит растворение кусочка металлического цинка. Напишите уравнения реакции, объясняя причину выделения водорода.

8. В жесткой воде ионы железа обычно присутствуют в виде гидрокарбоната железа (II). При хранении такой воды в открытых сосудах, железо окисляется кислородом воздуха, вода мутнеет из-за выпадения в осадок $\text{Fe}(\text{OH})_3$. Напишите уравнение реакции, в результате которой образуется гидроксид железа (III).

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

Проректор по учебно-методическому
комплексу



С. А. Мороз

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по выполнению самостоятельной работы,
практических занятий и контрольных работ

Б1.О.14 ХИМИЯ

Специальность
21.05.04 Горное дело

Направленность (профиль) подготовки
Горные машины и оборудование

Форма обучения: **очная, заочная**

Год набора: **2022**

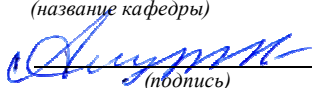
Автор: **Зайцева Н. А.**., к.х.н., доцент

Одобрены на заседании кафедры

Химии

(название кафедры)

Зав.кафедрой



(подпись)

Амдур А. М.

(Фамилия И.О.)

Протокол № 1 от 16.09.2021

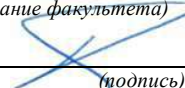
(Дата)

Рассмотрены методической комиссией
факультета

Горно-механического

(название факультета)

Председатель



(подпись)

Осипов П. А.

(Фамилия И.О.)

Протокол № 2 от 12.10.2021

(Дата)

Екатеринбург

ВВЕДЕНИЕ

Качественная реакция – химическая реакция, с помощью которой можно определить наличие в растворе того или иного вещества или его фрагмента (катиона, аниона, функциональной группы). Качественная реакция на ионы позволяет обнаружить («открыть») в растворе присутствие соответствующих ионов. При обнаружении открываемого иона обычно фиксируют появление аналитического сигнала — образование осадка, изменение окраски раствора, появление запаха и т. д.

Требования к качественным реакциям

1. Экспрессность (реакция должна протекать быстро).
2. Высокая чувствительность.
3. Селективность или специфичность.
4. Необратимость.

Чувствительность реакции определяется наименьшим количеством искомого вещества, которое может быть обнаружено данным реактивом в капле раствора.

Существенной характеристикой анализа является селективность (избирательность).

По избирательности реагенты можно разделить на три группы:

1. *Специфические реагенты* – реактивы, с помощью которых в данных условиях можно обнаружить только одно вещество (ион),

например: крахмал для обнаружения I_2 (синяя окраска); щёлочь для обнаружения NH^{4+} (запах аммиака).

Специфические реакции – реакции, которые дают возможность открывать одни ионы в присутствии различных других ионов.

2. *Селективные реагенты* – реактивы, с помощью которых в данных условиях можно обнаружить небольшое число веществ. Например, диметилглиоксим в аммиачном буферном растворе реагирует с Fe (II), Co (II), Ni (II), Zr (IV), Th (IV).

3. *Групповые реагенты* – используются в систематическом анализе смеси катионов и взаимодействуют со всеми катионами одной аналитической группы.

Реакции, позволяющие обнаружить искомые ионы в отдельных порциях сложной смеси при условии устранения влияния других ионов, называют **дробными реакциями**, а метод анализа, основанный на применении дробных реакций, называют **дробным анализом**. При этом порядок обнаружения катионов и анионов не имеет особого значения. При **систематическом анализе**, в отличие от дробного, соблюдается определенный порядок разделения и последующего открытия ионов. К обнаружению ионов приступают лишь после удаления из раствора всех других ионов, мешающих открытию. Систематический (групповой) анализ применяют при невозможности использования дробного анализа. На основе растворимости их солей или других соединений ионы делят на аналитические группы, на основании различных классификаций катионов разработаны разные методы систематического анализа катионов.

Методы систематического анализа

1. Сероводородный – основан на разной растворимости сульфидов и хлоридов в зависимости от pH -среды.
2. Аммиачно-фосфатный – основан на разной растворимости фосфатов.
3. Кислотно-основной – основан на разной растворимости в кислотах и основаниях гидроксидов и солей (табл. 1).

Таблица 1

Классификация катионов по кислотно-основному методу

Группа	Катионы	Групповой реактив	Характеристика группы
I	$\text{Na}^+, \text{K}^+, \text{NH}_4^+$	–	Хлориды, сульфаты и гидроксиды растворимы в воде
II	$\text{Ag}^+, \text{Pb}^{2+}, \text{Hg}_2^{2+}$	2M HCl	Хлориды нерастворимы в воде и разбавленных кислотах
III	$\text{Ca}^{2+}, \text{Sr}^{2+}, \text{Ba}^{2+}$	2M H_2SO_4	Сульфаты нерастворимы в воде, кислотах и щелочах
IV	$\text{Al}^{3+}, \text{Cr}^{3+}, \text{Zn}^{2+},$ $^*\text{As}^{3+}, ^*\text{As}^{5+}, \text{Sn}^{2+},$ Sn^{4+}	4M NaOH (избыток)	Гидроксиды амфотерны, растворимы в избытке щелочи
V	$\text{Fe}^{2+}, \text{Fe}^{3+}, \text{Mn}^{2+},$ $\text{Mg}^{2+}, \text{Bi}^{3+}, \text{Sb}^{3+}, \text{Sb}^{5+}$	2M NaOH (25 % NH_4OH)	Гидроксиды нерастворимы в избытке щелочи и аммиаке
VI	$\text{Cu}^{2+}, \text{Co}^{2+}, \text{Ni}^{2+},$ $\text{Hg}^{2+}, \text{Cd}^{2+}$	25% NH_4OH (избыток)	Гидроксиды растворимы в избытке аммиака с образованием аммиакатов

$^*\text{As}^{3+}$ и As^{5+} гидроксидов не образуют.

Лабораторная работа № 1

КАЧЕСТВЕННЫЕ РЕАКЦИИ НА КАТИОНЫ ЖЕЛЕЗА

Цель работы: познакомиться с качественными реакциями на катионы железа, определить наиболее подходящие реактивы для открытия Fe^{3+} и Fe^{2+} .

Для получения аналитического сигнала в качественном анализе используют химические реакции разных типов: реакции ионного обмена (осаждение, нейтрализация), окислительно-восстановительные, комплексообразование. Для обнаружения ионов железа возможно использование всех типов реакций.

Реакции ионного обмена в качественном анализе

Опыт 1. Действие щелочей на катионы Fe^{3+} и Fe^{2+}

В две пробирки налейте по 1 мл растворов FeCl_3 и FeSO_4 , добавьте по 1 мл раствора щёлочи в каждую пробирку. Сравните полученные осадки $\text{Fe}(\text{OH})_3$ и $\text{Fe}(\text{OH})_2$, составьте уравнения обеих реакций. Растворимы ли полученные гидроксиды железа в избытке щёлочи?

Опыт 2. Действие раствора аммиака на катионы Fe^{3+} и Fe^{2+}

В две пробирки налейте по 1 мл растворов солей железа (III) и железа (II), добавьте по 1 мл разбавленного раствора гидроксида аммония в каждую пробирку. Сравните полученные осадки с

осадками из первого опыта. Составьте уравнения реакций. Проверьте действие избытка концентрированного гидроксида аммония на оба осадка: образуют ли ионы железа аммиачные комплексы?

Реакции окисления-восстановления

Опыт 3. Действие окислителей на катионы Fe^{3+} и Fe^{2+}

а) В две пробирки налейте по 1 мл растворов солей Fe^{2+} и Fe^{3+} , добавьте по 2 мл раствора серной кислоты. В обе пробирки прилейте раствор перманганата калия, в какой из них наблюдается обесцвечивание KMnO_4 ? Запишите уравнение реакции, учитывая, что в кислой среде перманганат-ионы восстанавливаются до ионов Mn^{2+} , уравняйте его методом электронно-ионного баланса.

б) В две пробирки налейте по 1 мл растворов солей Fe^{2+} и Fe^{3+} , добавьте по 2 мл раствора серной кислоты. В обе пробирки прилейте раствор бихромата калия, в какой из них наблюдается изменение окраски раствора? Запишите уравнение реакции, учитывая, что бихромат-ионы $\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}$ восстанавливаются до ионов Cr^{3+} , уравняйте его методом электронно-ионного баланса.

Опыт 4. Действие восстановителей на катионы Fe^{3+} и Fe^{2+}

В две пробирки налейте по 1 мл растворов солей Fe^{2+} и Fe^{3+} , добавьте по 1 мл раствора йодида калия. Какая из солей железа проявила окислительные свойства? Запишите уравнение реакции, расставьте коэффициенты методом электронно-ионного баланса.

Реакции с участием комплексных ионов

Опыт 5. Реакция ионов железа с роданидом аммония

В две пробирки налейте по 1 мл раствора FeCl_3 и FeSO_4 , добавьте по 1 мл раствора роданида аммония NH_4SCN в каждую пробирку. В какой из пробирок наблюдается образование роданида железа красного цвета? Составьте уравнение реакции.

Опыт 6. Реакция ионов железа с реактивом Чугаева

В две пробирки налейте по 1 мл раствора соли железа (III) и железа (II), добавьте по 1 мл раствора аммиака и по 1 капле раствора диметилглиоксима ($\text{C}_4\text{H}_8\text{N}_2\text{O}_2$). Для какого иона железа наблюдается образование окрашенного внутрикомплексного соединения с реактивом Чугаева? Составьте уравнение реакции образования диметилглиоксимата железа $[\text{Fe}(\text{C}_4\text{H}_7\text{O}_2\text{N}_2)_2]$.

Опыт 7. Берлинская лазурь и турнбуллева синь

На растворы FeCl_3 и FeSO_4 подействуйте каплей раствора жёлтой кровяной соли (гексацианоферрата (II) калия). В каком случае наблюдается выпадение синего осадка? Запишите уравнение реакции, предполагая, что выпавший осадок берлинской лазури имеет состав $\text{Fe}_4[\text{Fe}(\text{CN})_6]_3$.

На растворы FeCl_3 и FeSO_4 подействуйте каплей раствора красной кровяной соли (гексацианоферрата (III) калия). В каком случае наблюдается выпадение синего осадка? Запишите уравнение реакции, предполагая, что выпавший осадок турнбуллевой сини

имеет состав $\text{Fe}_3 [\text{Fe} (\text{CN})_6]_3$. Сделайте вывод, какой кровяной солью можно открыть ион Fe^{2+} , и с помощью какой обнаруживается ион Fe^{3+} .

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Что произойдет с зеленоватым осадком $\text{Fe} (\text{OH})_2$ при добавлении к нему раствора перекиси водорода H_2O_2 ? Запишите уравнение реакции, уравнивайте его методом электронно-ионного баланса.

2. Выпадет ли осадок при смешивании равных объемов растворов FeCl_3 и NaOH , если $\text{ПР} (\text{Fe} (\text{OH})_3) = 3,8 \cdot 10^{-38}$, а концентрации растворов 0,001 моль/л? Выпадет ли осадок при смешивании равных объемов растворов FeSO_4 и NaOH , если $\text{ПР} (\text{Fe} (\text{OH})_2) = 4,8 \cdot 10^{-16}$, а концентрации обоих растворов 0,001 моль/л?

3. Какой объём соляной кислоты с концентрацией 0,01 моль/л требуется для полного растворения осадка $\text{Fe} (\text{OH})_3$ массой 0,5 г?

4. Реакция образования окрашенного роданида железа (опыт 3) является обратимой. Запишите выражение для константы равновесия этой реакции. Какими способами, согласно принципу Ле-Шателье, можно сместить равновесие в сторону образования окрашенного продукта?

5. Запишите уравнения реакций первичной и вторичной диссоциации красной и жёлтой кровяных солей. Почему чаще всего именно цианид-ионы используются для маскирования ионов железа в растворах?

6. Подвергаются ли соли железа гидролизу? Запишите уравнения взаимодействия с водой для FeCl_3 и FeSO_4 , определите тип гидролиза и кислотность среды раствора. Какую окраску приобретёт лакмус в этих растворах?

Лабораторная работа № 2

КАЧЕСТВЕННЫЕ РЕАКЦИИ НА ИОНЫ Co^{2+} , Ni^{2+} и Cu^{2+}

Цель работы: познакомиться с качественными реакциями на ионы Co^{2+} , Ni^{2+} и Cu^{2+} , выполняемыми пробирно, капельно, и с использованием экстракции, определить наиболее подходящие реакции для открытия каждого иона.

Предел обнаружения — минимальная концентрация или минимальное количество вещества, которое может быть обнаружено данным методом допустимой погрешностью. Предел обнаружения в значительной степени зависит от условий протекания реакции. Обычно для обнаружения ионов применяют реакции с пределом обнаружения 10^{-7} г (0,1 мкг) в 1 мл раствора.

Приемы для обеспечения низкого предела обнаружения

1. *Капельный анализ* — метод микрохимического анализа, в котором качественную реакцию проводят с использованием капли раствора. Реакции выполняют на стеклянной или фарфоровой пластинке, фильтровальной бумаге (иногда предварительно пропитанной раствором реагента и высушенной). Пределы обнаружения веществ 0,1–0,001 мкг в капле объемом 50 мм³. Минимальные пределы обнаружения достигаются при выполнении анализа на фильтровальной бумаге.

2. *Микрористаллоскопический анализ* — метод анализа, основанный на реакциях образования кристаллических осадков с

характерной формой кристаллов, для рассмотрения которых используется микроскоп.

3. *Экстракция* – процесс перевода вещества из водной фазы в органическую, используется для разделения и концентрирования веществ.

4. *Флотация* – процесс разделения мелких твёрдых частиц в водной суспензии или растворе, основанный на их избирательной адсорбции на границах раздела фаз в соответствии с их смачиваемостью, используется для разделения и концентрирования.

5. *Метод «умножающихся реакций»* – ряд последовательных реакций, в результате которых получается новое вещество в количестве, во много раз превышающем первоначальное количество обнаруживаемого вещества.

6. *Каталитические реакции.*

Реакции в пробирке (в растворе)

Опыт 1. Действие щелочей на катионы Co^{2+} , Ni^{2+} и Cu^{2+}

В три пробирки налейте по 1 мл растворов солей Co^{2+} , Ni^{2+} и Cu^{2+} , добавьте по 1 мл разбавленного раствора щёлочи в каждую пробирку. Составьте уравнения реакций образования синего $\text{Co}(\text{OH})\text{Cl}$, голубого $\text{Cu}(\text{OH})\text{Cl}$ и зелёного $\text{Ni}(\text{OH})\text{Cl}$. Подействуйте на каждый полученный осадок избытком концентрированной щёлочи, составьте уравнения реакций образования гидроксидов кобальта (II), никеля (II) и меди (II).

Опыт 2. Действие раствора аммиака на Co^{2+} , Ni^{2+} и Cu^{2+}

В три пробирки налейте по 1 мл растворов солей Co^{2+} , Ni^{2+} и Cu^{2+} , добавьте по 1 мл разбавленного раствора аммиака в каждую пробирку. Сравните полученные осадки с осадками из первого опыта. Составьте уравнения реакций.

Проверьте действие избытка концентрированного гидроксида аммония на полученные осадки, запишите уравнения реакций, учитывая, что в аммиачных комплексах кобальта и никеля координационное число комплексообразователя равно шести, а медь удерживает только четыре лиганда.

Разрушаются ли полученные аммиакаты раствором кислоты?

Опыт 3. Реакции с желтой кровяной солью

В три пробирки налейте по 1 мл растворов солей Co^{2+} , Ni^{2+} и Cu^{2+} , добавьте по 1 мл разбавленного раствора гексацианоферрата (II) калия в каждую пробирку. Что наблюдается? Составьте уравнения реакций, учитывая, что все осадки получены в результате полного ионного обмена.

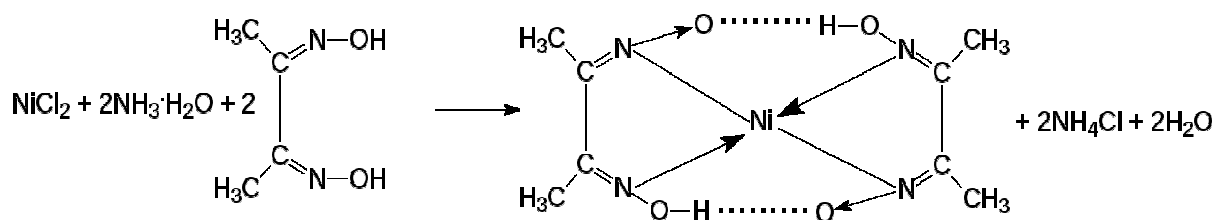
Капельные реакции на фильтровальной бумаге

Опыт 4. Реакция катионов Ni^{2+} с реактивом Чугаева

На сухую фильтровальную бумагу поместите несколько капель раствора соли никеля (II), добавьте каплю раствора аммиака и каплю раствора диметилглиоксима $\text{C}_4\text{H}_8\text{N}_2\text{O}_2$ (реактив Чугаева). Сравните наблюдаемый аналитический сигнал с реакцией образования

диметилглиоксимата железа (II), выполненной в предыдущей работе.

Запишите уравнение реакции



Проведите аналогичную реакцию с растворами меди (II) и кобальта (II). Какой из этих ионов может мешать определению ионов никеля и почему?

Опыт 5. Капельная реакция ионов Co^{2+} с роданидом аммония

Поместите на сухую фильтровальную бумагу несколько капель раствора хлорида кобальта (II), добавьте кристаллы сухой соли NH_4SCN , при необходимости добавьте ещё одну каплю раствора. Как изменилась окраска кристаллов? Составьте уравнение реакции образования комплексного соединения $(\text{NH}_4)_2[\text{Co}(\text{SCN})_4]$.

Обнаружение катионов с использованием экстракции

Опыт 6. Реакция ионов Co^{2+} с роданидом аммония

Поместите в пробирку несколько капель раствора хлорида кобальта (II), добавьте кристаллы сухой соли тиоцианата (роданида) аммония. Как изменилась окраска раствора?

Чувствительность этой реакции можно повысить с помощью экстракции окрашенного комплекса $(\text{NH}_4)_2[\text{Co}(\text{SCN})_4]$ органическим растворителем. Добавьте к полученному раствору несколько капель изоамилового спирта, взболтайте. Дождитесь разделения в пробирке водной и спиртовой фаз. Что при этом наблюдается?

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Составьте уравнения реакций первичной и вторичной диссоциаций гексаамминкобальта (II), гексаамминникеля (II), тетраамминмеди (II). Запишите формулы для константы нестойкости.

2. Для открытия ионов Ni^{2+} с помощью диметилглиоксима при реакции на капельной пластинке предел обнаружения Ni^{2+} – 0,16 мкг; в пробирке можно обнаружить 1,4 мкг Ni^{2+} в 1 мл. Предел обнаружения можно уменьшить до 0,015 мкг, если каплю анализируемого раствора нанести на фильтровальную бумагу, пропитанную диметилглиоксимом. Если осадок диметилглиоксимата никеля (II) флотируется на границе раздела фаз «вода – изоамиловый спирт», то предел обнаружения ионов Ni^{2+} понижается до 0,002 мкг. Определите минимальную молярную концентрацию ионов Ni^{2+} , открываемых каждым из способов.

3. Окисление тиосульфат-ионов ионами железа (III) ускоряется в присутствии ионов меди (каталитическая реакция). Время обесцвечивания тиоцианата железа (III) тиосульфатом натрия в отсутствие меди около двух минут. В присутствии ионов Cu^{2+} раствор тиоцианата железа (III) обесцвечивается мгновенно. Предел обнаружения меди – 0,02 мкг в 1 мл. Определите минимальную молярную концентрацию ионов Cu^{2+} , соответствующую этому пределу обнаружения.

Лабораторная работа № 3

КАЧЕСТВЕННЫЕ РЕАКЦИИ НА ИОНЫ Al^{3+} , Cr^{3+} , Zn^{2+}

Цель работы: познакомиться с качественными реакциями на ионы Al^{3+} , Cr^{3+} и Zn^{2+} , научиться использовать амфотерность их гидроксидов в химическом анализе, определить наиболее подходящие реакции для открытия каждого иона.

Для проведения каждой качественной реакции необходимо соблюдать определенные условия, основные из которых: pH -среды; температура; концентрации реагентов; присутствие определенных веществ; отсутствие мешающих ионов или веществ. Для протекания многих реакций необходима среда с определенным значением pH водного раствора. Значение pH можно контролировать с помощью индикаторов или прибора pH -метра. Для поддержания нужного значения pH при необходимости используют соответствующие буферные растворы.

Буферные растворы — это растворы, способные сохранять постоянное значение pH при разбавлении водой или добавлении к ним определенного количества сильных кислот или оснований. В состав буферной смеси входят в определенном количественном соотношении слабые кислоты и их соли с сильными основаниями или слабые основания и их соли с сильными кислотами.

Амфотерность гидроксидов алюминия, цинка и хрома (III) позволяет отделять их от остальных катионов действием растворов щелочей различной концентрации.

Опыт 1. Действие щелочей на катионы Al^{3+} , Cr^{3+} , Zn^{2+}

В три пробирки налейте по 1 мл растворов хлоридов алюминия, хрома и цинка, добавьте по несколько капель очень разбавленного раствора щёлочи в каждую пробирку до образования нерастворимых гидроксидов. Составьте уравнения реакций. Подействуйте на каждый полученный осадок избытком щёлочи до полного растворения, составьте уравнения реакций образования тетрагидроксоалюмината, тетрагидроксоцинката и гексагидроксохромата натрия.

Опыт 2. Действие раствора аммиака на ионы Al^{3+} , Cr^{3+} , Zn^{2+}

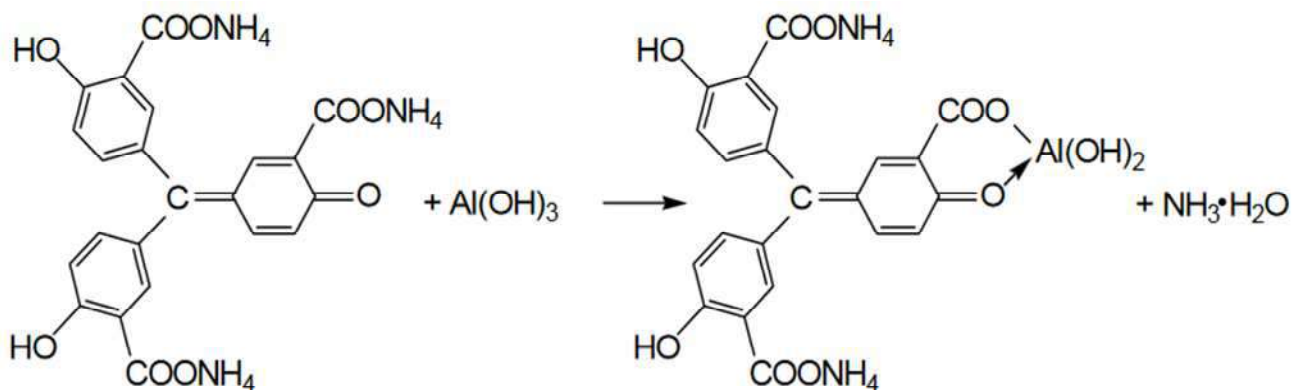
В три пробирки налейте по 1 мл растворов хлоридов алюминия, хрома и цинка, добавьте по 1 мл разбавленного раствора аммиака в каждую пробирку. Сравните полученные осадки с осадками из первого опыта. Составьте уравнения реакций образования соответствующих гидроксидов.

Проверьте действие избытка концентрированного гидроксида аммония на полученные осадки. Какие гидроксиды растворяются частично или полностью? Составьте реакцию комплексообразования, учитывая, что в образующихся аммиакатных комплексах координационное число каждого комплексообразователя вдвое больше, чем модуль его степени окисления.

Опыт 3. Реакция ионов алюминия с алюминоном

В пробирку поместите 3–4 капли раствора соли алюминия, при необходимости 2–3 капли раствора уксусной кислоты и 3–5 капель 0,01 % раствора алюминона ($C_{21}H_{11}O_9(NH_4)_3$). Смесь нагрейте на

водяной бане, добавьте несколько капель раствора аммиака до щелочной реакции и выпадения красного хлопьевидного осадка алюминиевого лака.



Опыт 4. Реакция ионов цинка с желтой кровяной солью

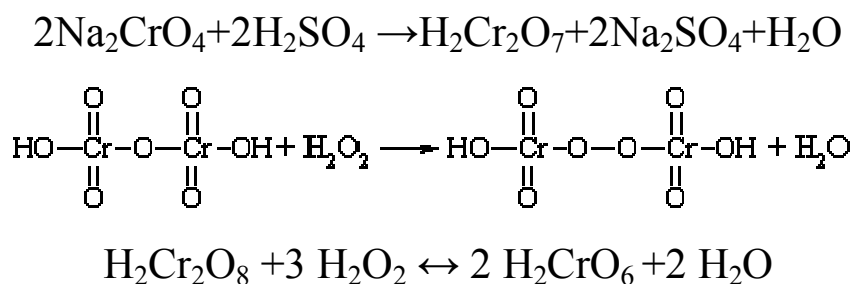
В пробирке к 1 мл раствора ZnCl_2 добавьте 1 мл раствора гексацианоферрата (II) калия. Наблюдайте выпадение белого осадка $\text{K}_2\text{Zn}_3[\text{Fe}(\text{CN})_6]_2$. Составьте уравнение этой реакции ионного обмена.

Опыт 5. Восстановительные свойства ионов хрома (III)

В пробирку поместите 2–3 капли раствора соли хрома(III), прибавьте 4–5 капель 2 моль/л раствора щёлочи NaOH до растворения осадка, и 2–3 капли 3 % раствора перекиси водорода H_2O_2 . Нагревайте до изменения зеленой окраски раствора на желтую (цвет хромат-ионов CrO_4^{2-}). Составьте уравнение окислительно-восстановительной реакции, расставьте коэффициенты методом электронно-ионного баланса.

Опыт 6. Образование надхромовой кислоты

К жёлтому раствору хромата натрия, полученному в предыдущем опыте, прибавьте 5 капель пероксида водорода H_2O_2 , ~0,5 мл изоамилового спирта, тщательно перемешайте и прибавьте по каплям раствор серной кислоты (1 моль/л). Верхний органический слой окрашивается в интенсивно синий цвет за счёт экстракции образовавшейся надхромовой кислоты H_2CrO_6 . Запишите уравнение реакции, протекающее через образование дихромовой кислоты и её последующее окисление перекисью водорода:



Составьте электронно-ионный баланс для этой реакции.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Составьте уравнения первичной и вторичной диссоциации солей, полученных в первом опыте: тетрагидроксоалюмината, тетрагидроксоцинката и гексагидроскохромата натрия.
2. Напишите выражение константы нестойкости для комплексных ионов тетраамминцинка и гексаамминхрома, полученных во втором опыте.
3. Напишите уравнения диссоциаций хромовой, дихромовой и надхромовой кислот.

Лабораторная работа № 4

РАЗДЕЛЕНИЕ И ОБНАРУЖЕНИЕ КАТИОНОВ Ag^+ , Pb^{2+} , Hg^{2+} МЕТОДОМ ОСАДОЧНОЙ БУМАЖНОЙ ХРОМАТОГРАФИИ

Цель работы: познакомиться с разделением и идентификацией катионов методом бумажной хроматографии

Хроматография – физико–химический метод разделения веществ, основанный на использовании сорбционных процессов в динамических условиях.

Анализируемые компоненты распределяются между подвижной и неподвижной фазами. Неподвижной фазой служит твердое вещество – сорбент. Подвижной фазой является жидкость или газ, протекающий через неподвижную фазу – элюент. Элюент в процессе хроматографирования перемещается вдоль сорбента, так что частицы анализируемых веществ могут многократно переходить из подвижной фазы в неподвижную и наоборот. Разделение веществ с помощью хроматографии основано на различном сродстве разделяемых компонентов к подвижной и неподвижной фазам.

Бумажная хроматография – вид хроматографии, в котором носителем неподвижного растворителя служит очищенная от примесей фильтровальная бумага. Подвижная фаза продвигается вдоль листа бумаги, главным образом за счет капиллярных сил. Бумажная хроматография отличается простотой, экспрессностью, наглядностью разделения, высокой чувствительностью (можно определить 10–20 мкг вещества с точностью 5–7 %).

Опыт 1. Подготовка фильтровальной бумаги

Два фильтра «синяя лента» диаметром 45 мм смочите 5 %-м раствором йодида калия, опуская фильтры в раствор пинцетом. Высушите фильтры на воздухе в чашке Петри.

Опыт 2. Получение первичной осадочной хроматограммы

В центр каждого высушенного фильтра нанесите пипеткой каплю анализируемой смеси катионов Ag^+ , Hg^{2+} и Pb^{2+} , после её полного впитывания нанесите еще одну, дайте ей впитаться. Катионы анализируемой смеси вступают в реакцию с KI, которым пропитан фильтр, образуя осадочную хроматограмму, зоны которой имеют цвета осадков AgI (жёлтый), HgI_2 (оранжевый), PbI_2 (ярко-желтый).

Полученные хроматограммы необходимо промыть дистиллированной водой. Для промывания хроматограмм нанесите на фильтры 2–3 капли дистиллированной воды, внося каждую последующую каплю после впитывания предыдущей до увеличения размера зон в два–три раза. Высушите обе осадочные хроматограммы, заполните табл. 1, составьте уравнения реакций образования осадков.

Таблица 1

Первичная хроматограмма смеси катионов Ag^+ , Hg^{2+} , Pb^{2+}

Зона адсорбции	Цвет зоны	Ион
1. Первая – хорошая адсорбция (в центре фильтра)		
2. Вторая – средняя адсорбция		
3. Третья – плохая адсорбция (края фильтра)		

Опыт 3. Получение проявленной осадочной хроматограммы

Анализируя первичную хроматограмму, легко определить катионы Hg^{2+} (оранжевая зона в центре) и Pb^{2+} (ярко-желтая зона по периферии). Бледно-желтая окраска AgJ либо видна плохо (из-за маскировки оранжевым HgJ_2 и ярко-желтым PbJ_2), либо не видна совсем. Для того, чтобы явно видеть зону серебра, первичную хроматограмму на одном из фильтров необходимо проявить.

Для проявления хроматограммы внесите в центр фильтра каплю раствора NaOH . При этом йодид свинца растворится в NaOH с образованием бесцветного плюмбита натрия Na_2PbO_2 , йодид ртути останется неизменным, бледно-жёлтое пятно йодида серебра постепенно почернеет вследствие превращения гидроксида серебра (I) в оксид серебра (I), который затем разложится до свободного серебра.

Заполните табл. 2, составьте уравнения всех протекающих при проявке первичной хроматограммы реакций.

Таблица 2

Вторичная хроматограмма смеси катионов Ag^+ , Hg^{2+} , Pb^{2+}

Зона адсорбции	Цвет зоны	Ион
1. Первая – хорошая адсорбция (в центре фильтра)		
2. Вторая – средняя адсорбция		
3. Третья – плохая адсорбция (край фильтра)		

По результатам работы сделайте вывод об эффективности метода бумажной хроматографии для дробного открытия катионов Ag^+ , Hg^{2+} , Pb^{2+} при их совместном присутствии.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Какие процессы лежат в основе хроматографического анализа?
2. Вычислите ПР йодида свинца (II), если известно, что растворимость его равна 0,03 г на 0,1 кг воды.
3. Выпадет ли осадок при взаимодействии равных объемов растворов AgNO_3 и KI , если концентрации обоих растворов 0,001 моль/л, а произведение растворимости йодида серебра $\text{ПР}(\text{AgI}) = 8,3 \cdot 10^{-17}$.
4. В избытке йодида калия осадок йодида ртути (II) растворяется без изменения степеней окисления элементов с образованием комплексного соединения тетрайодомеркурата калия. Составьте уравнение этой реакции, а также уравнения первичной и вторичной диссоциаций полученного соединения, запишите выражение для константы нестойкости комплексного иона.
5. Оксид серебра (I) неустойчив на воздухе, поэтому он используется не в чистом виде, а в аммиачном растворе (реактив Толленса). При взаимодействии гидроксида аммония и оксида серебра (I) образуется гидроксид диамминсеребра (I). Составьте уравнение этой реакции, а также уравнения первичной и вторичной диссоциаций полученного соединения, запишите выражение для константы нестойкости комплексного иона.
6. Дайте определения терминам «элюент», «сорбент», «элюат», «подвижная фаза», «неподвижная фаза», «сорбция», «десорбция».

Лабораторная работа № 5

ДРОБНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАЗЛИЧНЫХ КАТИОНОВ

Цель работы: с помощью качественных реакций определить, какая соль находится в каждой пробирке.

Ход работы

В двенадцати пронумерованных пробирках находятся следующие растворы соли:

Раствор бесцветный	Раствор может быть окрашенным
Хлорид аммония	Сульфат меди (II)
Хлорид кальция	Хлорид кобальта (II)
Сульфат марганца (II)	Хлорид никеля (II)
Сульфат железа (II)	Хлорид хрома (III)
Хлорид цинка	Хлорид железа (III)
Хлорид алюминия	
Нитрат свинца (II)	

После получения у преподавателя нескольких пробирок (по вариантам 3–6 шт.,) составьте в тетради таблицу для записи результатов анализа:

Качественный анализ растворов, номер (№) (запишите номера пробирок)

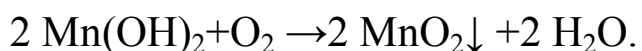
Испытуемый раствор	Добавленный реагент	Наблюдение	Предполагаемый состав	Вывод
Опыт № 1 «Открытие окрашенных ионов»				
№ 13	отсутствует	Раствор розовый	Ионы Co^{2+}	
№ 13	NaOH	Выпал синий осадок, при добавлении избытка щёлочи стал розовым	CoOHCl Co(OH)_2	В пробирке был CoCl_2
Опыт № 2 «Действие щелочей»				
№ 14				

Опыт 1. Открытие окрашенных ионов

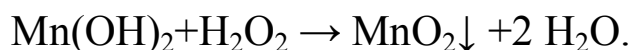
Опишите внешний вид растворов, сделайте предположения, какие растворы могут быть в каждой из пробирок, занесите их в таблицу. Наиболее вероятные предположения (для окрашенных растворов) проверьте с помощью соответствующих качественных реакций, взяв для анализа небольшую порцию испытуемого раствора. Составьте уравнения реакций, сделайте выводы.

Опыт 2. Действие щелочей на испытуемые растворы

Взяв пробы оставшихся исследуемых растворов (по 0,5 мл), подействуйте на них разбавленным раствором щёлочи, добавляя его по каплям. Занесите в таблицу аналитический сигнал: выделился запах аммиака, выпал неизменяющийся осадок, выпал осадок, растворимый в избытке щёлочи или темнеющий на воздухе. Обратите внимание, что гидроксид свинца $\text{Pb}(\text{OH})_2$ проявляет амфотерные свойства, растворяясь в избытке щелочи с образованием плюмбита Na_2PbO_2 , а светло-бежевый гидроксид марганца $\text{Mn}(\text{OH})_2$ постепенно окисляется кислородом воздуха, что выглядит как потемнение раствора на границе с воздухом:

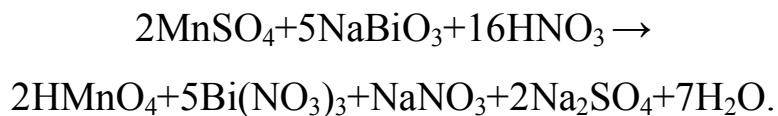


Эту реакцию можно сделать более наглядной, ускорив процесс окисления с помощью перекиси водорода:



Сделайте предположения о том, какие катионы находятся в пробирках. Проверьте предположения с помощью качественных реакций, для ионов Mn^{2+} кроме реакции с H_2O_2 можно использовать

ОВР с окислением марганца до розовых перманганат-ионов висмутатом натрия в сильноокислой среде:



Сделайте выводы, запишите уравнения выполненных реакций.

Опыт 3. Действие раствора аммиака на испытуемые пробы

Взяв пробы оставшихся исследуемых растворов (по 0,5 мл), подействуйте на них разбавленным раствором аммиака. Занесите в таблицу аналитический сигнал. Сделайте предположения о том, какие катионы находятся в пробирках. Проверьте предположения с помощью качественных реакций. Сделайте выводы, запишите уравнения выполненных реакций.

Опыт 4. Открытие неокрашенных ионов

Взяв пробы оставшихся исследуемых растворов (по 0,5 мл), проведите качественный анализ на катионы, которые остались не открытыми. Сделайте выводы, запишите уравнения выполненных реакций.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ ПО ТЕМЕ «КАЧЕСТВЕННЫЕ РЕАКЦИИ В НЕОРГАНИЧЕСКОЙ ХИМИИ»

1. Две соли окрашивают пламя в фиолетовый цвет. Одна из них бесцветна, и при лёгком нагревании её с концентрированной серной кислотой отгоняется жидкость, в которой растворяется медь; последнее превращение сопровождается выделением бурого газа. При добавлении к раствору второй соли раствора серной кислоты жёлтая окраска раствора изменяется на оранжевую, а при нейтрализации полученного раствора щёлочью восстанавливается первоначальный цвет. Запишите формулу и название этого вещества. Составьте уравнения реакций, которые были проведены в процессе его распознавания.

2. В двух сосудах находятся растворы неизвестных веществ. При добавлении к раствору первого вещества хлорида бария выпадает осадок белого цвета, нерастворимый в воде и кислотах. Осадок белого цвета выпадает также и при добавлении раствора нитрата серебра к пробе, отобранной из второго сосуда. При нагревании пробы первого раствора с гидроксидом натрия выделяется газ с резким запахом. При взаимодействии второго раствора с хроматом натрия выпадает осадок жёлтого цвета. Напишите уравнения описанных реакций.

3. Действием концентрированной серной кислоты на белые кристаллы при нагревании получен газ. При пропускании этого газа через раствор нитрата серебра выпал белый творожистый осадок. Кристаллы окрашивают пламя спиртовки в жёлтый цвет. Какая соль была взята для реакции? Приведите её формулу и название. Запишите уравнения реакций, описанных в тексте.

4. Порошкообразное вещество белого цвета окрашивает пламя горелки в оранжево-красный цвет. При действии соляной кислоты «вскипает» с выделением тяжёлого газа без цвета и запаха. Это вещество способно растворяться в воде при одновременном пропускании избытка углекислого газа. Запишите формулу и название этого вещества. Составьте уравнения реакций, которые были проведены в процессе его распознавания.

5. Некоторое кристаллическое вещество, окрашивающее пламя в жёлтый цвет, хорошо растворяется в воде. При добавлении к этому раствору нитрата серебра выпадает жёлтый осадок, не растворимый в разбавленной азотной кислоте. При действии на исходный раствор бромной воды образуется коричневое окрашивание. Запишите формулу и название этого вещества. Составьте уравнения реакций, которые были проведены в процессе его распознавания.

6. Для определения качественного состава белый, нерастворимый в воде порошок с зеленоватым оттенком подвергли

термическому разложению, в результате которого образовалось два оксида. Один из них — порошок чёрного цвета, при добавлении к которому раствора серной кислоты и последующем нагревании образовался раствор голубого цвета. Про другой известно, что это газ тяжелее воздуха, без цвета и запаха, играющий важную роль в процессе фотосинтеза. Запишите химическую формулу и название вещества. Составьте уравнения реакций, которые были проведены в процессе исследования.

7. Для проведения исследования бесцветные кристаллы соли, которые при непродолжительном нахождении на воздухе приобрели голубой цвет, нагрели до выделения бурого газа и образования чёрного порошка. При пропускании над нагретым полученным порошком водорода наблюдалось появление красного налёта простого вещества — металла. Известно, что металл, образующий катион, входит в состав многих сплавов, например бронзы. Запишите химическую формулу и название исследованной соли. Составьте уравнения реакций, которые были проведены в процессе исследования его свойств.

8. Для изучения состава соли был взят раствор, который разделили на две части. К первой части этого раствора добавили хлорид натрия, в результате чего выпал белый осадок. При добавлении ко второй части раствора цинковой стружки образовались серые хлопья металла, катионы которого обладают дезинфицирующим свойством. Известно, что выданная соль

используется для изготовления зеркал и в фотографии, а её анион является составной частью многих минеральных удобрений. Запишите химическую формулу и название вещества. Составьте уравнения реакций, которые были проведены в процессе исследования.

9. Для изучения состава соли были взяты белые кристаллы хорошо растворимого в воде вещества, которое используется в хлебопечении и кондитерской промышленности в качестве разрыхлителя теста. В результате процесса термического разложения выданной соли образовались три вещества, два из которых при обычных условиях являются газами. При нагревании соли с гидроксидом натрия образуется газ, водный раствор которого используется в медицине под названием нашатырный спирт. Запишите химическую формулу и название вещества. Составьте уравнения реакций, которые были проведены в процессе исследования.

10. Для установления качественного состава была изучена соль тяжёлого металла, оксид которого используется в производстве хрустального стекла. При термическом разложении соли образуется оксид этого металла и два газообразных вещества: одно из них — газ бурого цвета, а другое — важнейший компонент воздуха. При приливании к раствору выданной соли раствора йодида калия выпадает осадок ярко-жёлтого цвета. Запишите

химическую формулу и название вещества. Составьте уравнения реакций, которые были проведены в процессе исследования.

11. Для определения качественного состава неизвестной соли азотной кислоты исследовали белое кристаллическое вещество. Это вещество при нагревании полностью разлагается без образования сухого остатка. При действии горячего раствора гидроксида натрия выделяется бесцветный газ с резким запахом, вызывающий посинение лакмусовой бумаги. Запишите формулу и название этого вещества. Составьте уравнения реакций, которые были проведены в процессе его распознавания.

12. В химической лаборатории хранится склянка с кристаллическим веществом белого цвета. При действии на него гидроксида натрия выделяется лёгкий, бесцветный газ с резким запахом, вызывающий посинение лакмусовой бумаги. При действии на него сильной кислоты выделяется бесцветный газ без запаха, вызывающий покраснение раствора лакмуса. При приливании к раствору этого вещества раствора гидроксида кальция выделяется нерастворимый в воде осадок. Запишите формулу и название этого вещества. Составьте уравнения реакций, которые были проведены в процессе его распознавания.

13. Кристаллическое вещество оранжевого цвета при нагревании значительно увеличивается в объёме за счёт выделения бесцветного газа и образует твёрдое вещество тёмно-зелёного

цвета. Выделившийся газ взаимодействует с литием даже при комнатной температуре. Продукт этой реакции гидролизуется водой с образованием газа с резким запахом, способного восстановить медь из её оксида. Запишите формулу и название этого вещества. Составьте уравнения реакций, которые были проведены в процессе его распознавания.

14. Для исследования свойств неизвестного вещества его концентрированный раствор разделили на две части. В пробирку с одной частью раствора поместили медную проволоку. При этом наблюдалось выделение бурого газа и растворение меди. При добавлении к другой части раствора силиката натрия наблюдалось образование бесцветного студенистого осадка. Запишите формулу и название этого вещества. Составьте уравнения реакций, которые были проведены в процессе его распознавания.

15. Для определения качественного состава неизвестной соли исследовали раствор голубого цвета. При добавлении горячего раствора сильной кислоты выделился газ с резким запахом жжёной резины, окрашивающий лакмус в красный цвет. При добавлении раствора аммиака сначала выпал голубой осадок, который затем растворился в избытке аммиака с образованием фиолетового раствора. Запишите формулу и название этого вещества. Составьте уравнения реакций, которые были проведены в процессе его распознавания.

16. Для определения качественного состава неизвестной соли исследовали её раствор желтоватого цвета. При добавлении раствора сильной кислоты появился резкий запах уксуса. При добавлении роданида аммония раствор приобрёл кроваво-красную окраску. Запишите формулу и название этого вещества. Составьте уравнения реакций, которые были проведены в процессе его распознавания.

17. Для определения качественного состава неизвестной соли исследовали её бесцветный раствор. При добавлении раствора разбавленной серной кислоты выделился газ с запахом тухлых яиц и выпал белый осадок, не растворимый в кислотах. При взаимодействии порции исходного раствора с хроматом натрия выпадает осадок жёлтого цвета. Запишите формулу и название этого вещества. Составьте уравнения реакций, которые были проведены в процессе его распознавания.

18. Для определения качественного состава было выдано кристаллическое вещество — средняя соль многоосновной кислоты, катион которой не является ионом металла. При взаимодействии данного вещества с гидроксидом натрия выделяется газ с резким раздражающим запахом, а при приливании к раствору выданного вещества раствора нитрата серебра выпадает осадок жёлтого цвета. Запишите формулу и название этого вещества. Составьте уравнения реакций, которые были проведены в процессе его распознавания.

19. Для определения качественного состава студентам было выдано бесцветное кристаллическое вещество — соль. К одной части раствора исследуемой соли прилили раствор нитрата серебра, в результате чего выпал осадок жёлтого цвета. А при добавлении к другой части раствора карбоната натрия выпал белый осадок. Известно, что катион этой соли образован щёлочно-земельным металлом, входящим в состав костной ткани человека. Анион этой соли состоит из атомов химического элемента, образующего простое вещество, спиртовой раствор которого используется в качестве дезинфицирующего средства. Запишите формулу и название этого вещества. Составьте уравнения реакций, которые были проведены в процессе его распознавания.

20. При определении качественного состава неизвестного кристаллического вещества белого цвета было установлено, что его раствор взаимодействует с раствором гидроксида калия с образованием осадка. А при добавлении к раствору исследуемого вещества раствора нитрата бария выпадает осадок белого цвета, не растворимый в кислотах. Известно, что катион металла, входящий в состав данного соединения, входит в состав хлорофилла. Этот металл ранее применялся также в фотографии для получения вспышки. Запишите формулу и название этого вещества. Составьте уравнения реакций, которые были проведены в процессе его распознавания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Алексеев В. Н. Качественный химический полумикроанализ. М.: Химия. 1973. 584 с.

Глинка Н. Л. Общая химия: учебник / под ред. В. А. Попкова, А. В. Бабкова. 18-е изд., перераб. и доп. М.: Изд-во «Юрайт»; ИД «Юрайт», 2011. 886 с.

Гринвуд Н., Эршино А. Химия элементов (в 2 томах): учебник. Изд-во «Бином. Лаборатория знаний», 2015. 1280 с.

Карапетьянц М. Х., Дракин С. И. Общая и неорганическая химия: учебник. 5-е изд. Изд-во Книжный дом «Либроком» 2015. 592 с.

Крешков А. П. Основы аналитической химии. Ч. 1. Теоретические основы. Качественный анализ. М.: Химия. 1970. 460 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
Лабораторная работа № 1. КАЧЕСТВЕННЫЕ РЕАКЦИИ НА КАТИОНЫ ЖЕЛЕЗА.....	6
КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ.....	9
Лабораторная работа № 2. КАЧЕСТВЕННЫЕ РЕАКЦИИ НА ИОНЫ Co^{2+} , Ni^{2+} И Cu^{2+}	10
КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ.....	14
Лабораторная работа № 3. КАЧЕСТВЕННЫЕ РЕАКЦИИ НА ИОНЫ Al^{3+} , Cr^{3+} , Zn^{2+}	15
КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ.....	18
Лабораторная работа № 4. РАЗДЕЛЕНИЕ И ОБНАРУЖЕНИЕ КАТИОНОВ Ag^+ , Pb^{2+} , Hg^{2+} МЕТОДОМ ОСАДОЧНОЙ БУМАЖНОЙ ХРОМАТОГРАФИИ.....	19
КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ.....	22
Лабораторная работа № 5. ДРОБНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАЗЛИЧНЫХ КАТИОНОВ.....	23
ЗАДАНИЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ ПО ТЕМЕ «КАЧЕСТВЕННЫЕ РЕАКЦИИ В НЕОРГАНИЧЕСКОЙ ХИМИИ».....	26
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	34

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

Проректор по учебно-методическому
комплексу



МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ
СТУДЕНТОВ

Б1.О.15 МАТЕРИАЛОВЕДЕНИЕ

Специальность
21.05.04 Горное дело

Направленность (профиль) подготовки
Горные машины и оборудование

Форма обучения: **очная, заочная**

Год набора: **2022**

Автор: Хазин М.Л., д-р техн. н., профессор

Одобрены на заседании кафедры
Эксплуатации горного оборудования

(название кафедры)

Зав. кафедрой Симисин Д.И.

Протокол № 1 от 21.09.2021

(Дата)

Рассмотрены методической комиссией
факультета Горно-механического

(название факультета)

Председатель Осипов П. А.

Протокол № 2 от 12.10.2021

(Дата)

Екатеринбург

В методических указаниях по самостоятельной работе приведена последовательность выполнения практических и самостоятельных работ по дисциплине «Материаловедение», изложена методика решения задач, даны задачи, вопросы для самопроверки по разделам.

Методические указания предназначены для студентов направления специалитета 21.05.04 Горное дело, подготовка которых требует знаний по свойствам и применению металлических и неметаллических материалов.

ВВЕДЕНИЕ

Совершенствование производства, выпуск современных разнообразных машиностроительных конструкций, специальных приборов, машин и различной аппаратуры невозможны без дальнейшего развития производства и изыскания новых материалов, как металлических, так и неметаллических.

Материаловедение является одной из первых инженерных дисциплин, основы которой широко используются при курсовом и дипломном проектировании, а также в практической деятельности инженера-машиностроителя.

Прогресс в области машиностроения тесно связан с созданием и освоением новых, наиболее экономичных материалов, обладающих самыми разнообразными механическими и физико-химическими свойствами. Свойства материала определяются его внутренним строением, которое, в свою очередь, зависит от состава и характера предварительной обработки. В курсе "Материаловедение" изучаются физические основы этих связей.

ЧАСТЬ I. МЕТАЛЛОВЕДЕНИЕ

Строение металлов

Металловедение как наука о свойствах металлов и сплавов. Типы связи в твердых телах. Атомно-кристаллическое строение металлов. Процесс кристаллизации.

Рассмотрите типы химической связи в твердых телах, основное внимание обратите на особый тип металлической связи, который обуславливает отличительные свойства металлов: высокую электропроводность и теплопроводность, высокую пластичность и металлический блеск. Металлические тела характеризуются кристаллическим строением. Однако свойства реальных кристаллов определяются известными несовершенствами кристаллического строения. В связи с этим необходимо разобраться в видах несовершенств и особенно в строении дислокаций (линейных несовершенств), причинах их легкого перемещения в кристаллической решетке и влияния на механические свойства.

Термодинамические причины фазовых превращений являются одним из частных случаев общего закона природы: стремления любой системы

к состоянию с наименьшим запасом энергии (в данном случае свободной энергии). Уясните теоретические основы процесса кристаллизации, состоящего из двух элементарных процессов: зарождения и роста кристаллов, и влияния на эти параметры степени переохлаждения.

В процессе кристаллизации при формировании структуры литого металла решающее значение имеет реальная среда, а также возможность искусственного воздействия на строение путем модифицирования.

Вопросы для самопроверки

1. В чем сущность металлического, ионного и ковалентного типов связи?
2. Каковы характерные свойства металлов и чем они определяются?
3. Что такое элементарная ячейка?
4. Что такое полиморфизм?
5. Что такое параметр кристаллической решетки, плотность упаковки и координационное число?
6. Что такое мозаичная структура?
7. Виды дислокаций и их строение.
8. Каковы термодинамические условия фазового превращения?
9. Каковы параметры процесса кристаллизации?
10. Что такое переохлаждение?

Теория сплавов

Сплавы, виды взаимодействия компонентов в твердом состоянии. Диаграммы состояния для случаев полной нерастворимости, неограниченной и ограниченной растворимости компонентов в твердом виде, а также для случая образования устойчивого химического соединения.

Необходимо отчетливо представлять строение металлов и сплавов в твердом состоянии. Уясните, что такое твердый раствор, химическое (металлическое) соединение, механическая смесь. Наглядное представление о состоянии любого сплава в зависимости от его состава и температуры дают диаграммы состояния. Нужно усвоить общую методику построения диаграмм состояния для различных случаев взаимодействия компонентов в твердом состоянии.

При изучении диаграмм состояния нужно уметь применять правило отрезков (для определения доли каждой фазы или структурной составляющей в сплаве), правило фаз (для построения кривых нагревания и охлаждения), определять химический состав фаз. С помощью правил Курнакова нужно уметь установить связь между составом, строением и свойствами сплава.

Вопросы для самопроверки

1. Что такое компонент, фаза, физико-химическая система, число степеней свободы?
2. Приведите объяснение твердого раствора, механической смеси, химического (металлического) соединения.
3. Что представляют собой твердые растворы замещения и внедрения?
4. Как строятся диаграммы состояния?
5. Объясните принцип построения кривых нагревания и охлаждения с помощью правила фаз.
6. Начертите и проанализируйте диаграмму состояния для случая образования непрерывного ряда твердых растворов.

7. Начертите и проанализируйте диаграмму состояния для случая полной нерастворимости компонентов в твердом состоянии.

8. Начертите и проанализируйте диаграмму состояния для случая образования эвтектики, состоящей из ограниченных твердых растворов.

10. Каким образом определяются состав фаз и их количественное соотношение?

Пластическая деформация и механические свойства металлов

Напряжения и деформация. Явление наклепа. Стандартные механические свойства: твердость; характеристики, определяемые при растяжении; ударная вязкость; сопротивление усталости.

Рассмотрите физическую природу деформации и разрушения. Внимание уделите механизму пластической деформации, ее влиянию на плотность дислокаций. Уясните связь между основными характеристиками, строением и механическими свойствами. Разберитесь в сущности явления наклепа и его практическом использовании.

Изучите основные методы исследования механических свойств металлов и физический смысл определяемых при разных методах испытания характеристик.

Вопросы для самопроверки

1. В чем различие между упругой и пластической деформациями?
2. Как изменяется строение металла в процессе пластического деформирования?
3. Как изменяется плотность дислокаций при пластической деформации?
4. Как влияют дислокации на прочность металла?
5. Почему наблюдается огромное различие теоретической и практической прочности?
6. Как влияет изменение строения на свойства деформированного металла?
7. В чем сущность явления наклепа и какое он имеет практическое использование?
8. Какие характеристики механических свойств определяются при испытании на растяжение?
9. Что такое твердость?
10. Какие методы определения твердости вы знаете?

Влияние нагрева на структуру и свойства деформируемого металла

Необходимо знать сущность рекристаллизационных процессов: возврата, первичной рекристаллизации, собирательной (вторичной) рекристаллизации, протекающих при нагреве деформированного металла. Уясните, как при этом изменяются механические, физико-химические свойства и размер зерна. Установите влияние состава сплава и степени пластической деформации на протекание рекристаллизационных процессов. Научитесь выбирать режим рекристаллизационного отжига. Уясните его практическое значение, различие между холодной и горячей пластическими деформациями.

Вопросы для самопроверки

1. Как изменяются свойства деформированного металла при нагреве?
2. В чем сущность процесса возврата?
3. Что такое полигонизация?
4. Сущность процессов первичной и вторичной рекристаллизации.
5. Как влияют состав сплава и степень пластической деформации на температуру рекристаллизации?
6. Что такое критическая степень деформации?
7. В чем различие между холодной и горячей пластическими деформациями?
8. Как изменяются строение и свойства металла при горячей пластической деформации?
9. Каково назначение рекристаллизационного отжига и как он осуществляется?

Железо и его сплавы

Диаграмма состояния железо - цементит. Классификация железоуглеродистых сплавов. ГОСТы на металлы и сплавы. Фазы, образуемые легирующими элементами в сплавах железа. Структурные классы легированных сталей. Чугуны.

Научитесь вычерчивать диаграмму состояния железо - цементит и определять все фазы и структурные составляющие этой системы. С помощью правила фаз постройте кривые охлаждения (или нагревания) для любого сплава; разберитесь в классификации железоуглеродистых сплавов и усвойте, что различие между тремя классами (техническое железо, сталь, чугун) не является формальным (по содержанию углерода). Разные классы сплавов принципиально различны по структуре и свойствам. Технические железоуглеродистые сплавы состоят не только из железа и углерода, но и обязательно содержат постоянные примеси, попадающие в сплав в результате предыдущих операций при выплавке.

Изучите влияние легирующих элементов на критические точки железа и стали и объясните, при каком сочетании углерода и соответствующего ле-

гирующего элемента могут быть получены легированные стали ферритного, перлитного, аустенитного и ледебуритного классов.

Уясните влияние постоянных примесей на строение чугуна и разберитесь в различии металлической основы серых чугунов разных классов. Запомните основные механические свойства и назначение чугунов различных классов и их маркировку. Обратите внимание на способы получения ковких и высокопрочных чугунов. Изучите физическую сущность процесса графитизации.

Вопросы для самопроверки

1. Что такое феррит, аустенит, перлит, цементит и ледебурит?
2. Какие превращения происходят в сплавах при температурах A_1 , A_2 , A_3 , A_4 , A_{cm} ?
3. Каковы структуры серых чугунов? 1
4. Каковы структура и свойства технического железа, стали и белого чугуна?
5. Как влияют легирующие элементы на положение критических точек железа и стали?
6. Какие легирующие элементы являются карбидообразующими?
7. Какие легирующие элементы способствуют графитизации?
8. Как влияют легирующие элементы на свойства феррита и аустенита?
9. В чем отличие серого чугуна от белого?
10. Классификация и маркировка серых чугунов.

Теория термической обработки стали

Превращения в стали при нагреве. Превращения переохлажденного аустенита. Мартенситное превращение и его особенности. Превращения аустенита при непрерывном охлаждении. Превращения при отпуске закаленной стали.

Теория и практика термической обработки стали - главные вопросы металловедения. Термическая обработка - один из основных способов влияния на строение, а следовательно, и на свойства сплавов.

При изучении превращений переохлажденного аустенита особое внимание обратите на диаграмму изотермического распада, устанавливающую связь между температурными условиями превращения, интенсивностью распада и строением продуктов превращения.

Изучите влияние легирующих элементов на кинетику и характер превращения аустенита в перлитной, промежуточной и мартенситной областях. В связи с влиянием легирующих элементов на диаграммы изотермического распада аустенита рассмотрите причины получения различных классов по структуре (перлитного, мартенситного, аустенитного). Уясните влияние легирующих элементов на превращения при отпуске. Запомните, что легирующие элементы, как правило, затормаживают процессы превращений.

Вопросы для самопроверки

1. Механизм образования аустенита при нагреве стали.
2. Каковы механизмы и температурные районы образования структур перлитного типа (перлита, сорбита, тростита) и бейнита?
3. В чем различие между перлитом, сорбитом и троститом?
4. Что такое мартенсит и в чем сущность и особенности мартенситного превращения?
5. Что такое критическая скорость закалки?
6. От чего зависит количество остаточного аустенита?
7. В чем сущность превращений, происходящих при отпуске?
8. Как влияют легирующие элементы на перлитное превращение?
9. В чем сущность явления отпускной хрупкости?
10. Как влияют легирующие элементы на превращения при отпуске?

Технология термической обработки

Основные виды термической обработки стали. Отжиг, нормализация, закалка, обработка холодом. Прокаливаемость стали. Отпуск стали. Поверхностная закалка.

Уясните влияние скорости охлаждения на структуру и свойства стали и физическую сущность процессов отжига, нормализации, закалки и обработки холодом. При изучении технологических процессов термической обработки особое внимание обратите на разновидности режимов и их назначение. Для выяснения причин брака при термической обработке стали следует прежде всего разобраться в природе термических и фазовых напряжений.

Уясните различие между закаливаемостью и прокаливаемостью стали, а также факторы, влияющие на эти характеристики. Разберитесь в способе получения высокопрочных деталей - термомеханической обработке.

Различные виды поверхностной закалки позволяют получить особое сочетание свойств поверхностного слоя и сердцевины, что приводит к повышению эксплуатационных характеристик изделия.

Вопросы для самопроверки

1. Приведите определения основных процессов термической обработки: отжига, нормализации и закалки.
2. Какие вам известны разновидности процесса отжига и для чего они применяются?
3. Какова природа фазовых и термических напряжений?
4. Какие вам известны разновидности закалки и в каких случаях они применяются?
5. Каковы виды и причины брака при закалке?
6. Какие Вам известны группы охлаждающих сред и каковы их особен-

ности?

7. От чего зависит прокаливаемость стали и в чем ее технологическое значение?

8. Какие вам известны технологические приемы уменьшения деформации при термической обработке?

9. Для чего и как производится обработка холодом?

10. . В чем сущность и особенности термомеханической обработки.

Химико-термическая обработка стали и поверхностное упрочнение наклепом

Физические основы химико-термической обработки. Цементация. Азотирование. Цианирование. Диффузионная металлизация. Дробеструйный наклеп.

При изучении основ химико-термической обработки следует исходить из того, что принципы химико-термической обработки едины. Процесс химико-термической обработки состоит из выделения атомов насыщающего вещества внешней средой, захвата (сорбции) этих атомов поверхностью металла и диффузии их внутрь металла. Поэтому рассмотрите реакции в газовой среде при цементации или азотировании и усвойте современные представления о процессе диффузии в металлах. В большинстве случаев насыщение может происходить из твердой, жидкой и газовой сред, а поэтому нужно знать наиболее удачные варианты насыщения для каждого метода химико-термической обработки и конечные результаты (поверхностное упрочнение и изменение физико-химических свойств).

Разберитесь в технологии проведения отдельных видов химико-термической обработки. Уясните преимущества и области использования цементации, азотирования, цианирования и различных видов диффузионной металлизации. Объясните влияние легирования на механизм формирования структуры поверхностного слоя. Рассмотрите сущность и назначение дробеструйного поверхностного наклепа и его влияние на эксплуатационные свойства деталей машин.

Вопросы для самопроверки

1. В чем заключаются физические основы химико-термической обработки?

2. Химизм процесса азотирования.

3. Химизм процесса цементации.

4. Назначение цементации и режим термической обработки после нее.

5. Для каких целей и как производится нитроцементация?

6. Каковы свойства цементированных и азотированных изделий?

7. Химизм и назначение процесса цианирования.

8. Сущность и назначение процесса борирования.

9. Как изменяются свойства изделий при дробеструйной обработке и

какова природа этих изменений?

10. Как влияет поверхностное упрочнение на эксплуатационные характеристики изделий?

Конструкционные стали

Конструкционные стали общего назначения. Цементуемые, улучшаемые, пружинно-рессорные стали. Высокопрочные мартенситостареющие стали. Коррозионно-стойкие и жаростойкие стали и сплавы. Жаропрочные стали и сплавы.

Нужно усвоить принципы маркировки сталей и уметь по маркировке определить состав и особенности данной стали, а также иметь общее представление о разных группах стали.

Разберитесь во влиянии легирующих элементов на изменение структуры и свойств стали, особое внимание уделите технологическим особенностям термической обработки легированной стали различных групп.

Рассмотрите способы классификации, основные принципы выбора для различного назначения цементуемых, улучшаемых, пружинно-рессорных, износостойких, высокопрочных, нержавеющей, жаропрочных и других сталей.

При изучении жаропрочных сталей обратите внимание на особенности поведения металла в условиях нагружения при повышенных температурах. Уясните сущность явления ползучести и основные характеристики жаропрочности; каковы предельные рабочие температуры и области применения сталей различного структурного класса.

В качестве примеров указать две-три марки стали каждой группы, расшифровать состав, назначить режим термической обработки и охарактеризовать структуру, свойства и область применения.

Вопросы для самопроверки

1. Укажите химический состав сталей марок: 40, 20Х, 30ХГСА, 50Г, Г13, ШХ15, 18Х2Н4ВА, 5ХНМ, Х18Н9Т, Н18К8М5Т.

2. Как классифицируются конструкционные стали по технологии термической обработки?

3. Какие требования предъявляются к цементуемым изделиям?

4. Чем определяется выбор марки цементуемой стали для изделий различного назначения?

5. Какова термическая обработка цементуемых деталей?

6. Чем объясняется назначение процесса улучшения для конструкционной стали?

7. Как влияет степень легирования на механические свойства улучшаемой стали?

8. Какие требования предъявляются к рессорно-пружинным сталям?

9. Какие вы знаете износостойкие стали?

10. Каковы требования, предъявляемые к нержавеющей стали?

Инструментальные стали

Классификация и маркировка инструментальных сталей. Стали, не обладающие и обладающие теплостойкостью. Стали для режущего, измерительного и штампового инструмента. Твердые сплавы.

Изучите классификацию инструментальных сталей в зависимости от назначения инструмента и в связи с этим рассмотрите основные эксплуатационные свойства инструмента каждой группы. Особое внимание уделите быстрорежущим сталям. Уясните причины их высокой красностойкости и особенности термической обработки.

Вопросы для самопроверки

1. Укажите химический состав сталей марок: У10, 9ХС, ХВГ, Р18, Р18Ф2, Р9К10, Р9М4К8, Х12, 6ХВ2С, Х12М.
2. Как классифицируются инструментальные стали?
3. Требования, предъявляемые к сталям для режущего инструмента.
4. Приведите примеры углеродистых и легированных сталей, используемых для режущего инструмента.
5. Укажите и расшифруйте основные марки быстрорежущей стали.
6. Что представляют собой твердые сплавы?
7. Каковы свойства и преимущества твердых сплавов?
8. Укажите марки твердых сплавов, их состав и назначение.

Алюминий, магний и их сплавы

Деформируемые и литейные сплавы.

Обратите внимание на основные преимущества алюминиевых и магниевых сплавов, связанные с их высокой удельной прочностью. Рассмотрите классификацию алюминиевых сплавов и обоснуйте технологический способ изготовления изделий из сплавов каждой группы. Разберитесь в основах теории термической обработки (старения) легких сплавов. Обоснуйте выбор способа упрочнения деформируемых и литейных сплавов.

Вопросы для самопроверки

1. Свойства и применение алюминия.
2. Как классифицируются алюминиевые сплавы?
3. Какие сплавы упрочняются путем термической обработки?
4. В чем сущность процесса старения?
5. Какие сплавы не упрочняются путем термической обработки?
6. Какие вы знаете литейные алюминиевые сплавы?
7. Какие вы знаете жаропрочные алюминиевые сплавы?
8. Какие вы знаете порошковые алюминиевые сплавы?

9. Каковы свойства магния?

10. Укажите свойства и назначение сплавов на основе магния.

Медь и ее сплавы

Латуни и бронзы.

Изучите классификацию медных сплавов и уясните маркировку, состав, структуру, свойства и области применения разных групп медных сплавов.

Вопросы для самопроверки

1. Как влияют примеси на свойства чистой меди?
2. Как классифицируются медные сплавы?
3. Какие сплавы относятся к латуням?
4. Приведите несколько примеров латуней с указанием их состава, структуры, свойств и назначения.
5. Какие сплавы относятся к бронзам? Их маркировка и состав.
6. Укажите строение, свойства и назначение различных бронз.
7. Какой термической обработке подвергается бериллиевая бронза?

Композиционные материалы

Обратите внимание на принципиальное отличие композиционного материала, заключающееся в сочетании разнородных материалов с четкой границей раздела между ними. В связи с тем, что композит обладает свойствами, которыми не может обладать ни один из его компонентов в отдельности, такие материалы становятся весьма перспективными в различных областях новой техники. Укажите свойства композитов в зависимости от вида матрицы и формы, размеров и взаимного расположения наполнителя. Уясните возможность использования композитов в качестве жаропрочных материалов и способы повышения их жаропрочности.

Вопросы для самопроверки

1. Что такое композиты?
2. Как подразделяют композиты в зависимости от формы и размеров наполнителя?
3. Как подразделяют композиты по виду матрицы?
4. От чего зависят механические свойства композитов?
5. Какие композиционные материалы используют для работы при высоких температурах (жаропрочные)?

ЧАСТЬ II. НЕМЕТАЛЛИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

Пластические массы

В основе неметаллических материалов лежат полимеры. Обратите внимание на особенности строения полимеров, которые определяют их механические и физико-химические свойства. Классификация полимерных материалов. Свойства и области применения пластмасс.

Пластические массы - искусственные материалы, получаемые на основе органических полимерных связывающих веществ, которые являются обязательными компонентами пластмасс. Изучите различные группы пластических масс, их свойства и области применения.

Вопросы для самопроверки

1. Что лежит в основе классификации полимеров?
2. Какие материалы относятся к обратимым и необратимым полимерам?
3. Какие вы знаете наполнители пластмасс?
4. Для чего вводят в пластмассы отвердители?
5. Приведите примеры пластиков с твердыми наполнителями.
6. Укажите область применения термопластов и реактопластов.
7. В чем преимущества пластмасс по сравнению с металлическими материалами? Каковы их недостатки?

Резиновые материалы

Как технический материал резина отличается от других материалов высокими эластичными свойствами, что связано со свойствами самой основы резины - каучука. Уясните состав резины, способы получения и влияние различных добавок на ее свойства. Подробно рассмотрите влияние порошковых и органических наполнителей на свойства резины, изучите физико-механические свойства и области применения резин различных марок.

Вопросы для самопроверки

1. Что представляет собой резина?
2. Какие компоненты относятся к совмещающимся и как они влияют на свойства резины?
3. Объясните роль порошковых наполнителей.
4. В каких случаях применяются волокнистые наполнители?

Неорганические материалы

Поскольку большинство неорганических материалов содержит различные соединения кремния с другими элементами, эти материалы получили общее название силикатных материалов. Обратите внимание на внутреннее строение неорганического стекла. Уясните сущность стеклообразного состояния как разновидности аморфного состояния вещества. Разберитесь в

изменении свойств стекла в зависимости от состава. Рассмотрите стеклокристаллические материалы (ситаллы) и их отличие от стекла минерального. Уясните причины образования кристаллической структуры ситаллов.

При изучении керамических материалов обратите внимание на отличие технической керамики от обычной. Разберитесь в химическом и фазовом составе технической керамики, ее свойствах и области применения.

Вопросы для самопроверки

Какие силикатные материалы относятся к минеральному стеклу?

Их отличительные свойства.

Как достигаются электроизоляционные или электропроводящие свойства стекла?

Объясните причины, вызывающие кристаллизацию ситаллов (стеклокристаллитов).

Укажите область применения ситаллов.

5. В чем отличие технической керамики от обычной? Укажите область ее применения.

КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

Задания на контрольные работы выдают индивидуально каждому студенту. Задание включает вопросы и задачи по основным разделам курса.

При выполнении контрольных работ студенты изучают методику выбора и назначения сталей и сплавов для изготовления конкретных деталей машин и различного вида инструментов, а также знакомятся с особенностями строения, технологией получения и областью применения наиболее распространенных неметаллических материалов. Одновременно студент должен научиться пользоваться рекомендуемыми справочными материалами, с тем чтобы уметь в дальнейшем правильно выбрать материал при курсовом и дипломном проектировании.

Перечень ГОСТов, необходимых для выполнения контрольных работ, приведен в приложении. Диаграмма состояния железо-цементит и диаграмма изотермического превращения аустенита эвтектоидной стали У8 также приведены в приложении (см. рис. 1 и 2).

ЗАДАНИЯ НА КОНТРОЛЬНУЮ РАБОТУ

Вариант 1

1. Что такое ликвация? Виды ликвации, причины их возникновения и способы устранения.

2. Дайте определение ударной вязкости (KCV). Опишите методику измерения этой характеристики механических свойств металла.

3. Вычертите диаграмму состояния железо - карбид железа, укажите структурные составляющие во всех областях диаграммы, опишите прев-

ращения и постройте кривую охлаждения (с применением правила фаз) для сплава, содержащего 3,6% С. Какова структура этого сплава при комнатной температуре и как такой сплав называется?

4. Вычертите диаграмму изотермического превращения аустенита для стали У8, нанесите на нее кривую режима изотермической обработки, обеспечивающей получение твердости 45...50 HRC. Укажите, как этот режим называется, опишите сущность превращений и какая структура получается в данном случае.

5. Как изменяются структура и свойства стали 40 и У12 в результате закалки от температуры 750 и 850° С. Объясните с применением диаграммы состояния железо-цементит. Выберите оптимальный режим нагрева под закалку каждой стали.

Вариант 2

1. Как и почему скорость охлаждения при кристаллизации влияет на строение слитка?

2. Из листа свинца путем прокатки при комнатной температуре была получена тонкая фольга. Твердость и прочность этой фольги оказались такими же, как у исходного листа. Объясните, какие процессы происходили при пластической деформации свинца и какими изменениями структуры и свойств они сопровождались.

3. Вычертите диаграмму состояния железо-карбид железа, укажите структурные составляющие во всех областях диаграммы, опишите превращения и постройте кривую охлаждения (с применением правила фаз) для сплава, содержащего 0,8% С. Какова структура этого сплава при комнатной температуре и как такой сплав называется?

4. Используя диаграмму состояния железо -цементит и кривую изменения твердости в зависимости от температуры отпуска, назначьте для углеродистой стали 40 температуру закалки и температуру отпуска, необходимые для обеспечения твердости 400 НВ. Опишите превращения на всех этапах термической обработки и получаемую структуру.

5. Для каких целей применяется диффузионный отжиг? Как выбирается режим такого отжига? Приведите примеры.

Вариант 3

1. Опишите виды твердых растворов. Приведите примеры.

2. Дайте определение твердости. Какими методами измеряют твердость металлов и сплавов? Опишите их.

3. Вычертите диаграмму состояния железо-цементит, укажите структурные составляющие во всех областях диаграммы, опишите превращения и постройте кривую охлаждения (с применением правила фаз) для сплава, содержащего 2,2% С. Какова структура этого сплава при комнатной температуре и как такой сплав называется?

4. Вычертите диаграмму изотермического превращения аустенита для стали У8. Нанесите на нее кривую режима изотермической обработки, обеспечивающей получение твердости 150 НВ. Укажите, как этот режим называется и какая структура получается в данном случае.

5. С помощью диаграммы состояния железо-цементит обоснуйте выбор режима термической обработки, применяемой для устранения цементитной сетки в заэвтектоидной стали. Дайте определение выбранного режима обработки и опишите превращения, которые происходят при нагреве и охлаждении.

Вариант 4

1. Опишите физическую сущность и механизм процесса кристаллизации.

2. Для чего проводится рекристаллизационный отжиг? Как назначается режим этого вида обработки? Приведите несколько конкретных примеров.

3. Опишите превращения и постройте кривую охлаждения (с применением правила фаз) для сплава, содержащего 0,4 % С. Какова структура этого сплава при комнатной температуре и как такой сплав называется?

4. Используя диаграмму изотермического превращения аустенита, объясните, почему нельзя получить в стали чисто мартенситную структуру при охлаждении ее со скоростью меньше критической?

5. После термической обработки углеродистой стали получена структура цементит + мартенсит отпуска. Нанесите на диаграмму состояния железо-цементит ординату заданной стали (примерно) и обоснуйте температуру нагрева этой стали под закалку. Так же укажите температуру отпуска. Опишите превращения, которые произошли при термической обработке.

Вариант 5

1. Что такое ограниченные и неограниченные твердые растворы? Каковы необходимые условия образования неограниченных твердых растворов?

2. Опишите сущность явления наклепа и примеры его практического использования.

3. Постройте кривую охлаждения (с применением правила фаз) для сплава содержащего 1,1% С. Какова структура этого сплава при комнатной температуре и как такой сплав называется?

4. При непрерывном охлаждении стали У8 получена структура троостит + мартенсит. Нанесите на диаграмму изотермического превращения аустенита кривую охлаждения, обеспечивающую получение данной структуры. Укажите интервалы температур превращений и опишите характер превращения в каждом из них.

5. С помощью диаграммы состояния железо - цементит установите температуру полной и неполной закалки для стали 45 и опишите структуру и свойства стали после каждого вида термической обработки.

Вариант 6

1. Начертите диаграмму состояния для случая ограниченной растворимости компонентов в твердом виде. Укажите структурные составляющие во всех областях этой диаграммы и опишите строение типичных сплавов различного состава, встречающихся в этой системе.

2. Волочение медной проволоки проводят в несколько переходов. В некоторых случаях проволока на последних переходах разрывается. Объясните причину разрыва и укажите способ его предупреждения.

3. Опишите превращения и постройте кривую охлаждения (с применением правила фаз) для сплава железа, содержащего 0,5 % С. Какова структура этого сплава при комнатной температуре и как такой сплав называется?

4. Вычертите диаграмму изотермического превращения аустенита для стали У8. Нанесите на нее кривую режима изотермической обработки, обеспечивающей получение твердости 200 НВ. Укажите, как этот режим называется и какая структура получается в этом случае.

5. Используя диаграмму состояния железо-цементит, установите температуры нормализации, отжига и закалки для стали У12. Охарактеризуйте эти режимы термической обработки и опишите структуру и свойства стали после каждого вида обработки.

Вариант 7

1. Опишите явление полиморфизма в приложении к железу. Какое практическое значение оно имеет?

2. Как изменяются свойства деформированного металла при нагреве, какие процессы происходят при этом?

3. Постройте кривую охлаждения (с применением правила фаз) для сплава железа, содержащего 0,7 % С. Какова структура этого сплава при комнатной температуре и как такой сплав называется?

4. Вычертите диаграмму изотермического превращения аустенита стали У8. Нанесите на нее кривую режима изотермической обработки, обеспечивающей твердость 20...25 HRC. Укажите, как этот режим называется и какая структура образуется в данном случае.

5. Плашки из стали УНА закалены: первая - от температуры 760° С, вторая - от температуры 850° С. Используя диаграмму состояния железо - цементит, укажите температуры закалки, объясните, какая из этих плашек закалена правильно, имеет более высокие режущие свойства и почему.

Варианта 8

1. В чем сущность процесса модифицирования? Приведите пример использования модификаторов для повышения свойств литейных алюминиевых сплавов.

2. В чем различие между холодной и горячей пластической деформацией? Опишите особенности обоих видов деформации.

3. Опишите превращения и постройте кривую охлаждения (с применением правила фаз) для сплава железа, содержащего 5,0 % С. Какова структура этого сплава при комнатной температуре и как такой сплав называется?

4. Углеродистые стали 35 и У8 после закалки и отпуска имеют структуру мартенсит отпуска и твердость: первая 45 HRC, вторая - 60 HRC. Используя диаграмму состояния железо - цементит и учитывая превращения, происходящие при отпуске, укажите температуру закалки и температуру отпуска для каждой стали. Опишите превращения, происходящие в этих сталях в процессе закалки и отпуска, и объясните, почему сталь У8 имеет большую твердость, чем сталь 35.

5. Сталь 40 подвергалась закалке от температур 760 и 840° С. С помощью диаграммы состояния железо-цементит укажите, какие структуры обра-

зуются в каждом случае. Объясните причины образования разных структур и рекомендуйте оптимальный режим нагрева под закалку данной стали.

Вариант 9

1. Охарактеризуйте особенности металлического типа связи и основные свойства металлов.

2. Какими стандартными характеристиками механических свойств оценивается прочность металлов и сплавов? Как эти характеристики определяются?

3. Постройте кривую охлаждения (с применением правила фаз) для сплава железа, содержащего 4,8 % С. Какова структура этого сплава при комнатной температуре и как такой сплав называется?

4. С помощью диаграммы состояния железо-цементит установите температуру полного и неполного отжига и нормализации для стали 20, Охарактеризуйте эти режимы термической обработки и опишите структуру и свойства стали.

5. Почему для изготовления инструмента применяется сталь с исходной структурой зернистого перлита? В результате какой термической обработки можно получить эту структуру? Приведите конкретный режим для любой инструментальной стали.

Вариант 10

1. Опишите явление полиморфизма в приложении к титану. Какое практическое значение оно имеет?

2. Каким способом можно восстановить пластичность холоднокатаной медной ленты? Назначьте режим термической обработки и опишите сущность происходящих процессов.

3. Постройте кривую охлаждения (с применением правила фаз) для сплава железа, содержащего 1,4% С. Какова структура этого сплава при комнатной температуре и как такой сплав называется?

4. Вычертите диаграмму изотермического превращения аустенита для стали У8. Нанесите на нее кривую режима термической обработки, обеспечивающей получение твердости 60...63 HRC. Укажите, как этот режим называется и какая структура при этом получается. Опишите сущность происходящих превращений.

5. С помощью диаграммы состояния железо-цементит опишите структурные превращения, происходящие при нагреве доэвтектоидной стали. Покажите критические точки АС1 и АС3 для выбранной вами стали. Установите режим нагрева этой стали под закалку. Охарактеризуйте процесс закалки, опишите получаемую структуру и свойства стали.

ЛИТЕРАТУРА

Арзамасов Б. Н., Сидорин И. И. и др. Материаловедение: учебник для вузов. М.: Машиностроение, 2008. 648 с.

Батышев А. И., Безпалько В. И., Смолькин А. А. Материаловедение и технология материалов М.: Изд-во Инфра-М, 2012. 288 с.

Богодухов С. И., Козик Е. С.. Материаловедение: учеб. для вузов. М.: Машиностроение, 2015. 504 с.

Бондаренко, Г. Г. Кабанова Т. А., Рыбалко В. В. Материаловедение: учебник для бакалавров / под ред. Г. Г. Бондаренко. 2-е изд. М.: Юрайт, 2014. 359 с.

Комаров О. С., Керженцева А. Ф., Макаева Г. Г. Материаловедение в машиностроении. М.: Высшая школа. 2009. 304 с.

Лахтин Ю. М., Леонтьева В. П. Материаловедение: учебник для студентов машиностроительных специальностей вузов. М.: Машиностроение, 2009. 528 с.

Хазин М. Л. Материаловедение: методические материалы. Екатеринбург: Изд-во УГГГА, 2008. 208 с.

Хазин М. Л. Материаловедение: учебно-практическое пособие. Урал. гос. горный ун-т – Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2019. – 184 с.

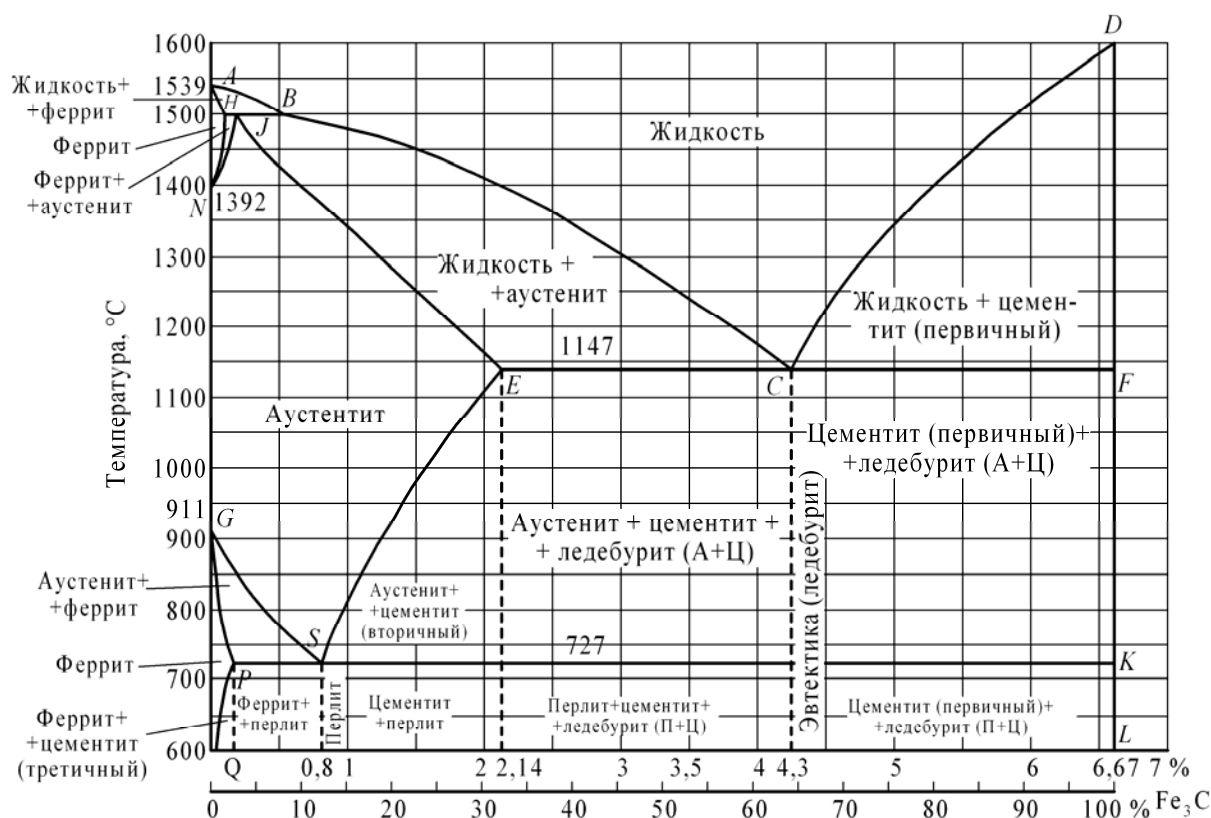


Рисунок 1 – Диаграмма состояния железо-цементит

Перечень ГОСТов на стали и сплавы

1. Сталь

Углеродистая обыкновенного качества – ГОСТ 380-71

Углеродистая качественная – ГОСТ 1050-74

Легированная, конструкционная, качественная, рессорно-пружинная – ГОСТ 1050-74

Углеродистая инструментальная – ГОСТ 1435-74

Легированная инструментальная – ГОСТ 5950-73

Подшипниковая – ГОСТ 801-78

Быстрорежущие стали – ГОСТ 19265-73

Конструкционный повышенной и высокой обрабатываемости резанием – ГОСТ 1414-75

Жаростойкие и жаропрочные – ГОСТ 5632-72

Коррозионностойкие – ГОСТ 5632-72

Сплавы твердые спеченные – ГОСТ 3882-74

Магнитотвердые (для постоянных магнитов) – ГОСТ 6862-71

Электротехнические – ГОСТ 21427.0-75...

ГОСТ 21427.3-75

2. Чугун

Серый – ГОСТ 1412-79

Ковкий – ГОСТ 1215-79

Высокопрочный – ГОСТ 7293-85

Жаростойкий – ГОСТ 7769-75

3. Алюминий и его сплавы

Алюминий – ГОСТ 11069-74
Деформируемые – ГОСТ 4784-74
Литейные – ГОСТ 2685-75
4. Медь и ее сплавы
Медь ГОСТ 859 – 78
Латунь двойная и многокомпонентная
деформируемая – ГОСТ 15527-70
Латунь литейная – ГОСТ 17711-80
Бронза оловянистая деформируемая – ГОСТ 5017-74
Бронза безоловянистая деформируемая – ГОСТ 18175-78
Бронза оловянистая литейная – ГОСТ 613-79
Бронза безоловянистая литейная – ГОСТ 493-79
Медно-никелевые сплавы – ГОСТ 492-73
5. Титановые сплавы – ГОСТ 19807-74
6. Антифрикционные сплавы
Алюминиевые – ГОСТ 14113-78
Цинковые – ГОСТ 21437-75
Баббиты – ГОСТ 1320-74
7. Магний и его сплавы
Магний – ГОСТ 804-72
Деформируемые – ГОСТ 14957-76
Литейные – ГОСТ 2856-79

Хазин Марк Леонтьевич

МАТЕРИАЛОВЕДЕНИЕ

Учебно-практическое пособие
по выполнению практических и
самостоятельных работ
для студентов очного и заочного обучения
направлений
направлений специалитета
21.05.04 Горное дело

Редактор Л. В. Устьянцева

Компьютерная верстка автора

Подписано в печать

Бумага писчая. Формат 60 × 84 1/16.

Гарнитура Times New Roman. Печать на ризографе.

Печ. л. 1,51. Уч.-изд. л. 1,71. Тираж 100. Заказ №

Издательство УГГУ

620144, г. Екатеринбург, ул. Куйбышева, 30
Уральский государственный горный университет
Отпечатано с оригинал-макета
в лаборатории множительной техники УГГУ

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

Проректор по учебно-методическому
комплексу



С. А. Угрюмов

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ
СТУДЕНТОВ

Б1.О.15 МАТЕРИАЛОВЕДЕНИЕ В МАШИНОСТРОЕНИИ

Специальность
21.05.04 Горное дело

Направленность (профиль) подготовки
Горные машины и оборудование

Форма обучения: **очная, заочная**

Год набора: **2022**

Автор: Хазин М.Л., д-р техн. н., профессор

Одобрены на заседании кафедры
Эксплуатации горного оборудования
(название кафедры)

Зав. кафедрой Симисин Д.И.

Протокол № 1 от 21.09.2021

(Дата)

Рассмотрены методической комиссией
факультета Горно-механического
(название факультета)

Председатель Осипов П. А.

Протокол № 2 от 12.10.2021

(Дата)

Екатеринбург

В методических указаниях по самостоятельной работе приведена последовательность выполнения практических и самостоятельных работ по дисциплине «Материаловедение», изложена методика решения задач, даны задачи, вопросы для самопроверки по разделам.

Методические указания предназначены для студентов направления специалитета 21.05.04 Горное дело, подготовка которых требует знаний по свойствам и применению металлических и неметаллических материалов.

ВВЕДЕНИЕ

Совершенствование производства, выпуск современных разнообразных машиностроительных конструкций, специальных приборов, машин и различной аппаратуры невозможны без дальнейшего развития производства и изыскания новых материалов, как металлических, так и неметаллических.

Материаловедение является одной из первых инженерных дисциплин, основы которой широко используются при курсовом и дипломном проектировании, а также в практической деятельности инженера-машиностроителя.

Прогресс в области машиностроения тесно связан с созданием и освоением новых, наиболее экономичных материалов, обладающих самыми разнообразными механическими и физико-химическими свойствами. Свойства материала определяются его внутренним строением, которое, в свою очередь, зависит от состава и характера предварительной обработки. В курсе "Материаловедение" изучаются физические основы этих связей.

ЧАСТЬ I. МЕТАЛЛОВЕДЕНИЕ

Строение металлов

Металловедение как наука о свойствах металлов и сплавов. Типы связи в твердых телах. Атомно-кристаллическое строение металлов. Процесс кристаллизации.

Рассмотрите типы химической связи в твердых телах, основное внимание обратите на особый тип металлической связи, который обуславливает отличительные свойства металлов: высокую электропроводность и теплопроводность, высокую пластичность и металлический блеск. Металлические тела характеризуются кристаллическим строением. Однако свойства реальных кристаллов определяются известными несовершенствами кристаллического строения. В связи с этим необходимо разобраться в видах несовершенств и особенно в строении дислокаций (линейных несовершенств), причинах их легкого перемещения в кристаллической решетке и влияния на механические свойства.

Термодинамические причины фазовых превращений являются одним из частных случаев общего закона природы: стремления любой системы

к состоянию с наименьшим запасом энергии (в данном случае свободной энергии). Уясните теоретические основы процесса кристаллизации, состоящего из двух элементарных процессов: зарождения и роста кристаллов, и влияния на эти параметры степени переохлаждения.

В процессе кристаллизации при формировании структуры литого металла решающее значение имеет реальная среда, а также возможность искусственного воздействия на строение путем модифицирования.

Вопросы для самопроверки

1. В чем сущность металлического, ионного и ковалентного типов связи?
2. Каковы характерные свойства металлов и чем они определяются?
3. Что такое элементарная ячейка?
4. Что такое полиморфизм?
5. Что такое параметр кристаллической решетки, плотность упаковки и координационное число?
6. Что такое мозаичная структура?
7. Виды дислокаций и их строение.
8. Каковы термодинамические условия фазового превращения?
9. Каковы параметры процесса кристаллизации?
10. Что такое переохлаждение?

Теория сплавов

Сплавы, виды взаимодействия компонентов в твердом состоянии. Диаграммы состояния для случаев полной нерастворимости, неограниченной и ограниченной растворимости компонентов в твердом виде, а также для случая образования устойчивого химического соединения.

Необходимо отчетливо представлять строение металлов и сплавов в твердом состоянии. Уясните, что такое твердый раствор, химическое (металлическое) соединение, механическая смесь. Наглядное представление о состоянии любого сплава в зависимости от его состава и температуры дают диаграммы состояния. Нужно усвоить общую методику построения диаграмм состояния для различных случаев взаимодействия компонентов в твердом состоянии.

При изучении диаграмм состояния нужно уметь применять правило отрезков (для определения доли каждой фазы или структурной составляющей в сплаве), правило фаз (для построения кривых нагревания и охлаждения), определять химический состав фаз. С помощью правил Курнакова нужно уметь установить связь между составом, строением и свойствами сплава.

Вопросы для самопроверки

1. Что такое компонент, фаза, физико-химическая система, число степеней свободы?
2. Приведите объяснение твердого раствора, механической смеси, химического (металлического) соединения.
3. Что представляют собой твердые растворы замещения и внедрения?
4. Как строятся диаграммы состояния?
5. Объясните принцип построения кривых нагревания и охлаждения с помощью правила фаз.
6. Начертите и проанализируйте диаграмму состояния для случая образования непрерывного ряда твердых растворов.

7. Начертите и проанализируйте диаграмму состояния для случая полной нерастворимости компонентов в твердом состоянии.

8. Начертите и проанализируйте диаграмму состояния для случая образования эвтектики, состоящей из ограниченных твердых растворов.

10. Каким образом определяются состав фаз и их количественное соотношение?

Пластическая деформация и механические свойства металлов

Напряжения и деформация. Явление наклепа. Стандартные механические свойства: твердость; характеристики, определяемые при растяжении; ударная вязкость; сопротивление усталости.

Рассмотрите физическую природу деформации и разрушения. Внимание уделите механизму пластической деформации, ее влиянию на плотность дислокаций. Уясните связь между основными характеристиками, строением и механическими свойствами. Разберитесь в сущности явления наклепа и его практическом использовании.

Изучите основные методы исследования механических свойств металлов и физический смысл определяемых при разных методах испытания характеристик.

Вопросы для самопроверки

1. В чем различие между упругой и пластической деформациями?
2. Как изменяется строение металла в процессе пластического деформирования?
3. Как изменяется плотность дислокаций при пластической деформации?
4. Как влияют дислокации на прочность металла?
5. Почему наблюдается огромное различие теоретической и практической прочности?
6. Как влияет изменение строения на свойства деформированного металла?
7. В чем сущность явления наклепа и какое он имеет практическое использование?
8. Какие характеристики механических свойств определяются при испытании на растяжение?
9. Что такое твердость?
10. Какие методы определения твердости вы знаете?

Влияние нагрева на структуру и свойства деформируемого металла

Необходимо знать сущность рекристаллизационных процессов: возврата, первичной рекристаллизации, собирательной (вторичной) рекристаллизации, протекающих при нагреве деформированного металла. Уясните, как при этом изменяются механические, физико-химические свойства и размер зерна. Установите влияние состава сплава и степени пластической деформации на протекание рекристаллизационных процессов. Научитесь выбирать режим рекристаллизационного отжига. Уясните его практическое значение, различие между холодной и горячей пластическими деформациями.

Вопросы для самопроверки

1. Как изменяются свойства деформированного металла при нагреве?
2. В чем сущность процесса возврата?
3. Что такое полигонизация?
4. Сущность процессов первичной и вторичной рекристаллизации.
5. Как влияют состав сплава и степень пластической деформации на температуру рекристаллизации?
6. Что такое критическая степень деформации?
7. В чем различие между холодной и горячей пластическими деформациями?
8. Как изменяются строение и свойства металла при горячей пластической деформации?
9. Каково назначение рекристаллизационного отжига и как он осуществляется?

Железо и его сплавы

Диаграмма состояния железо - цементит. Классификация железоуглеродистых сплавов. ГОСТы на металлы и сплавы. Фазы, образуемые легирующими элементами в сплавах железа. Структурные классы легированных сталей. Чугуны.

Научитесь вычерчивать диаграмму состояния железо - цементит и определять все фазы и структурные составляющие этой системы. С помощью правила фаз постройте кривые охлаждения (или нагревания) для любого сплава; разберитесь в классификации железоуглеродистых сплавов и усвойте, что различие между тремя классами (техническое железо, сталь, чугун) не является формальным (по содержанию углерода). Разные классы сплавов принципиально различны по структуре и свойствам. Технические железоуглеродистые сплавы состоят не только из железа и углерода, но и обязательно содержат постоянные примеси, попадающие в сплав в результате предыдущих операций при выплавке.

Изучите влияние легирующих элементов на критические точки железа и стали и объясните, при каком сочетании углерода и соответствующего ле-

гирующего элемента могут быть получены легированные стали ферритного, перлитного, аустенитного и ледебуритного классов.

Уясните влияние постоянных примесей на строение чугуна и разберитесь в различии металлической основы серых чугунов разных классов. Запомните основные механические свойства и назначение чугунов различных классов и их маркировку. Обратите внимание на способы получения ковких и высокопрочных чугунов. Изучите физическую сущность процесса графитизации.

Вопросы для самопроверки

1. Что такое феррит, аустенит, перлит, цементит и ледебурит?
2. Какие превращения происходят в сплавах при температурах A_1 , A_2 , A_3 , A_4 , A_{cm} ?
3. Каковы структуры серых чугунов? 1
4. Каковы структура и свойства технического железа, стали и белого чугуна?
5. Как влияют легирующие элементы на положение критических точек железа и стали?
6. Какие легирующие элементы являются карбидообразующими?
7. Какие легирующие элементы способствуют графитизации?
8. Как влияют легирующие элементы на свойства феррита и аустенита?
9. В чем отличие серого чугуна от белого?
10. Классификация и маркировка серых чугунов.

Теория термической обработки стали

Превращения в стали при нагреве. Превращения переохлажденного аустенита. Мартенситное превращение и его особенности. Превращения аустенита при непрерывном охлаждении. Превращения при отпуске закаленной стали.

Теория и практика термической обработки стали - главные вопросы металловедения. Термическая обработка - один из основных способов влияния на строение, а следовательно, и на свойства сплавов.

При изучении превращений переохлажденного аустенита особое внимание обратите на диаграмму изотермического распада, устанавливающую связь между температурными условиями превращения, интенсивностью распада и строением продуктов превращения.

Изучите влияние легирующих элементов на кинетику и характер превращения аустенита в перлитной, промежуточной и мартенситной областях. В связи с влиянием легирующих элементов на диаграммы изотермического распада аустенита рассмотрите причины получения различных классов по структуре (перлитного, мартенситного, аустенитного). Уясните влияние легирующих элементов на превращения при отпуске. Запомните, что легирующие элементы, как правило, затормаживают процессы превращений.

Вопросы для самопроверки

1. Механизм образования аустенита при нагреве стали.
2. Каковы механизмы и температурные районы образования структур перлитного типа (перлита, сорбита, тростита) и бейнита?
3. В чем различие между перлитом, сорбитом и троститом?
4. Что такое мартенсит и в чем сущность и особенности мартенситного превращения?
5. Что такое критическая скорость закалки?
6. От чего зависит количество остаточного аустенита?
7. В чем сущность превращений, происходящих при отпуске?
8. Как влияют легирующие элементы на перлитное превращение?
9. В чем сущность явления отпускной хрупкости?
10. Как влияют легирующие элементы на превращения при отпуске?

Технология термической обработки

Основные виды термической обработки стали. Отжиг, нормализация, закалка, обработка холодом. Прокаливаемость стали. Отпуск стали. Поверхностная закалка.

Уясните влияние скорости охлаждения на структуру и свойства стали и физическую сущность процессов отжига, нормализации, закалки и обработки холодом. При изучении технологических процессов термической обработки особое внимание обратите на разновидности режимов и их назначение. Для выяснения причин брака при термической обработке стали следует прежде всего разобраться в природе термических и фазовых напряжений.

Уясните различие между закаливаемостью и прокаливаемостью стали, а также факторы, влияющие на эти характеристики. Разберитесь в способе получения высокопрочных деталей - термомеханической обработке.

Различные виды поверхностной закалки позволяют получить особое сочетание свойств поверхностного слоя и сердцевины, что приводит к повышению эксплуатационных характеристик изделия.

Вопросы для самопроверки

1. Приведите определения основных процессов термической обработки: отжига, нормализации и закалки.
2. Какие вам известны разновидности процесса отжига и для чего они применяются?
3. Какова природа фазовых и термических напряжений?
4. Какие вам известны разновидности закалки и в каких случаях они применяются?
5. Каковы виды и причины брака при закалке?
6. Какие Вам известны группы охлаждающих сред и каковы их особен-

ности?

7. От чего зависит прокаливаемость стали и в чем ее технологическое значение?

8. Какие вам известны технологические приемы уменьшения деформации при термической обработке?

9. Для чего и как производится обработка холодом?

10. . В чем сущность и особенности термомеханической обработки.

Химико-термическая обработка стали и поверхностное упрочнение наклепом

Физические основы химико-термической обработки. Цементация. Азотирование. Цианирование. Диффузионная металлизация. Дробеструйный наклеп.

При изучении основ химико-термической обработки следует исходить из того, что принципы химико-термической обработки едины. Процесс химико-термической обработки состоит из выделения атомов насыщающего вещества внешней средой, захвата (сорбции) этих атомов поверхностью металла и диффузии их внутрь металла. Поэтому рассмотрите реакции в газовой среде при цементации или азотировании и усвойте современные представления о процессе диффузии в металлах. В большинстве случаев насыщение может происходить из твердой, жидкой и газовой сред, а поэтому нужно знать наиболее удачные варианты насыщения для каждого метода химико-термической обработки и конечные результаты (поверхностное упрочнение и изменение физико-химических свойств).

Разберитесь в технологии проведения отдельных видов химико-термической обработки. Уясните преимущества и области использования цементации, азотирования, цианирования и различных видов диффузионной металлизации. Объясните влияние легирования на механизм формирования структуры поверхностного слоя. Рассмотрите сущность и назначение дробеструйного поверхностного наклепа и его влияние на эксплуатационные свойства деталей машин.

Вопросы для самопроверки

1. В чем заключаются физические основы химико-термической обработки?

2. Химизм процесса азотирования.

3. Химизм процесса цементации.

4. Назначение цементации и режим термической обработки после нее.

5. Для каких целей и как производится нитроцементация?

6. Каковы свойства цементированных и азотированных изделий?

7. Химизм и назначение процесса цианирования.

8. Сущность и назначение процесса борирования.

9. Как изменяются свойства изделий при дробеструйной обработке и

какова природа этих изменений?

10. Как влияет поверхностное упрочнение на эксплуатационные характеристики изделий?

Конструкционные стали

Конструкционные стали общего назначения. Цементуемые, улучшаемые, пружинно-рессорные стали. Высокопрочные мартенситостареющие стали. Коррозионно-стойкие и жаростойкие стали и сплавы. Жаропрочные стали и сплавы.

Нужно усвоить принципы маркировки сталей и уметь по маркировке определить состав и особенности данной стали, а также иметь общее представление о разных группах стали.

Разберитесь во влиянии легирующих элементов на изменение структуры и свойств стали, особое внимание уделите технологическим особенностям термической обработки легированной стали различных групп.

Рассмотрите способы классификации, основные принципы выбора для различного назначения цементуемых, улучшаемых, пружинно-рессорных, износостойких, высокопрочных, нержавеющей, жаропрочных и других сталей.

При изучении жаропрочных сталей обратите внимание на особенности поведения металла в условиях нагружения при повышенных температурах. Уясните сущность явления ползучести и основные характеристики жаропрочности; каковы предельные рабочие температуры и области применения сталей различного структурного класса.

В качестве примеров указать две-три марки стали каждой группы, расшифровать состав, назначить режим термической обработки и охарактеризовать структуру, свойства и область применения.

Вопросы для самопроверки

1. Укажите химический состав сталей марок: 40, 20Х, 30ХГСА, 50Г, Г13, ШХ15, 18Х2Н4ВА, 5ХНМ, Х18Н9Т, Н18К8М5Т.

2. Как классифицируются конструкционные стали по технологии термической обработки?

3. Какие требования предъявляются к цементуемым изделиям?

4. Чем определяется выбор марки цементуемой стали для изделий различного назначения?

5. Какова термическая обработка цементуемых деталей?

6. Чем объясняется назначение процесса улучшения для конструкционной стали?

7. Как влияет степень легирования на механические свойства улучшаемой стали?

8. Какие требования предъявляются к рессорно-пружинным сталям?

9. Какие вы знаете износостойкие стали?

10. Каковы требования, предъявляемые к нержавеющей стали?

Инструментальные стали

Классификация и маркировка инструментальных сталей. Стали, не обладающие и обладающие теплостойкостью. Стали для режущего, измерительного и штампового инструмента. Твердые сплавы.

Изучите классификацию инструментальных сталей в зависимости от назначения инструмента и в связи с этим рассмотрите основные эксплуатационные свойства инструмента каждой группы. Особое внимание уделите быстрорежущим сталям. Уясните причины их высокой красностойкости и особенности термической обработки.

Вопросы для самопроверки

1. Укажите химический состав сталей марок: У10, 9ХС, ХВГ, Р18, Р18Ф2, Р9К10, Р9М4К8, Х12, 6ХВ2С, Х12М.
2. Как классифицируются инструментальные стали?
3. Требования, предъявляемые к сталям для режущего инструмента.
4. Приведите примеры углеродистых и легированных сталей, используемых для режущего инструмента.
5. Укажите и расшифруйте основные марки быстрорежущей стали.
6. Что представляют собой твердые сплавы?
7. Каковы свойства и преимущества твердых сплавов?
8. Укажите марки твердых сплавов, их состав и назначение.

Алюминий, магний и их сплавы

Деформируемые и литейные сплавы.

Обратите внимание на основные преимущества алюминиевых и магниевых сплавов, связанные с их высокой удельной прочностью. Рассмотрите классификацию алюминиевых сплавов и обоснуйте технологический способ изготовления изделий из сплавов каждой группы. Разберитесь в основах теории термической обработки (старения) легких сплавов. Обоснуйте выбор способа упрочнения деформируемых и литейных сплавов.

Вопросы для самопроверки

1. Свойства и применение алюминия.
2. Как классифицируются алюминиевые сплавы?
3. Какие сплавы упрочняются путем термической обработки?
4. В чем сущность процесса старения?
5. Какие сплавы не упрочняются путем термической обработки?
6. Какие вы знаете литейные алюминиевые сплавы?
7. Какие вы знаете жаропрочные алюминиевые сплавы?
8. Какие вы знаете порошковые алюминиевые сплавы?

9. Каковы свойства магния?

10. Укажите свойства и назначение сплавов на основе магния.

Медь и ее сплавы

Латуни и бронзы.

Изучите классификацию медных сплавов и уясните маркировку, состав, структуру, свойства и области применения разных групп медных сплавов.

Вопросы для самопроверки

1. Как влияют примеси на свойства чистой меди?
2. Как классифицируются медные сплавы?
3. Какие сплавы относятся к латуням?
4. Приведите несколько примеров латуней с указанием их состава, структуры, свойств и назначения.
5. Какие сплавы относятся к бронзам? Их маркировка и состав.
6. Укажите строение, свойства и назначение различных бронз.
7. Какой термической обработке подвергается бериллиевая бронза?

Композиционные материалы

Обратите внимание на принципиальное отличие композиционного материала, заключающееся в сочетании разнородных материалов с четкой границей раздела между ними. В связи с тем, что композит обладает свойствами, которыми не может обладать ни один из его компонентов в отдельности, такие материалы становятся весьма перспективными в различных областях новой техники. Укажите свойства композитов в зависимости от вида матрицы и формы, размеров и взаимного расположения наполнителя. Уясните возможность использования композитов в качестве жаропрочных материалов и способы повышения их жаропрочности.

Вопросы для самопроверки

1. Что такое композиты?
2. Как подразделяют композиты в зависимости от формы и размеров наполнителя?
3. Как подразделяют композиты по виду матрицы?
4. От чего зависят механические свойства композитов?
5. Какие композиционные материалы используют для работы при высоких температурах (жаропрочные)?

ЧАСТЬ II. НЕМЕТАЛЛИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

Пластические массы

В основе неметаллических материалов лежат полимеры. Обратите внимание на особенности строения полимеров, которые определяют их механические и физико-химические свойства. Классификация полимерных материалов. Свойства и области применения пластмасс.

Пластические массы - искусственные материалы, получаемые на основе органических полимерных связывающих веществ, которые являются обязательными компонентами пластмасс. Изучите различные группы пластических масс, их свойства и области применения.

Вопросы для самопроверки

1. Что лежит в основе классификации полимеров?
2. Какие материалы относятся к обратимым и необратимым полимерам?
3. Какие вы знаете наполнители пластмасс?
4. Для чего вводят в пластмассы отвердители?
5. Приведите примеры пластиков с твердыми наполнителями.
6. Укажите область применения термопластов и реактопластов.
7. В чем преимущества пластмасс по сравнению с металлическими материалами? Каковы их недостатки?

Резиновые материалы

Как технический материал резина отличается от других материалов высокими эластичными свойствами, что связано со свойствами самой основы резины - каучука. Уясните состав резины, способы получения и влияние различных добавок на ее свойства. Подробно рассмотрите влияние порошковых и органических наполнителей на свойства резины, изучите физико-механические свойства и области применения резин различных марок.

Вопросы для самопроверки

1. Что представляет собой резина?
2. Какие компоненты относятся к совмещающимся и как они влияют на свойства резины?
3. Объясните роль порошковых наполнителей.
4. В каких случаях применяются волокнистые наполнители?

Неорганические материалы

Поскольку большинство неорганических материалов содержит различные соединения кремния с другими элементами, эти материалы получили общее название силикатных материалов. Обратите внимание на внутреннее строение неорганического стекла. Уясните сущность стеклообразного состояния как разновидности аморфного состояния вещества. Разберитесь в

изменении свойств стекла в зависимости от состава. Рассмотрите стеклокристаллические материалы (ситаллы) и их отличие от стекла минерального. Уясните причины образования кристаллической структуры ситаллов.

При изучении керамических материалов обратите внимание на отличие технической керамики от обычной. Разберитесь в химическом и фазовом составах технической керамики, ее свойствах и области применения.

Вопросы для самопроверки

Какие силикатные материалы относятся к минеральному стеклу?

Их отличительные свойства.

Как достигаются электроизоляционные или электропроводящие свойства стекла?

Объясните причины, вызывающие кристаллизацию ситаллов (стеклокристаллитов).

Укажите область применения ситаллов.

5. В чем отличие технической керамики от обычной? Укажите область ее применения.

КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

Задания на контрольные работы выдают индивидуально каждому студенту. Задание включает вопросы и задачи по основным разделам курса.

При выполнении контрольных работ студенты изучают методику выбора и назначения сталей и сплавов для изготовления конкретных деталей машин и различного вида инструментов, а также знакомятся с особенностями строения, технологией получения и областью применения наиболее распространенных неметаллических материалов. Одновременно студент должен научиться пользоваться рекомендуемыми справочными материалами, с тем чтобы уметь в дальнейшем правильно выбрать материал при курсовом и дипломном проектировании.

Перечень ГОСТов, необходимых для выполнения контрольных работ, приведен в приложении. Диаграмма состояния железо-цементит и диаграмма изотермического превращения аустенита эвтектоидной стали У8 также приведены в приложении (см. рис. 1 и 2).

ЗАДАНИЯ НА КОНТРОЛЬНУЮ РАБОТУ

Вариант 1

1. Что такое ликвация? Виды ликвации, причины их возникновения и способы устранения.

2. Дайте определение ударной вязкости (KCV). Опишите методику измерения этой характеристики механических свойств металла.

3. Вычертите диаграмму состояния железо - карбид железа, укажите структурные составляющие во всех областях диаграммы, опишите прев-

ращения и постройте кривую охлаждения (с применением правила фаз) для сплава, содержащего 3,6% С. Какова структура этого сплава при комнатной температуре и как такой сплав называется?

4. Вычертите диаграмму изотермического превращения аустенита для стали У8, нанесите на нее кривую режима изотермической обработки, обеспечивающей получение твердости 45...50 HRC. Укажите, как этот режим называется, опишите сущность превращений и какая структура получается в данном случае.

5. Как изменяются структура и свойства стали 40 и У12 в результате закалки от температуры 750 и 850° С. Объясните с применением диаграммы состояния железо-цементит. Выберите оптимальный режим нагрева под закалку каждой стали.

Вариант 2

1. Как и почему скорость охлаждения при кристаллизации влияет на строение слитка?

2. Из листа свинца путем прокатки при комнатной температуре была получена тонкая фольга. Твердость и прочность этой фольги оказались такими же, как у исходного листа. Объясните, какие процессы происходили при пластической деформации свинца и какими изменениями структуры и свойств они сопровождались.

3. Вычертите диаграмму состояния железо-карбид железа, укажите структурные составляющие во всех областях диаграммы, опишите превращения и постройте кривую охлаждения (с применением правила фаз) для сплава, содержащего 0,8% С. Какова структура этого сплава при комнатной температуре и как такой сплав называется?

4. Используя диаграмму состояния железо -цементит и кривую изменения твердости в зависимости от температуры отпуска, назначьте для углеродистой стали 40 температуру закалки и температуру отпуска, необходимые для обеспечения твердости 400 НВ. Опишите превращения на всех этапах термической обработки и получаемую структуру.

5. Для каких целей применяется диффузионный отжиг? Как выбирается режим такого отжига? Приведите примеры.

Вариант 3

1. Опишите виды твердых растворов. Приведите примеры.

2. Дайте определение твердости. Какими методами измеряют твердость металлов и сплавов? Опишите их.

3. Вычертите диаграмму состояния железо-цементит, укажите структурные составляющие во всех областях диаграммы, опишите превращения и постройте кривую охлаждения (с применением правила фаз) для сплава, содержащего 2,2% С. Какова структура этого сплава при комнатной температуре и как такой сплав называется?

4. Вычертите диаграмму изотермического превращения аустенита для стали У8. Нанесите на нее кривую режима изотермической обработки, обеспечивающей получение твердости 150 НВ. Укажите, как этот режим называется и какая структура получается в данном случае.

5. С помощью диаграммы состояния железо-цементит обоснуйте выбор режима термической обработки, применяемой для устранения цементитной сетки в заэвтектоидной стали. Дайте определение выбранного режима обработки и опишите превращения, которые происходят при нагреве и охлаждении.

Вариант 4

1. Опишите физическую сущность и механизм процесса кристаллизации.

2. Для чего проводится рекристаллизационный отжиг? Как назначается режим этого вида обработки? Приведите несколько конкретных примеров.

3. Опишите превращения и постройте кривую охлаждения (с применением правила фаз) для сплава, содержащего 0,4 % С. Какова структура этого сплава при комнатной температуре и как такой сплав называется?

4. Используя диаграмму изотермического превращения аустенита, объясните, почему нельзя получить в стали чисто мартенситную структуру при охлаждении ее со скоростью меньше критической?

5. После термической обработки углеродистой стали получена структура цементит + мартенсит отпуска. Нанесите на диаграмму состояния железо-цементит ординату заданной стали (примерно) и обоснуйте температуру нагрева этой стали под закалку. Так же укажите температуру отпуска. Опишите превращения, которые произошли при термической обработке.

Вариант 5

1. Что такое ограниченные и неограниченные твердые растворы? Каковы необходимые условия образования неограниченных твердых растворов?

2. Опишите сущность явления наклепа и примеры его практического использования.

3. Постройте кривую охлаждения (с применением правила фаз) для сплава содержащего 1,1% С. Какова структура этого сплава при комнатной температуре и как такой сплав называется?

4. При непрерывном охлаждении стали У8 получена структура троостит + мартенсит. Нанесите на диаграмму изотермического превращения аустенита кривую охлаждения, обеспечивающую получение данной структуры. Укажите интервалы температур превращений и опишите характер превращения в каждом из них.

5. С помощью диаграммы состояния железо - цементит установите температуру полной и неполной закалки для стали 45 и опишите структуру и свойства стали после каждого вида термической обработки.

Вариант 6

1. Начертите диаграмму состояния для случая ограниченной растворимости компонентов в твердом виде. Укажите структурные составляющие во всех областях этой диаграммы и опишите строение типичных сплавов различного состава, встречающихся в этой системе.

2. Волочение медной проволоки проводят в несколько переходов. В некоторых случаях проволока на последних переходах рвется. Объясните причину разрыва и укажите способ его предупреждения.

3. Опишите превращения и постройте кривую охлаждения (с применением правила фаз) для сплава железа, содержащего 0,5 % С. Какова структура этого сплава при комнатной температуре и как такой сплав называется?

4. Вычертите диаграмму изотермического превращения аустенита для стали У8. Нанесите на нее кривую режима изотермической обработки, обеспечивающей получение твердости 200 НВ. Укажите, как этот режим называется и какая структура получается в этом случае.

5. Используя диаграмму состояния железо-цементит, установите температуры нормализации, отжига и закалки для стали У12. Охарактеризуйте эти режимы термической обработки и опишите структуру и свойства стали после каждого вида обработки.

Вариант 7

1. Опишите явление полиморфизма в приложении к железу. Какое практическое значение оно имеет?

2. Как изменяются свойства деформированного металла при нагреве, какие процессы происходят при этом?

3. Постройте кривую охлаждения (с применением правила фаз) для сплава железа, содержащего 0,7 % С. Какова структура этого сплава при комнатной температуре и как такой сплав называется?

4. Вычертите диаграмму изотермического превращения аустенита стали У8. Нанесите на нее кривую режима изотермической обработки, обеспечивающей твердость 20...25 HRC. Укажите, как этот режим называется и какая структура образуется в данном случае.

5. Плашки из стали УНА закалены: первая - от температуры 760° С, вторая - от температуры 850° С. Используя диаграмму состояния железо - цементит, укажите температуры закалки, объясните, какая из этих плашек закалена правильно, имеет более высокие режущие свойства и почему.

Варианта 8

1. В чем сущность процесса модифицирования? Приведите пример использования модификаторов для повышения свойств литейных алюминиевых сплавов.

2. В чем различие между холодной и горячей пластической деформацией? Опишите особенности обоих видов деформации.

3. Опишите превращения и постройте кривую охлаждения (с применением правила фаз) для сплава железа, содержащего 5,0 % С. Какова структура этого сплава при комнатной температуре и как такой сплав называется?

4. Углеродистые стали 35 и У8 после закалки и отпуска имеют структуру мартенсит отпуска и твердость: первая 45 HRC, вторая - 60 HRC. Используя диаграмму состояния железо - цементит и учитывая превращения, происходящие при отпуске, укажите температуру закалки и температуру отпуска для каждой стали. Опишите превращения, происходящие в этих сталях в процессе закалки и отпуска, и объясните, почему сталь У8 имеет большую твердость, чем сталь 35.

5. Сталь 40 подвергалась закалке от температур 760 и 840° С. С помощью диаграммы состояния железо-цементит укажите, какие структуры обра-

зуются в каждом случае. Объясните причины образования разных структур и рекомендуйте оптимальный режим нагрева под закалку данной стали.

Вариант 9

1. Охарактеризуйте особенности металлического типа связи и основные свойства металлов.

2. Какими стандартными характеристиками механических свойств оценивается прочность металлов и сплавов? Как эти характеристики определяются?

3. Постройте кривую охлаждения (с применением правила фаз) для сплава железа, содержащего 4,8 % С. Какова структура этого сплава при комнатной температуре и как такой сплав называется?

4. С помощью диаграммы состояния железо-цементит установите температуру полного и неполного отжига и нормализации для стали 20, Охарактеризуйте эти режимы термической обработки и опишите структуру и свойства стали.

5. Почему для изготовления инструмента применяется сталь с исходной структурой зернистого перлита? В результате какой термической обработки можно получить эту структуру? Приведите конкретный режим для любой инструментальной стали.

Вариант 10

1. Опишите явление полиморфизма в приложении к титану. Какое практическое значение оно имеет?

2. Каким способом можно восстановить пластичность холоднокатаной медной ленты? Назначьте режим термической обработки и опишите сущность происходящих процессов.

3. Постройте кривую охлаждения (с применением правила фаз) для сплава железа, содержащего 1,4% С. Какова структура этого сплава при комнатной температуре и как такой сплав называется?

4. Вычертите диаграмму изотермического превращения аустенита для стали У8. Нанесите на нее кривую режима термической обработки, обеспечивающей получение твердости 60...63 HRC. Укажите, как этот режим называется и какая структура при этом получается. Опишите сущность происходящих превращений.

5. С помощью диаграммы состояния железо-цементит опишите структурные превращения, происходящие при нагреве доэвтектоидной стали. Покажите критические точки АС1 и АС3 для выбранной вами стали. Установите режим нагрева этой стали под закалку. Охарактеризуйте процесс закалки, опишите получаемую структуру и свойства стали.

ЛИТЕРАТУРА

Арзамасов Б. Н., Сидорин И. И. и др. Материаловедение: учебник для вузов. М.: Машиностроение, 2008. 648 с.

Батышев А. И., Безпалько В. И., Смолькин А. А. Материаловедение и технология материалов М.: Изд-во Инфра-М, 2012. 288 с.

Богодухов С. И., Козик Е. С.. Материаловедение: учеб. для вузов. М.: Машиностроение, 2015. 504 с.

Бондаренко, Г. Г. Кабанова Т. А., Рыбалко В. В. Материаловедение: учебник для бакалавров / под ред. Г. Г. Бондаренко. 2-е изд. М.: Юрайт, 2014. 359 с.

Комаров О. С., Керженцева А. Ф., Макаева Г. Г. Материаловедение в машиностроении. М.: Высшая школа. 2009. 304 с.

Лахтин Ю. М., Леонтьева В. П. Материаловедение: учебник для студентов машиностроительных специальностей вузов. М.: Машиностроение, 2009. 528 с.

Хазин М. Л. Материаловедение: методические материалы. Екатеринбург: Изд-во УГГГА, 2008. 208 с.

Хазин М. Л. Материаловедение: учебно-практическое пособие. Урал. гос. горный ун-т – Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2019. – 184 с.

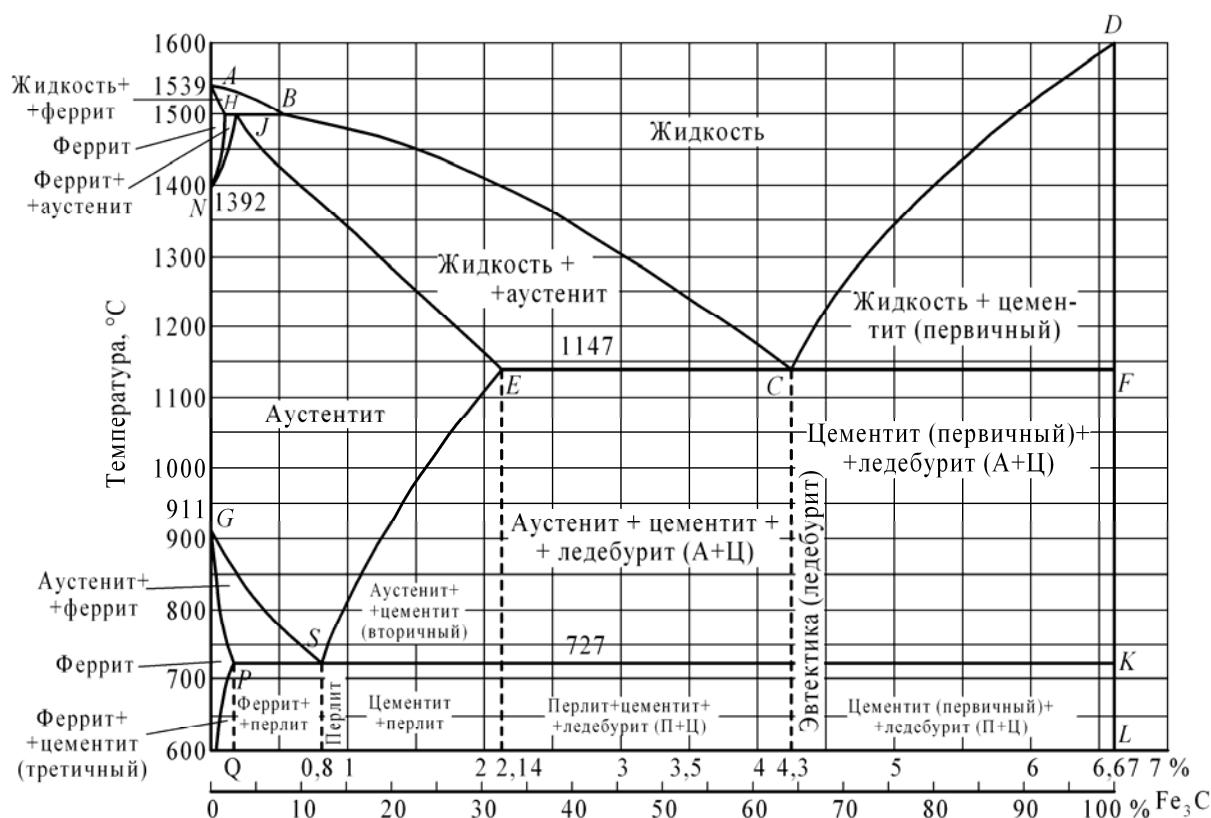


Рисунок 1 – Диаграмма состояния железо-цементит

Перечень ГОСТов на стали и сплавы

1. Сталь

Углеродистая обыкновенного качества – ГОСТ 380-71

Углеродистая качественная – ГОСТ 1050-74

Легированная, конструкционная, качественная, рессорно-пружинная – ГОСТ 1050-74

Углеродистая инструментальная – ГОСТ 1435-74

Легированная инструментальная – ГОСТ 5950-73

Подшипниковая – ГОСТ 801-78

Быстрорежущие стали – ГОСТ 19265-73

Конструкционный повышенной и высокой обрабатываемости резанием – ГОСТ 1414-75

Жаростойкие и жаропрочные – ГОСТ 5632-72

Коррозионностойкие – ГОСТ 5632-72

Сплавы твердые спеченные – ГОСТ 3882-74

Магнитотвердые (для постоянных магнитов) – ГОСТ 6862-71

Электротехнические – ГОСТ 21427.0-75...

ГОСТ 21427.3-75

2. Чугун

Серый – ГОСТ 1412-79

Ковкий – ГОСТ 1215-79

Высокопрочный – ГОСТ 7293-85

Жаростойкий – ГОСТ 7769-75

3. Алюминий и его сплавы

Алюминий – ГОСТ 11069-74
Деформируемые – ГОСТ 4784-74
Литейные – ГОСТ 2685-75
4. Медь и ее сплавы
Медь ГОСТ 859 – 78
Латунь двойная и многокомпонентная
деформируемая – ГОСТ 15527-70
Латунь литейная – ГОСТ 17711-80
Бронза оловянистая деформируемая – ГОСТ 5017-74
Бронза безоловянистая деформируемая – ГОСТ 18175-78
Бронза оловянистая литейная – ГОСТ 613-79
Бронза безоловянистая литейная – ГОСТ 493-79
Медно-никелевые сплавы – ГОСТ 492-73
5. Титановые сплавы – ГОСТ 19807-74
6. Антифрикционные сплавы
Алюминиевые – ГОСТ 14113-78
Цинковые – ГОСТ 21437-75
Баббиты – ГОСТ 1320-74
7. Магний и его сплавы
Магний – ГОСТ 804-72
Деформируемые – ГОСТ 14957-76
Литейные – ГОСТ 2856-79

Хазин Марк Леонтьевич

МАТЕРИАЛОВЕДЕНИЕ

Учебно-практическое пособие
по выполнению практических и
самостоятельных работ
для студентов очного и заочного обучения
направлений
направлений специалитета
21.05.04 Горное дело

Редактор Л. В. Устьянцева

Компьютерная верстка автора

Подписано в печать
Бумага писчая. Формат 60 × 84 1/16.
Гарнитура Times New Roman. Печать на ризографе.
Печ. л. 1,51. Уч.-изд. л. 1,71. Тираж 100. Заказ №

Издательство УГГУ
620144, г. Екатеринбург, ул. Куйбышева, 30
Уральский государственный горный университет
Отпечатано с оригинал-макета
в лаборатории множительной техники УГГУ

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»



МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ И ЗАДАНИЯ К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ

ПРИКЛАДНОЕ ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ

Направление подготовки
21.05.04 Горное дело

квалификация выпускника: **специалист**

Автор: Дружинин А.В., доцент, канд. техн. наук

Одобрены на заседании кафедры

Информатики
(название кафедры)
Зав. кафедрой _____
(подпись)
к.т.н., доц. Дружинин А. В.
(Фамилия И.О.)
Протокол № 1 от 16.09.2021
(Дата)

Рассмотрены методической комиссией

Горно-механического факультета
(название факультета)
Председатель _____
(подпись)
Осипов П. А.
(Фамилия И.О.)
Протокол № 2 от 12.10.2021
(Дата)

Екатеринбург

ВВЕДЕНИЕ

Данные методические рекомендации необходимы для студентов специалитета по направлению подготовки 21.05.04 – «Горное дело» при организации самостоятельной работы по дисциплине «Прикладное программное обеспечение» в рамках подготовки и защиты контрольной работы.

В методических рекомендациях содержатся особенности организации подготовки контрольной работы в виде реферата, требования к его оформлению, а также порядок защиты и критерии оценки.

ОРГАНИЗАЦИЯ ПОДГОТОВКИ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ (РЕФЕРАТА)

Общая характеристика реферата

Написание реферата практикуется в учебном процессе в целях приобретения студентом необходимой профессиональной подготовки, развития умения и навыков самостоятельного научного поиска: изучения литературы по выбранной теме, анализа различных источников и точек зрения, обобщения материала, выделения главного, формулирования выводов и т. п. С помощью реферата студент может глубже постигать наиболее сложные проблемы дисциплины, учиться лаконично излагать свои мысли, правильно оформлять работу, докладывать результаты своего труда.

В «Толковом словаре русского языка» дается следующее определение: **«реферат** – краткое изложение содержания книги, статьи, исследования, а также доклад с таким изложением».

Различают два вида реферата:

- *репродуктивный* – воспроизводит содержание первичного текста в форме реферата-конспекта или реферата-резюме. В реферате-конспекте содержится фактическая информация в обобщённом виде, иллюстрированный материал, различные сведения о методах исследования, результатах исследования и возможностях их применения. В реферате-резюме содержатся только основные положения данной темы;

- *продуктивный* – содержит творческое или критическое осмысление реферируемого источника и оформляются в форме реферата-доклада или реферата-обзора. В реферате-докладе, наряду с анализом информации первоисточника, дается объективная оценка проблемы, и он имеет развёрнутый характер. Реферат-обзор составляется на основе нескольких источников и в нем сопоставляются различные точки зрения по исследуемой проблеме.

Студент для изложения материала должен выбрать продуктивный вид реферата.

Выбор темы реферата

Студенту предоставляется право выбора темы реферата из рекомендованного преподавателем дисциплины списка. Выбор темы должен быть осознанным и обоснованным с точки зрения познавательных интересов автора, а также полноты освещения темы в имеющейся научной литературе.

Если интересующая тема отсутствует в рекомендованном списке, то по согласованию с преподавателем студенту предоставляется право самостоятельно предложить тему реферата, раскрывающую содержание изучаемой дисциплины. Тема не должна быть слишком общей и глобальной, так как небольшой объем работы (до 20-25 страниц без учёта приложений) не позволит раскрыть ее.

Начинать знакомство с избранной темой лучше всего с чтения обобщающих работ по данной проблеме, постепенно переходя к узкоспециальной литературе. При этом

следует сразу же составлять библиографические выходные данные используемых источников (автор, название, место и год издания, издательство, страницы).

На основе анализа прочитанного и просмотренного материала по данной теме следует составить тезисы по основным смысловым блокам, с пометками, собственными суждениями и оценками. Предварительно подобранный в литературных источниках материал может превышать необходимый объем реферата.

Формулирование цели и составление плана реферата

Выбрав тему реферата и изучив литературу, необходимо сформулировать цель работы и составить план реферата.

Цель – это осознаваемый образ предвосхищаемого результата. Возможно, формулировка цели в ходе работы будет меняться, но изначально следует ее обозначить, чтобы ориентироваться на нее в ходе исследования. Формулирование цели реферата рекомендуется осуществлять при помощи глаголов: исследовать, изучить, проанализировать, систематизировать, осветить, изложить (представления, сведения), создать, рассмотреть, обобщить и т. д.

Определяясь с целью дальнейшей работы, параллельно необходимо думать над составлением плана, при этом четко соотносить цель и план работы. Правильно построенный план помогает систематизировать материал и обеспечить последовательность его изложения.

Наиболее традиционной является следующая **структура реферата**:

Титульный лист.

Оглавление (план, содержание).

Введение.

1. (полное наименование главы).

1.1. (полное название параграфа, пункта);

1.2. (полное название параграфа, пункта).

2. (полное наименование главы).

2.1. (полное название параграфа, пункта);

2.2. (полное название параграфа, пункта).

Заключение (выводы).

Библиография (список использованной литературы).

Приложения (по усмотрению автора).

Титульный лист оформляется в соответствии с Приложением.

Оглавление(план, содержание) включает названия всех глав и параграфов (пунктов плана) реферата и номера страниц, указывающие их начало в тексте реферата.

Введение. В этой части реферата обосновывается актуальность выбранной темы, формулируются цель и задачи работы, указываются используемые материалы и дается их краткая характеристика с точки зрения полноты освещения избранной темы. Объем введения не должен превышать 1-1,5 страницы.

Основная часть реферата может быть представлена двумя или тремя главами, которые могут включать 2-3 параграфа (пункта).

Здесь достаточно полно и логично излагаются главные положения в используемых источниках, раскрываются все пункты плана с сохранением связи между ними и последовательности перехода от одного к другому.

Автор должен следить за тем, чтобы изложение материала точно соответствовало цели и названию главы (параграфа). Материал в реферате рекомендуется излагать своими словами, не допуская дословного переписывания из литературных источников. В тексте обязательны ссылки на первоисточники, т. е. на тех авторов, у которых взят данный материал в виде мысли, идеи, вывода, числовых данных, таблиц, графиков, иллюстраций и пр.

Работа должна быть написана грамотным литературным языком. Сокращение слов в тексте не допускается, кроме общеизвестных сокращений и аббревиатуры. Каждый раздел рекомендуется заканчивать кратким выводом.

Заключение(выводы). В этой части обобщается изложенный в основной части материал, формулируются общие выводы, указывается, что нового лично для себя вынес автор реферата из работы над ним. Выводы делаются с учетом опубликованных в литературе различных точек зрения по проблеме, рассматриваемой в реферате, сопоставления их и личного мнения автора реферата. Заключение по объему не должно превышать 1,5-2 страниц.

Библиография(список использованной литературы) – здесь указывается реально использованная для написания реферата литература, периодические издания и электронные источники информации. Список составляется согласно правилам библиографического описания.

Приложения могут включать графики, таблицы, расчеты.

ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ РЕФЕРАТА

Общие требования к оформлению реферата

Рефераты, как правило, требуют изучения и анализа значительного объема статистического материала, формул, графиков и т. п. В силу этого особое значение приобретает правильное оформление результатов проделанной работы.

Текст реферата должен быть подготовлен в печатном виде. Исправления и пометки не допускаются. Текст работы оформляется на листах формата А4, на одной стороне листа, с полями: левое – 25 мм, верхнее – 20 мм, правое – 15 мм и нижнее – 25 мм. При компьютерном наборе шрифт должен быть таким: тип шрифта TimesNewRoman, кегль 14, междустрочный интервал 1,5.

Рекомендуемый объем реферата – не менее 20 страниц. Титульный лист реферата оформляется студентом по образцу, данному в приложении 1.

Текст реферата должен быть разбит на разделы: главы, параграфы и т. д. Очередной раздел нужно начинать с нового листа.

Все страницы реферата должны быть пронумерованы. Номер страницы ставится снизу страницы, по центру. Первой страницей является титульный лист, но на ней номер страницы не ставится.

Таблицы

Таблицы по содержанию делятся на аналитические и неаналитические. Аналитические таблицы являются результатом обработки и анализа цифровых показателей. Как правило, после таких таблиц делается обобщение, которое вводится в текст словами: «таблица позволяет сделать вывод о том, что...», «таблица позволяет заключить, что...» и т. п.

В неаналитических таблицах обычно помещаются необработанные статистические данные, необходимые лишь для информации и констатации фактов.

Таблицы размещают после первого упоминания о них в тексте таким образом, чтобы их можно было читать без поворота работы или с поворотом по часовой стрелке.

Каждая таблица должна иметь нумерационный и тематический заголовок. Тематический заголовок располагается по центру таблицы, после нумерационного, размещённого в правой стороне листа и включающего надпись «Таблица» с указанием арабскими цифрами номера таблицы. Нумерация таблиц сквозная в пределах каждой главы. Номер таблицы состоит из двух цифр: первая указывает на номер главы, вторая – на номер таблицы в главе по порядку (например, «Таблица 2.2» – это значит, что представленная таблица вторая во второй главе).

Цифры в графах таблиц должны проставляться так, чтобы разряды чисел во всей графе были расположены один под другим. В одной графе количество десятичных знаков должно быть одинаковым. Если данные отсутствуют, то в графах ставят знак тире. Округление числовых значений величин до первого, второго и т. д. десятичного знака для различных значений одного и того же наименования показателя должно быть одинаковым.

Таблицу с большим количеством строк допускается переносить на другую страницу, при этом заголовок таблицы помещают только над ее первой частью, а над переносимой частью пишут «Продолжение таблицы» или «Окончание таблицы». Если в работе несколько таблиц, то после слов «Продолжение» или «Окончание» указывают номер таблицы, а само слово «таблица» пишут сокращенно, например, «Продолжение табл. 1.1», «Окончание табл. 1.1».

На все таблицы в тексте реферата должны быть даны ссылки с указанием их порядкового номера, например, «...в табл. 2.2».

Формулы

Формулы – это комбинации математических знаков, выражающие какие-либо предложения.

Формулы, приводимые в реферате, должны быть наглядными, а обозначения, применяемые в них, соответствовать стандартам.

Пояснения значений символов и числовых коэффициентов следует приводить непосредственно под формулой, в той последовательности, в какой они даны в формуле. Значение каждого символа и числового коэффициента дается с новой строки. Первую строку объяснения начинают со слова «где» без двоеточия после него.

Формулы и уравнения следует выделять из текста свободными строками. Если уравнение не умещается в одну строку, оно должно быть перенесено после знака равенства (=) или после знака (+), минуса (–), умножения (x) и деления (:).

Формулы нумеруют арабскими цифрами в пределах всей реферата или главы. В пределах реферата используют нумерацию формул одинарную, в пределах главы – двойную. Номер указывают с правой стороны листа на уровне формулы в круглых скобках.

В тексте ссылки на формулы приводятся с указанием их порядковых номеров, например: «...в формуле (2.2)» (второй формуле второй главы).

Иллюстрации

Иллюстрации позволяют наглядно представить явление или предмет такими, какими мы их зрительно воспринимаем, но без лишних деталей и подробностей.

Основными видами иллюстраций являются схемы, диаграммы и графики.

Схема – это изображение, передающее обычно с помощью условных обозначений и без соблюдения масштаба основную идею какого-либо устройства, предмета, сооружения или процесса и показывающее взаимосвязь их главных элементов.

Диаграмма – один из способов изображения зависимости между величинами. Наибольшее распространение получили линейные, столбиковые и секторные диаграммы.

Для построения линейных диаграмм используется координатное поле. По горизонтальной оси в изображенном масштабе откладывается время или факториальные признаки, на вертикальной – показатели на определенный момент (период) времени или размеры результативного независимого признака. Вершины ординат соединяются отрезками – в результате получается ломаная линия.

На столбиковых диаграммах данные изображаются в виде прямоугольников (столбиков) одинаковой ширины, расположенных вертикально или горизонтально. Длина (высота) прямоугольников пропорциональна изображенным ими величинам.

Секторная диаграмма представляет собой круг, разделенный на секторы, величины которых пропорциональны величинам частей изображаемого явления.

График – это результат обработки числовых данных. Он представляет собой условные изображения величин и их соотношений через геометрические фигуры, точки и линии.

Количество иллюстраций в работе должно быть достаточным для пояснения излагаемого текста.

Иллюстрации обозначаются словом «Рис.» и располагаются после первой ссылки на них в тексте так, чтобы их было удобно рассматривать без поворота работы или с поворотом по часовой стрелке. Иллюстрации должны иметь номер и наименование, расположенные по центру, под ней. Иллюстрации нумеруются в пределах главы арабскими цифрами, например: «Рис. 1.1» (первый рисунок первой главы). Ссылки на иллюстрации в тексте реферата приводят с указанием их порядкового номера, например: «...на рис. 1.1».

При необходимости иллюстрации снабжаются поясняющими данными (подрисуночный текст).

Приложения

Приложение – это часть основного текста, которая имеет дополнительное (обычно справочное) значение, но, тем не менее, необходима для более полного освещения темы. По форме они могут представлять собой текст, таблицы, графики, карты. В приложении помещают вспомогательные материалы по рассматриваемой теме: инструкции, методики, положения, результаты промежуточных расчетов, типовые проекты, имеющие значительный объем, затрудняющий чтение и целостное восприятие текста. В этом случае в тексте приводятся основные выводы (результаты) и делается ссылка на приложение, содержащее соответствующую информацию. Каждое приложение должно начинаться с новой страницы. В правом верхнем углу листа пишут слово «Приложение» и указывают номер приложения. Если в реферате больше одного приложения, их нумеруют последовательно арабскими цифрами, например: «Приложение 1», «Приложение 2» и т. д.

Каждое приложение должно иметь заголовок, который помещают ниже слова «Приложение» над текстом приложения, по центру.

При ссылке на приложение в тексте реферата пишут сокращенно строчными буквами «прил.» и указывают номер приложения, например: «...в прил. 1».

Приложения оформляются как продолжение текстовой части реферата со сквозной нумерацией листов. Число страниц в приложении не лимитируется и не включается в общий объем страниц реферата.

Библиографический список

Библиографический список должен содержать перечень и описание только тех источников, которые были использованы при написании реферата.

В библиографическом списке должны быть представлены монографические издания отечественных и зарубежных авторов, материалы профессиональной периодической печати (экономических журналов, газет и еженедельников), законодательные и др. нормативно-правовые акты. При составлении списка необходимо обратить внимание на достижение оптимального соотношения между монографическими изданиями, характеризующими глубину теоретической подготовки автора, и периодикой, демонстрирующей владение современными экономическими данными.

Наиболее распространенным способом расположения наименований литературных источников является алфавитный. Работы одного автора перечисляются в алфавитном порядке их названий. Исследования на иностранных языках помещаются в порядке латинского алфавита после исследований на русском языке.

Ниже приводятся примеры библиографических описаний использованных источников.

Статья одного, двух или трех авторов из журнала

Зотова Л. А., Еременко О. В. Инновации как объект государственного регулирования // Экономист. 2010. № 7. С. 17–19.

Статья из журнала, написанная более чем тремя авторами

Валютный курс и экономический рост / С. Ф. Алексашенко, А. А. Клепач, О. Ю. Осипова [и др.] // Вопросы экономики. 2010. № 8. С. 18–22.

Книга, написанная одним, двумя или тремя авторами

Олейник А. Н. Институциональная Горное дело: учебное пособие. М.: ИНФРА-М, 2011. 416 с.

Книга, написанная более чем тремя авторами

Экономическая теория: учебник / В. Д. Камаев [и др.]. М.: ВЛАДОС, 2011. 143 с.

Сборники

Актуальные проблемы экономики и управления: сборник научных статей. Екатеринбург: УГГУ, 2010. Вып. 9. 146 с.

Статья из сборника

Данилов А. Г. Система ценообразования промышленного предприятия // Актуальные проблемы экономики и управления: сб. научных статей. Екатеринбург: УГГУ, 2010. Вып. 9. С. 107–113.

Статья из газеты

Крашаков А. С. Будет ли обвал рубля // Аргументы и факты. 2011. № 9. С. 3.

Библиографические ссылки

Библиографические ссылки требуется приводить при цитировании, заимствовании материалов из других источников, упоминании или анализе работ того или иного автора, а также при необходимости адресовать читателя к трудам, в которых рассматривался данный вопрос.

Ссылки должны быть затекстовыми, с указанием номера соответствующего источника (на который автор ссылается в работе) в соответствии с библиографическим списком и соответствующей страницы.

Пример оформления затекстовой ссылки

Ссылка в тексте: «Под трансакцией понимается обмен какими-либо благами, услугами или информацией между двумя агентами» [10, С. 176].

В списке использованных источников:

10. *Сухарев О. С.* Институциональная Горное дело: учебник и практикум для специалитета и магистратуры / О. С. Сухарев. М.: Издательство Юрайт, 2016. 501 с.

ОРГАНИЗАЦИЯ ЗАЩИТЫ РЕФЕРАТА

Необходимо заранее подготовить тезисы выступления (план-конспект).

Порядок защиты реферата.

1. Краткое сообщение, характеризующее цель и задачи работы, ее актуальность, полученные результаты, вывод и предложения.

2. Ответы студента на вопросы преподавателя.

3. Отзыв руководителя-консультанта о ходе выполнения работы.

Советы студенту:

• Готовясь к защите реферата, вы должны вспомнить материал максимально подробно, и это должно найти отражение в схеме вашего ответа. Но тут же необходимо выделить главное, что наиболее важно для понимания материала в целом, иначе вы сможете проговорить все 15-20 минут и не раскрыть существа вопроса. Особенно строго следует отбирать примеры и иллюстрации.

- Вступление должно быть очень кратким – 1-2 фразы (если вы хотите подчеркнуть при этом важность и сложность данного вопроса, то не говорите, что он сложен и важен, а покажите его сложность и важность).

- Целесообразнее вначале показать свою схему раскрытия вопроса, а уж потом ее детализировать.

- Рассказывать будет легче, если вы представите себе, что объясняете материал очень способному и хорошо подготовленному человеку, который не знает именно этого раздела, и что при этом вам обязательно нужно доказать важность данного раздела и заинтересовать в его освоении.

- Строго следите за точностью своих выражений и правильностью употребления терминов.

- Не пытайтесь рассказать побольше за счет ускорения темпа, но и не мямлите.

- Не демонстрируйте излишнего волнения и не напрашивайтесь на сочувствие.

- Будьте особенно внимательны ко всем вопросам преподавателя, к малейшим его замечаниям. И уж ни в коем случае его не перебивайте!

- Не бойтесь дополнительных вопросов – чаще всего преподаватель использует их как один из способов помочь вам или сэкономить время. Если вас прервали, а при оценке ставят в вину пропуск важной части материала, не возмущайтесь, а покажите план своего ответа, где эта часть стоит несколько позже того, на чем вы были прерваны.

- Прежде чем отвечать на дополнительный вопрос, необходимо сначала правильно его понять. Для этого нужно хотя бы немного подумать, иногда переспросить, уточнить: правильно ли вы поняли поставленный вопрос. И при ответе следует соблюдать тот же принцип экономности мышления, а не высказывать без разбора все, что вы можете сказать.

- Будьте доброжелательны и тактичны, даже если к ответу вы не готовы (это вина не преподавателя, а ваша).

ТЕМЫ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ (РЕФЕРАТА)

1. Хост-компьютеры.
2. Локальные сети и персональные компьютеры.
3. Каналы связи.
4. Хранение и предоставление доступа к информации.
5. Управление передачей сообщений.
6. Каналы связи, обеспечивающие взаимодействие между хост-компьютерами.
7. Обмен информацией между абонентами сети.
8. Использование баз данных сети.
9. Классификация прикладного программного обеспечения.
10. Пакеты прикладных программ.
11. Методо-ориентированные пакеты.
12. Системы реального времени.
13. Офисные приложения.
14. Инструменты электронных таблиц для решения экономических задач.
15. Классификация баз данных (БД).
16. Системы управления базами данных (СУБД). Классификация СУБД.
17. Локальные и глобальные сети. Intranet и Internet. Сетевые службы.
18. Поисковые системы: Яндекс, Rambler, Google, ПОИСК@mail.ru.

МЕТОДИКА ОЦЕНКИ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ (РЕФЕРАТА)

Проверяемые компетенции:ОПК-5

Знать:

- офисные приложения;
- основы создания баз данных;
- принципы работы в разных поисковых системах интернет и в системах коммуникации.

Уметь:

- использовать офисные приложения;
- создавать базы данных средствами офисных приложений;
- использовать электронную почту и другие средства коммуникаций с помощью Интернета.

Владеть:

- инструментарием офисных приложений;
- технологией разработки баз данных;
- навыками работы в разных поисковых системах интернет и в системах коммуникации.

Критерии оценивания:

достижение поставленной цели и задач исследования (новизна и актуальность поставленных в реферате проблем, правильность формулирования цели, определения задач исследования, правильность выбора методов решения задач и реализации цели; соответствие выводов решаемым задачам, поставленной цели, убедительность выводов);

уровень эрудированности автора по изученной теме (знание автором состояния изучаемой проблематики, цитирование источников, степень использования в работе результатов исследований);

личные заслуги автора реферата (новые знания, которые получены помимо основной образовательной программы, новизна материала и рассмотренной проблемы, научное значение исследуемого вопроса);

культура письменного изложения материала (логичность подачи материала, грамотность автора);

культура оформления материалов работы (соответствие реферата всем стандартным требованиям);

знания и умения на уровне требований стандарта данной дисциплины: знание фактического материала, усвоение общих понятий и идей;

степень обоснованности аргументов и обобщений (полнота, глубина, всестороннее раскрытие темы, корректность аргументации и системы доказательств, характер и достоверность примеров, иллюстративного материала, наличие знаний интегрированного характера, способность к обобщению);

качество и ценность полученных результатов (степень завершенности реферативного исследования, спорность или однозначность выводов);

использование профессиональной терминологии;

использование литературных источников.

Правила оценивания:

Каждый показатель оценивается в 1 балл

Критерии оценки:

9-10 баллов (90-100%) - оценка «отлично»;

7-8 баллов (70-89%) - оценка «хорошо»;

5-6 баллов (50-69%) - оценка «удовлетворительно»;

0-4 балла (0-49%) - оценка «неудовлетворительно».

Образец оформления титульного листа контрольной работы (реферата)

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Уральский государственный горный университет»

Инженерно-экономический факультет

Кафедра информатики

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА (РЕФЕРАТ)

по дисциплине
«Прикладное программное обеспечение»

на тему:

УПРАВЛЕНИЕ ПЕРЕДАЧЕЙ СООБЩЕНИЙ

Руководитель:
Дружинин А.В.
Студент гр. Х-20
Артёмова Елена Юрьевна

Екатеринбург – 2020

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»



МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ И ЗАДАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКИМ РАБОТАМ

ПРИКЛАДНОЕ ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ

Специальность
21.05.04 Горное дело

квалификация выпускника: **специалист**

Автор: Дружинин А.В., доцент, канд. техн. наук

Одобрены на заседании кафедры

Информатики

(название кафедры)

Зав. кафедрой

(подпись)

к.т.н., доц. Дружинин А. В.

(Фамилия И.О.)

Протокол № 1 от 16.09.2021

(Дата)

Рассмотрены методической комиссией

Горно-механического факультета

(название факультета)

Председатель

(подпись)

Осипов П. А.

(Фамилия И.О.)

Протокол № 2 от 12.10.2021

(Дата)

Екатеринбург

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 1	10
Создание таблиц базы данных «Реализация товаров»	10
Создание файла базы данных Access	10
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 2	19
Работа с простыми запросами	19
Конструирование запросов на выборку с условием отбора	19
Вычисляемые поля в запросах	22
Параметры в запросах	25
Групповые операции в запросах	27
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 3	30
Работа с многотабличными запросами	30
Запросы на изменение	35
Задание для самостоятельной работы	37
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 4	39
Работа с формами	39
Условное форматирование элементов управления	40
Создание разделенной формы	42
Многотабличные формы	43
Создание многотабличной формы с помощью мастера	44
Одиночная многотабличная форма	47
Задание для самостоятельной работы	51
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 5	51
Работа с отчетами	51
Задание для самостоятельной работы	53
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 6	54
Создание главной кнопочной формы	54
с использованием макросов	54
Создание управляющих кнопок на экране	57
ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЫ	62
Указания к выполнению работы	62
Варианты заданий	62
СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ	74

ВВЕДЕНИЕ

Система управления базами данных

СУБД (система управления базами данных) является универсальным программным инструментом создания и обслуживания баз данных и приложений пользователя в самых разных предметных областях. СУБД обеспечивает создание, многоаспектный доступ к данным и использование одних и тех же данных различными задачами и приложениями пользователей.

СУБД поддерживаются различные модели данных. *Модель данных* – это метод (принцип) логической организации данных, используемый СУБД. Наиболее известными являются иерархическая, сетевая и реляционная модели.

В СУБД для персональных компьютеров (настольных СУБД) поддерживается преимущественно *реляционная модель*, которую отличает простота и единообразие представления данных простейшими *двумерными таблицами*.

Основной логической структурной единицей манипулирования данными является *строка* таблицы – *запись*. *Структура записи* определяется составом входящих в неё *полей*. Совокупность полей записи соответствует логически связанным реквизитам, характеризующим некоторую сущность предметной области.

Типовыми функциями СУБД по манипулированию данными являются выборка, добавление, удаление, изменение данных.

- *Выборка данных* – выборка записей из одной или нескольких взаимосвязанных таблиц в соответствии с заданными условиями.
- *Добавление и удаление* данных – добавление новых записей в таблицы и удаление существующих.
- *Изменение данных* – изменение значений данных в полях существующих записей.

Данные из одной или нескольких взаимосвязанных таблиц могут подвергаться обработке. К операциям *обработки* относятся, например, расчеты в пределах каждой записи, группировка записей в соответствии с *заданным* критерием группировки и обработка записей выделенных групп с помощью статистических функций, таких как суммирование, определение максимального, подсчет числа записей в группе и т. п.

СУБД Access включает разнообразные и многочисленные относительно автономные инструментальные средства, ориентированные на создание объектов базы данных и приложений пользователя.

- *Разнообразие мастера* в режиме ведения диалога с пользователем позволяют создавать объекты и выполнять разнообразные функции по реорганизации объектов базы данных и приложений пользователя.
- *Средства программирования СУБД* включают язык запросов *SQL*, язык макрокоманд и язык объектно-ориентированного программирования для приложений *Microsoft Visual Basic for Applications (VBA)*.
- *Средства графического конструирования* позволяют создавать объекты базы данных и объекты приложения с помощью многочисленных графических элементов, не прибегая непосредственно к программированию. Среди многочисленных средств графического конструирования и диалоговых средств Access следует выделить средства для создания:
 - таблиц и схем баз данных, отображающих их связи;
 - запросов выборки, отбирающих и объединяющих данные нескольких таблиц в виртуальную таблицу, которая может использоваться во многих задачах приложения;
 - запросов на изменение данных базы;
 - экранных форм, предназначенных для ввода, просмотра и обработки данных в диалоговом режиме;
 - отчетов, предназначенных для ввода, просмотра и вывода на печать данных из базы и результатов их обработки в удобном для пользователя виде.

Реляционная база данных

База данных является организованной на машинном носителе совокупностью взаимосвязанных данных и содержит сведения о различных сущностях одной предметной области: реальных объектах, процессах, событиях или явлениях.

Реляционная база данных представляет собой множество взаимосвязанных двумерных таблиц – *реляционных таблиц*, называемых также *отношениями*, в каждой из которых содержатся сведения об одной сущности автоматизируемой предметной области.

Логическую структуру реляционной базы данных образует совокупность реляционных таблиц, между которыми установлены логические связи.

В таблицах базы должны сохраняться все данные, необходимые для решения задач предметной области, причем каждый элемент данных должен храниться в базе только в одном экземпляре. Для создания таблиц,

соответствующих реляционной модели данных, используется процесс, называемый нормализацией данных. *Нормализация* – это удаление из таблиц повторяющихся данных путем их переноса в новые таблицы, записи которых не содержат повторяющихся значений.

Структура реляционной таблицы определяется составом полей. Каждое *поле* отражает определенную характеристику сущности. Для поля указывается *тип* и *размер* элементарного данного, размещаемого в нем, и ряд др. свойств. Содержимое поля отображается в столбце таблицы. Столбец таблицы содержит данные одного типа.

Содержание таблицы заключено в её строках, однотипных по структуре, каждая строка таблицы содержит данные о конкретном экземпляре сущности и называется *записью*.

Для однозначного определения (*идентификации*) каждой записи таблица должна иметь *уникальный (первичный) ключ*. По значению ключа таблицы отыскивается единственная запись в таблице. Ключ может состоять из одного или нескольких полей таблицы. Значение уникального ключа не может повторяться в нескольких записях.

Логические связи между таблицами дают возможность объединять данные из разных таблиц. Связь каждой пары таблиц задается одинаковыми полями в них – *ключом связи*. Таким образом, обеспечивается рациональное хранение недублированных данных и их объединение в соответствии с требованиями решаемых задач.

В нормализованной реляционной базе данных связь двух таблиц характеризуется отношениями записей типа «один-к-одному» (1:1) или «один-ко-многим» (1:M). Отношение 1:1 предполагает, что каждой записи одной таблицы соответствует одна запись другой таблицы. Отношение типа 1:M предполагает, что каждой записи первой таблицы соответствует много записей во второй, но каждой записи второй таблицы соответствует только одна запись в первой.

Для двух таблиц, находящихся в отношении типа 1:M, связь устанавливается по уникальному ключу таблицы, представляющей в отношении сторону «один», – *главной таблицы* в связи. Во второй таблице, представляющей в отношении сторону «многие» и называемой *подчиненной*, этот ключ связи может быть либо частью уникального ключа, либо не входить в состав ключа. В подчиненной таблице ключ связи называется ещё *внешним ключом*.

Схема данных

В СУБД Access процесс создания реляционной базы данных включает создание *схемы данных*. Схема данных наглядно отображает логическую структуру базы данных: таблицы и связи между ними, а также обеспечивает использование установленных в ней связей при обработке данных.

Для нормализованной базы данных, основанной на одно-многозначных и однозначных отношениях между таблицами, в схеме данных для связей таких таблиц по первичному ключу или уникальному индексу главной таблицы могут устанавливаться параметры *связной целостности*.

При поддержании целостности взаимосвязанных данных не допускается наличия записи в подчиненной таблице, если в главной таблице отсутствует связанная с ней запись. Соответственно при первоначальной загрузке базы данных, а также корректировке, добавлении и удалении записей система допускает выполнение операции только в том случае, если она не приводит к нарушению целостности. Связи, определенные в схеме данных, автоматически используются для объединения таблиц при разработке многотабличных форм, запросов, отчетов, существенно упрощая процесс их конструирования. В схеме связи могут устанавливаться для любой пары таблиц, имеющих одинаковое поле, позволяющее объединять эти таблицы. **Объекты Access**

База данных Access включает следующие сохраняемые в одном accdb-файле объекты:

- *таблицы, запросы, схемы данных*, непосредственно имеющие отношение к базе данных;
- *формы, отчеты, макросы и модули*, называемые *объектами приложения*.

Формы и отчеты предназначены для типовых процессов обработки данных: просмотра, обновления, поиска по заданным критериям, получения отчетов. Эти объекты приложений конструируются из графических элементов, называемых *элементами управления*. Основные элементы управления служат для отображения полей таблиц, являющихся источниками данных объекта.

Для автоматизации доступа к объектам и их взаимодействия используется программный код. Только с помощью программного кода получается полноценное приложение пользователя, функции которого доступны через меню, панели инструментов и формы. Для создания программного кода служат модули на языке *VBA* и макросы.

Каждый объект и элемент управления имеет свои свойства, определяя которые можно настраивать их. С каждым объектом и элементом управления связывается набор событий, которые могут обрабатываться макросами или

процедурами обработки событий на VBA, входящими в состав модулей форм, отчетов.

Объекты представлены в области навигации окна базы данных Access. Все операции по работе с объектами и приложениями начинаются в этом окне.

- *Таблицы* создаются пользователем для хранения данных об одной сущности – одном информационном объекте модели данных предметной области. Таблица состоит из полей (столбцов) и записей (строк). Каждое поле содержит одну характеристику информационного объекта предметной области. В записи собраны сведения об одном экземпляре информационного объекта. База данных Access может включать до 32768 объектов (в том числе формы, отчеты и т. д.). Одновременно может открываться до 2048 таблиц.
- *Запросы.* Запросы на выборку служат для выборки нужных данных из одной или нескольких связанных таблиц. Результатом выполнения запроса является виртуальная таблица. В запросе можно указать, какие поля исходных таблиц следует включить в запись таблицы запроса и как отобразить нужные записи. Таблица запроса может быть использована с другими таблицами базы при обработке данных. Запросы на изменение позволяют обновлять, удалять или добавлять данные в таблицы, а также создавать новые таблицы на основе уже существующих.
- *Схема данных* определяет, с помощью каких полей таблицы связываются между собой, как будет выполняться объединение данных этих таблиц, нужно ли проверять связную целостность при добавлении и удалении записей, изменение ключей таблиц. Схемы данных в области навигации в окне базы данных отображаются только в проектах Access, работающих с базами данных сервера. Для отображения схемы данных в базах данных Access используется команда **Схема данных**, размещенная на вкладке ленты **Работа с базами данных** в группе **Отношения**.
- *Формы* являются основным средством создания диалогового интерфейса приложения пользователя. Форма может создаваться для работы с электронными документами, сохраняемыми в таблицах базы данных. Вид таких документов может соответствовать привычному для пользователя бумажному документу. Форма используется для разработки интерфейса по управлению приложением. Включаемые в форму процедуры обработки событий позволяют управлять процессом обработки данных в приложении. Такие процедуры хранятся в модуле формы. В формы могут вставляться рисунки, диаграммы, звуковые фрагменты, видео. Возможна разработка форм с набором вкладок, с

каждой из которых связано выполнение той или иной функции приложения.

- *Отчеты* предназначены для формирования на основе данных базы выходных документов любых форматов, содержащих результаты решения задач пользователя, и вывода их на печать. Как и формы, отчеты могут включать процедуры обработки событий. Использование графических объектов позволяет дополнять данные отчета иллюстрациями. Отчеты обеспечивают возможность анализа данных при использовании фильтрации, агрегирования и представления данных источника в различных разрезах. *Макросы* являются программами, состоящими из последовательностей макрокоманд, которые выполняются по вызову или при наступлении некоторого события в объекте приложения или его элементе управления. Макросы данных выполняются при наступлении некоторого события в исходных таблицах. Макросы позволяют автоматизировать некоторые действия в приложении пользователя. Создание макросов осуществляется в диалоговом режиме путем выбора нужных макрокоманд и задания параметров, используемых ими при выполнении.
- *Модули* содержат процедуры на языке *Visual Basic for Applications*. Могут создаваться процедуры-программы, процедуры-функции, которые разрабатываются пользователем, и процедуры для обработки событий.

Интерфейс пользователя Access

Для Access 2013 разработан интерфейс пользователя, упрощающий доступ к многочисленным функциональным возможностям в процессе создания и работы с объектами базы данных и приложений пользователя.

Основу этого интерфейса составляют *ленты* и *область навигации*. Собранные на одной ленте команды четко соответствуют задачам, выполняемым в Access, что позволяет легко находить нужную команду.

Основные элементы интерфейса пользователя в Access 2013:

- *страницы*, предназначенные для управления файлами баз данных. Стартовая страница отображается при запуске Access и позволяет открыть существующие файлы баз данных или создать новые. В процессе работы доступны страницы, открываемые при щелчке на цветном значке **Файл**. Они содержат команды для сохранения, сжатия и восстановления базы данных, определения параметров и ряд др.;

- *лента* – широкая полоса, расположенная в верхней части окна Access. Она содержит стандартные вкладки с группами наиболее часто используемых команд, контекстные вкладки, которые появляются только тогда, когда их использование допустимо, и *панель быстрого доступа* – небольшую панель инструментов, на которую можно добавить нужные команды. Лента является основой интерфейса пользователя и обеспечивает быстрый доступ к набору команд, применимых к выполняемым в базе данных в текущий момент работам;
- *коллекция (галерея)* – элемент интерфейса, который не просто отображает команды, а показывает набор результатов выполнения этих команд с отображением внешнего вида вариантов выбора;
- *диалоговые окна* могут выводиться при выполнении команд для уточнения операции и передачи параметров. В некоторых группах вкладок ленты имеются кнопки вызова диалоговых окон;
- *контекстное меню* вызывается щелчком правой кнопкой мыши на элементе объекта. Содержит команды, зависящие от контекста – элемента объекта, с которым работает пользователь, или выполняемой задачи; *Панель быстрого доступа* – единственная панель инструментов, предусмотренная в интерфейсе. Она обеспечивает доступ одним нажатием кнопки к наиболее часто используемым командам. Это панель настраивается в соответствии с предпочтениями пользователя;
- *область навигации* расположена в левой части окна. В ней отображаются объединенные в группы объекты базы данных;
- *вкладки документов* – таблицы, запросы, формы, отчеты и макросы отображаются на вкладках в рабочем пространстве окна Access – окне документов;
- *строка состояния* – полоса в нижней части окна программы, в которой отображаются сведения о состоянии объекта и располагаются кнопки, позволяющие изменить режим его представления;
- *мини-панель инструментов* – прозрачный элемент, подключенный к объекту, который появляется над выбранным текстом и позволяет легко отформатировать его;
- *панель сообщений* – это единственное средство вывода всех предупреждений системы безопасности. Отображается, когда в открываемой базе данных имеется любое потенциально опасное выполняемое содержимое.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 1

Создание таблиц базы данных «Реализация товаров»

Создать базу данных для учета реализации товаров со складов. Организовать хранение информации в создаваемой базе данных с помощью четырех таблиц: «Товары», «Фирмы», «Склады» и «Продажи».

Этапы проектирования базы данных:

1. Исследование предметной области и формулировка основных допущений (накладываемых условий). На этом этапе составляется список всех форм и отчетов, которые могут быть затребованы пользователями вашей БД.
2. Анализ данных. Составить перечень всех элементов данных, входящих в формы и отчеты, и сгруппировать их в таблицы БД.
3. Установить, какие взаимосвязи существуют между элементами данных. Определить первичные и вторичные (внешние) ключи отношений. Организовать поля данных в таблицах.

Создать базу данных «Реализация товаров», при условии, что на одном складе может храниться только один вид товара.

Создание файла базы данных Access

Для создания файла новой локальной базы данных щелкните в области создания базы данных стартового окна Access на элементе **Пустая база данных** (рис. 1.1). В открывшемся окне введите имя файла в поле **Имя файла** – например, ***Реализация товаров***.

Щелчком по кнопке **Создать**, завершите процесс создания пустого файла новой базы данных. В результате по умолчанию откроется окно созданной базы данных с пустой таблицей с именем **Таблица1** в режиме таблицы (рис. 1.2).

Новая база данных

Создание базы данных Microsoft Office Access, не содержащей существующих данных или объектов.

Имя файла:

Реализация товаров_ОГР_17_Попов



C:\Documents and Settings\Администратор\Мои документы\



Рис. 1.1. Определение имени и местоположения файла новой базы данных

Так как создание таблиц будет происходить при помощи конструктора таблиц, поэтому закройте таблицу при помощи щелчка по значку «Заккрыть».



Рис. 1.2. Таблица1 в режиме таблицы

Задание 1. Создание таблицы базы данных «Реализация товаров»

Рассмотрим последовательность действий при создании таблиц. Для этого начнем создание таблицы «Товар» с определения её структуры в режиме конструктора таблиц. На вкладке ленты **Создание** в группе **Таблицы** выполним команду **Конструктор таблиц** (рис. 1.3).

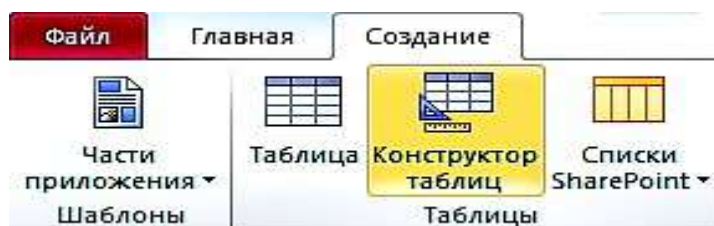


Рис. 1.3. Лента с открытой вкладкой **Создание**

В окне конструктора **Таблица1** определим все поля таблицы «Товар». Для каждого поля таблицы «Товар» определим **Имя поля**, **Тип данных**.

Товары	
Имя поля	Тип данных
Код товара	Счетчик
Наименование	Текстовый
Марка	Текстовый
Номер склада	Числовой
Количество	Числовой
Цена	Денежный
Свойства поля	
Общие	Подстановка
Формат поля	Денежный

Рис. 1.4. Таблица «Товары» в режиме «Конструктор»

Теперь определим первичный ключ таблицы. Выделим поле «**Код товара**», щелкнув кнопкой мыши на области маркировки, слева от имени поля, и нажмем кнопку **Ключевое поле** на вкладке ленты **Конструктор** в группе **Сервис**. Признаком установки ключа является изображение ключа слева от имени поля .

Сохраним созданную структуру таблицы и присвоим имя новой таблице – «Товар». Для этого выполним команду **Сохранить** на Панели быстрого доступа или на вкладке **ФАЙЛ**. В окне **Сохранение** введем имя таблицы.

При сохранении таблицы происходит обновление файла базы данных, в которую помещается созданная таблица. Таблица «Товар» появится в списке объектов **Таблицы** в области навигации открытой базы данных «Реализация товаров».

После сохранения структуры таблицы переходите ко второму этапу создания таблицы – созданию записей. Для этого переключитесь в режим таблицы нажатием кнопки **Режим** на ленте конструктора или выбором нужного режима при открытии списка данной кнопки (рис. 1.5).



Рис. 1.5. Выбор режима представления таблицы

Как и в режиме конструктора, в режиме таблицы можно удалить столбец. При этом следует помнить, что удаляются все данные столбца, и отменить удаление невозможно. Удаление поля первичного ключа в режиме таблицы невозможно. Для этого необходимо использовать режим конструктора.

Открыть таблицу для ввода исходных данных. Установить курсор в первую строку таблицы и ввести исходные данные. Ввод данных в каждое поле таблицы завершать нажатием клавиши **Enter**. По окончании ввода данных при необходимости увеличить ширину полей. Записать таблицу «Товар» на диск.

Товары						
	Код товара ▾	Наименование ▾	Марка ▾	Номер склада ▾	Количество ▾	Цена ▾
⊕	1	Тахеометр	SP FOKUS 6	1	5	319 463,00 ₽
⊕	2	Тахеометр	SP FOKUS 6W	1	7	357 487,00 ₽
⊕	3	Тахеометр	Soutn NTS-365 R	2	6	225 000,00 ₽
⊕	4	Тахеометр	Soutn NTS-362 R	2	5	240 000,00 ₽
⊕	5	Теодолит	3T2КП	3	9	84 193,00 ₽
⊕	6	Теодолит	4T15П	3	5	58 764,00 ₽
⊕	7	Теодолит	4T30П	3	8	50 625,00 ₽
⊕	8	Теодолит	VEGA TEO 5	3	10	30 000,00 ₽
⊕	9	Нивелир	4Н -2КЛ	4	15	16 680,00 ₽
⊕	10	Нивелир	4Н-3КЛ	4	18	12 500,00 ₽
*	(№)					

Рис. 1.6. Таблица «Товары» в режиме таблицы

Задание 2. Создание таблицы «Фирмы»

Для поля Телефон следует задать маску ввода: (###)###-##-##

Имя поля	Тип данных
Код фирмы	Числовой
Название	Текстовый
Адрес	Текстовый
Телефон	Текстовый
Контактное лицо	Текстовый
Должность	Текстовый

Свойства поля	
Общие	Подстановка
Размер поля	255
Формат поля	
Маска ввода	(###)###-##-##

Рис. 1.7. Таблица «Фирмы» в режиме «Конструктор»

Код фирмы	Название	Адрес	Телефон	Контактное лицо	Должность
1	ООО "Геомар Недра"	Москва, Ленина, 80	(495)618-05-10	Долженко И.М.	заведующий
2	ООО "Навгеоком"	Екатеринбург, Народной воли, 65	(343)253-53-55	Васильева З.О.	начальница
3	ООО "А-ГЕО"	Белгород, Мокроусова, 7	(904)095-70-45	Ашихмин Р.Ю.	кладовщик
4	ГеоСтройПрибор	Воронеж, Жуков, 3	(473)271-21-44	Яковлева Ю.К.	менеджер

Рис. 1.8. Таблица «Фирмы» в режиме таблицы

Задание 3. Создание таблицы «Склады»

Имя поля	Тип данных
Номер склада	Числовой
Телефон	Текстовый
Адрес	Текстовый
Заведующий	Текстовый

Свойства поля	
Общие	Подстановка
Размер поля	255
Формат поля	
Маска ввода	(###)###-##-##

Рис. 1.9. Таблица «Склады» в режиме «Конструктор»

Склады				
Номер склада	Телефон	Адрес	Заведующий	
1	(343)381-88-88	Екатеринбург, пер. Базовый, 7	Амелина И.В.	
2	(343)379-51-62	В-Пышма, пер. Индустриальный, 1	Мясников Д.О.	
3	(343)275-18-22	Екатеринбург, Монтажников, 18а	Куликова А.Н.	
4	(343)310-22-22	Екатеринбург, Радищева, 4	Ромашенко К.Д.	

Рис. 1.10. Таблица «Склады» в режиме «Таблицы»

Задание 4. Создание таблицы «Продажи»

1. Ввести в первой строке имя поля: **Дата продажи** и выбрать для него тип Дата/время.
2. Сформировать поле **Код фирмы** и выбрать для него числовой тип.
3. Указать в качестве источника данных для поля **Код фирмы** список кодов фирмы, внесенных в поле с таким же названием в таблицу «Фирмы», рис. 1.11.
4. Не переводя курсор со строки **Код фирмы**, щелкнуть мышью по закладке **Подстановка**.
5. Щелкнуть мышью по слову **Поле** в строке **Тип элемента управления**, а затем – по появившейся при этом кнопке **Раскрыть список**.
6. Выбрать щелчком мыши из раскрывшегося списка строку **Поле со списком**.
7. Щелкнуть мышью по незаполненному полю в строке **Источник строк**, а затем – по появившейся при этом кнопке **Раскрыть список**.
8. Щелчком мыши выбрать строку с названием таблицы «Фирмы».

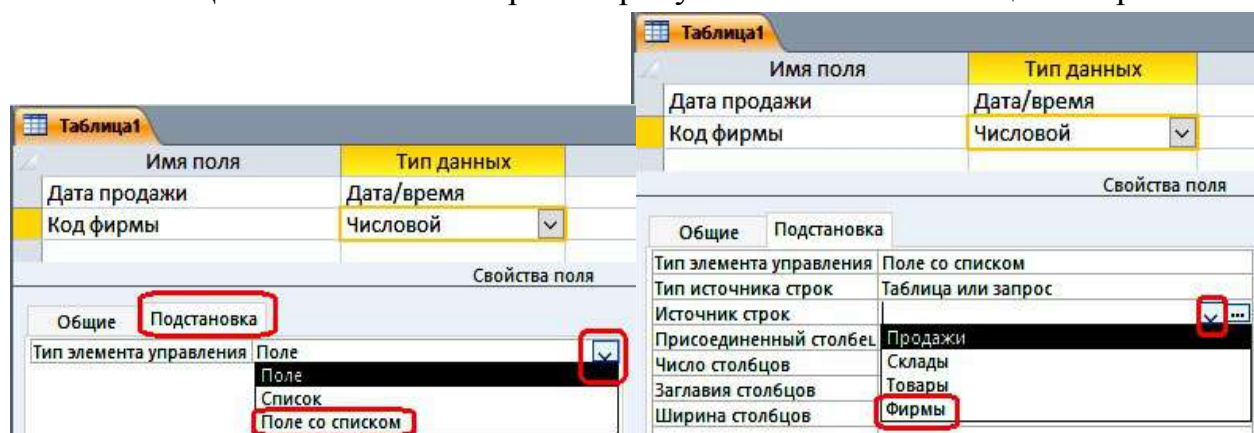


Рис. 1.11. Окно таблицы с подстановкой в режиме «Конструктора»

Имя поля	Тип данных
Дата продажи	Дата/время
Код фирмы	Числовой
Код товара	Числовой

Свойства поля

Общие Подстановка

Тип элемента управления: Поле со списком

Тип источника строк: Таблица или запрос

Источник строк: Товары

Рис. 1.12. Окно таблицы с выбором источника строк

Имя поля	Тип данных
Дата продажи	Дата/время
Код фирмы	Числовой
Код товара	Числовой
Количество	Числовой
Скидки	Числовой

Рис. 1.13. Окно таблицы «Продажи» в режиме «Конструктора»

Дата прода. ▾	Код фирмы ▾	Код товара ▾	Количество ▾	Скидки ▾
15.01.2018	4	10	10	5
19.01.2018	1	2	6	10
20.01.2018	3	5	8	5
25.01.2018	2	4	4	10
27.01.2018	1	1	4	15
30.01.2018	3	7	4	10
02.02.2018	2	3	5	5
05.02.2018	4	9	10	10
10.02.2018	3	8	9	10
15.02.2018	3	5	8	10

Рис. 1.14. Таблица «Продажи» в режиме «Таблицы»

Задание 5. Создание схемы данных

Создание схемы данных начинается с выполнения команды **Схема данных** в группе **Отношения** на вкладке ленты **Работа с базами данных**. В результате выполнения этой команды открывается окно схемы данных и диалоговое окно **Добавление таблицы**, в котором осуществляется выбор таблиц, включаемых в схему (рис. 1.15).

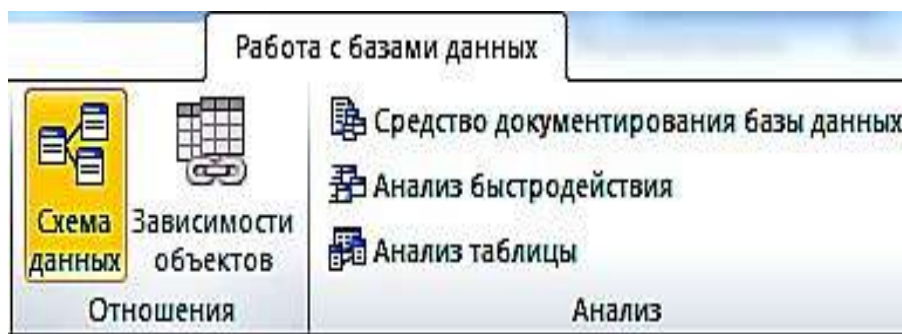


Рис. 1.15. Вкладка ленты **Работа с базами данных**

В окне **Добавление таблицы** отображаются все таблицы и запросы, содержащиеся в базе данных. Выберем вкладку **Таблицы** и с помощью кнопки **Добавить** разместим в окне **Схема данных** все ранее созданные таблицы базы данных «Реализация товаров». При создании связей в схеме данных используется проект структуры реляционной базы данных, в котором показаны все одно-многочленные связи таблиц. Реализуются связи с помощью добавления в связанные таблицы общих полей, называемых *ключом связи*.

На рис. 1.16 в созданной схеме данных БД «Реализация товаров» все связи отмечены символами **1** или ∞ . Это свидетельствует о том, что одно-многочленные связи установлены правильно (по простому и составному ключу).

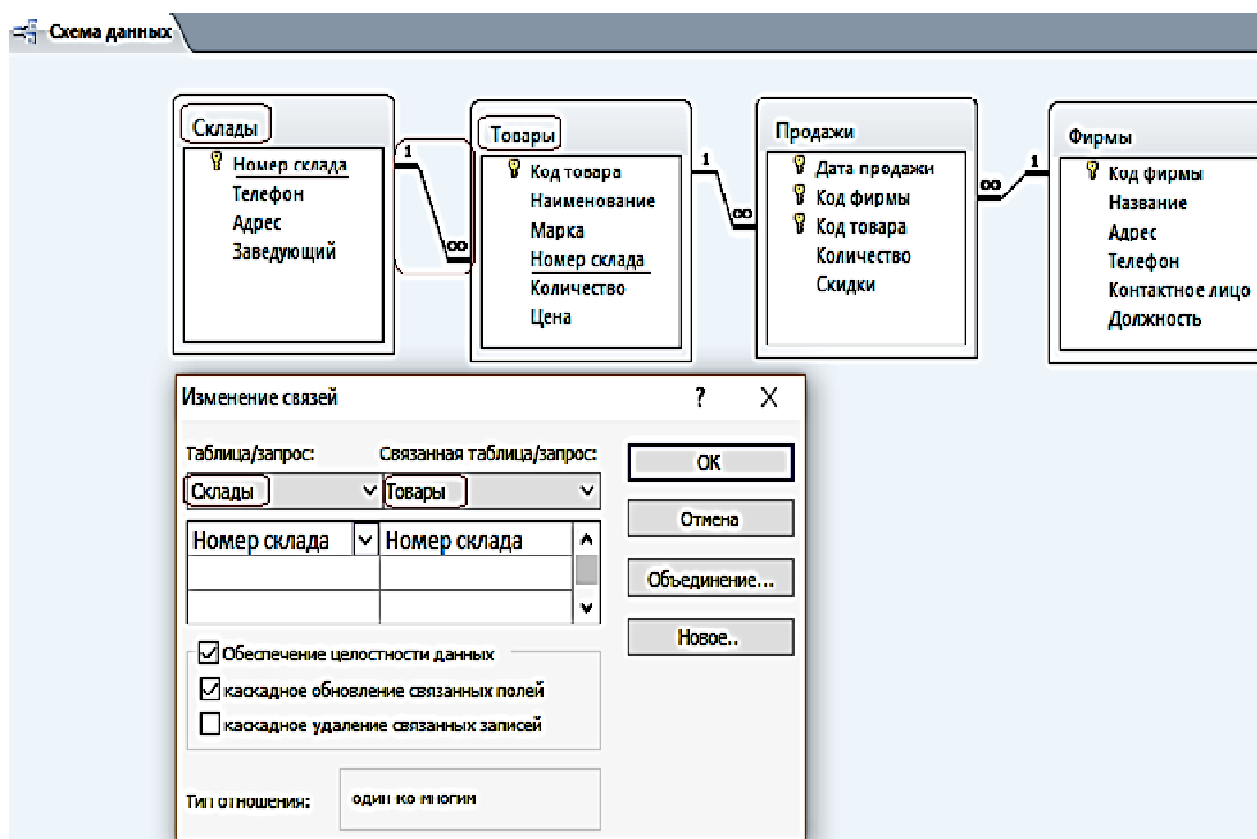


Рис. 1.16. Схема данных БД «Реализация товаров»

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 2

Работа с простыми запросами

Конструирование запросов на выборку с условием отбора

Задание 1. Выбрать товар по его наименованию

1. Для создания запроса в окне базы данных выберите вкладку ленты – **Создание** и в группе **Запросы** нажмите кнопку **Конструктор запросов**.

2. В окне **Добавление таблицы** выберите таблицу «Товар» и нажмите кнопку **добавить**. Выбранная таблица будет отображена в области схемы данных запроса. Закройте окно **Добавление таблицы**, нажав кнопку **Заккрыть**. На ленте появляется и автоматически активизируется новая вкладка **Работа с запросами / Конструктор**, на которой цветом выделен тип создаваемого запроса – **Выборка**.

3. В окне конструктора (рис. 2.1) последовательно перетащите из списка полей таблицы «Товар» поля **Наименование, Марка и Цена** в столбцы бланка запроса в строку **Поле**. Для этого необходимо щелкнуть двойным щелчком на имени поля таблицы в схеме данных запроса.

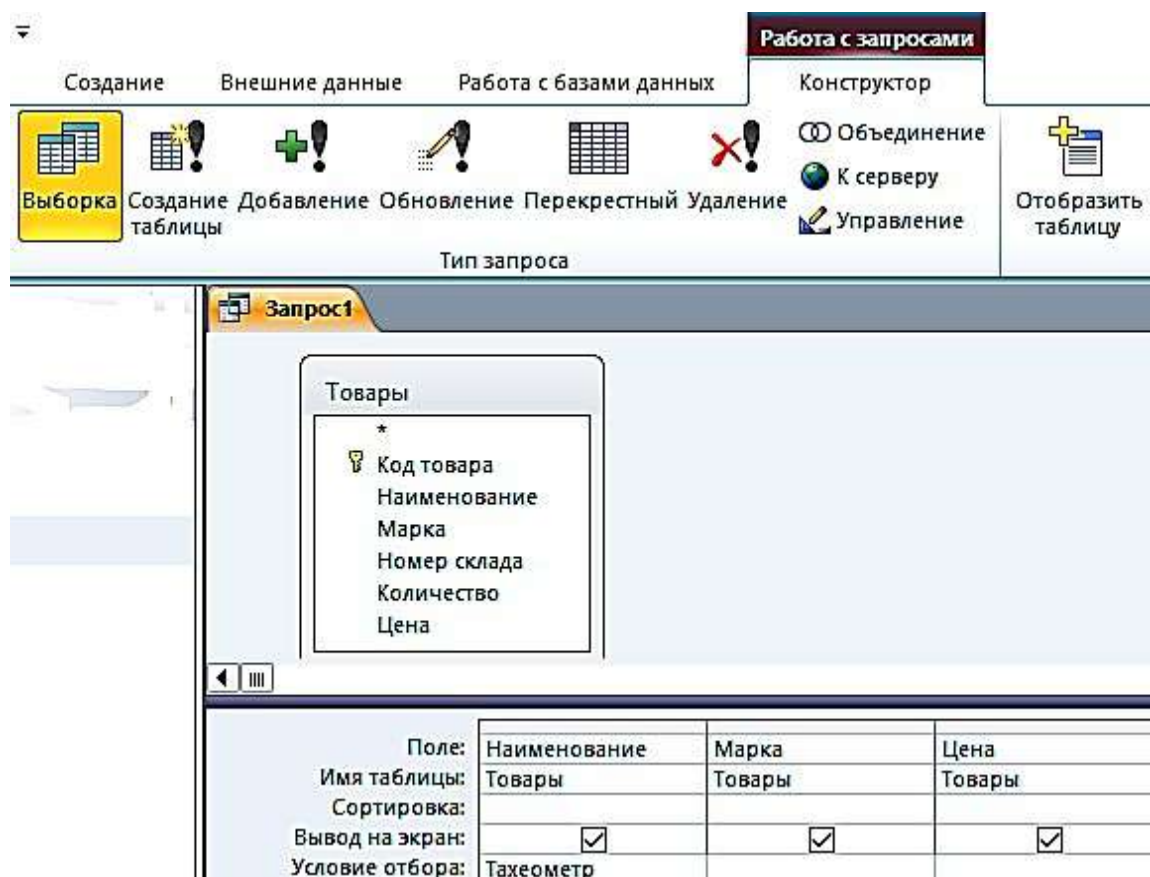


Рис. 2.1. Окно конструктора запроса на выборку

4. Запишите в строке **Условия отбора** наименование товара – Тахеометр. Используемое в выражении текстовое значение вводится в двойных кавычках, которые добавляются автоматически.

5. Выполните запрос, щелкнув по кнопке **Выполнить !** или на кнопке **Режим**  в группе **Результаты**. На экране откроется окно запроса в режиме таблицы с записью из таблицы «Товар», отвечающий заданным условиям (рис. 2.2). Дайте ему имя **2_По наименованию Тахеометр**.

1_По наименованию Тахеометр		
Наименование	Марка	Цена
Тахеометр	SP FOKUS 6	319 463,00 ₽
Тахеометр	SP FOKUS 6W	357 487,00 ₽
Тахеометр	South NTS-365 R	225 000,00 ₽
Тахеометр	South NTS-362 R	240 000,00 ₽

Рис. 2.2. Просмотр запроса в режиме «Таблицы»

Задание 2. Выбрать товары, цена которых менее 100 000 руб. и более 20 000 руб., и количество больше или равно 9

1. Создайте новый запрос в режиме конструктора, добавьте таблицу «Товар». В окне конструктора последовательно перетащите из списка полей таблицы «Товар» в бланк запроса поля (рис. 2.3).

Поле:	Наименование	Количество	Цена
Имя таблицы:	Товары	Товары	Товары
Сортировка:			
Вывод на экран:	☒	☒	☒
Условие отбора:		>=9	>20000
или:			<100000

Рис. 2.3. Окно конструктора запроса на выборку с логическими операциями в условии отбора

2. Запишите **Условия отбора**, как показано в бланке запроса. Между условиями, записанными в одной строке, выполняется логическая операция AND. Между условиями, записанными в разных строках, выполняется логическая операция OR.

3. Выполните запрос. Дайте ему имя **2_Цена_количество** (рис. 2.4).

Наименование	Количество	Цена
Теодолит	9	84 193,00 ₽
Теодолит	5	58 764,00 ₽
Теодолит	8	50 625,00 ₽
Теодолит	10	30 000,00 ₽
Нивелир	15	16 680,00 ₽
Нивелир	18	12 500,00 ₽

Рис. 2.4. Просмотр запроса в режиме «Таблицы»

Задание 3. Выбрать скидки, равные 10, за заданный период (после 25 января 2018 г.) (рис. 2.5, 2.6)

Запрос1

Продажи

- *
 - Дата продажи
 - Код фирмы
 - Код товара
 - Количество
 - Скидки

Поле:	Дата продажи	Код фирмы	Скидки
Имя таблицы:	Продажи	Продажи	Продажи
Сортировка:			
Вывод на экран:	☒	☒	☒
Условие отбора:	>=25.01.2018		=10

Рис. 2.5. Окно конструктора запроса на выборку с логическими операциями в условии отбора

3_Дата_скидка

Дата прода. ▾	Код фирмы ▾	Скидки ▾
25.01.2018	2	10
30.01.2018	3	10
05.02.2018	4	10
10.02.2018	3	10
15.02.2018	3	10

Рис. 2.6. Просмотр запроса в режиме «Таблицы»

Вычисляемые поля в запросах

В запросе, как и в таблице, для каждой записи могут производиться вычисления с числовыми, строковыми значениями или со значениями дат с использованием данных из одного или нескольких полей. Результат вычисления образует в таблице запроса новое вычисляемое поле (рис. 2.7).

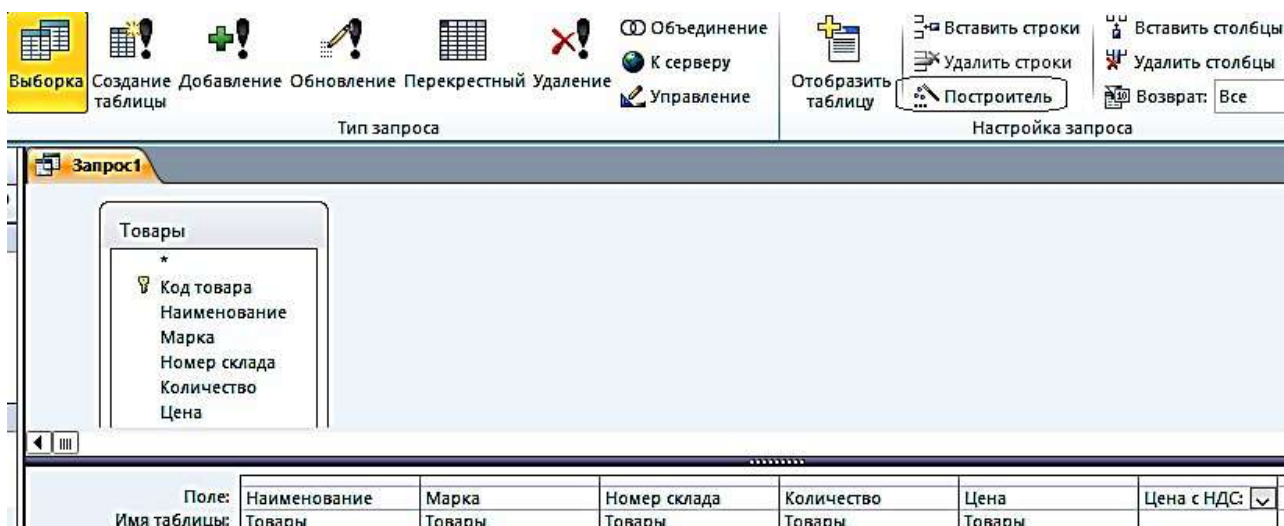


Рис. 2.7. Запрос с вычисляемым полем

Задание 4. В таблице «Товар» вычислить Цену с НДС, при ставке НДС 35 %

1. Создайте в режиме конструктора запрос на выборку для таблицы «Товары». Перетащите в бланк запроса поля **Наименование, Марка, Номер склада, Количество, Цена** (рис. 2.8).

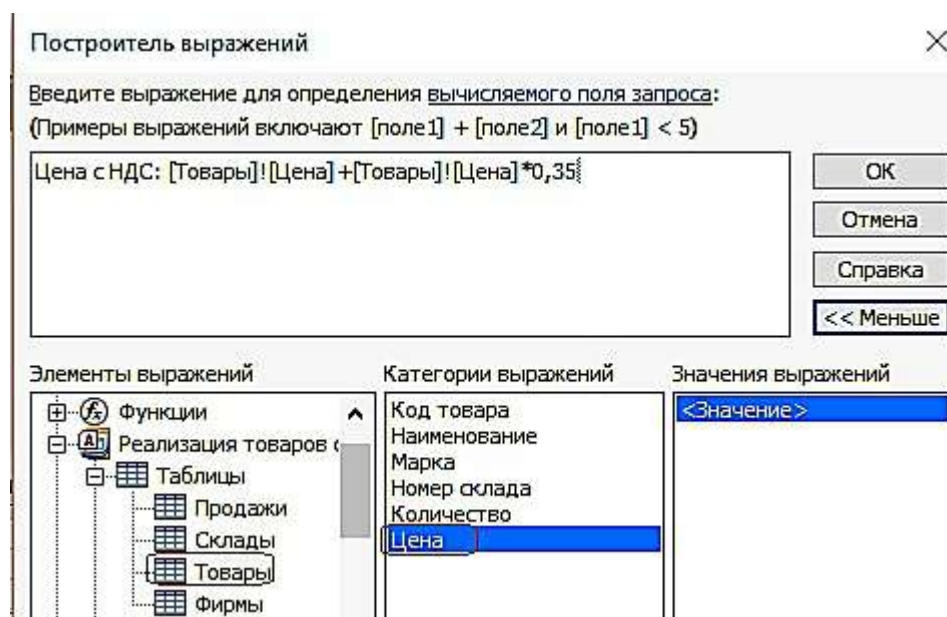


Рис. 2.8. Построитель выражений

2. Для подсчета цены с учетом НДС создайте после поля Цена вычисляемое поле **Цена с НДС** (с правой стороны) при помощи построителя.

3. Вызовите построитель выражений, нажав кнопку **Построитель**  в группе **Настройка запроса** ленты «**Конструктор**». Курсор мыши должен быть установлен предварительно в ячейке ввода выражения.

4. В левой верхней части окна **Построитель выражений** (см. рис. 2.8) выберите свою базу данных «Реализация товаров со складов», далее выберите таблицу «**Товары**», на которой построен запрос. Справа отобразится список её полей. Последовательно выбирайте нужные поля и операторы, двойным щелчком вставляя в выражение. Выражение сформируется в верхней части окна. Обратите внимание – построитель перед именем поля указал имя таблицы, которой оно принадлежит, и отделил его от имени поля восклицательным знаком.

5. Слово «Выражение» удаляйте, иначе оно выдает, синтаксическую ошибку.

Полученный запрос «4_Цена с НДС» в режиме «Таблицы» изображен на рис. 2.9.

4_Цена с НДС					
Наименование	Марка	Номер склада	Количество	Цена	Цена с НДС
Тахеометр	SP FOKUS 6	1	5	319 463,00 ₽	431 275,05 ₽
Тахеометр	SP FOKUS 6W	1	7	357 487,00 ₽	482 607,45 ₽
Тахеометр	South NTS-365 R	2	6	225 000,00 ₽	303 750,00 ₽
Тахеометр	South NTS-362 R	2	5	240 000,00 ₽	324 000,00 ₽
Теодолит	3Т2КП	3	9	84 193,00 ₽	113 660,55 ₽
Теодолит	4Т15П	3	5	58 764,00 ₽	79 331,40 ₽
Теодолит	4Т30П	3	8	50 625,00 ₽	68 343,75 ₽
Теодолит	VEGA TEO 5	3	10	30 000,00 ₽	40 500,00 ₽
Нивелир	4Н -2КЛ	4	15	16 680,00 ₽	22 518,00 ₽
Нивелир	4Н-3КЛ	4	18	12 500,00 ₽	16 875,00 ₽

Рис. 2.9. Просмотр запроса «4_Цена с НДС» в режиме «Таблицы»

Задание 5. В вычисляемых полях и условиях отбора можно использовать встроенные функции. Необходимо выбрать количество продаж, в заданном месяце

1. Создайте в режиме конструктора запрос на выборку по таблице «Продажи».

2. Создайте вычисляемое поле **Заданный месяц** (в правой) пустой ячейке строки, записав туда одно из выражений: а `Format([Продажи]![Дата продажи];"mmmm")` – эта функция возвратит полное название месяца;

б или `Format([Продажи]![Дата продажи];"mm")` – эта функция возвратит номер месяца;

3. Для отбора продаж в заданном месяце, в вычисляемом поле в строку **Условие отбора** введите название месяца, например, – Январь, или номер месяца, например, 1, в соответствии с параметром в функции `Format` (рис. 2.10, 2.11).

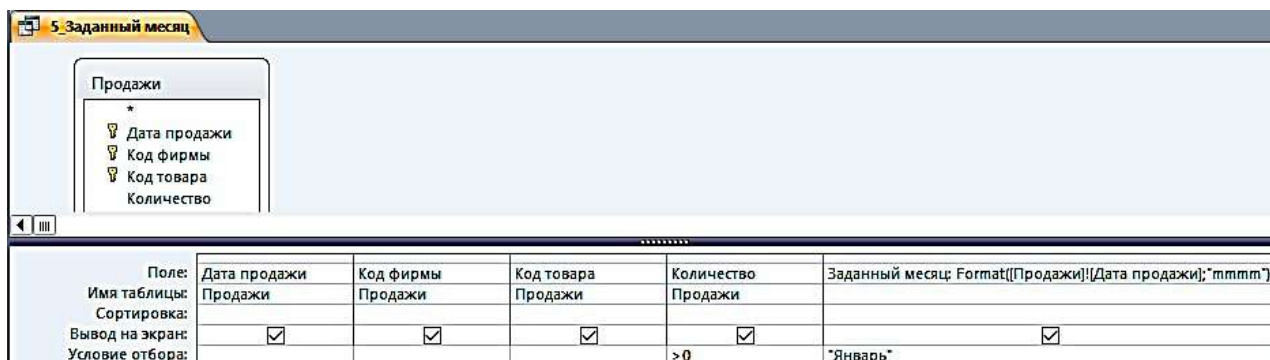


Рис. 2.10. Запрос с функцией выделения из даты полного названия месяца в вычисляемом поле

5_Заданный месяц				
Дата продажи	Код фирмы	Код товара	Количество	Заданный месяц
15.01.2018	4	10	10	Январь
19.01.2018	1	2	6	Январь
20.01.2018	3	5	8	Январь
25.01.2018	2	4	4	Январь
27.01.2018	1	1	4	Январь
30.01.2018	3	7	4	Январь

Рис. 2.11. Просмотр запроса «5_Заданный месяц» в режиме «Таблицы»

Параметры в запросах

При решении практических задач удобнее вводить выражение в условие отбора в процессе выполнения запроса в диалоге с пользователем, не переходя в режим конструктора. Обеспечить такой диалог можно с помощью *параметра запроса*. Имя параметра запроса задается в строке **Условие отбора** в квадратных скобках. При выполнении запроса это имя появиться в диалоговом окне **Введите значение параметра**.

Задание 6. Скопируйте запрос «5_Заданный месяц» и переименуйте его в «6_Параметрический запрос»

1. Замените в условии отбора рассмотренного запроса название месяца Январь на имя параметра – [Название месяца].
2. Выполните запрос. Открывшееся диалоговое окно (рис. 2.12) позволит ввести значение параметра запроса – **Название месяца**.
3. Введите Январь и получите результат.

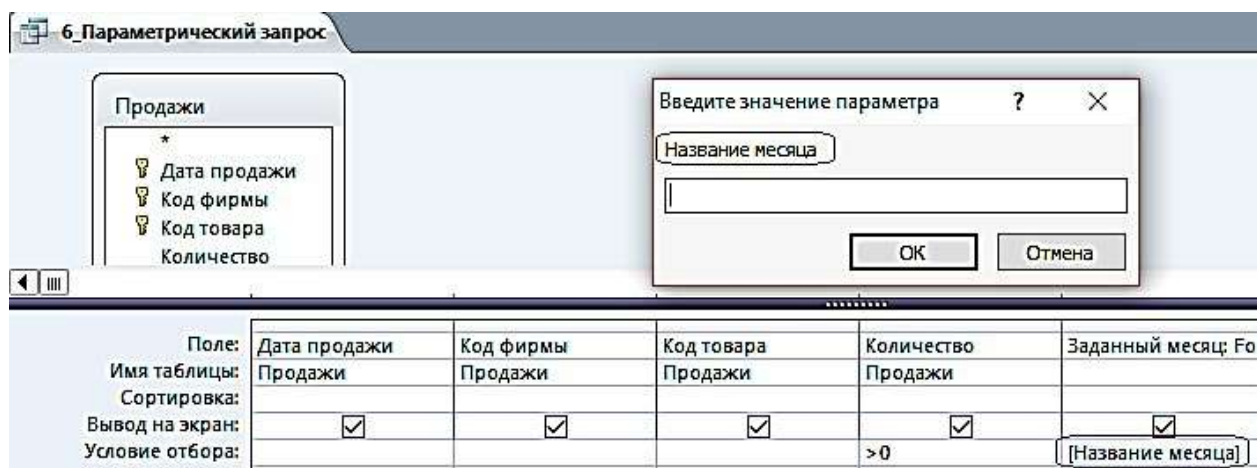


Рис. 2.12. Диалоговое окно ввода значения параметра

Параметры запроса могут быть использованы не только в выражениях условий отбора, но и для ввода значений операндов в вычисляемых полях.

Задание 7. Создайте в режиме конструктора запрос на выборку для таблицы «Товар»

Перетащите в бланк запроса поля Наименование и Цена. Для увеличения цены на заданный процент в вычисляемое поле запишите выражение с параметром запроса [На сколько процентов увеличить?]/100 (рис. 2.13).

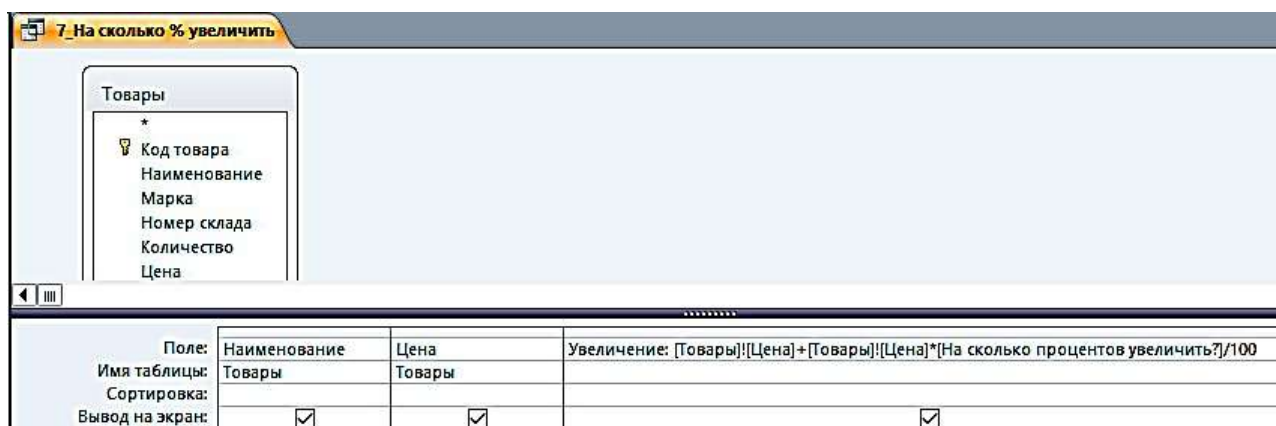


Рис. 2.13. Использование параметра в выражении вычисляемого поля

Задание 8. Скопируйте запрос «7_На сколько % увеличить» и переименуйте его в «8_Проценты» (рис. 2.14)

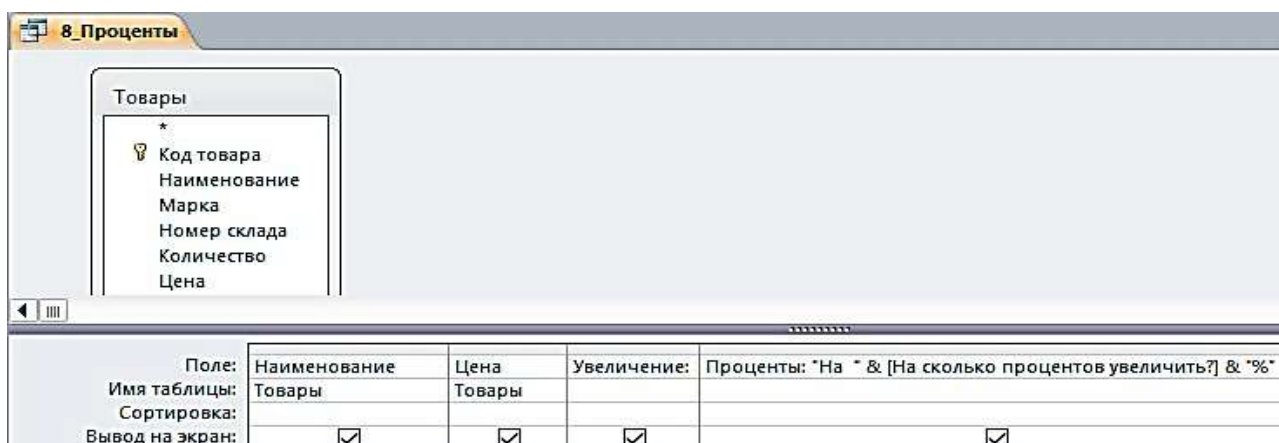


Рис. 2.14. Использование параметра в выражении вычисляемого поля «Проценты»

После выполнения предыдущего запроса в таблице отображается результат вычисления с использованием введенного значения параметра. Однако значение параметра при этом не выводится. Для отображения в таблице запроса введенного значения параметра дополните запрос ещё одним вычисляемым полем, в котором запишите выражение:

Проценты: "На " & [На сколько процентов увеличить?] & "%".

Теперь в таблице запроса появится поле «Проценты», в котором будет записано, например, при вводе 35 – **На 35 %** (рис. 2.15).

The screenshot shows the '8_Проценты' window with the results of a query displayed in 'Таблицы' mode. The table has four columns: Наименование, Цена, Увеличение, and Проценты. The data is as follows:

Наименование	Цена	Увеличение	Проценты
Тахеометр	319 463,00 ₺	431 275,05 ₺	На 35%
Тахеометр	357 487,00 ₺	482 607,45 ₺	На 35%
Тахеометр	225 000,00 ₺	303 750,00 ₺	На 35%
Тахеометр	240 000,00 ₺	324 000,00 ₺	На 35%
Теодолит	84 193,00 ₺	113 660,55 ₺	На 35%
Теодолит	58 764,00 ₺	79 331,40 ₺	На 35%
Теодолит	50 625,00 ₺	68 343,75 ₺	На 35%
Теодолит	30 000,00 ₺	40 500,00 ₺	На 35%
Нивелир	16 680,00 ₺	22 518,00 ₺	На 35%
Нивелир	12 500,00 ₺	16 875,00 ₺	На 35%

Рис. 2.15. Просмотр запроса «8_Проценты» в режиме «Таблицы»

Групповые операции в запросах

Групповые операции позволяют выделить группы записей с одинаковыми значениями в указанных полях и вычислить итоговые данные для каждой из групп по др. полям, используя одну из статистических функций.

Статистические функции применимы к полям с типом данных **Числовой**, **Денежный**, **Дата и время**.

Задание 9. Запрос с функцией Sum

Определите суммарное количество и цену каждого из товаров.

1. Создайте в режиме конструктора запрос на выборку из таблицы «Товары».
2. Из списка таблицы перетащите в бланк запроса поле «Наименование». По этому полю будет производиться группировка записей таблицы.
3. Перетащите в бланк запроса поля «Количество» и «Цена», по которым будет подсчитываться суммарное количество каждого из товаров.
4. Выполните команду **Итоги** из группы **Показать или Скрыть**. В бланке запроса появится новая строка **Групповая операция** со значением **Группировка** во всех полях запроса.
5. В столбцах «Количество» и «Цена» замените слово **Группировка** на функцию **Sum**. Для этого вызовите раскрывающийся список и выберите эту функцию (рис. 2.16).

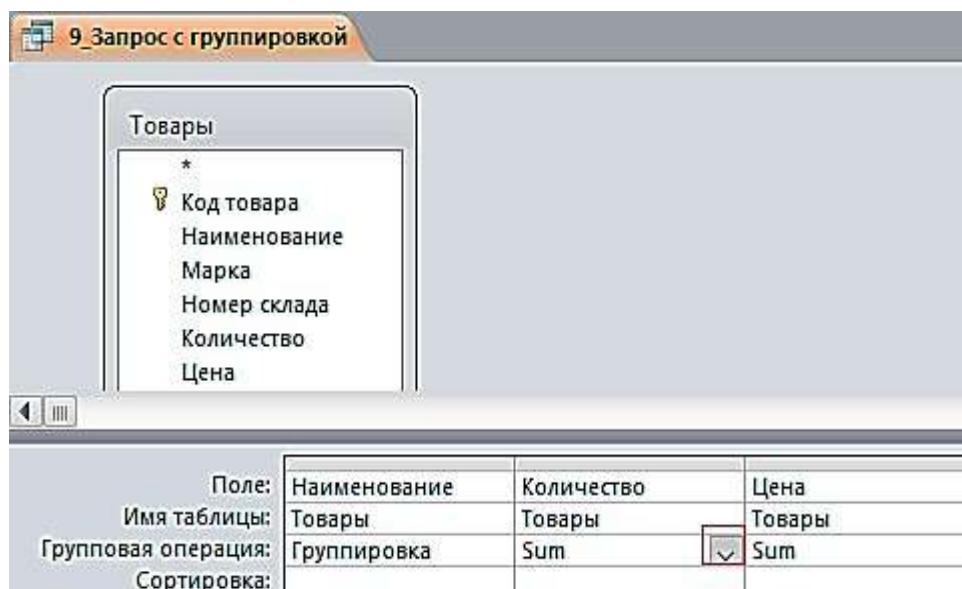


Рис. 2.16. Запрос с группировкой по коду товара и суммированием количества и цены в группе

6. Для отображения результата запроса (рис. 2.17) щелкните по кнопке **Выполнить** в группе **Результаты**.

9_Запрос с группировкой		
Наименование ▾	Sum-Количество ▾	Sum-Цена ▾
Нивелир	33	29 180,00 ₽
Тахеометр	23	1 141 950,00 ₽
Теодолит	32	223 582,00 ₽

Рис. 2.17. Результат подсчета суммарного количества и цены

Задание 10. Запрос с функцией Count

Определите, сколько раз продавался товар по коду фирмы.

1. Создайте в режиме конструктора запрос на выборку из таблицы «Продажи».
2. Из списка таблицы перетащите в бланк запроса поле «**Код фирмы**». По этому полю будет производиться группировка записей таблицы.
3. Перетащите в бланк запроса поле «**Количество**», по которому будет происходить подсчет числа товаров с одинаковыми номерами фирм.
4. Выполните команду **Итоги** из группы **Показать или Скрыть**. В бланке запроса появится новая строка **Групповая операция** со значением **Группировка** во всех полях запроса.
5. В столбце «**Количество**» замените слово **Группировка** на функцию Count. Для этого вызовите раскрывающийся список и выберите эту функцию (рис. 2.18).

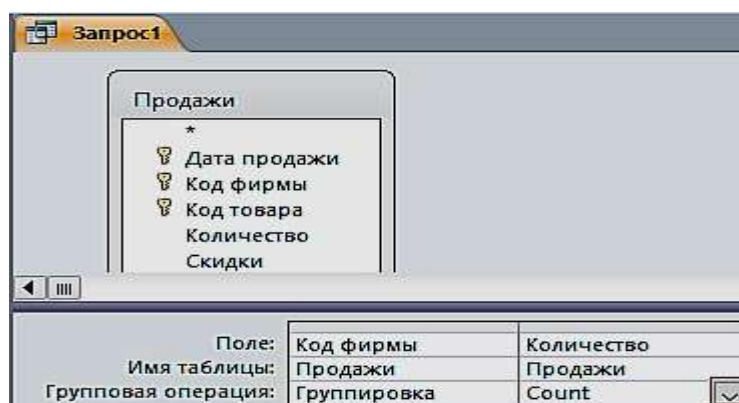
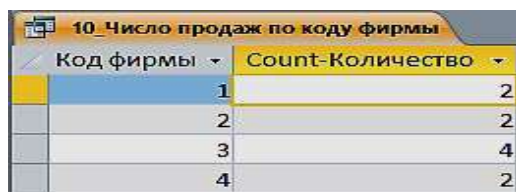


Рис. 2.18. Запрос для подсчета количества товара по коду фирмы

6. Сохраните запрос под именем «**10_Число продаж по коду фирмы**». Результат запроса показан на рис. 2.19.



Код фирмы	Count-Количество
1	2
2	2
3	4
4	2

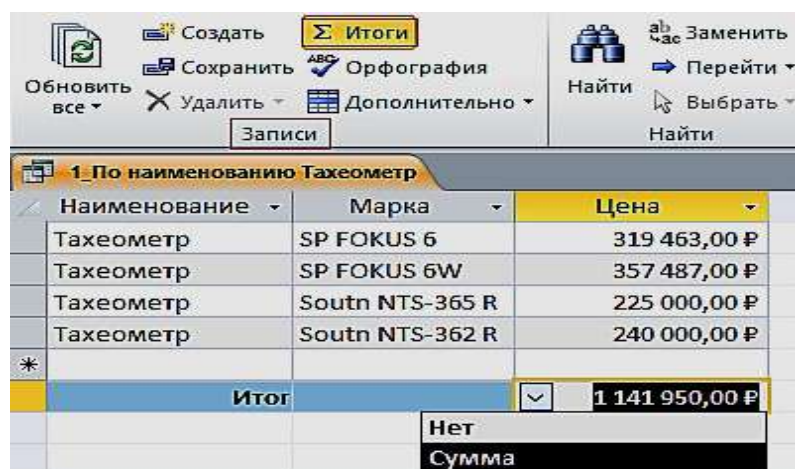
Рис. 2.19. Результат подсчета количества товара по коду фирмы

Задание 11. Запрос с отображением строки итогов по столбцу

Строка итогов используется для быстрого расчета и отображения в столбце таблицы или запроса в режиме таблицы таких значений, как итоговая сумма, среднее, минимальное и максимальное, количество значений.

1. Для добавления строки итогов в таблицу запроса откройте запрос «1_По наименованию тахеометр» в режиме таблицы. На вкладке ленты **Главная** в группе **Записи** выполните команду **Итоги**. В таблице отобразится строка **Итог**.

2. В строке **Итог** нажмите кнопку раскрывающегося списка в столбце «Цена», для которого требуется выполнить расчет, и выберите в списке **Сумма** (рис. 2.20).



Наименование	Марка	Цена
Тахеометр	SP FOKUS 6	319 463,00 Р
Тахеометр	SP FOKUS 6W	357 487,00 Р
Тахеометр	South NTS-365 R	225 000,00 Р
Тахеометр	South NTS-362 R	240 000,00 Р
Итог		1 141 950,00 Р

Рис. 2.20. Результат отображения строки итогов с расчетом суммы по столбцу

3. Для того, чтобы скрыть строку итогов, повторно выполните команду **Итоги**.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 3

Работа с многотабличными запросами

Многотабличный запрос позволяет сформировать записи результата путем объединения взаимосвязанных записей из таблиц базы данных и выбора из них нужных полей и записей. Многотабличный запрос часто осуществляет

объединение данных, которые на этапе проектирования были разделены на множество таблиц, отвечающих требованиям нормализации.

При конструировании многотабличного запроса важнейшим условием является правильное представление о том, как идет объединение записей таблиц при формировании результата.

Рассмотрим технологию конструирования многотабличного запроса на выборку для расчета разности количества товаров и количества проданных товаров.

Задание 1. Запрос с вычисляемым полем «Остаток»

1. Создайте в режиме конструктора запрос на выборку для таблиц «Товары» и «Продажи». Перетащите в бланк запроса из таблицы «Товары» поля «Наименование», «Марка», «Количество», и из таблицы «Продажи» поле «Количество».

2. Для подсчета разности количества товаров создайте после поля «Количество», вычисляемое поле «Остаток» (с правой стороны), при помощи построителя (рис. 3.1).

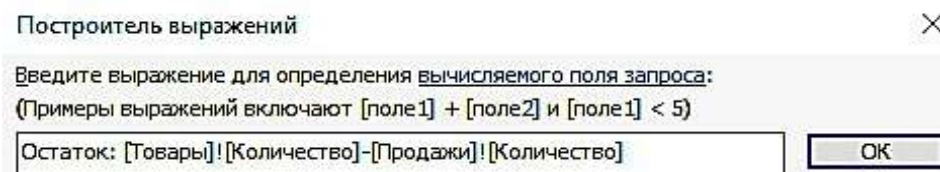


Рис. 3.1. Построитель выражений

3. Вызовите построитель выражений, нажав кнопку **Построитель**  в группе **Настройка запроса** ленты «**Конструктор**». Курсор мыши должен быть установлен предварительно в ячейке ввода выражения (рис. 3.2).

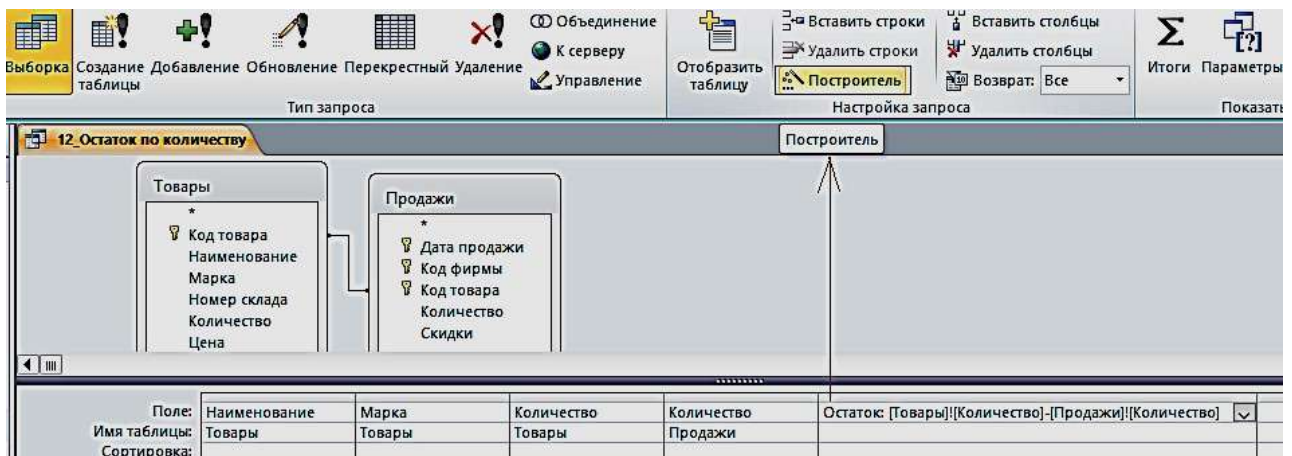


Рис. 3.2. Запрос с вычисляемым полем

4. В левой части окна **Построитель выражений** выберите свою базу данных **«Реализация товаров со складов»**, далее выберите таблицу **«Товары»**. Справа отобразится список её полей. Выберите поле **«Количество»** и знак минус, двойным щелчком вставляя в выражение. Снова выберите таблицу **«Продажи»** и поле **«Количество»** (рис. 3.3).

12_Остаток по количеству				
Наименование ▾	Марка ▾	Товары.Количество ▾	Продажи.Количество ▾	Остаток ▾
Тахеометр	SP FOKUS 6	5	4	1
Тахеометр	SP FOKUS 6W	7	6	1
Тахеометр	Soutn NTS-365 R	6	5	1
Тахеометр	Soutn NTS-362 R	5	4	1
Теодолит	3T2КП	9	8	1
Теодолит	3T2КП	9	8	1
Теодолит	4T30П	8	4	4
Теодолит	VEGA TEO 5	10	9	1
Нивелир	4Н -2КЛ	15	10	5
Нивелир	4Н-3КЛ	18	10	8

Рис. 3.3 Результат запроса **«Остаток по количеству»**

5. Слово **«Выражение»** удаляйте, оно выдает, синтаксическую ошибку.

Задание 2. Формирование запроса об увеличении цены на 15 % в феврале месяце

1. Создайте в режиме конструктора запрос на выборку для таблиц **«Товары»** и **«Продажи»**. Перетащите в бланк запроса из таблицы **«Продажи»** поле **«Дата продажи»**, а из таблицы **«Товары»** поля **«Наименование»**, **«Марка»**, **«Номер склада»**, **«Количество»**, **«Цена»**.

2. Создайте новое поле **«Новая цена»**. Для этого создайте после поля Цена, вычисляемое поле **«Новая Цена»** (с правой стороны) при помощи построителя.

3. Вызовите построитель выражений, нажав кнопку **Построитель**  в группе **Настройка запроса** ленты **«Конструктор»**. Курсор мыши должен быть установлен предварительно в ячейке ввода выражения. В окне **«Построительвыражений»** выбрать **«Элементы выражений»**, в нем найти название своей базы данных, затем Таблицы **«Товары»** и в поле **«Категории выражений»** выбрать **«Цена»**, а с клавиатуры набрать **«*1,05»**.

4. В поле **«Дата продажи»** введите условие отбора **$\geq 01.02.2018$** (рис. 3.4).

Запрос 1

Продажи

- Дата продажи
- Код фирмы
- Код товара
- Количество
- Скидки

Товары

- Код товара
- Наименование
- Марка
- Номер склада
- Количество
- Цена

Поле:	Дата продажи	Наименование	Марка	Номер склада	Количество	Цена	Новая цена: [Товары].[Цена]*105
Имя таблицы:	Продажи	Товары	Товары	Товары	Товары	Товары	
Сортировка:							
Вывод на экран:	☒	☒	☒	☒	☒	☒	☒
Условие отбора:	>=01.02.2018						

Рис. 3.4. Запрос «Новая цена» в режиме конструктора

5. Сохранить запрос с именем «Новая цена» (рис. 3.5).

13_Цена в феврале

Дата прода	Наименование	Марка	Номер склада	Количество	Цена	Новая цена
02.02.2018	Тахеометр	Soutn NTS-365 R	2	6	225 000,00 Р	23 625 000,00 Р
15.02.2018	Теодолит	3T2КП	3	9	84 193,00 Р	8 840 265,00 Р
10.02.2018	Теодолит	VEGA TEO 5	3	10	30 000,00 Р	3 150 000,00 Р
05.02.2018	Нивелир	4Н -2КЛ	4	15	16 680,00 Р	1 751 400,00 Р

Рис. 3.5. Результат запроса «Новая цена»

Задание 3. Создание запроса о товарах на складе в г. Екатеринбурге (рис. 3.6, 3.7)

14_Склад в Екатеринбурге

Склады

- Номер склада
- Телефон
- Адрес
- Заведующий

Товары

- Код товара
- Наименование
- Марка
- Номер склада
- Количество
- Цена

Поле:	Наименование	Номер склада	Телефон	Адрес	Заведующий
Имя таблицы:	Товары	Склады	Склады	Склады	Склады
Сортировка:					
Вывод на экран:	☒	☒	☒	☒	☒
Условие отбора:				E*	

Рис. 3.6. Запрос «Склад в Екатеринбурге» в режиме Конструктора

14_Склад в Екатеринбурге					
Наименование	Номер склада	Телефон	Адрес	Заведующий	
Тахеометр	1	(343)381-88-88	Екатеринбург, пер. Базовый, 7	Амелина И.В.	
Тахеометр	1	(343)381-88-88	Екатеринбург, пер. Базовый, 7	Амелина И.В.	
Теодолит	3	(343)275-18-22	Екатеринбург, Монтажников, 18а	Куликова А.Н.	
Теодолит	3	(343)275-18-22	Екатеринбург, Монтажников, 18а	Куликова А.Н.	
Теодолит	3	(343)275-18-22	Екатеринбург, Монтажников, 18а	Куликова А.Н.	
Теодолит	3	(343)275-18-22	Екатеринбург, Монтажников, 18а	Куликова А.Н.	
Нивелир	4	(343)310-22-22	Екатеринбург, Радищева, 4	Ромашенко К.Д.	
Нивелир	4	(343)310-22-22	Екатеринбург, Радищева, 4	Ромашенко К.Д.	

Рис. 3.7. Результат запроса «Склад в Екатеринбурге»

Задание 4. Создание запроса о товарах в феврале, с вычисляемым полем «Сумма» и отображения строки итогов с расчетом суммы по этому столбцу (рис. 3.8, 3.9)

Запрос1

Продажи

- Дата продажи
- Код фирмы
- Код товара
- Количество
- Скидки

Товары

- Код товара
- Наименование
- Марка
- Номер склада
- Количество
- Цена

Поле:	Дата продажи	Скидки	Наименование	Марка	Количество	Цена	Сумма: [Товары].[Количество]*[Товары].[Цена]
Имя таблицы:	Продажи	Продажи	Товары	Товары	Товары	Товары	
Сортировка:							
Вывод на экран:	☒	☒	☒	☒	☒	☒	☒
Условие отбора:	>=01.02.2018						

Рис. 3.8. Запрос «Стоимость» в режиме Конструктора

15_Стоимость						
Дата прода	Скидки	Наименование	Марка	Количество	Цена	Сумма
02.02.2018	5	Тахеометр	Soutn NTS-365 R	6	225 000,00 Р	1 350 000,00 Р
15.02.2018	10	Теодолит	3Т2КП	9	84 193,00 Р	757 737,00 Р
10.02.2018	10	Теодолит	VEGA TEO 5	10	30 000,00 Р	300 000,00 Р
05.02.2018	10	Нивелир	4Н -2КЛ	15	16 680,00 Р	250 200,00 Р
*						
Итог						2 657 937,00 Р
						Нет
						Сумма

Рис. 3.9. Результат запроса «Стоимость» и итог с расчетом суммы по столбцу

Задание 5. Создание запроса из четырех таблиц (рис. 3.10, рис. 3.11)

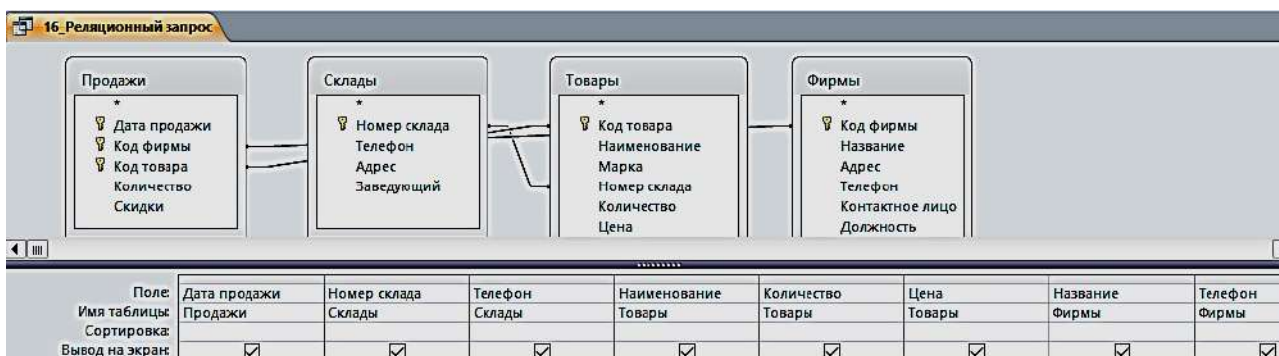


Рис. 3.10. Реляционный запрос в режиме Конструктора

Дата продажи	Номер склада	Склады.Телефон	Наименование	Количество	Цена	Название	Фирмы.Телефон
15.01.2018	4	{343}310-22-22	Нивелир	18	12 500,00 Р	ГеоСтройПрибор	{473}271-21-44
19.01.2018	1	{343}381-88-88	Тахеометр	7	357 487,00 Р	ООО "Геомар Недра"	{495}618-05-10
20.01.2018	3	{343}275-18-22	Теодолит	9	84 193,00 Р	ООО "А-ГЕО"	{904}095-70-45
25.01.2018	2	{343}379-51-62	Тахеометр	5	240 000,00 Р	ООО "Навгеоком"	{343}253-53-55
27.01.2018	1	{343}381-88-88	Тахеометр	5	319 463,00 Р	ООО "Геомар Недра"	{495}618-05-10
30.01.2018	3	{343}275-18-22	Теодолит	8	50 625,00 Р	ООО "А-ГЕО"	{904}095-70-45
02.02.2018	2	{343}379-51-62	Тахеометр	6	225 000,00 Р	ООО "Навгеоком"	{343}253-53-55
05.02.2018	4	{343}310-22-22	Нивелир	15	16 680,00 Р	ГеоСтройПрибор	{473}271-21-44
10.02.2018	3	{343}275-18-22	Теодолит	10	30 000,00 Р	ООО "А-ГЕО"	{904}095-70-45
15.02.2018	3	{343}275-18-22	Теодолит	9	84 193,00 Р	ООО "А-ГЕО"	{904}095-70-45

Рис. 3.11. Результат сложного запроса

Запросы на изменение

К запросам на изменение относятся запросы на обновление данных в записях таблицы базы, на добавление и удаление записей из таблицы, а также запросы на создание таблицы из записей, сформированных в нем.

Задание 6. Создать запрос на обновление таблицы «Товары». Увеличьте цену товара на 20 %:

1. Создайте запрос на выборку, путем отбора соответствующих полей. Присвойте ему имя «**17_Обновление**».

2. Откройте этот запрос в режиме Конструктора. Выполните команду **Запрос – Обновление** – Введите в строке «**Обновление**» выражение для новых значений $[Цена] * 1,2$ (рис. 3.12). Закройте запрос. У запроса изменится вид значка. Проверьте правильность его выполнения (рис. 3.13).

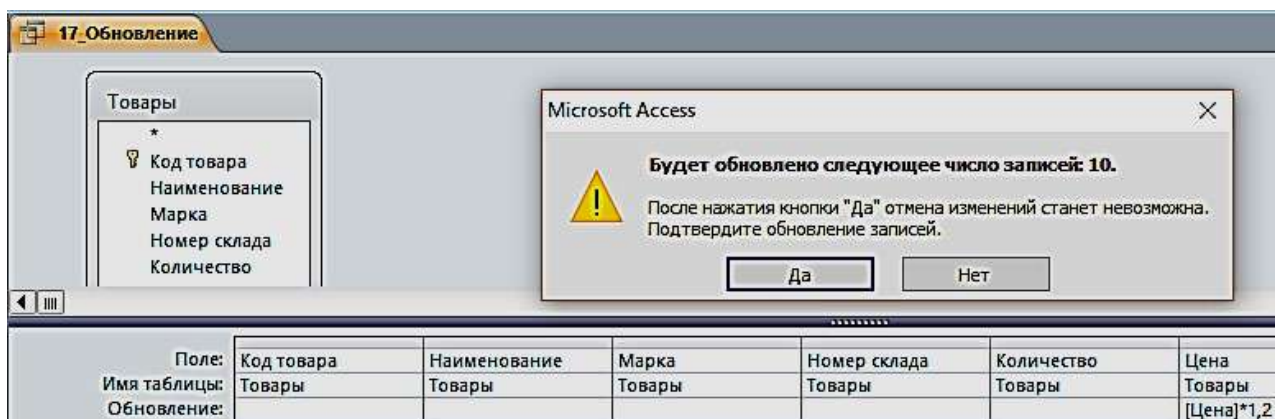


Рис. 3.12. Запрос на обновление в режиме Конструктора

Рис. 3.13. С правой стороны
результат
обновления таблицы

Цена	Цена
319 463,00 ₽	383 355,60 ₽
357 487,00 ₽	428 984,40 ₽
225 000,00 ₽	270 000,00 ₽
240 000,00 ₽	288 000,00 ₽
84 193,00 ₽	101 031,60 ₽
58 764,00 ₽	70 516,80 ₽
50 625,00 ₽	60 750,00 ₽
30 000,00 ₽	36 000,00 ₽
16 680,00 ₽	20 016,00 ₽
12 500,00 ₽	15 000,00 ₽

Задание 6. Создать запрос на создание новой таблицы «18_Создание таблицы»:

1. Создайте запрос на выборку по всем таблицам путем отбора нужных полей. Присвойте ему имя и проверьте правильность его выполнения.
2. В области навигации выделите названный запрос и с помощью команды контекстного меню откройте его в режиме Конструктора.
3. Преобразуйте этот запрос на выборку в запрос на создание таблицы, выполнив команду **Создание таблицы** в группе **Тип запроса** на вкладке Конструктора, или выбрав команду контекстного меню запроса **Тип запроса – Создание таблицы**.
4. В окне **Создание таблицы** введите имя создаваемой таблицы «Объединенная» (рис. 3.14).
5. Для того чтобы просмотреть, какие записи будут помещены в новую таблицу, щелкните по кнопке **Режим** на ленте Конструктора запросов в группе **Результаты**.

6. Выполните запрос. Откроется окно сообщений с запрашиваемым разрешением (рис. 3.15). Подтвердите согласие на создание новой таблицы. После этого таблицу можно увидеть в списке таблиц области навигации (рис. 3.16).

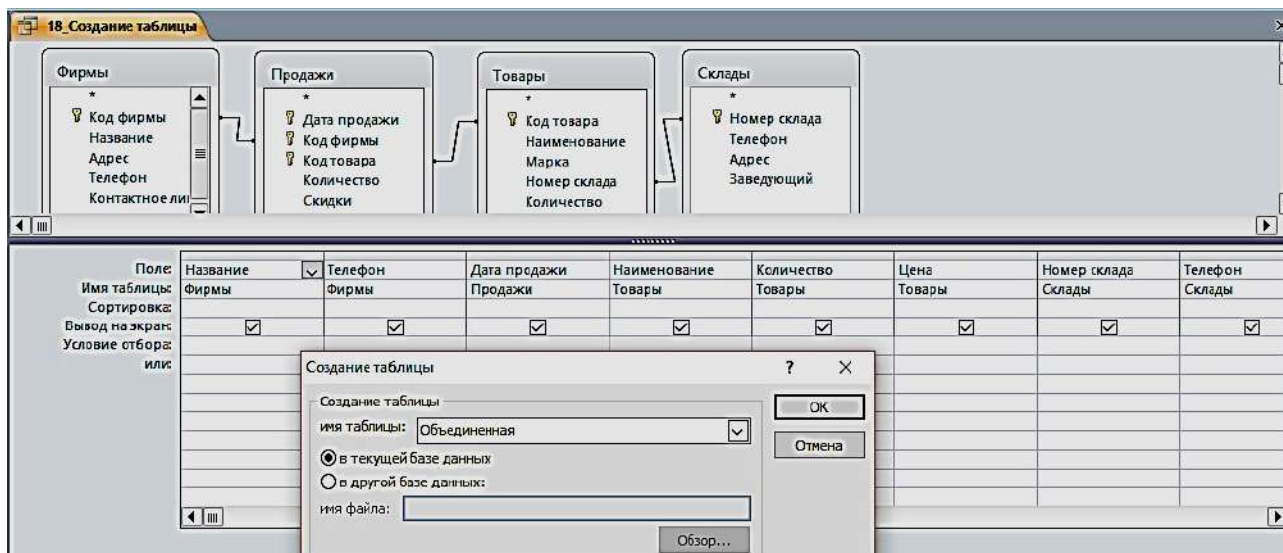


Рис. 3.14. Определение имени таблицы, создаваемой в запросе

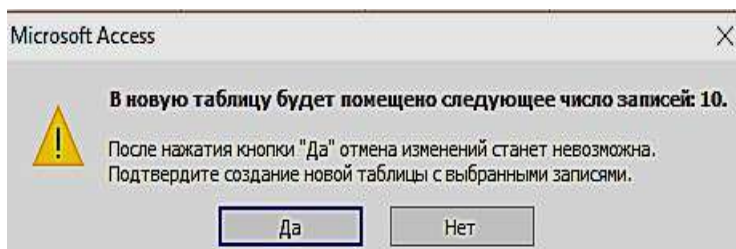


Рис. 3.15. Окно сообщений

Название	Фирмы	Телефон	Дата продажи	Наименование	Количество	Цена	Номер склада	Склады	Телефон
ООО "Геомар Недра"	4956180510		19.01.2018	Тахеометр	7	428 984,40 Р		1	3433818888
ООО "Геомар Недра"	4956180510		27.01.2018	Тахеометр	5	383 355,60 Р		1	3433818888
ООО "Навгеоком"	3432535355		25.01.2018	Тахеометр	5	288 000,00 Р		2	3433795162
ООО "Навгеоком"	3432535355		02.02.2018	Тахеометр	6	270 000,00 Р		2	3433795162
ООО "А-ГЕО"	9040957045		20.01.2018	Теодолит	9	101 031,60 Р		3	3432751822
ООО "А-ГЕО"	9040957045		30.01.2018	Теодолит	8	60 750,00 Р		3	3432751822
ООО "А-ГЕО"	9040957045		10.02.2018	Теодолит	10	36 000,00 Р		3	3432751822
ООО "А-ГЕО"	9040957045		15.02.2018	Теодолит	9	101 031,60 Р		3	3432751822
ГеоСтройПрибор	4732712144		15.01.2018	Нивелир	18	15 000,00 Р		4	3433102222
ГеоСтройПрибор	4732712144		05.02.2018	Нивелир	15	20 016,00 Р		4	3433102222

Рис. 3.16. Результат запроса на создание новой таблицы

Задание для самостоятельной работы

1. По таблице «Товары» сформировать запрос по наименованию товаров на букву Т.
2. По таблице «Товары» сформировать запрос на выборку товаров, цена которых более 100 000 рублей и количество больше или равно 5.
3. По таблице «Продажи» сформировать запрос на выборку товаров, скидки которых равны 5, за период меньше или равный 02 февраля 2018 г.
4. По таблице «**Товары**» сформировать запрос с вычисляемым полем, вычислить цену с НДС, при ставке 18 %.
5. Создать параметрический запрос, в котором выдавалось бы сообщение «**Введите наименование товара**».
6. По таблице «**Товары**» сформировать запрос с вычисляемым полем, об увеличении цены на 10 % в январе месяце.
7. По таблице «**Товары**» сформировать запрос с вычисляемым полем, вычислить сумму за январь.
8. По таблице «**Товары**» сформировать запрос с вычисляемым полем, найти увеличение количества нивелиров в 2 раза.
9. Создать новую таблицу, состоящую из таблиц «**Продажи**» и «**Фирмы**», с полями на ваш выбор (поле – количество обязательно).
10. По новой созданной таблице создать запрос на обновление количества товара в 3 раза.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 4

Работа с формами

Формы являются основой разработки диалоговых приложений пользователя с базой данных. Работая с формой, пользователь может добавлять, удалять и изменять записи таблиц, получать расчетные данные. Форма состоит из элементов управления, которые отображают поля таблиц и графические элементы, не связанные с полями таблиц. Элементы управления предназначены для разработки макета формы: размещение полей таблиц и запросов, надписей, внедряемых объектов (рисунков, диаграмм), вычисляемых полей, кнопок, выполняющих печать и открывающих др. объекты или задачи.

Однотабличная форма предназначена для загрузки, просмотра и корректировки данных одной таблицы. Источником данных такой формы служит единственная таблица. Она может быть создана одним щелчком мыши с помощью команд автоматического создания формы: **Форма**, **Разделенная форма** или **Несколько элементов**, размещенных на вкладке **Создание** в группе **Формы** (рис. 4.1).

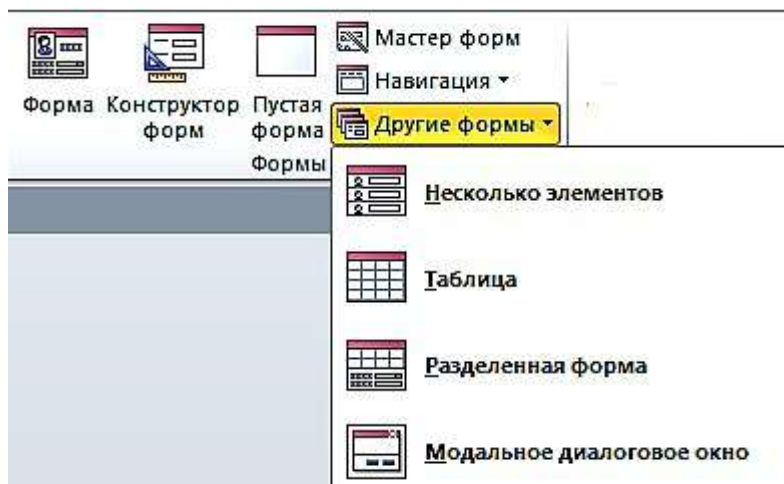


Рис. 4.1. Команды группы формы на вкладке ленты **Создание**

Задание 1. Создать однотабличную форму «Товары для ввода, просмотра и корректировки данных» таблицы «Товары». Чтобы источником записей формы стала таблица «Товары», выберите её в области навигации и выполните команду форма на вкладке **Создание**. Эта команда обеспечит автоматическое создание формы на основе только выбранной таблицы (рис. 4.2).

Рис. 4.2. Форма, полученная по команде **Форма**, для работы с таблицей «Товары»

Условное форматирование элементов управления

Для изменения внешнего вида элемента управления в форме, в зависимости от одного или нескольких условий используйте условное форматирование.

Задание 2. Изменить в форме «Товары» цвет денежных значений в поле «Цена» на красный, заливку на желтый, шрифт жирный, когда они оказываются выше заданной величины, например, 100 000 руб.

1. Выберите поле Цена, в котором нужно произвести изменения. На вкладке ленты **Формат** в группе **Форматирование элементов управления** выберите команду **Условное форматирование**. Откроется диалоговое окно **Диспетчер правил условного форматирования** (рис. 4.3).

Рис. 4.3. Окно с пустым списком правил форматирования

2. Чтобы создать первое правило условного форматирования щелкните по кнопке **Создать правило**.

3. В окне **Новое правило форматирования** выберите тип правила и сформируйте описание правил, согласно которым будет производиться заданное форматирование поля.

4. В первом поле со списком выберите пункт **Значения поля**, во втором выберите тип сравнения – **больше** и введите постоянное значение в третье поле – 100000, не используя знака денежных единиц.

5. Выберите начертание шрифта, цвет и другие параметры форматирования. Нажмите кнопку ОК (рис. 4.4).

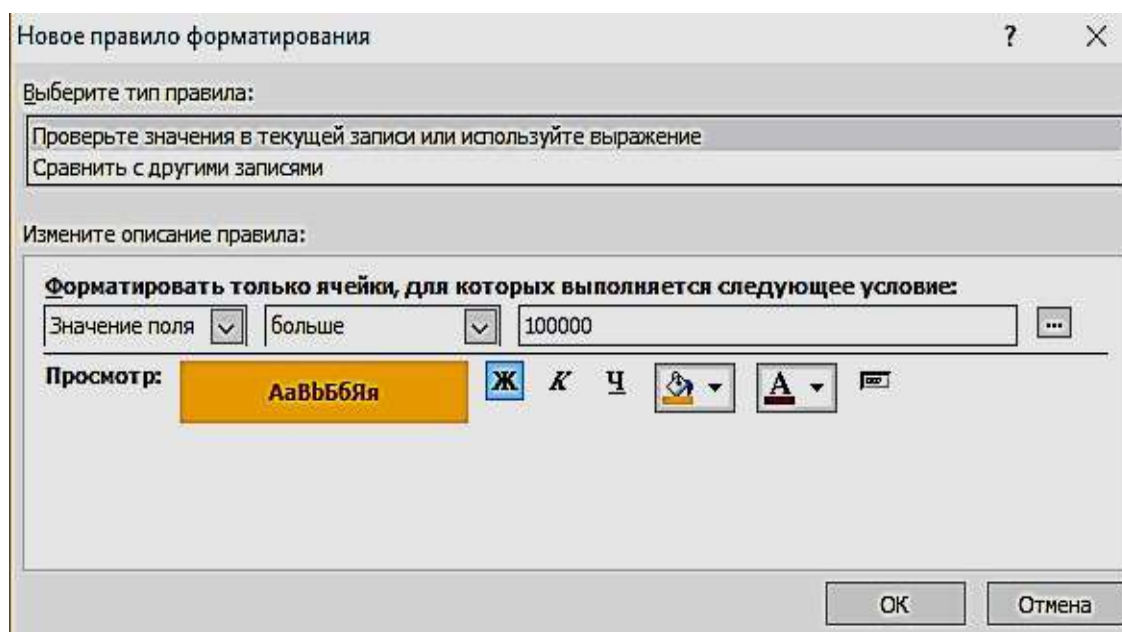


Рис. 4.4. Окно определения условий форматирования

Задание 3. Создать однотабличную форму «Склады». Для создания выбрать таблицу «Склады», использовать команду **Форма**, автоматически будет создана форма, содержащая встроенную подчиненную таблицу «Товары». Источником записей главной формы будет таблица «Склады». Такое поведение команды **Форма** вызвано тем, что таблица «Склады» имеет подчиненную таблицу «Товары», с которой она находится в отношении 1:∞, и эта связь определена в схеме данных (рис. 4.5).

Склады

Номер склада: 1

Телефон: (343)381-88-88

Адрес: Екатеринбург, пер. Базовый, 7

Заведующий: Амалина И.В.

Код товара	Наименование	Марка	Количество	Цена
1	Тахеометр	SP FOKUS 6	5	383 355,60 Р
2	Тахеометр	SP FOKUS 6W	7	428 984,40 Р
(№)				

Записи: 1 из 4 | Нет фильтра | Поиск

Рис. 4.5. Форма по таблице «Склады» с встроенной подчиненной «Товары»
Создание разделенной формы

Разделенная форма позволяет синхронно отображать данные одного источника в двух представлениях: в режиме формы и в режиме таблицы.

Задание 4. Создать однотабличную разделенную форму для работы с данными таблицы «Продажи». Выберите таблицу «Продажи» в области навигации и выполните команду **Разделенная форма** на вкладке ленты **Создание** в группе **Формы**. Эта команда обеспечит автоматическое создание формы на основе только одной выбранной таблицы. Созданная форма отобразится в режиме макета (рис. 4.6).

Дата прода	Код фирмы	Код товара	Количество	Скидки
15.01.2018	4	10	10	5
19.01.2018	1	2	6	10
20.01.2018	3	5	8	5
25.01.2018	2	4	4	10
27.01.2018	1	1	4	15
30.01.2018	3	7	4	10
02.02.2018	2	3	5	5
05.02.2018	4	9	10	10
10.02.2018	3	8	9	10

Рис. 4.6. Разделенная форма «Продажи»

Многотабличные формы

Многотабличная форма создается для работы с данными нескольких взаимосвязанных таблиц. Источником данных такой формы является многотабличный запрос. При этом форма может быть простой, отображающей одну запись в столбик, или ленточной, отображающей все записи в табличном виде с надписями в заголовке формы. Для такой формы могут быть использованы команды **Форма** или **Несколько элементов**.

Многотабличная форма может быть составной: состоять из главной формы и одной или нескольких подчиненных включаемых форм.

Задание 5. Создать составную форму воспользовавшись реляционным запросом. Выберите запрос «16_реляционный запрос» в области навигации и выполните команду **Форма** на вкладке **Создание**. Эта команда обеспечит автоматическое создание формы на основе выбранного запроса (рис. 4.7). В режиме Конструктора можно изменить заголовков.

Составная форма

Составная форма на основе Реляционного запроса

Дата продажи: 15.01.2018 Количество: 18

Номер склада: 4 Цена: 15 000,00 Р

Склады.Телефон: (343)310-22-22 Название: ГеоСтройПрибор

Наименование: Нивелир Фирмы.Телефон: (473)271-21-44

Дата продажи	Номер склада	Склады.Телефон	Наименование	Количество	Цена	Название	Фирмы.Телефон
15.01.2018	4	(343)310-22-22	Нивелир	18	15 000,00 Р	ГеоСтройПрибор	(473)271-21-44
19.01.2018	1	(343)381-88-88	Тахеометр	7	428 984,40 Р	ООО "Геомар Недра"	(495)618-05-10
20.01.2018	3	(343)275-18-22	Теодолит	9	101 031,60 Р	ООО "А-ГЕО"	(904)095-70-45
25.01.2018	2	(343)379-51-62	Тахеометр	5	288 000,00 Р	ООО "Навгеоком"	(343)253-53-55
27.01.2018	1	(343)381-88-88	Тахеометр	5	383 355,60 Р	ООО "Геомар Недра"	(495)618-05-10
30.01.2018	3	(343)275-18-22	Теодолит	8	60 750,00 Р	ООО "А-ГЕО"	(904)095-70-45
02.02.2018	2	(343)379-51-62	Тахеометр	6	270 000,00 Р	ООО "Навгеоком"	(343)253-53-55
05.02.2018	4	(343)310-22-22	Нивелир	15	20 016,00 Р	ГеоСтройПрибор	(473)271-21-44
10.02.2018	3	(343)275-18-22	Теодолит	10	36 000,00 Р	ООО "А-ГЕО"	(904)095-70-45
15.02.2018	3	(343)275-18-22	Теодолит	9	101 031,60 Р	ООО "А-ГЕО"	(904)095-70-45

Рис. 4.7. Составная форма

Создание многотабличной формы с помощью мастера

Основным средством создания многотабличной формы можно считать мастер форм, который, запросив у пользователя сведения о включаемых в форму полях из нескольких взаимосвязанных таблиц и запросов, создает составную или одиночную форму.

Задание 6. С помощью мастера создайте форму для работы с данными о продажах товаров

Для вызова мастера форм выполните на вкладке ленты **Создание** в группе **Формы** команду **Мастер форм**. Отобразится окно мастера **Создания форм**, представленное на рис. 4.8.

Создание форм

Выберите поля для формы.
Допускается выбор нескольких таблиц или запросов.

Таблицы и запросы
Таблица: Продажи

Доступные поля:
Дата продажи
Код фирмы
Код товара
Количество
Скидки

Выбранные поля:

Отмена < Назад Далее > Готово

Рис. 4.8. Выбор таблиц и полей для создаваемой формы

Если предварительно в области навигации не была выбрана таблица «**Продажи**», выберите её в раскрывающемся списке **Таблицы и запросы** диалогового окна мастера. Затем отберите из списка **Доступные поля**, в нашем случае все, кроме поля «**Скидки**» (рис. 4.9).

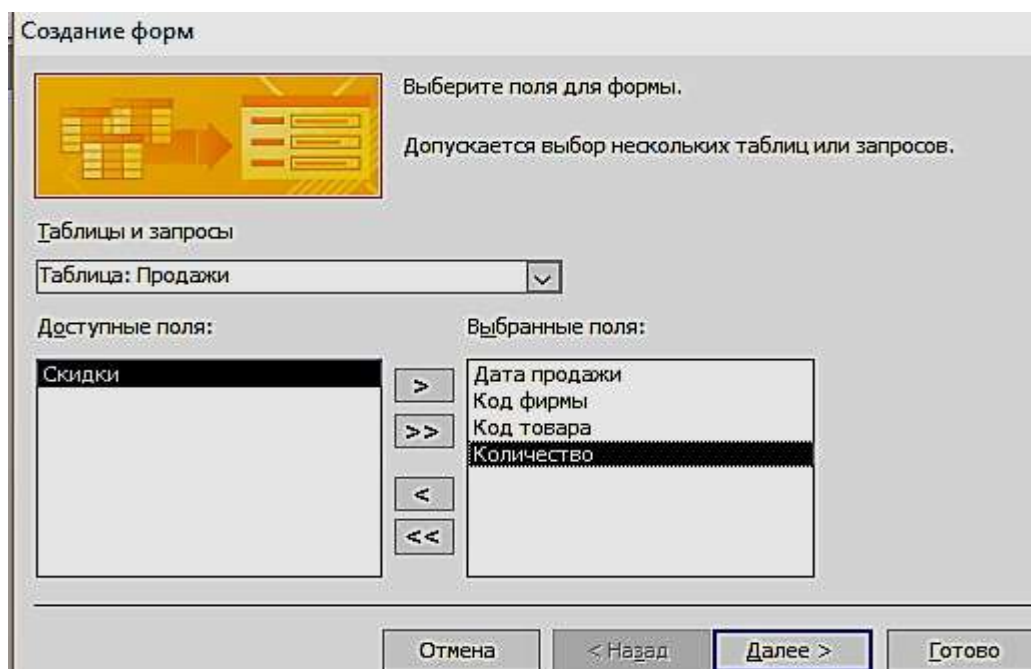


Рис. 4.9. Выбранные поля таблицы «**Продажи**» для создаваемой формы

Переходим к выбору полей из таблицы «**Товары**». Перетаскиваем все поля, кроме поля Код товара. После выбора полей для обеих таблиц и нажатия кнопки **Далее** в окне создание форм в списке **Выберите тип представления данных** надо выделить имя таблицы **Продажи** и щелкнуть по кнопке «**Далее**» (рис. 4.10).

Создание форм

Выберите вид представления данных:

- Товары

- Продажи

Дата продажи, Код фирмы, Код товара, Продажи_Количество, Наименование, Марка, Номер склада, Товары_Количество, Цена

☒ **Одиночная форма**
☐ Связанные формы

Отмена
< Назад
Далее >
Готово

Рис. 4.10. Выбор вида представления данных

В следующем диалоговом окне предоставляется возможность выбрать внешний вид формы и нажать кнопку «Готово» (рис. 4.11).

Создание форм

Выберите внешний вид формы:

☒ **В один столбец**

☐ ленточный

☐ табличный

☐ выровненный

Отмена
< Назад
Далее >
Готово

Рис. 4.11. Выбор вида формы в один столбец

Рис. 4.12. Форма, открытая для просмотра, корректировки и ввода данных

Одиночная многотабличная форма

Одиночную форму, включающую поля из нескольких связанных таблиц, позволяет быстро построить инструмент **Пустая форма**. Выполните команду **Пустая форма** на вкладке ленты **Создать** в группе **Формы**. Откроется пустая форма в режиме макета и отобразится область **Список полей**. В списке перечислены все таблицы базы данных, и предоставляется возможность открыть список полей каждой из них (рис. 4.13). Чтобы добавить поле в форму, щелкните на нем двойным щелчком или перетащите его в форму. Для отображения каждого поля Access создает в форме соответствующий элемент управления и привязывает его к полю. Кроме того, для элемента управления создается присоединенная надпись.

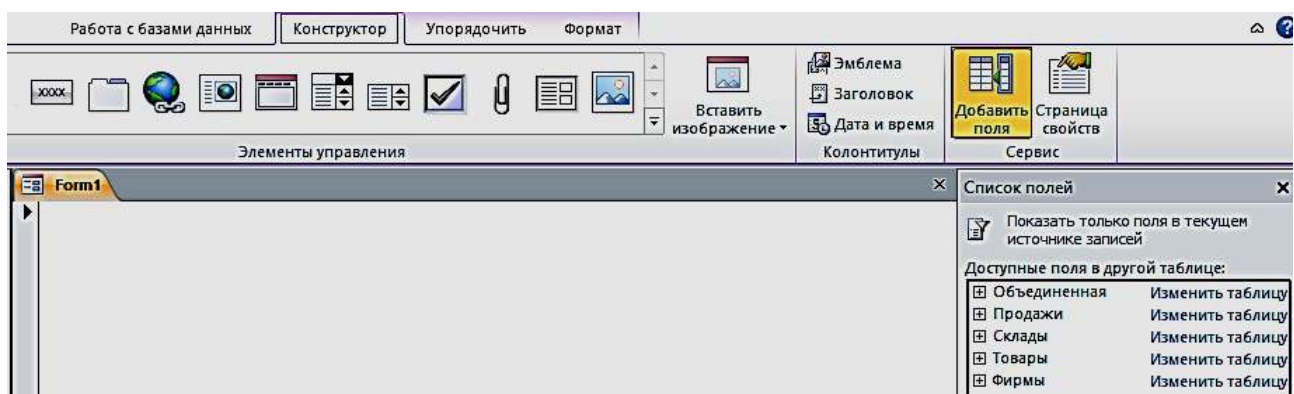


Рис. 4.13. Область **Список полей** при создании одиночной формы

Задание 7. Создать одиночную многотабличную форму для просмотра всех данных базы. Выполните команду **Пустая форма**. В области **Список полей** откройте список полей таблицы «Продажи», щелкнув знак «Плюс»

рядом с её именем. Добавьте в форму необходимые поля (Дата продажи, Код фирмы, Код товара, Количество, Скидки). Далее последовательно добавляйте поля из таблицы «**Товары**» (Наименование, Марка, Цена), затем из таблицы «**Склады**» (Номер склада, Телефон, Адрес, Заведующий) и из таблицы «**Фирмы поля**» – (Название, Адрес, Телефон, Контактное лицо, Должность). Сохранить форму под именем «Общие данные».

Дата продажи	15.01.2018
Код фирмы	4
Код товара	10
Количество	10
Наименование	Нивелир
Марка	4Н-ЗКЛ
Цена	15 000,00 Р
Номер склада	4
Телефон	((343)310-22-22
Адрес	Екатеринбург, Радищева, 4
Заведующий	Ромашенко К.Д.
Название	ГеоСтройПрибор
Адрес_Фирмы	Воронеж, Жуков, 3
Телефон_Фирмы	((473)271-21-44
Контактное лицо	Яковлева Ю.К.
Должность	менеджер

Рис. 4.14. Форма «Общие данные», созданная с помощью инструмента Пустая форма

Задание 8. Создать одиночную форму с помещенной в неё гистограммой

Для этого откройте таблицу «**Товары**». В группе **Импорт и связи** на вкладке **Внешние данные** выберите на ленте **Экспорт в таблицу Excel** (рис. 4.15).

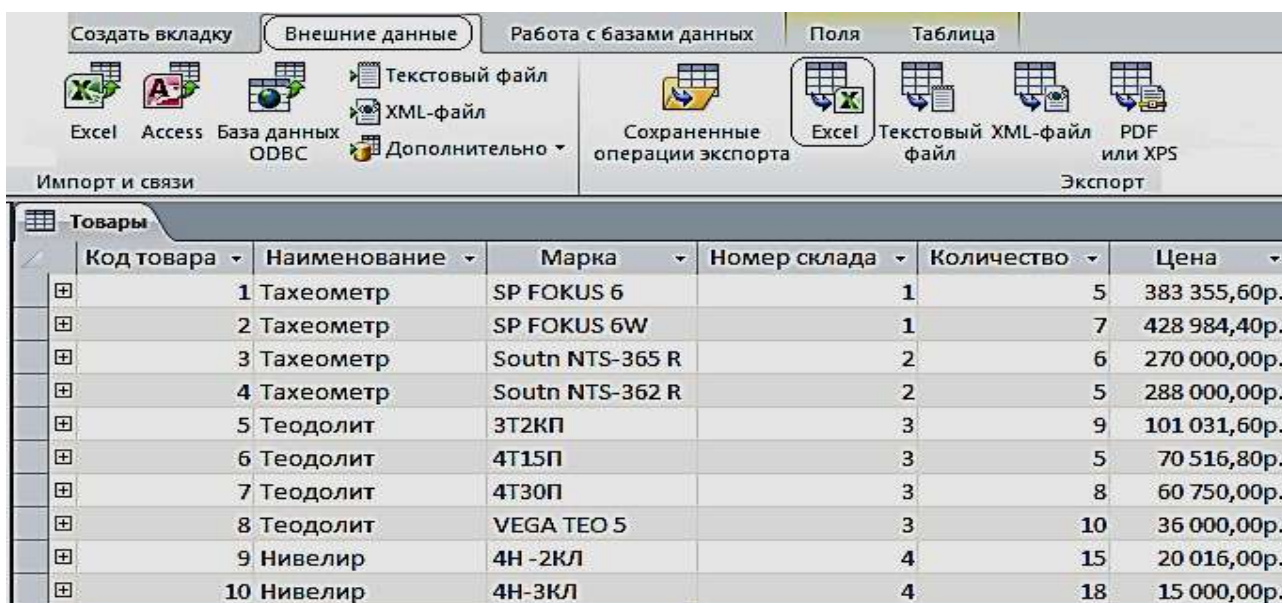


Рис. 4.15. Окно экспорта таблицы «Товары» на лист Excel

Выберите место назначения для экспорта таблицы «Товары», для этого нажмите на кнопку **Обзор**, выберите соответствующую папку (рис. 4.16, 4.17).

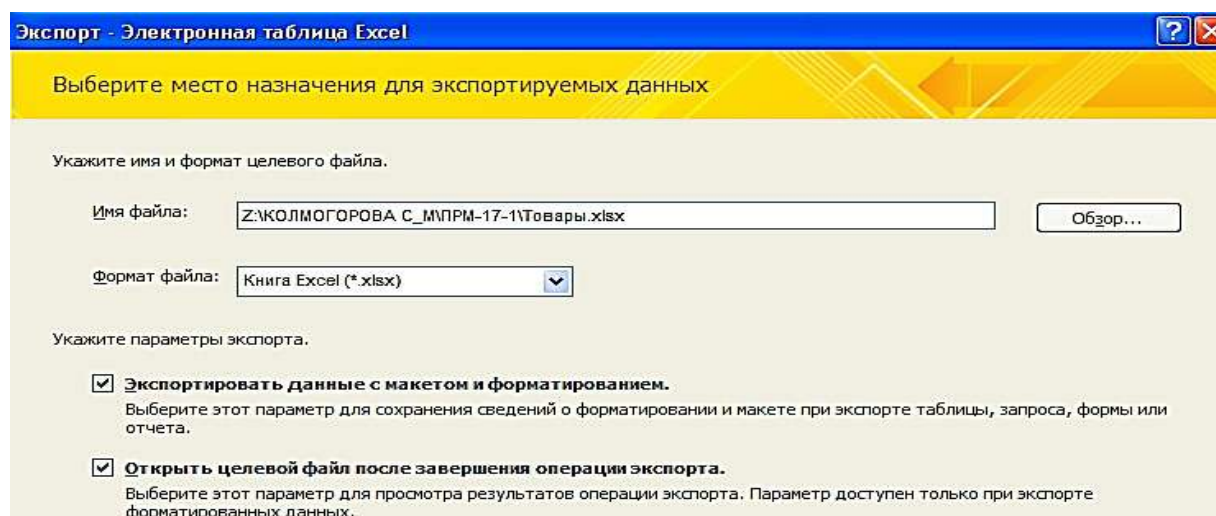


Рис. 4.16. Окно выбора места назначения для экспорта таблицы «Товары»

	A	B	C	D	E	F
1	Код товара	Наименование	Марка	Номер склада	Количество	Цена
2	1	Тахеометр	SP FOKUS 6	1	5	383 355,60р.
3	2	Тахеометр	SP FOKUS 6W	1	7	428 984,40р.
4	3	Тахеометр	Soutn NTS-365 R	2	6	270 000,00р.
5	4	Тахеометр	Soutn NTS-362 R	2	5	288 000,00р.
6	5	Теодолит	3Т2КП	3	9	101 031,60р.
7	6	Теодолит	4Т15П	3	5	70 516,80р.
8	7	Теодолит	4Т30П	3	8	60 750,00р.
9	8	Теодолит	VEGA TEO 5	3	10	36 000,00р.
10	9	Нивелир	4Н -2КЛ	4	15	20 016,00р.
11	10	Нивелир	4Н-3КЛ	4	18	15 000,00р.

Рис. 4.17. Таблица «Товары» в Excel, экспортируемая из Access

Построение гистограммы по колонкам «**Наименование**» и «**Цена**» (рис. 4.18).

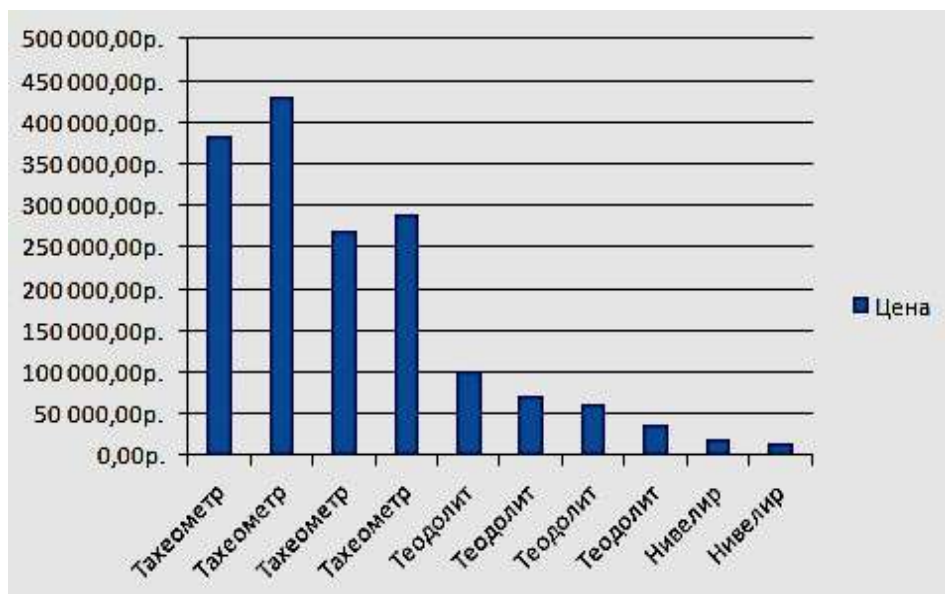


Рис. 4.18. Гистограмма, соответствующая таблице «**Товары**»

Скопируйте гистограмму в Excel. В Access выполните команду **Пустая форма** на вкладке ленты **Создать** в группе **Формы**. В режиме «**Конструктор**» произвести вставку гистограммы. Сохранить форму под названием **Гистограмма** (рис. 4.19).

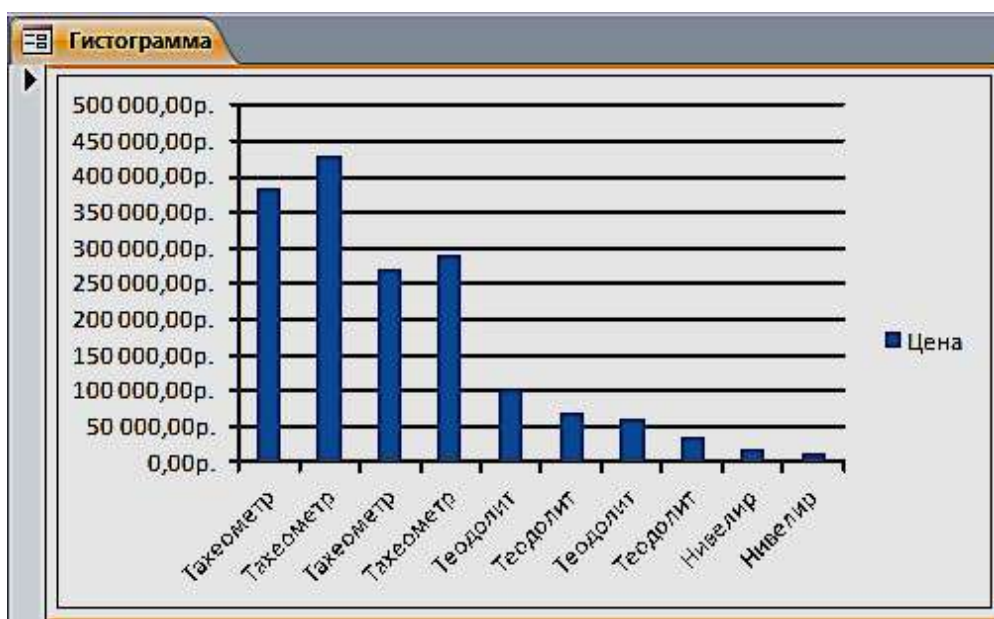


Рис. 4.19. Форма «Гистограмма»

Задание для самостоятельной работы

1. Изменить в форме «Товары» цвет денежных значений в поле «Цена» на зеленый, заливку на светло-зеленый, начертание шрифта – жирный курсив, когда они оказываются меньше или равны 80000 руб.
2. Создать форму «Фирмы» с подчиненной «Продажи».

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 5

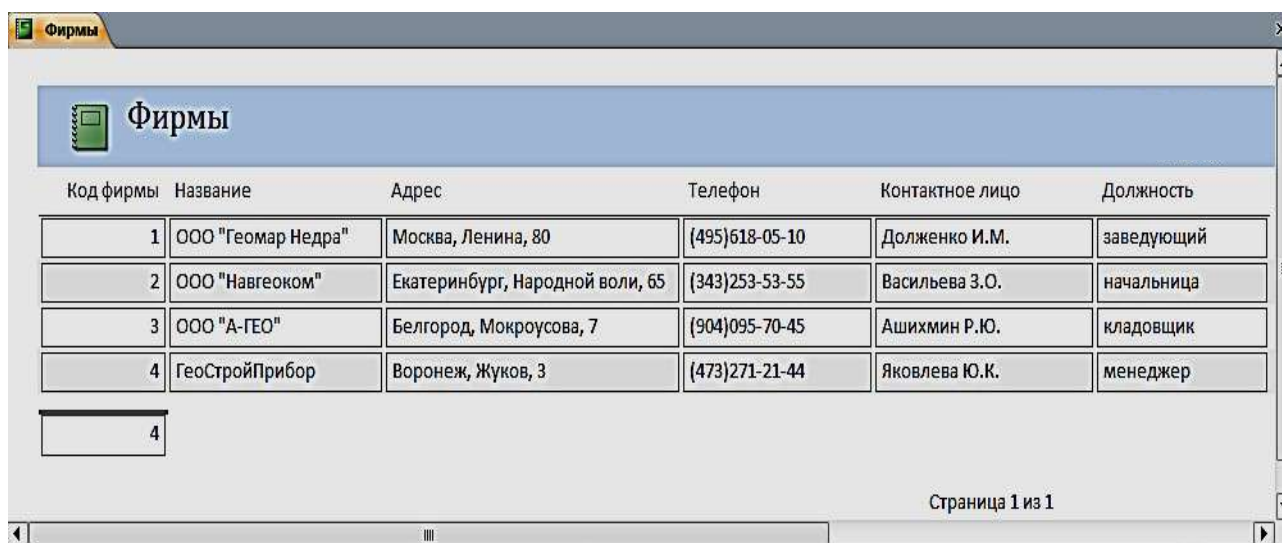
Работа с отчетами

Средства Access по разработке отчетов предназначены для конструирования макета отчета, в соответствии с которым осуществляется вывод данных из определенного источника записей в виде выходного печатного документа.

Отчет может создаваться с помощью Мастера или в режиме Конструктора отчетов.

Задание 1. Выберем в области навигации таблицу «Фирмы», данные из которой будут источником записей отчета. На вкладке ленты **Создание** в группе **Отчеты** выполнить команду **Отчет**.

Access создаст отчет и отобразит его в режиме макета (рис. 5.1). В отчете будут представлены все записи таблицы «Фирмы». Размещение полей таблицы – источника записей отчета – в разделах отчета представлено на рис. 5.2.



Код фирмы	Название	Адрес	Телефон	Контактное лицо	Должность
1	ООО "Геомар Недра"	Москва, Ленина, 80	(495)618-05-10	Долженко И.М.	заведующий
2	ООО "Навгеоком"	Екатеринбург, Народной воли, 65	(343)253-53-55	Васильева З.О.	начальница
3	ООО "А-ГЕО"	Белгород, Мокроусова, 7	(904)095-70-45	Ашихмин Р.Ю.	кладовщик
4	ГеоСтройПрибор	Воронеж, Жуков, 3	(473)271-21-44	Яковлева Ю.К.	менеджер

Рис. 5.1. Отчет в режиме «Макета»

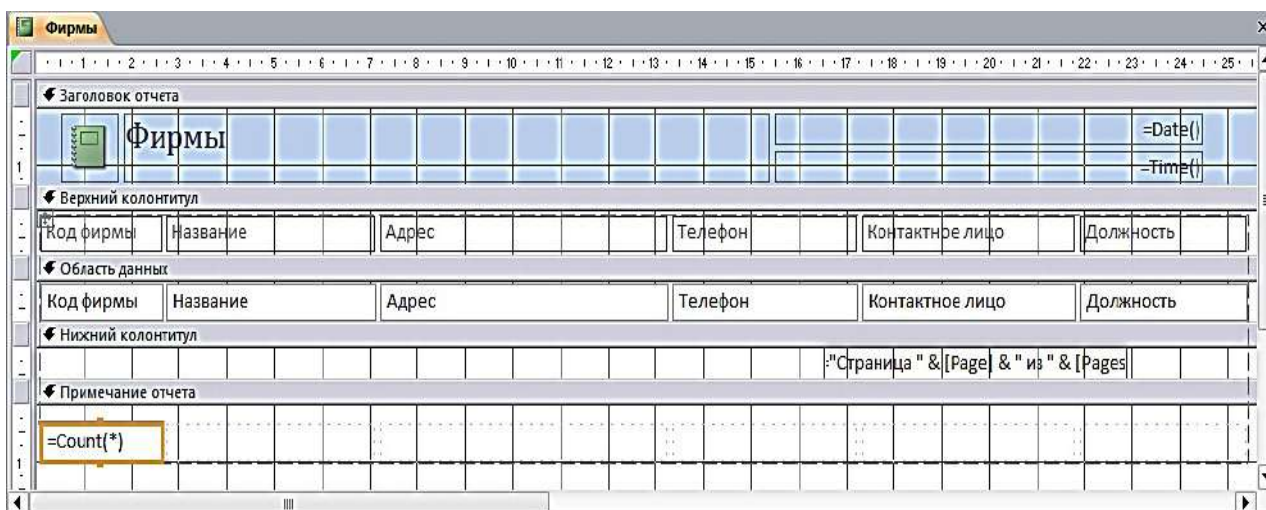


Рис. 5.2. Разделы однотобличного отчета в режиме Конструктора

В режиме макета легко привести созданный отчет в соответствие с заданными требованиями. Измените название отчета на «Контакты». Для этого выполните двойной щелчок на нем и введите новое название. Выделите макет отчета и измените заливку, размер шрифта, выбрав его на вкладке **Главная** в группе **Форматирование текста** или на вкладке **Формат** в группе **Шрифт**. Для изменения параметров страницы выполняйте команды соответствующей вкладки ленты. Пунктирной линией в отчете отмечена граница полей страницы. Отображение этой линии регулируется кнопкой **Показать поля** на вкладке ленты **Параметры страницы**. Для выбора размеров полей страницы может быть использована коллекция, отображаемая при нажатии кнопки **Поля**. На этой же вкладке можно выбрать размер бумаги, ориентацию страницы и ряд др. параметров (рис. 5.3).

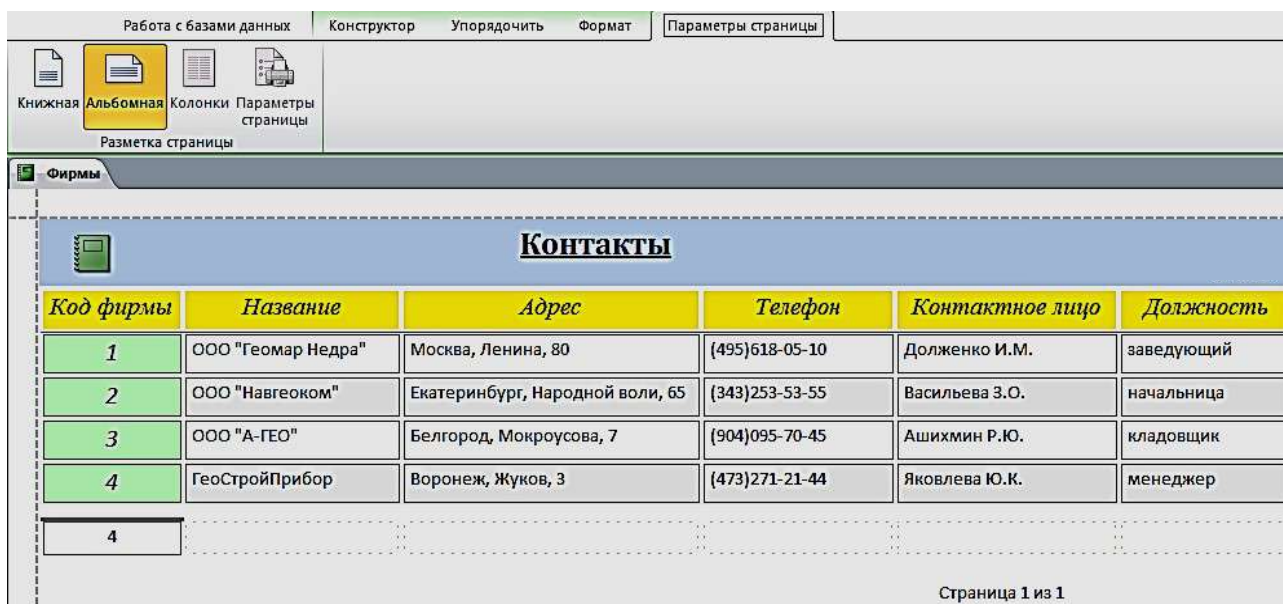


Рис 5.3. Отформатированный отчет в режиме Макета

Задание 2. Выберем в области навигации форму **Продажи товаров**, данные из которой будут источником записей отчета. На вкладке ленты **Создание** в группе **Отчеты** выполнить команду **Отчет**. Для группировки данных по дате продажи выполним команду **Группировка, сортировка и итоги**. Выберем для предлагаемого уровня группировки поле «**Дата продажи**». Откроем список, щелкнув на параметре **по кварталам**, и выберем **по месяцам**. Для закрытия списка щелкните на любом месте за его пределами (рис. 5.4, 5.5).

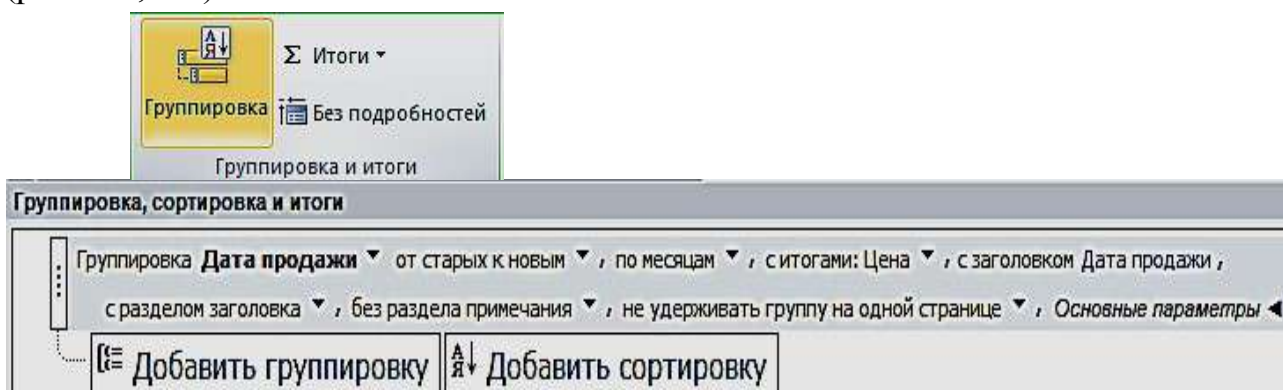


Рис. 5.4. Выбор для поля с датой группировки по месяцам

Продажи товаров								
Дата продажи	Код фирмы	Код товара	Проданные_Количество	Наименование	Марка	Номер склада	Товары_Количество	Цена
Январь 2018								
30.01.2018	3	7	4	Теоделит	4Т30П	3	8	60 750,00 Р
27.01.2018	1	1	4	Тахеометр	SP FOKUS 6	1	5	383 355,60 Р
25.01.2018	2	4	4	Тахеометр	South NTS-362 R	2	5	288 000,00 Р
20.01.2018	3	5	8	Теоделит	3Т2КП	3	9	101 031,60 Р
19.01.2018	1	2	6	Тахеометр	SP FOKUS 6W	1	7	428 984,40 Р
15.01.2018	4	10	10	Нивелир	4Н-3КЛ	4	18	15 000,00 Р
Февраль 2018								
15.02.2018	3	5	8	Теоделит	3Т2КП	3	9	101 031,60 Р
10.02.2018	3	8	9	Теоделит	VEGA TEO 5	3	10	35 000,00 Р
05.02.2018	4	9	10	Нивелир	4Н-2КЛ	4	15	20 016,00 Р
02.02.2018	2	3	5	Тахеометр	South NTS-365 R	2	6	270 000,00 Р
								1 704 169,20 Р

Страница 1 из 1

Рис 5.5. Форма с датой группировки по месяцам

Задание для самостоятельной работы

Создать отчет по таблице «**Объединенная**», изображенного на рис. 5.6.

ОТЧЕТ ПРОДАЖИ								
Дата продажи - по месяцам	Название	Фирмы_Телефон	Дата продажи	Наименование	Количество	Цена	Номер склада	Склады_Телефон
Январь 2018								
	ГеоСтройПрибор	4732712144	15.01.2018	Нивелир	18	15 000,00 Р	4	3433102222
	ООО "Геомар Недр"	4956180510	19.01.2018	Тахеометр	7	428 984,40 Р	1	3433818888
	ООО "А-ГЕО"	9040957045	20.01.2018	Теодолит	9	101 031,60 Р	3	3432751822
	ООО "Навгеоюм"	3432535355	25.01.2018	Тахеометр	5	288 000,00 Р	2	3433795162
	ООО "Геомар Недр"	4956180510	27.01.2018	Тахеометр	5	383 355,60 Р	1	3433818888
	ООО "А-ГЕО"	9040957045	30.01.2018	Теодолит	8	60 750,00 Р	3	3432751822
Итого для 'Дата продажи' = 30.01.2018 (6 записей)								
Сумма					52	1 277 121,60 Р		
Февраль 2018								
	ООО "Навгеоюм"	3432535355	02.02.2018	Тахеометр	6	270 000,00 Р	2	3433795162
	ГеоСтройПрибор	4732712144	05.02.2018	Нивелир	15	20 016,00 Р	4	3433102222
	ООО "А-ГЕО"	9040957045	10.02.2018	Теодолит	10	36 000,00 Р	3	3432751822
	ООО "А-ГЕО"	9040957045	15.02.2018	Теодолит	9	101 031,60 Р	3	3432751822
Итого для 'Дата продажи' = 15.02.2018 (4 записей)								
Сумма					40	427 047,60 Р		
Итого					92	1 704 169,20 Р		

Рис. 5.6. Результат отчета

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 6

Создание главной кнопочной формы

с использованием макросов

Использование макросов для автоматизации управления реакцией приложения на действия пользователя в формах или отчетах позволяет создавать полноценные интерактивные приложения без написания кода *VBA*.

Макрос (от слова «макрокоманда») – программа, состоящая из последовательности макрокоманд. *Макрокоманда* – это инструкция, ориентированная на выполнение определенного действия над объектами Access и их элементами.

Например, макрокомандой можно открыть форму, отчет, напечатать отчет, запустить на выполнение запрос, применить фильтр, присвоить значение и т. д.

Задание 1. Создать главную форму управления приложением, в которой будут представлены:

- элементы для кнопочных форм запросов и гистограмма;
- макросы для таблиц и отчетов;
- макрос, с помощью которого будет закрыта база данных.

1. Выполним команду **Пустая форма** на вкладке ленты **Создать** в группе **Формы**, режим **«Конструктор»** (рис. 6.1).

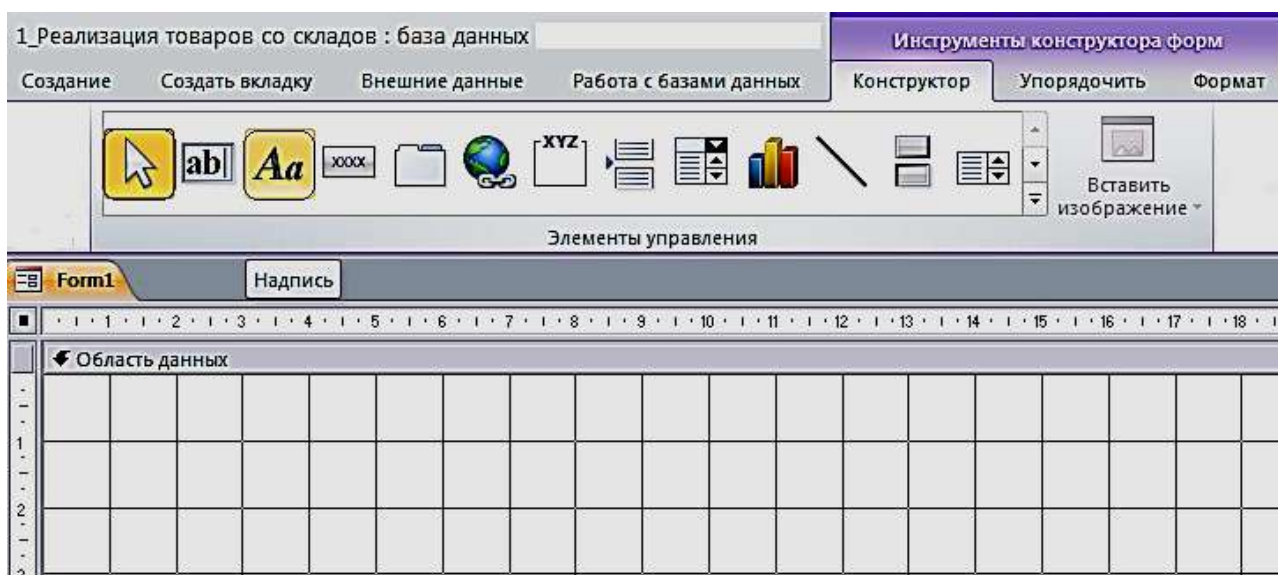


Рис. 6.1. Пустая форма в режиме «Конструктор» с элементами управления

2. Расположим в области **Формы** элемент **Надпись**, поместим в него название **Реализация товаров со складов** (рис. 6.2). Форматирование шрифта в надписях и кнопках осуществляется для выделенного объекта, при помощи **Инструмента конструктора форм**, в объекте **Формат**. Сохраним форму под именем «**Главная форма**».

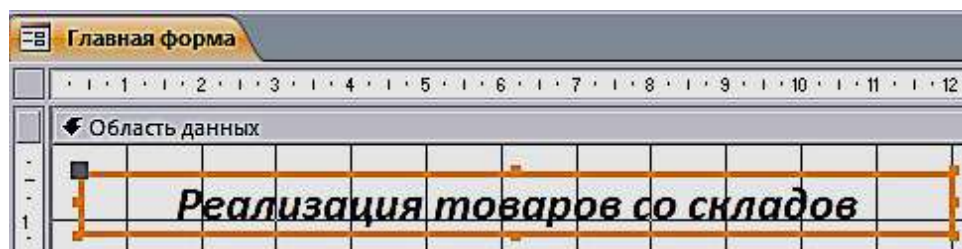


Рис. 6.2. Использование элемента управления **Надпись**

Создание макроса осуществляется в диалоговом режиме и сводится к записи в окне конструктора макроса последовательности макрокоманд, для которых задаются аргументы. Каждому макросу присваивается имя. При выполнении макроса макрокоманды выполняются последовательно в порядке их расположения. При этом используются объекты или данные, указанные в аргументах макрокоманд.

Создание макроса начинается с выполнением команды **Макрос** на вкладке ленты **Создание** в группе **Макросы и код**. В результате выполнения команды открывается окно макроса и каталог макрокоманд (рис. 6.3).

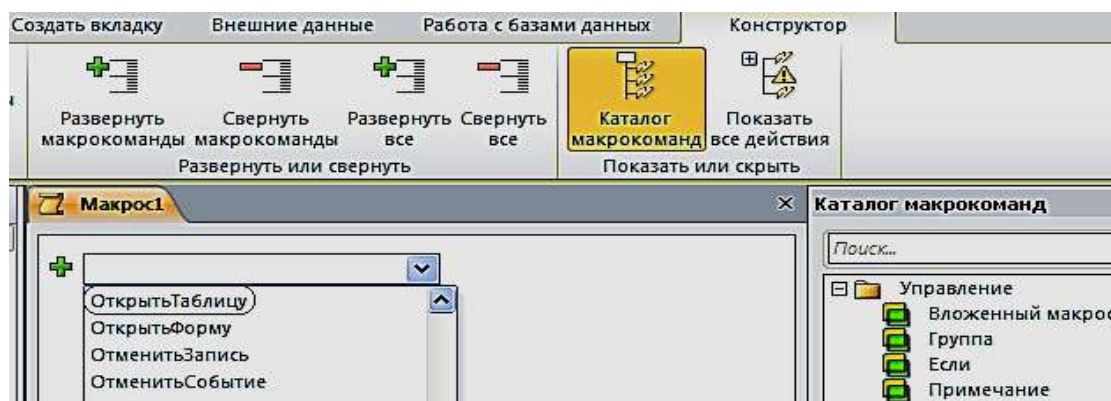


Рис. 6.3. Окно конструирования макроса с Каталогом макроккоманд

3. Создадим первый макрос **Таблицы**, при выполнении которого откроются четыре таблицы: «Продажи», «Склады», «Товары» и «Фирмы». Сохраним его под именем **Таблицы** (рис. 6.4).

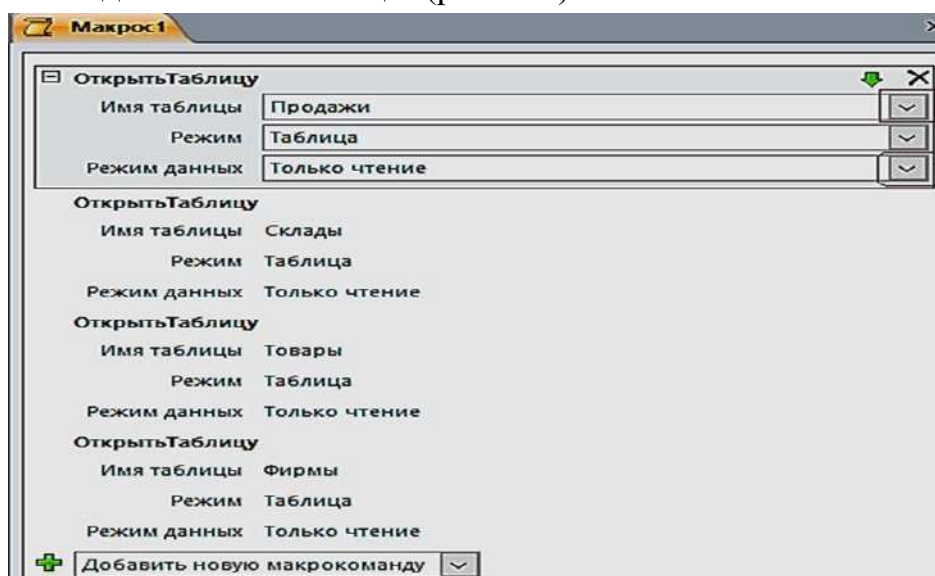


Рис. 6.4. Блок конструирования Макроса «Таблицы»

4. Создадим второй макрос, при выполнении которого откроется отчет «Продажи товаров» (рис. 6.5). Сохраним его под именем **Отчет**.

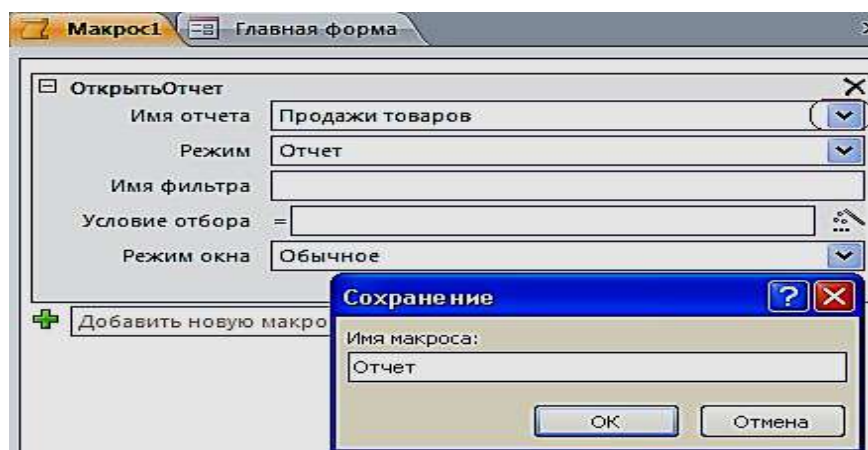


Рис. 6.5. Создание макроса **ОткрытьОтчет**

5. Создадим третий макрос, при выполнении которого откроется отчет «Продажи товаров» (рис. 6.6). Сохраним под именем **Выход**.

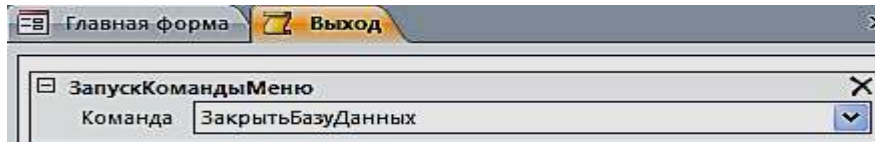


Рис. 6.6. Создание макроса **ЗакретьБазуДанных**

Создание управляющих кнопок на экране

1. Создадим кнопки: **Таблицы**, **Отчет** и **Выход из БД**. Расположим в области **Главной формы** три кнопки с ранее созданными макросами. Для размещения кнопок предусмотрим, чтобы все действия осуществлялись при нажатой кнопке «**Использовать мастера**». Переместим элемент управления **Кнопка** на форму, появится окно для создания кнопок. Выберем категорию: **Разное**, затем – действия: **Выполнить макрос**, нажмем кнопку **Далее** (рис. 6.7).

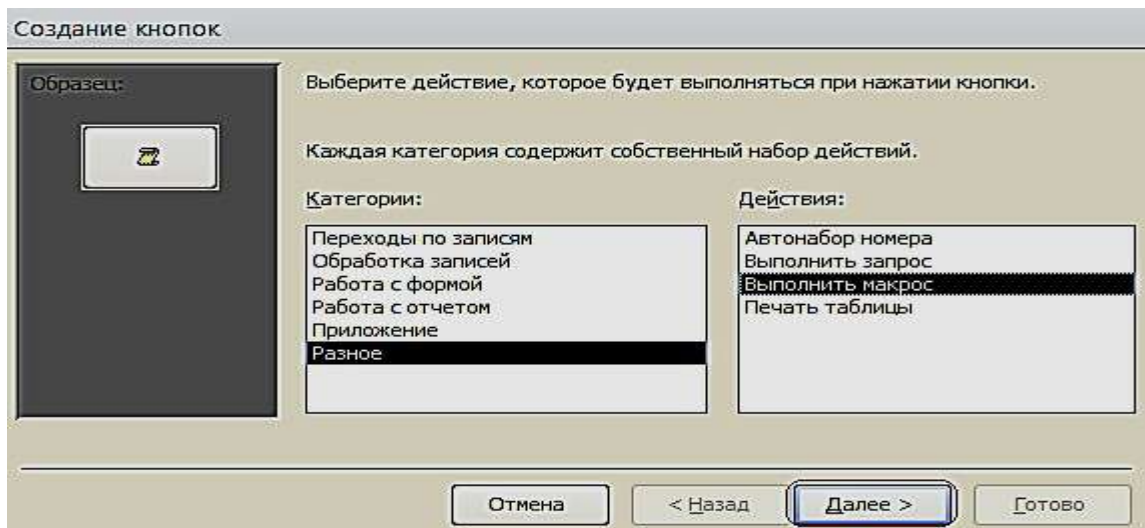


Рис. 6.7. Окно создания кнопок при работе с **Макросами**

2. Выберем соответствующий макрос (рис. 6.8). Разместим текст на кнопке.

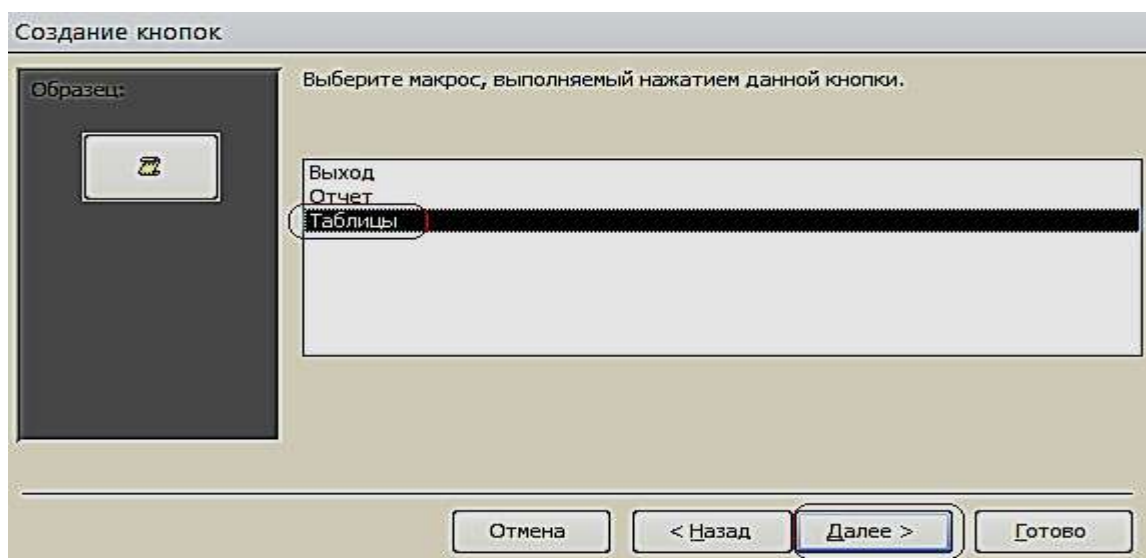


Рис. 6.8. Окно выбора макроса

3. В тексте напомним название **Таблицы** и выполним действия, указанные по кнопке **Далее** (рис. 6.9).

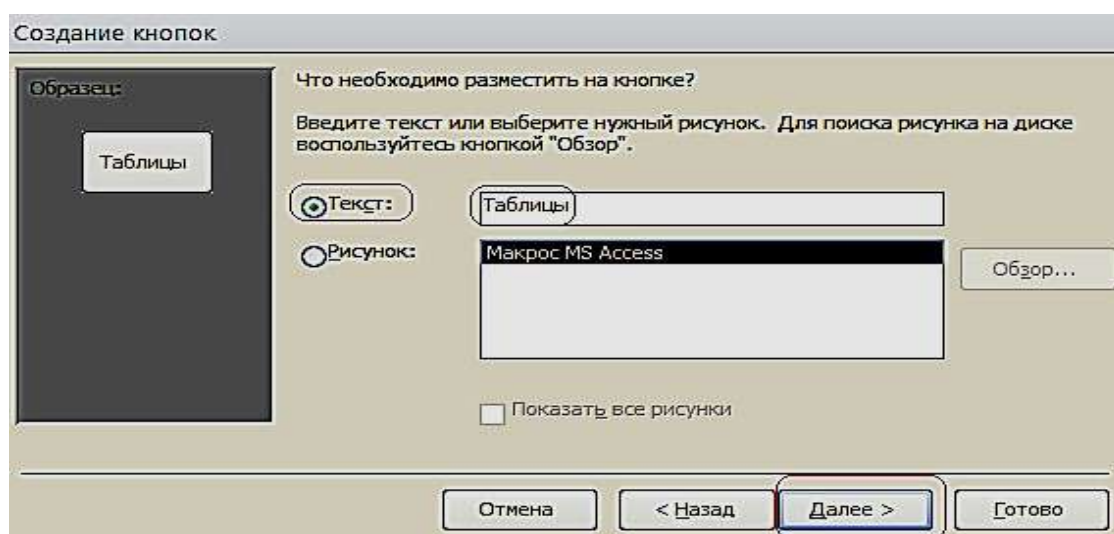


Рис. 6.9. Размещение текста на кнопке

4. Таким образом, создадим все кнопки, которые будут открываться с помощью макросов (рис. 6.10).

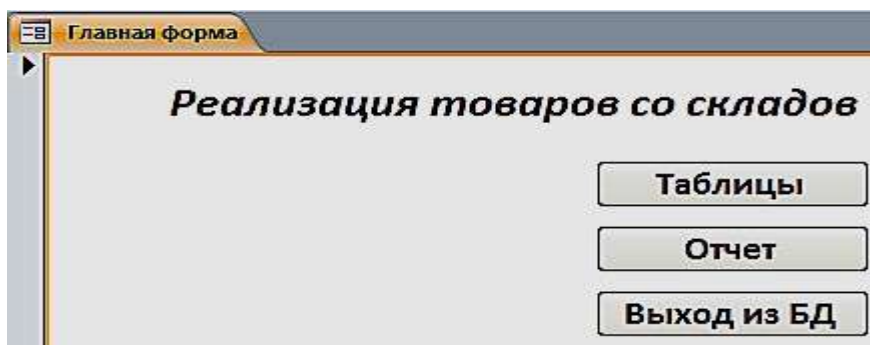


Рис. 6.10. Главная форма в режиме Макета

5. Расположим в области **Главной формы** три кнопки: **Составная форма**, **Общие данные** и **Гистограмма**. Переместим элемент управления **Кнопка** на форму, появится окно для создания кнопок. Выберем категорию: **Работа с формой**, действия: **Открыть форму**, нажмем кнопку **Далее** (рис. 6.11).

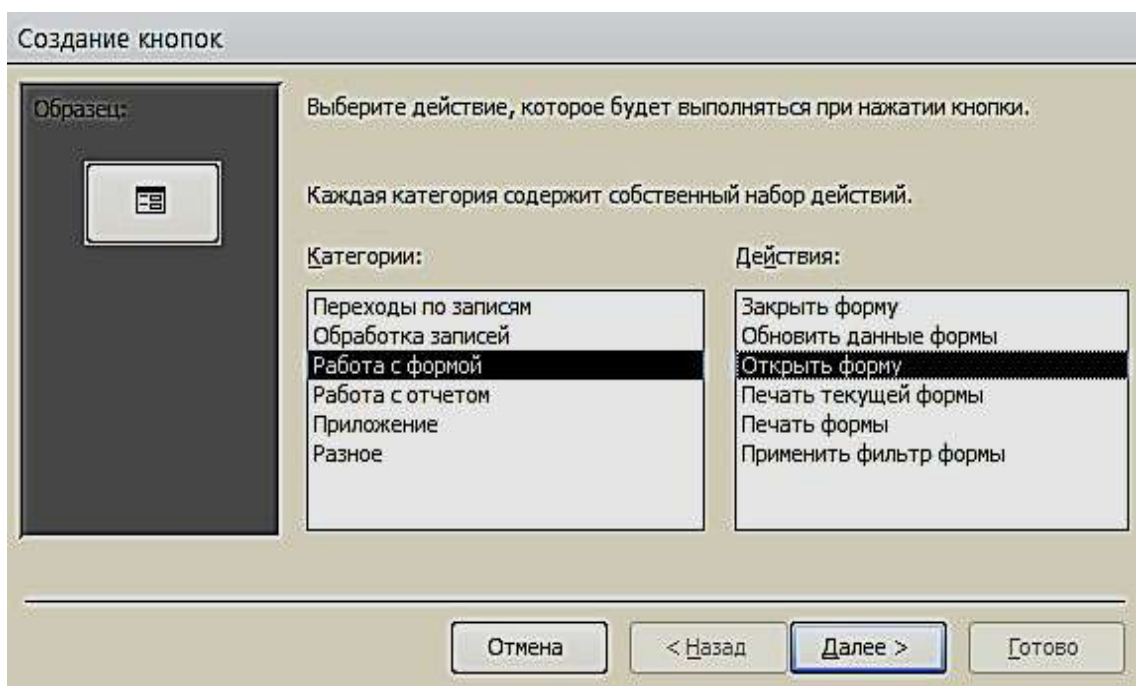


Рис. 6.11. Окно создания кнопок при работе с формами

6. Выберем соответствующую форму (рис. 6.12).

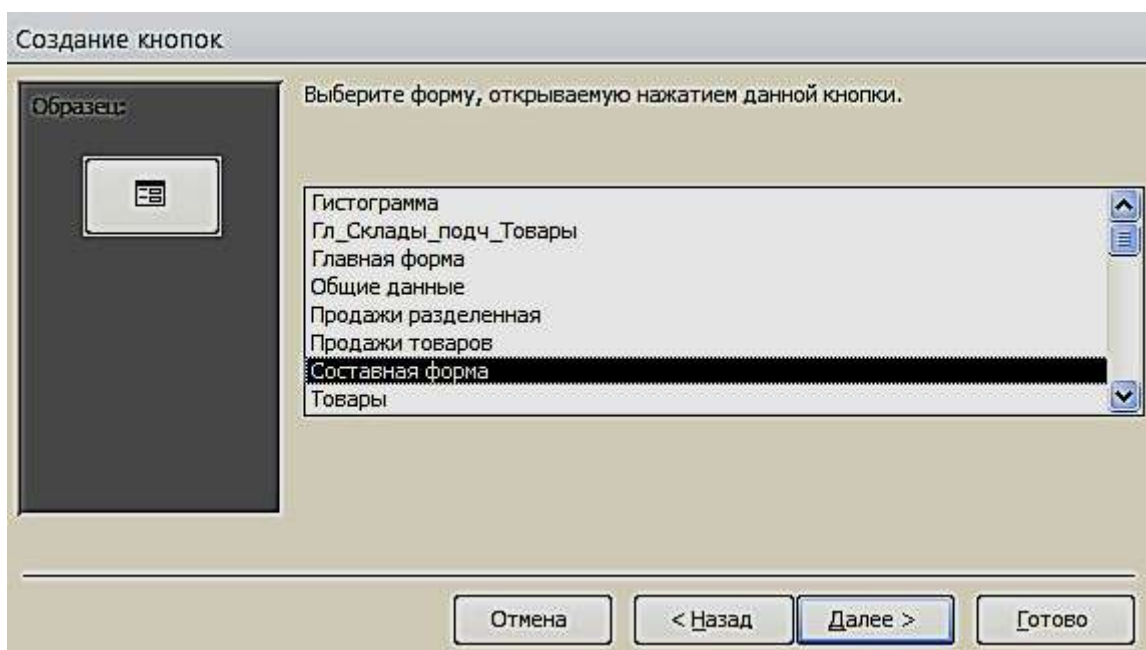


Рис. 6.12. Окно выбора формы

Поместим текст на кнопке (рис. 6.13). В тексте напишем название **Гистограмма** и выполним действия, указанные по кнопке **Далее**. Таким образом, создадим все кнопки, которые будут открываться с помощью Форм.

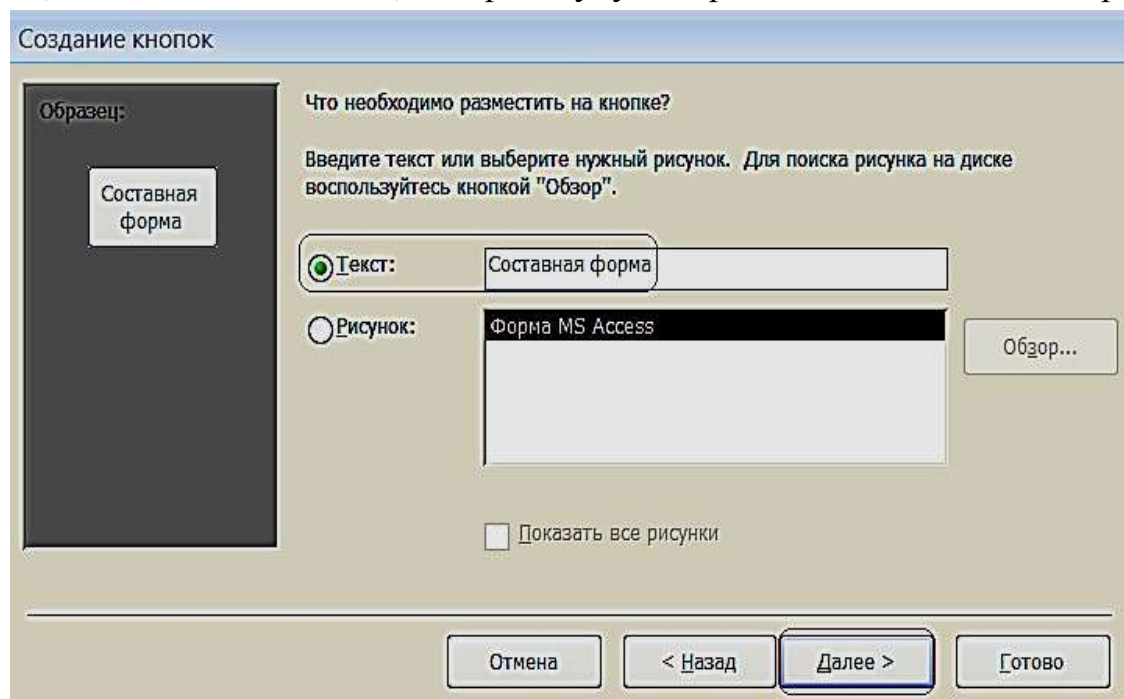


Рис. 6.13. Размещение текста на кнопке

7. Для создания картинки воспользуемся элементом управления «**Рисунок**».

8. По завершению разработки приложения, сохраним и закроем форму. Затем откроем и проверим работоспособность всех её элементов (рис. 6.14).



Рис. 6.14. Управляющая форма в режиме «Формы»

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

Указания к выполнению работы

- Создать логическую модель базы данных: для заданной предметной области, представленной в виде перечня реквизитов, сформировать таблицы, определить в них ключевые поля, описать имена, типы и свойства полей и создать связи между таблицами.
- Создать формы для ввода данных в таблицы (простая и сложная формы). Заполнить таблицы. Каждая таблица должна содержать не менее 7 строк.
- Создать запросы по пунктам вариантов задания.
- Создать кнопочную форму для вызова созданных объектов.

Варианты заданий

Вариант № 1

Исходные данные:

- **Рабочие:** табельный номер, фамилия, имя, отчество, дата рождения.
- **Цеха:** наименование цеха, категория производства (основное, управление, вспомогательное).
- **Движение по службе:** должность, оклад, тип работы (штатный, совместитель, почасовик).
 - *Вычислить* общую сумму выплат за месяц по выбранному цеху, а также среднемесячный заработок этого цеха.
 - *Создать* ведомость для начисления заработной платы рабочих этого цеха.

Вариант № 2

Исходные данные:

- **Сотрудники:** фамилия, имя, отчество, дата рождения, дата поступления на работу
- **Оплата труда:** должность, оклад
- **Отделы:** номер отдела, фамилия сотрудника
- **Определить:** возраст сотрудников (количество полных лет) при поступлении

на работу и на текущее время; ○ количество сотрудников заданного отдела младше 30 лет; ○ минимальный размер оклада.

- **Создать таблицу**, которая содержит сведения о 5-и самых высокооплачиваемых сотрудниках фирмы.

Вариант № 3

Исходные данные:

Работники: фамилия, имя, отчество, цех.

- **Изделия:** наименование изделия, категория изделия (А, В, С), стоимость изготовления.

- **Итоги:** шифр сборщика, количество изготовленных изделий по категориям.

Рассчитать: ○ общее количество изделий каждой категории;

- общее количество изделий, собранных всеми рабочими заданного цеха;

- **Создать ведомость** для начисления заработной платы рабочих заданного цеха. Определить средний размер заработной платы работников этого цеха.

Вариант № 4

Исходные данные:

- **Абоненты:** фамилия, имя, отчество, телефон, дата установки.

- **Расценки:** тип заказа (по городу, область, Украина, Европа, ...), цена 1 мин. разговора.

- **Заказ:** телефон вызова, вызываемый пункт, время в минутах.

- *Рассчитать* общее количество телефонов, установленных начиная с заданного года по сегодняшний день. Выдавать по вводимой фамилии абонента номер его телефона. ○ **Создать таблицу**, которая содержит фамилии задолжников и их телефоны.

Вариант № 5

Исходные данные:

- **Поставка:** поставщик, дата поставки, объем поставки.

- **Игрушки:** артикул, наименование, цена, нижняя и верхняя возрастные границы.

- **Чеки:** номер чека, дата продажи, сумма.

- *Определить* стоимость наиболее дорогой игрушки и ее наименование. По введенному значению A , B и X , выводить названия игрушек, которые по стоимости не превышают X и подходят ребенку от A до B лет. ○ *Создать таблицу*, которая содержит следующую информацию: наименование игрушек, которые подходят детям от 1 до 3 лет и их цены.

Вариант № 6

Исходные данные:

- **Студенты:** фамилия, имя отчество студента; код группы, дата рождения.
- **Предметы:** наименование предмета, категория предмета (фундаментальный, профессионально-ориентированный, на выбор), тип аттестации (зачет, экзамен).

Журнал: оценки по 5 экзаменам, признак участия в общественной работе. ○ *Определить* общее число активистов в списке.

- *Создать таблицу*, которая содержит сведения о начислении стипендии студентам заданной группы. Рассчитать размер стипендии по следующему алгоритму: студенту, который получил все оценки «5» и активно принимает участие в общественной работе, назначается повышенная стипендия – доплата 50 %; студенту, который получил «4» и «5», назначается обычная стипендия – ее необходимо задать; студенту, который получил одну оценку «3», но активно занимается общественной работой, также назначается обычная стипендия; другим студентам стипендия не назначается.

Вариант № 7

Исходные данные:

- **Авторы:** фамилия, имя отчество, название книги.
- **Книги:** год издания, количество экземпляров.
- **Местоположение:** шифр книги, номер стеллажа, номер шкафа, номер полки. ○ *Определить* общее количество книг в коллекции, а также число книг заданного года издания. По заданному автору и названию книги выдать информацию о местонахождении книги. ○ *Создать таблицу*, которая содержит информацию о книгах заданного автора, которые находятся в коллекции.

Вариант № 8

Исходные данные:

- **Группа:** факультет, шифр группы, фамилия куратора, должность.
- **Студент.** Фамилия студента, шифр группы, номер зачетной книжки, дата рождения, дата поступления.
- **Результаты сессии:** оценки по 5-и экзаменам и результаты сдачи 5 зачетов («З» – зачет, «Н» – незачет).
 - *Вычислить* средний балл, полученный каждым студентом за данной группы, и средний балл этой группы по каждому предмету. Определить общее количество задолженностей (по экзаменам и зачетам в сумме) каждого студента заданной группы и общее число студентов-должников той же группы.
 - *Создать таблицу*, которая содержит сведения о неуспевающих студентах: группу, фамилия и количество задолженностей.

Вариант № 9 *Исходные*

данные:

- **Рейсы:** номер рейса, пункт назначения, время вылета, время прибытия, стоимость билета.
- **Самолеты:** шифр самолета, марка, количество посадочных мест, срок службы.
- **Билеты:** дата вылета, количество свободных мест в самолете.
 - *Определить:* номера рейсов и время отправления самолетов в заданный город;
 - по заданному городу и времени отправления наличие свободных мест на рейс;
 - общее количество рейсов через сутки в заданный город.
- *Создать таблицу*, которая содержит номера рейсов и время отправления самолетов в заданный город.

Вариант №

10 *Исходные данные:*

- **Поставка:** артикул обуви (артикул начинается с буквы Ж – для женской обуви, М – для мужской, Д – для детской обуви, например: Д0321), наименование, объем поставки.
- **Обувь:** цвет, стоимость.
- **Наличие:** размер, количество.
- *Определить:*
 - стоимость обуви заданного артикула, и какие размеры есть в

наличии; о общее количество пар детской обуви, имеющейся в магазине, и ее суммарную стоимость.

- *Создать таблицу*, которая содержит информацию обо всех моделях женской обуви.

Вариант №

11 *Исходные данные:*

- **Игроки:** фамилия, имя, отчество, год рождения, название футбольного клуба.
- **Футбольный клуб:** название клуба, фамилия директора, фамилия главного тренера.
- **Результаты:** шифр игрока, число заброшенных им шайб, число сделанных им голевых передач, заработанное штрафное время. *Вычислить* общее число шайб, забитых хоккеистами каждой команды, и суммарное штрафное время. *Создать таблицу*, которая содержит фамилии шести лучших игроков, и сумму очков каждого игрока (голы + передачи).

Вариант № 12

Исходные данные:

- **Студенты:** фамилия, имя, дата рождения, дата поступления.
- **Выбор дисциплины:** код студента, наименование пяти дисциплин (выбираемая дисциплина отмечается символом «1», иначе – пробел).
- **Успеваемость:** средний балл, наличие задолженности.
 - *Вычислить* количество слушателей каждой дисциплины. Определить число слушателей заданной дисциплины, у которых средний балл превышает заданный. *Создать таблицу*, которая содержит фамилию, группу и средний балл всех слушателей заданной дисциплины. Если число их превысит заданное, то отобрать студентов, которые имеют более высокий средний балл успеваемости.

Вариант № 13

Исходные данные:

- **Рейсы:** номер поезда, станция назначения, время отправления, время прибытия, стоимость билета в вагоны каждого вида отдельно.

- **Поезда:** количество посадочных мест в купейных вагонах, плацкартных, количество мест в вагоны повышенной комфортности.

- **Билеты:** дата отправления, номер поезда, наличие билетов в вагоны каждого вида отдельно.

Определить:

- количество свободных мест в купейные вагоны поезда с заданным номером;
- количество поездов, которые отправляются к заданной станции назначения.

- *Создать таблицу*, содержащую информацию о поездах, которые отправляются к заданной станции в заданном интервале времени (временной интервал задать двумя значениями, например, 13:00 и 18:30).

Вариант №

14*Исходные данные:*

- **Сотрудники:** табельный номер фамилия, имя, отчество, дата рождения, дата поступления на работу.

- **Отделы:** номер отдела, количество сотрудников, фамилия начальника.

- **Движение по службе:** должность, оклад, тип работы (штатный, совместитель, почасовик). ○ *Рассчитать* стаж работы всех сотрудников; средний стаж работы сотрудников заданного отдела; количество сотрудников с окладом ниже заданного. ○ *Создать таблицу*, которая содержит список сотрудников пен-

сионного возраста (на сегодняшний день) с указанием стажа работы.

○ *Определить разницу* в стаже работы женщин и мужчин пенсионного возраста.

Вариант №

15 Исходные данные:

- **Пациенты:** фамилия, имя, отчество, пол, дата рождения, местожительство (город).
- **Палата:** количество мест в палате.
- **Учет:** дата поступления, диагноз поступления, уточненный диагноз, дата выписки, если выписался).

Определить: ○ количество иногородних граждан, прибывших в клинику; ○ количество пациентов с заданным диагнозом; ○ количество пациентов пенсионного возраста.

- *Создать таблицу*, которая содержит список пациентов старше заданного возраста с заданным диагнозом.

Вариант № 16

Исходные данные:

- **Пассажир:** фамилия, шифр багажа.
- **Багаж:** количество вещей, вес.
- **Учет:** дата сдачи, время сдачи, номер секции, номер стойки.

Определить: ○ общий средний вес одной вещи;

- багаж, у которого средний вес одной вещи отличается не больше чем на 0,3 кг от общего среднего веса одной вещи;
- количество пассажиров, которые имеют больше 2 вещей. □ *Создать таблицу*, содержащую информацию о багаже, вес которого превышает заданный.

Вариант №

17 Исходные данные:

- **Компания:** наименование компании, дата создания компании, фамилия директора, номинал акции.

- **Курс:** дата, продажа, покупка.
- **Учет:** количество проданных акций, количество купленных акций.

Определить: ○ среднее количество проданных и купленных акций; ○ максимальное различие между курсом продажи и покупки акций; ○ суммарное количество акций, проданных всеми фирмами, и общую сумму, на которую они проданы.

- *Создать таблицу*, которая содержит наименование фирмы и стоимость проданных акций.

Вариант № 18

Исходные данные:

- **Заказчик:** фамилия, адрес, телефон.
 - **Ремонт:** номер заказа, наименование оборудования, вид ремонта, стоимость.
 - **Учет:** фамилия мастера, дата начала ремонта, дата окончания ремонта.
- Определить:* ○ суммарную стоимость всех заказов; ○ количество заказов на ремонт заданного вида; ○ минимальная стоимость ремонта.
- *Создать таблицу*, которая содержит сведения о продолжительности ремонта заказов, оформленных весной: номер заказа, фамилия заказчика, наименование оборудования, продолжительность заказа.

Вариант № 19

Исходные данные:

- **Абоненты:** фамилия, имя, отчество, телефон, дата установки.
 - **Расценки:** код города, стоимость 1 минуты разговора.
 - **Заказ:** дата разговора, телефон вызова, вызываемый пункт, продолжительность в минутах.
- Определить:* ○ максимальную стоимость разговора; ○ суммарную стоимость всех разговоров; ○ общее количество разговоров в город с заданным кодом.
- Создать таблицу*, которая содержит сведения о стоимости разговоров, которые состоялись в интервале между двумя заданными датами.

Вариант №

20 *Исходные данные:*

- **Товары:** шифр товара, наименование товара, категория (А, В, С), страна-производитель.
 - **Поставка:** дата поставки, поставщик (наименование фирмы), объем, оптовая цена.
 - **Учет:** дата продажи, розничная цена, количество проданного товара.
- По заданному шифру товара выдавать информацию о нем.
- Определить:* ○ суммарную прибыль от продажи всех товаров;

- наименование товаров, продаваемых по наивысшей и наиболее низкой цене.

- *Создать таблицу*, которая содержит наименование товара и суммарную выручку.

Вариант №

21*Исходные данные:*

- **Продукция:** номер цеха изготовителя, наименование изделия
- **Стоимость:** код изделия, себестоимость
- **Учет:** дата изготовления, количество изготовленных изделий,

цена.

Определить: ○ суммарное различие между себестоимостью и ценой всех изго-

товленных изделий; ○общее количество изделий, изготовленных до заданной даты; ○цену изделия по заданному наименованию.

- *Создать таблицу*, которая содержит сведения о товарах, изготовленных в заданном цехе.

Вариант №

22*Исходные данные:*

- **Рабочие:** фамилия, имя, отчество, дата рождения, дата поступления на работу, номер цеха.

- **Расценки:** разряд, стоимость одного часа.
- **Учет:** дата, количество отработанных часов.

Определить: ○ среднее количество часов, отработанных за день; ○ максимальную стоимость одного часа; ○ по заданной дате количество отработанных часов.

- *Создать таблицу*, которая содержит следующие сведения о работниках заданного цеха: ○фамилия работника; ○ суммарная стоимость отработанного им времени.

Вариант № 23

Исходные данные:

- **Клиенты:** фамилия, адрес, телефон.
- **Заказ:** номер заказа, наименование изделия, фамилия мастера.
- **Учет:** дата приема, дата выполнения заказа, стоимость заказа.

Определить: ○ количество заказов, выполненных мастером с заданной фамилией; ○ стоимость самого дорогого заказа; ○ среднюю стоимость заказов.

• *Создать таблицу*, которая содержит фамилию клиента, номер заказа и продолжительность его выполнения.

Вариант № 24

Исходные данные:

• **Импортёры:** фирма-импортер, страна, наименование товара.

• **Поставка:** шифр товара, объем партии в штуках, стоимость 1 штуки в условных единицах.

• **Учет:** дата поставки, дата получения, подтверждение приема партии. *Определить:* ○ суммарный объем товаров, импортированных заданной страной;

○ суммарную стоимость партии товара по заданному шифру; ○ минимальную стоимость товара.

• *Создать таблицу*, которая содержит сведения о стоимости товаров, импортированных заданной страной. Таблица должна содержать наименование товара и суммарную стоимость партии.

Вариант №

25 *Исходные данные:*

• **Рабочие:** фамилия, имя, отчество, дата рождения, дата поступления на работу, номер цеха.

• **Оплата:** разряд, оплата за изготовление одной качественной детали.

• **Учет:** дата, количество изготовленных деталей, количество бракованных деталей. *Определить:* ○ общее количество бракованных деталей, изготовленных всеми

мастерами заданного цеха; ○ сумму штрафа за каждую бракованную деталь, которая состав-

ляет 20 % от оплаты за качественную работу; ○ фамилию мастера, который изготовил максимальное количество качественных деталей.

• *Создать таблицу*, которая содержит сведения об оплате труда рабочих. Таблица должна содержать фамилию рабочего, номер цеха и сумму к

выплате с учетом штрафа и налога (налог составляет 15 % от стоимости оплаты).

Вариант №

26*Исходные данные:*

- **Отделение:** номер отделения, фамилию заведующего, номер корпуса, этаж.
- **Лечение:** шифр болезни, продолжительность.
- **Оплата:** диагностика, стоимость 1 дня лечения, затраты на лекарство.
- **Суммарная стоимость:** отработанного им времени.

Определить: ○ по названию болезни затраты на лекарство; ○ среднюю стоимость 1 дня лечения;

- рассчитать суммарную стоимость лечения каждой болезни, включая затраты на лекарство.

- **Создать таблицу,** которая содержит сведения о стоимости лечения в заданном отделении.

Вариант № 27

Исходные данные:

- **Книги:** наименование книги, фамилия автора, издательство, год издания, тираж.
 - **Магазины:** шифр книги, номер магазина, цена.
 - **Учет продаж:** код продажи, продано, остаток.
- Определить:* ○ количество проданных книг в заданном магазине; ○ суммарную стоимость всех непроданных книг; ○ среднюю цену одной книги.
- **Создать таблицу,** которая содержит суммарную стоимость книг, проданных каждым магазином.

Вариант №

28*Исходные данные:*

- **Детали:** наименование детали, цех-изготовитель
- **Изготовление:** шифр материала, шифр детали, затрата материала на 1 деталь.

- **Учет:** дата изготовления, количество изготовленных деталей, количество брака.

Определить: ○ для всех деталей суммарные затраты материала на брак; ○ количество качественных деталей; ○ деталь, на которую тратится более всего материала. П

Создать таблицу, которая содержит шифр детали и процент брака.

Вариант №

29*Исходные данные:*

- **Лекарство:** название лекарства, категория (антибиотик, жаропонижающее, витамины, противовоспалительное, антидепрессант), дата изготовления, дата истечения срока.

- **Стоимость:** шифр лекарства, код аптеки, цена за 1 упаковку.

- **Продажа:** количество проданных упаковок, остаток.

Определить: ○ суммарное количество упаковок лекарства, проданных всеми

аптеками и принадлежащее заданной категории.

- стоимость всех непроданных упаковок;

- среднюю стоимость лекарства.

- *Создать таблицу,* которая содержит информацию о просроченных лекарствах: номер аптеки, название, категория и дату истечения срока.

Вариант № 30

Исходные данные:

- **Продавцы:** табельный номер, фамилия, имя, отчество, дата рождения.

- **Товары:** шифр товара, тип товара, сложность продажи (средняя, высокая);

- **Журнал регистрации:** количество проданных товаров по дням недели

(понедельник, вторник, ..., суббота); *Определить:* ○ общее количество товаров, проданных каждым продавцом; ○ фамилия продавца, который продал наибольшее число товаров, и определить день, когда он достиг наивысшей производительности труда.

- *Создать таблицу,* которая содержит следующую информацию: фамилия продавца и общее количество товаров, проданное им за неделю.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Основная литература:

1. Бекаревич Ю. Б., Пушкина Н. В. СПб.: БХВ - Петербург, 2016. 464 с. (Самоучитель Microsoft Access 2013).
2. Гурвиц Г. Microsoft Access 2013. Разработка приложений на реальном примере: М., 2012. 258 с.
3. Одиноккина С. В. Разработка баз данных в Microsoft Access 2010, НИУ ИТМО, 2012. 81 с.

Дополнительная литература:

1. Домострой А. MS Access 2013. Создание базы данных. Урок 1. Режим доступа: <https://www.youtube.com/watch?v=uCenTUX1QcQ>
<https://www.youtube.com/watch?v=uCenTUX1QcQ>
2. Домострой А. MS Access 2013. Таблицы. Урок 2. Режим доступа: <https://www.youtube.com/watch?v=VDuyue8ra2Q>
<https://www.youtube.com/watch?v=VDuyue8ra2Q>
3. Домострой А. MS Access 2013. Запросы. Урок 3. Режим доступа: <https://www.youtube.com/watch?v=nSIHUvfBy34>
<https://www.youtube.com/watch?v=nSIHUvfBy34>
4. Домострой А. MS Access 2013. Формы. Урок 4. Режим доступа: <https://www.youtube.com/watch?v=54ZZhSYrz8s>
<https://www.youtube.com/watch?v=54ZZhSYrz8s>
5. Домострой А. MS Access 2013. Многотабличные формы. Урок 5. Режим доступа: <https://www.youtube.com/watch?v=ou-1q4Q6NjY>
<https://www.youtube.com/watch?v=ou-1q4Q6NjY>
6. Домострой А. MS Access 2013. Создание отчетов. Урок 6. Режим доступа: <https://www.youtube.com/watch?v=PrH-S8r0nlE>
<https://www.youtube.com/watch?v=PrH-S8r0nlE>
7. Домострой А. MS Access 2013. Главная Кнопочная форма Урок 7. Режим доступа: <https://www.youtube.com/watch?v=Ou0HJtzyOU>
<https://www.youtube.com/watch?v=Ou0HJtzyOU>
8. Макарова Н. В. Информатика: учебник для вузов. Стандарт третьего поколения. СПб: Питер, 2011. 576 с.: ил.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»



Дружинин А. В.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ОРГАНИЗАЦИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ И ЗАДАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ

ПРИКЛАДНОЕ ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ

Специальность

21.05.04 Горное дело

квалификация выпускника: **специалист**

Екатеринбург

Оглавление

ЧАСТЬ I. ПОНЯТИЕ ППП.....	3
Тема 1.1 Введение в предмет. Понятие ППП.....	4
Тема 1.2 Структура и основные компоненты ППП.....	10
Тема 1.3 Эволюция ППП. Примеры современных ППП.....	13
ЧАСТЬ II. ПППMSOFFICE.....	22
Тема 2.1 Структура и состав MS Office. Основные приложения	23
Тема 2.2 Введение в офисное программирование.....	29
Тема 2.3 Макросы. Использование макрорекордера.....	34
Тема 2.4 Среда разработки VBA.....	38

ЧАСТЬ I. ПОНЯТИЕ ППП

ТЕМА 1.1 ВВЕДЕНИЕ В ПРЕДМЕТ. ПОНЯТИЕ ППП

Цели и задачи дисциплины

- Изучение основных принципов, используемых в разработке интегрированных программных продуктов.
- Изучение структуры, состава и назначения компонентов интегрированного ПО, а также средств организации взаимодействия между компонентами и инструментальных средств расширения функциональности.
- Формирование навыков работы со средствами автоматизации решения прикладных задач.
- Формирование навыков использования встроенных средств разработки.
- Требования к уровню освоения дисциплины
- В результате изучения дисциплины студенты должны:
- знать принципы построения прикладных информационных систем
- уметь использовать современные программные средства для обработки разнородной информации;
- уметь автоматизировать процесс решения прикладных задач с помощью встроенных языков программирования;
- иметь представление о современном состоянии и тенденциях развития рынка прикладного ПО.

Основные понятия и определения

Информационная система (ИС) - организационно упорядоченная совокупность документов (массивов документов) и информационных технологий, в том числе с использованием средств вычислительной техники и связи, реализующих информационные процессы. Информационные системы предназначены для хранения, обработки, поиска, распространения, передачи и представления информации.

Автоматизированная (информационная) система (АС) - совокупность программных и аппаратных средств, предназначенных для хранения и/или управления данными и ин-

формацией и производства вычислений и управляемая человеком-оператором (в этом главное отличие автоматизированной системы от автоматической).

Многоуровневое представление ИС - модель представления информационной системы в виде совокупности взаимосвязанных уровней, разделенных по функциональному назначению (рис. 1).

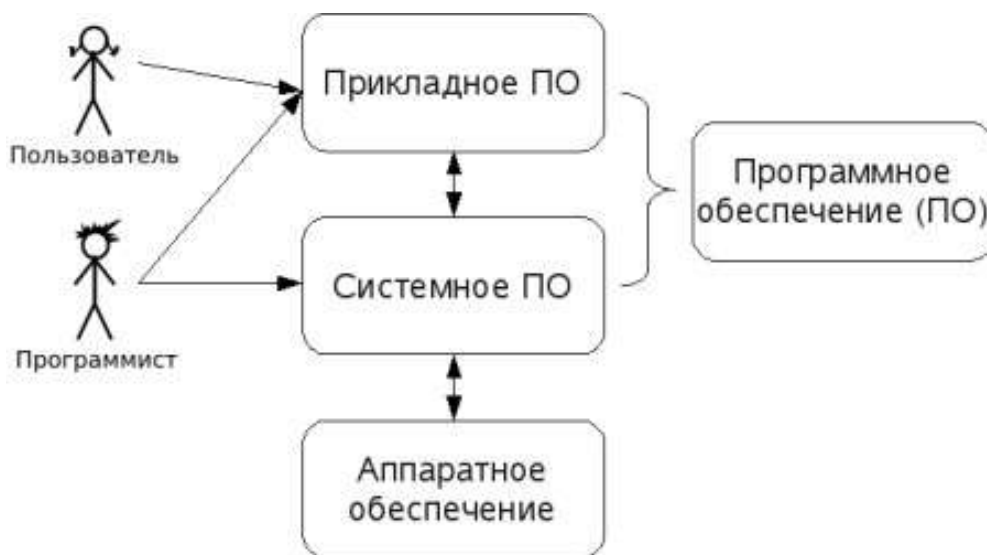


Рис. 1. Многоуровневое представление информационных систем.

Аппаратное обеспечение ИС - комплекс электронных, электрических и механических устройств, входящих в состав информационной системы или сети.

Программное обеспечение (ПО) — совокупность программ и данных, предназначенных для решения определенного круга задач и хранящиеся на машинных носителях.

Программа — последовательность формализованных инструкций, представляющих алгоритм решения некоторой задачи и предназначенная для исполнения устройством управления вычислительной машины. Инструкции программы записываются при помощи машинного кода или специальных языков программирования. В зависимости от контекста термин «программа» может относиться к исходным текстам, при помощи которых записывается алгоритм, или к исполняемому машинному коду.

Программист - специалист, занимающийся разработкой и проверкой программ. Различают системных и прикладных программистов.

Пользователь - человек, принимающий участие в управлении объектами и системами некоторой предметной области и являющийся составным элементом автоматизированной системы.

Прикладное программное обеспечение - программное обеспечение, ориентированное на конечного пользователя и предназначенное для решения пользовательских задач.

Прикладное ПО состоит из:

- отдельных прикладных программ и пакетов прикладных программ, предназначенных для решения различных задач пользователей;
- автоматизированных систем, созданных на основе этих пакетов.

Пакет прикладных программ - комплект программ, предназначенных для решения задач из определенной проблемной области. Обычно применение пакета прикладных программ предполагает наличие специальной документации: лицензионного свидетельства, паспорта, инструкции пользователя и т.п.

Классификация программного обеспечения

Любая классификация подразумевает выбор некоторого группировочного признака (или нескольких), на основании которого и производится отнесение объектов к тому или иному классу. Так, при классификации программного обеспечения по способу распространения можно выделить следующие категории (список не полный):

- Commercial Software - коммерческое (с ограниченными лицензией возможностями на использование), разрабатываемое для получения прибыли.
- Freeware - свободное ПО, распространяемое без ограничений на использование, модификацию и распространение.
- Shareware - условно-бесплатное ПО, с частичными ограничениями при работе в ознакомительном режиме (например, определенное количество запусков программы).
- Abandonware - «заброшенное» ПО, поддержка которого непосредственным разработчиком прекращена, но продолжается третьими лицами (например, партнерами или энтузиастами).
- Adware - ПО, в код которого включены рекламные материалы. Такое ПО распространяется бесплатно, но для отключения рекламных блоков необходима оплата.
- Sareware - «благотворительное» ПО, оплату за которое разработчик (или распространитель) просит переводить на благотворительные нужды.

При классификации программного обеспечения по назначению в качестве критерия используют уровень представления ИС, на который ориентирована та или иная программа.

Соответственно выделяют следующие классы ПО:

1. Системное ПО - решает задачи общего управления и поддержания работоспособности системы в целом. К этому классу относят операционные системы, менеджеры загрузки, драйверы устройств, программные кодеки, утилиты и программные средства защиты информации.
2. Инструментальное ПО включает средства разработки (трансляторы, отладчики, интегрированные среды, различные SDK и т.п.) и системы управления базами данных (СУБД).
3. Прикладное ПО - предназначено для решения прикладных задач конечными пользователями.

Прикладное ПО - самый обширный класс программ, в рамках которого возможна дальнейшая классификация, например, по предметным областям. В этом случае группировочным признаком является класс задач, решаемых программой. Приведем несколько примеров:

- Офисные приложения - предназначены для автоматизации офисной деятельности (текстовые редакторы и процессоры, электронные таблицы, редакторы презентаций и т.п.)
- Корпоративные информационные системы - бухгалтерские программы, системы корпоративного управления, системы управления проектами (Project Management), инструменты автоматизации документооборота (EDM-системы) и управления архивами документов (DWM-системы)
- Системы проектирования и производства - системы автоматизированного проектирования (САПР, CAD/CAM-системы), системы управления технологическими (SCADA) и производственными (MES) процессами
- Научное ПО - системы математического и статистического расчета, анализа и моделирования
- Геоинформационные системы (ГИС)
- Системы поддержки принятия решений (СППР)
- Клиенты доступа к сетевым сервисам (электронная почта, веб-браузеры, передача сообщений, чат-каналы, клиенты файлообменных сетей и т.п.)
- Мультимедийное ПО - компьютерные игры, средства просмотра и редактирования аудио- и видеоинформации, графические редакторы и вьюеры, анимационные редакторы и т.п.

С точки зрения конечного пользователя такая классификация оправданна и наглядна, для разработчика же более значимым фактором является структура прикладной программы, в общем случае состоящей из нескольких компонентов. Назначение этих компонентов, связи между ними и способность к взаимодействию определяют интеграцию прикладного ПО. Чем теснее связаны программные компоненты, тем выше степень интеграции.

В зависимости от степени интеграции многочисленные прикладные программные средства можно классифицировать следующим образом¹:

1. отдельные прикладные программы;
2. библиотеки прикладных программ;
3. пакеты прикладных программ;
4. интегрированные программные системы.

Отдельная прикладная программа пишется, как правило, на некотором высокоуровневом языке программирования (Pascal, Basic и т.п.) и предназначена для решения конкретной прикладной задачи. Такая программа может быть реализована в виде набора модулей, каждый из которых выполняет некоторую самостоятельную функцию (например, модуль пользовательского интерфейса, модуль обработки ошибок, модуль печати и т.п.).

При этом доступ к функциям модулей из внешних программ невозможен.

Библиотека представляет собой набор отдельных программ, каждая из которых решает некоторую прикладную задачу или выполняет определенные вспомогательные функции (управление памятью, обмен с внешними устройствами и т.п.). Библиотеки программ зарекомендовали себя эффективным средством решения вычислительных задач. Они интенсивно используются при решении научных и инженерных задач с помощью ЭВМ.

Условно их можно разделить на библиотеки общего назначения и специализированные библиотеки.

Пакет прикладных программ (ППП) - это комплекс взаимосвязанных программ, ориентированный на решение определенного класса задач. Формально такое определение не исключает из числа пакетов и библиотеки программ, однако у ППП, как отдельной категории, есть ряд особенностей, среди которых: ориентация на решение классов задач, унифицированный интерфейс, наличие языковых средств.

¹ Следует отметить отсутствие безусловных границ между перечисленными формами прикладного программного обеспечения

Интегрированная программная система - это комплекс программ, элементами которого являются различные пакеты и библиотеки программ. Примером служат системы автоматизированного проектирования, имеющие в своем составе несколько ППП различного назначения. Часто в подобной системе решаются задачи, относящиеся к различным классам или даже к различным предметным областям.

Понятие пакета прикладных программ

Итак, пакет прикладных программ (ППП) – это комплекс взаимосвязанных программ для решения определенного класса задач из конкретной предметной области. На текущем этапе развития информационных технологий именно ППП являются наиболее востребованным видом прикладного ПО. Это связано с упомянутыми ранее особенностями ППП. Рассмотрим их подробнее:

- Ориентация на решение класса задач. Одной из главных особенностей является ориентация ППП не на отдельную задачу, а на некоторый класс задач, в том числе и специфичных, из определенной предметной области. Так, например, офисные пакеты ориентированы на офисную деятельность, одна из задач которой - подготовка документов (в общем случае включающих не только текстовую информацию, но и таблицы, диаграммы, изображения). Следовательно, офисный пакет должен реализовывать функции обработки текста, представлять средства обработки табличной информации, средства построения диаграмм разного вида и первичные средства редактирования растровой и векторной графики.
- Наличие языковых средств. Другой особенностью ППП является наличие в его составе специализированных языковых средств, позволяющих расширить число задач, решаемых пакетом или адаптировать пакет под конкретные нужды. Пакет может представлять поддержку нескольких входных языков, поддерживающих различные парадигмы. Поддерживаемые языки могут быть использованы для формализации исходной задачи, описания алгоритма решения и начальных данных, организации доступа к внешним источникам данных, разработки программных модулей, описания модели предметной области, управления процессом решения в диалоговом режиме и других целей. Примерами входных языков ППП являются VBA в пакете MS Office, AutoLISP/VisualLISP в Autodesk AutoCAD, StarBasic в OpenOffice.org

- Единообразие работы с компонентами пакета. Еще одна особенность ППП состоит в наличии специальных системных средств, обеспечивавших унифицированную работу с компонентами. К их числу относятся специализированные банки данных, средства информационного обеспечения, средства взаимодействия пакета с операционной системой, типовой пользовательский интерфейс и т.п.
-

ТЕМА 1.2 СТРУКТУРА И ОСНОВНЫЕ КОМПОНЕНТЫ ППП

Несмотря на разнообразие конкретных пакетных разработок, их обобщенную внутреннюю структуру можно представить в виде трех взаимосвязанных элементов¹ (рис. 2):

1. входной язык (макроязык, язык управления) - представляет средство общения пользователя с пакетом;
2. предметное обеспечение (функциональное наполнение) - реализует особенности конкретной предметной области;
3. системное обеспечение (системное наполнение) - представляет низкоуровневые средства, например, доступ к функциям операционной системы.

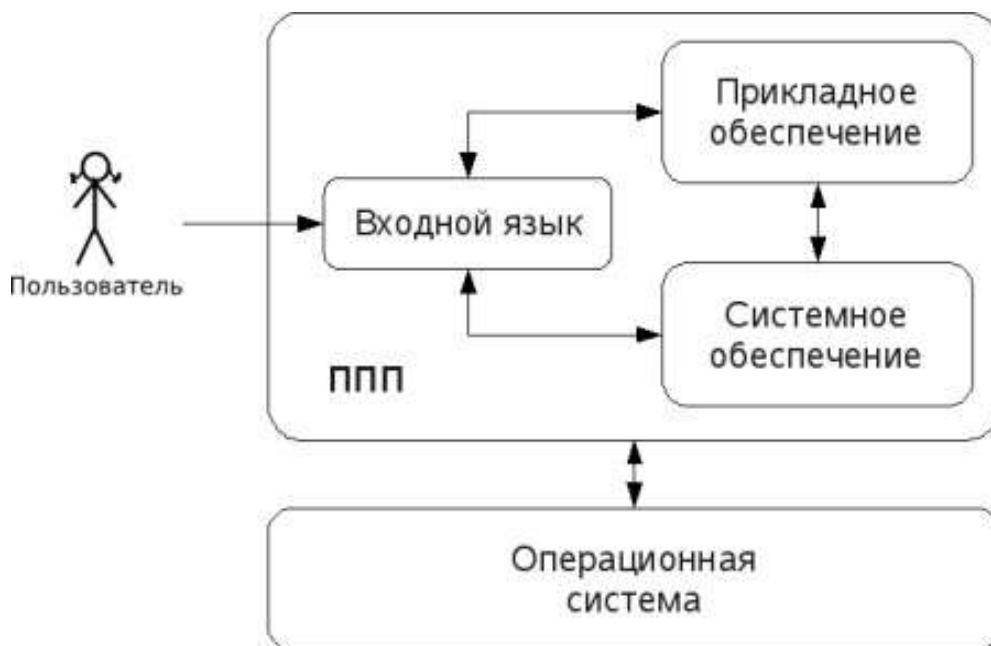


Рис. 2. Структура ППП.

Входной язык - основной инструмент при работе пользователя с пакетом прикладных программ. В качестве входного языка могут использоваться как универсальные (Pascal, Basic и

т.п.), так и специализированные, проблемно-ориентированные языки программирования (Cobol - для бизнес-приложений, Lisp - списочные структуры данных, Fortran и MathLAB - математические задачи и т.п.).

Развитый пакет может обладать несколькими входными языками, предназначенными для выполнения различных функций в рамках решаемого класса задач. Так, например, в пакете OpenOffice.org поддерживаются языки StarBasic, Python, JavaScript и Java. StarBasic является основным входным языком, предназначенным для автоматизации работы с пакетом, для этого языка имеется интегрированная среда разработки и встроенный отладчик. Скрипты на языках Python и JavaScript загружаются и исполняются из внешних файлов. На Java (через SDK и функции API OpenOffice) можно создавать модули расширения и полнофункциональные приложения-компоненты.

Входные языки отражают объем и качество предоставляемых пакетом возможностей, а также удобство их использования. Таким образом, именно входной язык является основным показателем возможностей ППП. Однако стоит отметить, что в современных пакетах обращение пользователя к языковым средствам обычно происходит косвенно, через графический интерфейс.

Предметное обеспечение отражает особенности решаемого класса задач из конкретной предметной области и включает:

- программные модули, реализующие алгоритмы (или их отдельные фрагменты) прикладных задач;
- средства сборки программ из отдельных модулей.

Наиболее распространено в настоящее время оформление программных модулей в виде библиотек, подключаемых статически или динамически. В зависимости от использованного разработчиками подхода к проектированию и реализации ППП такие библиотеки содержат встроенные классы и описания их интерфейсов (при использовании объектно-ориентированного программирования). При использовании парадигмы структурного программирования в библиотечных модулях содержатся процедуры и функции, предназначенные для решения некоторых самостоятельных задач. В обоих случаях библиотеки связаны с другими модулями пакета лишь входной и выходной информацией.

Системное обеспечение представляет собой совокупность низкоуровневых средств (программы, файлы, таблицы и т.д.), обеспечивающих определенную дисциплину работы

пользователя при решении прикладных задач и формирующих окружение пакета. К системному обеспечению ППП относят следующие компоненты:

- монитор - программа, управляющая взаимодействием всех компонентов ППП;
- транслятор(ы) с входных языков - для ППП характерно использование интерпретируемых языков;
- средства доступа к данным - драйверы баз данных и/или компоненты, представляющие доступ через унифицированные интерфейсы (ODBC, JDBC, ADO, BDE и т.п.);
- информационно-справочный модуль - предоставляет функции поддержки, среди которых информационные сообщения, встроенная справочная системы и т.п.

различные служебные программы, выполняющие низкоуровневые операции (автосохранение, синхронизация совместно используемых файлов и т.д.)

Приведенная логическая структура ППП достаточна условна и в конкретном ППП может отсутствовать четкое разделение программ на предметное и системное обеспечение. Например, программа планирования вычислений, относящаяся к прикладному обеспечению, может одновременно выполнять и ряд служебных функций (информационное обеспечение, связь с операционной системой и т.п.).

Кроме того, одни и те же программы в одном пакете могут относиться к предметному обеспечению, а в другом - к системному. Так, программы построения диаграмм в рамках специализированного пакета машинной графики естественно отнести к предметному обеспечению. Однако те же программы следует считать вспомогательными и относящимися к системному обеспечению, например, в пакете решения вычислительных задач.

ТЕМА 1.3 ЭВОЛЮЦИЯ ППП. ПРИМЕРЫ СОВРЕМЕННЫХ ППП

Этапы развития ППП

Первые ППП представляли собой простые тематические подборки программ для решения отдельных задач в той или иной прикладной области, обращение к ним выполнялось с помощью средств оболочки ОС или из других программ. Современный пакет является сложной программной системой, включающей специализированные системные и языковые средства. В относительно короткой истории развития вычислительных ППП можно выделить *4 основных поколения* (класса) пакетов. Каждый из этих: классов характеризуется определенными

особенностями входящих состав ППП компонентов - входных языков, предметного и системного обеспечения.

Первое поколение

В качестве входных языков ППП первого поколения использовались универсальные языки программирования (Фортран, Алгол-60 и т.п.) или языки управления заданиями соответствующих операционных систем. Проблемная ориентация входных языков достигалась за счет соответствующей мнемоники в идентификаторах. Составление заданий на таком языке практически не отличалось от написания программ на алгоритмическом языке.

Предметное обеспечение первых ППП, как правило, было организовано в форме библиотек программ, т.е. в виде наборов (пакетов) независимых программ на некотором базовом языке программирования (отсюда впервые возник и сам термин «пакет»). Такие ППП иногда называют *пакетами библиотечного типа*, или *пакетами простой структуры*.

В качестве системного обеспечения пакетов первого поколения обычно использовались штатные компоненты программного обеспечения ЭВМ: компиляторы с алгоритмических языков, редакторы текстов, средства организации библиотек программ, архивные системы и т.д. Эти пакеты не требовали сколько-нибудь развитой системной поддержки, и для их функционирования вполне хватало указанных системных средств общего назначения. В большинстве случаев разработчиками таких пакетов были прикладные программисты, которые пытались приспособить универсальные языки программирования к своим нуждам.

Второе поколение

Разработка ППП второго поколения осуществлялась уже с участием системных программистов. Это привело к появлению специализированных входных языков на базе универсальных языков программирования. Проблемная ориентация таких языков достигалась не только за счет использования определенной мнемоники, но также применением соответствующих языковых конструкций, которые упрощали формулировку задачи и делали ее более наглядной. Транслятор с такого языка представлял собой препроцессор (чаще всего макропроцессор) к транслятору соответствующего алгоритмического языка.

В качестве модулей в пакетах этого класса стали использоваться не только программные единицы (т.е. законченные программы на том или ином языке программирования), но и такие объекты, как последовательность операторов языка программирования, совокупность данных, схема счета и др.

Существенные изменения претерпели также принципы организации системного обеспечения ППП. В достаточно развитых пакетах второго поколения уже можно выделить элементы системного обеспечения, характерные для современных пакетов: монитор, трансляторы с входных языков, специализированные банки данных, средства описания модели предметной области и планирования вычислений и др.

Третье поколение

Третий этап развития ППП характеризуется появлением самостоятельных входных языков, ориентированных на пользователей-непрограммистов. Особое внимание в таких ППП уделяется системным компонентам, обеспечивающим простоту и удобство. Это достигается главным образом за счет специализации входных языков и включения в состав пакета средств автоматизированного планирования вычислений.

Четвертое поколение

Четвертый этап характеризуется созданием ППП, эксплуатируемых в интерактивном режиме работы. Основным преимуществом диалогового взаимодействия с ЭВМ является возможность активной обратной связи с пользователем в процессе постановки задачи, ее решения и анализа полученных результатов. Появление и интенсивное развитие различных форм диалогового общения обусловлено прежде всего прогрессом в области технических средств (графическая подсистема ЭВМ и средства мультимедиа, сетевые средства). Развитие аппаратного обеспечения повлекло за собой создание разнообразных программных средств поддержки диалогового режима работы (диалоговые операционные системы, диалоговые пакеты программ различного назначения и т. д.).

Прикладная система состоит из *диалогового монитора* - набора универсальных программ, обеспечивающих ведение диалога и обмен данными, и базы знаний об области. Информация о структуре, целях и форма диалога задает сценарий, в соответствии с которым монитор управляет ходом диалога. Носителями процедурных знаний о предметной области являются прикладные модули, реализующие функции собственной системы. Таким образом, создание прикладной системы сводится к настройке диалогового монитора на конкретный диалог, путем заполнения базы знаний. При этом программировать в традиционном смысле этого слова приходится лишь прикладные модули, знания о диалоге вводятся в систему с помощью набора соответствующих средств - редактора сценариев. Логично требовать, чтобы редактор сценариев также представлял собой диалоговую программу, отвечающую

рассмотренным выше требованиям. Благодаря готовому универсальному монитору программист может сосредоточиться на решении чисто прикладных задач, выделение же знаний о диалоге в сценарий обеспечивает в значительной степени необходимая гибкость программного продукта.

Большое внимание в настоящее время уделяется проблеме создания *«интеллектуальных ППП»*. Такой пакет позволяет конечному пользователю лишь сформулировать свою задачу в содержательных терминах, не указывая алгоритма ее решения. Синтез решения и сборка целевой программы производятся автоматически. При этом детали вычислений скрыты от пользователя, и компьютер становится интеллектуальным партнером человека, способным понимать его задачи. Предметное обеспечение подобного ППП представляет собой некоторую базу знаний, содержащую как процедурные, так и описательные знания. Такой способ решения иногда называют концептуальным программированием, характерными особенностями которого является программирование в терминах предметной области, использование ЭВМ уже на этапе постановки задач, автоматический синтез программ решения задачи, накопление знаний о решаемых задачах в базе знаний.

Краткий обзор некоторых ППП

Для иллюстрации ранее рассмотренных материалов приведем несколько примеров современных пакетов прикладных программ из различных предметных областей. Учитывая, что постоянно появляются новые версии программных продуктов, здесь будут рассматриваться не возможности конкретных версий, а лишь основные структурные компоненты, входящие в состав того или иного пакета.

Autodesk AutoCAD

Основное назначение ППП AutoCAD - создание чертежей и проектной документации. Современные версии этого пакета представляют существенно большие возможности, среди которых построение трехмерных твердотельных моделей, инженерно-технические расчеты и многое другое.

Первые версии системы AutoCAD, разрабатываемой американской фирмой Autodesk, появились еще в начале 80-х годов двадцатого века, и сразу же привлекли к себе внимание своим оригинальным оформлением и удобством для пользователя. Постоянное развитие системы, учет замечаний, интеграция с новыми продуктами других ведущих фирм сделали

AutoCAD мировым лидером на рынке программного обеспечения для автоматизированного проектирования.

Языковые средства

В основе языковых средств ППП AutoCAD - технология Visual LISP, базирующаяся на языке AutoLISP (подмножество языка LISP) и используемая для создания приложений и управления в AutoCAD. Visual LISP представляет полное окружение, включающее:

- Интегрированную среду разработки, облегчающую написание, отладку и сопровождение приложений на AutoLISP
- Доступ к объектам ActiveX и обработчикам событий
- Защиту исходного кода
- Доступ к файловым функциям операционной системы
- Расширенные функции языка LISP для обработки списочных структур данных.

Для разработчиков совместимых приложений в AutoCAD включена поддержка ObjectARX. Это программное окружение представляет объектно-ориентированный интерфейс для приложений на языках C++, C# и VB.NET и обеспечивает прямой доступ к структурам БД, графической подсистеме и встроенным командам пакета.

Кроме того, в AutoCAD имеется поддержка языка Visual Basic for Applications (VBA), что позволяет использовать этот пакет совместно с другими приложениями, в частности, из семейства Microsoft Office.

Предметное обеспечение

К предметному обеспечению пакета в первую очередь относятся функции построения примитивов - различных элементов чертежа. Простые примитивы - это такие объекты как точка, отрезок, круг (окружность) и т.д. К сложным примитивам относятся: полилиния, мультилиния, мультитекст (многострочный текст), размер, выноска, допуск, штриховка, вхождение блока или внешней ссылки, атрибут, растровое изображение. Кроме того, есть пространственные примитивы, видовые экраны и пр. Операции построения *большой части* примитивов могут быть выполнены через пользовательский интерфейс, *все* - через команды языка.

Высокоуровневые средства представлены расширениями и приложениями AutoCAD для конкретных предметных областей. Например в машиностроении используется Autodesk

Mechanical Desktop - предназначенный для сложного трехмерного моделирования, в том числе валов и пружин. Для проектирования деталей из листовых материалов предназначена система Copra Sheet Metal Bender Desktop (разработчик - Data-M Software GmbH). Моделирование динамики работы механизмов может выполняться в системе Dynamic Designer (Mechanical Dynamics). В числе известных архитектурных и строительных приложений можно отметить системы АРКО (АПИО-Центр), СПДС GraphiCS (Consistent Software), ArchiCAD. Для проектирования промышленных объектов может использоваться система PLANT-4D (CEA Technology). Это лишь некоторые из областей использования AutoCAD.

Системное обеспечение

Среди системного обеспечения следует отметить основной формат файлов AutoCAD .dwg, который стал стандартом «де факто» для прочих САПР.

К системному же обеспечению относятся типовые и специализированные библиотеки деталей и шаблонов, использование которых позволяет существенно ускорить процесс проектирования. Здесь же упомянем требования отраслевых и государственных стандартов, которым должны соответствовать чертежи и спецификации.

Конфигурация и настройки различных режимов AutoCAD устанавливаются через т.н. системные переменные. Изменяя их значения можно задавать пути к файлам, точность вычислений, формат вывода и многое другое.

Adobe Flash

Adobe (ранее Macromedia) Flash - это технология и инструментарий разработки интерактивного содержания с большими функциональными возможностями для цифровых, веб- и мобильных платформ. Она позволяет создавать компактные, масштабируемые анимированные приложения (ролики), которые можно использовать как отдельно, так и встраивая в различное окружение (в частности, в веб-страницы). Эти возможности обеспечиваются следующими компонентами технологии: языком Action Script, векторным форматом .swf и видеоформатом .flv, всевозможными flash-плеерами для просмотра и редакторами для создания.

Рассмотрим интегрированную среду Adobe Flash как основное средство создания flash-приложений. При этом отметим, что языковые и системные средства относятся не только к этому пакету, а к технологии в целом.

Язык ActionScript

ActionScript — объектно-ориентированный язык программирования, который добавляет интерактивность, обработку данных и многое другое в содержимое Flash-приложений. Синтаксис ActionScript основан на спецификации ECMAScript (сюда же относятся языки JavaScript и JScript). Библиотека классов ActionScript, написанная на C++, представляет доступ к графическим примитивам, фильтрам, принтерам, геометрическим функциям и пр.

ActionScript как язык появился с выходом 5 версии Adobe (тогда еще Macromedia) Flash, которая стала первой программируемой на ActionScript средой. Первый релиз языка назывался ActionScript 1.0. Flash 6 (MX). В 2004 году Macromedia представила новую версию ActionScript 2.0 вместе с выходом Flash 7 (MX 2004), в которой было введено строгое определение типов, основанное на классах программирование: наследование, интерфейсы и т. д. Также Macromedia была выпущена модификация языка Flash Lite для программирования под мобильные телефоны. ActionScript 2.0 является не более чем надстройкой над ActionScript 1.0, то есть на этапе компиляции ActionScript 2.0 осуществляет некую проверку и превращает классы, методы ActionScript 2.0 в прежние прототипы и функции ActionScript 1.0.

В 2005 году вышел ActionScript 3.0 в среде программирования Adobe Flex, а позже в Adobe Flash 9.

ActionScript 3.0 (текущая версия на момент подготовки этого материала) представляет, по сравнению с ActionScript 2.0 качественное изменение, он использует новую виртуальную машину AVM 2.0 и дает взамен прежнего формального синтаксиса классов настоящее классовое (class-based) Объектно-ориентированное программирование. ActionScript 3.0 существенно производительней предыдущих версий и по скорости приблизился к таким языкам программирования, как Java и C++.

С помощью ActionScript можно создавать интерактивные мультимедиа-приложения, игры, веб-сайты и многое другое.

Системное обеспечение

ActionScript исполняется виртуальной машиной (ActionScript Virtual Machine), которая является составной частью Flash Player. ActionScript компилируется в байткод, который включается в SWF-файл.

SWF-файлы исполняются Flash Player-ом. Flash Player существует в виде плагина к веб-браузеру, а также как самостоятельное исполняемое приложение. Во втором случае возможно создание исполняемых exe-файлов, когда swf-файл включается во Flash Player.

Для создания и просмотра видеофайлов в формате flv используются программные кодеки, поддерживающие этот формат.

Прикладное обеспечение

К прикладному обеспечению в рамках технологии Flash относятся средства создания роликов в форматах .swf, .flv и .exe. Основным инструментом является среда Adode Flash, включающая различные средства для создания и редактирования мультимедийного содержания, в т.ч. видео- и аудиофайлов, интегрированную среду разработки на ActionScript и множество дополнительных функций упрощения процесса создания роликов.

Пакет MatLab

MatLab (сокращение от англ. «Matrix Laboratory») — пакет прикладных программ для решения задач технических вычислений, и язык программирования, используемый в этом пакете. По данным фирмы-разработчика, более 1000000 инженерных и научных работников используют этот пакет, который работает на большинстве современных операционных систем, включая GNU/Linux, Mac OS, Solaris и Microsoft Windows.

Язык MatLab

MATLAB как язык программирования был разработан Кливом Моулером (англ. Cleve Moler) в конце 1970-х годов. Целью разработки служила задача использования программных математических библиотек Linpack и EISPACK без необходимости изучения языка Фортран. Акцент был сделан на матричные алгоритмы.

Программы, написанные на MATLAB, бывают двух типов — функции и скрипты. Функции имеют входные и выходные аргументы, а также собственное рабочее пространство для хранения промежуточных результатов вычислений и переменных. Скрипты же используют общее рабочее пространство. Как скрипты, так и функции не компилируются в машинный код, а сохраняются в виде текстовых файлов. Существует также возможность сохранять так называемые pre-parsed программы — функции и скрипты, приведенные в вид, удобный для машинного исполнения и, как следствие, более быстрые по сравнению с обычными.

Системное обеспечение

Язык MATLAB является высокоуровневым интерпретируемым языком программирования, включающим основанные на матрицах структуры данных, широкий спектр функций, интегрированную среду разработки, объектно-ориентированные возможности и интерфейсы к программам, написанным на других языках программирования. Имеются интерфейсы для получения доступа к внешним данным, клиентам и серверам, общающимся через технологии Component Object Model (COM) или Dynamic Data Exchange (DDE), а также периферийным устройствам, которые взаимодействуют напрямую с MATLAB. Многие из этих возможностей известны под названием MATLAB API.

Встроенная среда разработки позволяет создавать графические интерфейсы пользователя с различными элементами управления, такими как кнопки, поля ввода и другими. С помощью компонента MATLAB Compiler эти графические интерфейсы могут быть преобразованы в самостоятельные приложения.

Для MATLAB имеется возможность создавать специальные наборы инструментов (англ. toolbox), расширяющие его функциональность. Наборы инструментов представляют собой коллекции функций, написанных на языке MATLAB для решения определенного класса задач.

Прикладное обеспечение

MATLAB предоставляет удобные средства для разработки алгоритмов, включая высокоуровневые с использованием концепций объектно-ориентированного программирования. В нем имеются все необходимые средства интегрированной среды разработки, включая отладчик и профайлер.

MATLAB предоставляет пользователю большое количество (несколько сотен) функций для анализа данных, покрывающие практически все области математики, в частности:

- Матрицы и линейная алгебра — алгебра матриц, линейные уравнения, собственные значения и вектора, сингулярности, факторизация матриц и другие.
- Многочлены и интерполяция — корни многочленов, операции над многочленами и их дифференцирование, интерполяция и экстраполяция кривых и другие.
- Математическая статистика и анализ данных — статистические функции, статистическая регрессия, цифровая фильтрация, быстрое преобразование Фурье и другие.
- Обработка данных — набор специальных функций, включая построение графиков, оптимизацию, поиск нулей, численное интегрирование (в квадратурах) и другие.

- Дифференциальные уравнения — решение дифференциальных и дифференциально-алгебраических уравнений, дифференциальных уравнений с запаздыванием, уравнений с ограничениями, уравнений в частных производных и другие.
- Разреженные матрицы — специальный класс данных пакета MATLAB, использующийся в специализированных приложениях.

В составе пакета имеется большое количество функций для построения графиков, в том числе трехмерных, визуального анализа данных и создания анимированных роликов, функции для создания алгоритмов для микроконтроллеров и других приложений.

ЧАСТЬ II. ППП MSOFFICE

ТЕМА 2.1 СТРУКТУРА И СОСТАВ MS OFFICE. ОСНОВНЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Структура MS Office и назначение компонентов

ППП Microsoft Office - это совокупность программных средств автоматизации офисной деятельности. В состав пакета входит множество приложений, каждое из которых предназначено для выполнения определенных функций и может быть использовано автономно и независимо от остальных. Весь набор офисных приложений можно разделить на *основные* и *дополнительные*.

Основные компоненты Microsoft Office

Список и назначение основных компонентов, входящих в состав Microsoft Office приведен в таб. 1.

Таблица 1. Основные компоненты Microsoft Office

Название приложения	Функциональное назначение приложения
Microsoft Word	Текстовый процессор
Microsoft Excel	Табличный процессор
Microsoft PowerPoint	Система подготовки презентаций
Outlook	Система управления персональной информацией
Microsoft Access	Система управления базами данных
Microsoft Binder	Система управления подшивками

Microsoft FrontPage	Система управления Web-узлами
Microsoft PhotoDraw	Графический редактор
Microsoft Publisher	Настольная издательская система
Microsoft Project	Система управления проектами
Microsoft Team Manager	Система управления персоналом

Дополнительные компоненты MS Office

Кроме основных компонентов, в семейство Microsoft Office входит большое количество вспомогательных приложений, которые устанавливаются (или не устанавливаются) вместе с основными. Ими можно воспользоваться из основных приложений или вызвать независимо. В таб. 2 перечислены некоторые из вспомогательных приложений.

Таблица 2. Некоторые вспомогательные приложения Microsoft Office

Название приложения	Функциональное назначение приложения
Microsoft Query	Интерпретатор запросов к внешним базам данных
Microsoft Organization Chart	Программа рисования блок-схем
Microsoft WordArt	Программа создания фигурных текстов
Microsoft Equation	Редактор математических формул
Microsoft Map	Программа отображения данных на географических картах
Microsoft Graph	Программа построения диаграмм
Microsoft Photo Editor	Графический редактор
Microsoft Draw	Средство рисования
Microsoft Find Fast	Служба индексации документов
Microsoft Extended Finder	Средство поиска документов в папках файловой системы и электронной почты
Microsoft Script Editor	Редактор сценариев
Microsoft ClipArt	Коллекция картинок и клипов
Панель Microsoft Office	Средство быстрого доступа к приложениям Office

Кроме основных и вспомогательных приложений, могут быть установлены и использованы различные расширения (надстройки). Их можно условно разделить на три группы:

1. *Самостоятельные приложения*, разработанные фирмой Microsoft, которые являются компонентами семейства Microsoft Office, но формально не входят в состав пакета. Примерами являются приложения Microsoft Project и Microsoft Team Manager.
2. *Надстройки* над компонентами Microsoft Office, разработанные фирмой Microsoft и представляющие собой дополнительные функции. Как правило, надстройки оформляются не в виде готовых к выполнению программ, а в виде документов специального типа: шаблонов, рабочих книг, библиотек динамической компоновки (DLL) и т.п.
3. *Приложения третьих фирм*, разработанные для пользователей Microsoft Office. В этот класс попадают как продукты сторонних фирм, так и собственные разработки пользователей. Сюда можно отнести средства распознавания текстов (OCR), автоматического перевода текста, средства управления большими массивами документов (перечисленные задачи не реализованы или слабо развиты в самом пакете MS Office).

Приведенный перечень основных компонентов носит условный характер, поскольку состав пакета зависит от следующих факторов:

1. *Устанавливаемый комплект (или редакция) пакета*. Пакет выпускается в нескольких редакциях, и состав приложений в разных редакциях различен.
2. *Источник установки*. Установка может быть выполнена с компакт-диска или с сетевого сервера. Наборы файлов, которые устанавливаются на компьютер, существенно различаются.
3. *Операционная система*. Microsoft Office может работать под управлением различных ОС: MS Windows и Mac OS. Эти операционные системы могут иметь разные версии и модификации, что также влияет на состав устанавливаемых компонентов.

4. *Наличие на компьютере в момент установки предшествующих версий.* Некоторые компоненты старых версий автоматически включаются в состав обновляемой версии Microsoft Office (если они уже установлены на компьютере).
5. *Параметры, заданные при установке.* В случае так называемой выборочной (т.е. по выбору пользователя) установки, можно указать несколько десятков независимых параметров, влияющих на состав пакета.

Несмотря на большое число различных приложений в составе пакета, все они в совокупности образуют единое целое. Для каждого из приложений MS Office характерно наличие следующих отличительных признаков:

1. совместимость по данным;
2. унифицированный интерфейс;
3. единые средства программирования.

Документы Microsoft Office

Единица данных самого верхнего уровня структуризации в Microsoft Office называется **документом**.

Документы классифицируются по типам в зависимости от того, какого сорта информация в них хранится. Как правило, документы разных типов обрабатываются разными приложениями Microsoft Office. Основные типы документов, с которыми работают программы Microsoft Office, перечислены в таб. 3.

Таблица 3. Основные типы документов Microsoft Office

Название	Расширение	Приложение	Краткое описание
Документ	.doc	Word	Основной тип документов Word. Содержит форматированный текст, т.е. текст с дополнительной информацией о шрифтах, отступах, интервалах и т.п., а также рисунки, таблицы и другие элементы
Рабочая книга	.xls	Excel	Основной тип документов Excel. Содержит данные различных типов: формулы, диаграммы и макросы
База данных	.mdb	Access	Основной тип документов Access. Содержит как собственно базу данных, то есть совокупность таблиц, так и соответствующие запросы, макросы, модули, формы и отчеты

Презентация	.ppt	PowerPoint	Основной тип документов PowerPoint. Содержит презентацию, состоящую из набора слайдов, заметок выступающего, раздаточных материалов и другой информации
Публикация	.pub	Publisher	Основной тип документов Publisher. Как и Word, содержит форматированный текст, рисунки, таблицы и т.п.
План проекта	.mpp	Project	Основной тип документов Project. Содержит календарный план проекта, описание задач, ресурсов и их взаимосвязи

Исходя из вышесказанного, можно сделать следующий вывод: входящие в состав пакета MS Office приложения способны тесно взаимодействовать при решении прикладных задач; они создают единую информационную среду и позволяют обмениваться объектами. Документы Microsoft Office являются частными примерами объектов. Поэтому Microsoft Office является *документно-ориентированным пакетом* (средой).

Программная среда

Основным средством разработки приложений в MS Office является комплексное решение на основе языка Visual Basic, а именно - Visual Basic for Application (VBA). Эта технология включает макрорекордер, интерпретатор Visual Basic, интегрированную среду разработки с встроенным отладчиком, библиотеки времени выполнения (runtime library) и библиотеки типов, представляющие объекты пакета. Эти средства позволяют расширять функциональность пакета и адаптировать его к решению специализированных задач.

Интерфейс MS Office

Приложения Microsoft Office имеют унифицированный интерфейс, суть которого заключается в следующем: сходные функции имеют одинаковое обозначение (название команды или значок на кнопке), а несходные функции имеют различные обозначения.

В большей степени унификация коснулась интерфейсов таких приложений, как Microsoft Word, Microsoft Excel и Microsoft PowerPoint.

Одним из достоинств пакета Microsoft Office является последовательное использование графического интерфейса пользователя (Graphical User Interface, GUI), представляемого операционной системой и различных элементов управления. Как

правило, отдельные элементы группируются в более крупные конструкции, такие как окна, панели инструментов, меню. Рассмотрим характеристику каждой из этих групп.

Оконный интерфейс

Оконный интерфейс - такой способ организации пользовательского интерфейса программы, когда каждая интегральная часть располагается в *окне* — собственном субэкранном пространстве, находящемся в произвольном месте «над» основным экраном. Несколько окон одновременно располагающихся на экране могут перекрываться, находясь

«выше» или «ниже» друг относительно друг

В MS Office использует окна четырех типов:

- окно приложения;
- окно документа; • диалоговое окно;
- форма.

Панели инструментов

Панели инструментов - это элементы пользовательского интерфейса, на которых могут располагаются такие элементы управления, как кнопки быстрого вызова и раскрывающиеся списки. Панели инструментов разных приложений могут содержать кнопки, сходные по функциям и внешнему виду, что упрощает освоение интерфейса Microsoft Office.

Панели инструментов могут быть:

- пристыкованными вдоль границы окна приложения;
- плавающими, т.е. находится в любой части окна приложения;
- представленными в отдельных окнах; в этом случае форму и размеры панели инструментов можно менять произвольно.

Меню

Меню представляет доступ к иерархическим спискам доступных команд. Результатом выбора команды из меню может быть:

- непосредственное выполнение некоторого действия;
- раскрытие еще одного меню;

- раскрытие диалогового окна или формы.

Меню интерфейса Microsoft Office, кроме строки меню любого приложения, можно разделить (по способу перехода к ним) на раскрывающиеся и контекстные (или всплывающие).

Элементы управления

Элементы управления - это объекты оконного интерфейса, реализующие типовые операции с интерфейсом: щелчок мышью, выбор из списка, выбор вариантов, прокрутка и т.п. К элементам управления относятся следующие: кнопки, текстовые поля (или поля ввода), флажки, переключатели, списки и раскрывающиеся списки, полосы прокрутки, палитры, счетчики и прочие, специфичные для некоторых приложений или условий.

ТЕМА 2.2 ВВЕДЕНИЕ В ОФИСНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Офисное программирование — это процесс разработки приложений, предназначенных для автоматизации офисной деятельности с использованием специализированных пакетов (MS Office, OpenOffice.org или подобных).

Офисное программирование имеет ряд особенностей, отличающих его от программирования в общем смысле:

- цели разработки;
- область применения;
- макроязык;
- среда разработки;
- поддержка объектно-ориентированного программирования.

Рассмотрим эти особенности на примере MS Office.

Цели разработки

В офисной среде *программный проект неразрывно связан с документом*, хранится как часть документа и не может существовать независимо от него. *Документ, а не программа, является целью разработки.*

Стандартные возможности среды по работе с документами велики. Однако возможность изменить типовой документ, снабдив его дополнительными функциями – это одна из важнейших задач офисного программирования. Для ее решения офисная среда представляет совокупность библиотек классов, которые составляют каркас (Framework)

текстовых документов, электронных таблиц, презентаций, баз данных и приложений на основе этих документов. Всякий раз, когда создается новый документ, его каркас составляют объекты библиотек, заданные по умолчанию. Этот каркас можно существенно изменить, добавив в документ новые свойства. Расширение каркаса не требует от программиста значительных усилий – достаточно включить в него необходимые библиотеки классов.

Область применения

Область применения офисного программирования широка – от настройки отдельных документов до решения задач автоматизации офисной деятельности масштаба предприятия, в т.ч. ориентированных на совместную работу в глобальной сети.

Visual Basic for Application

Visual Basic для приложений (Visual Basic for Application, VBA) – это инструмент разработки приложений, который позволяет создавать программные продукты, решающие практически все задачи, встречающиеся в среде Windows. Эти продукты можно использовать, например, для оформления документов (подготовки текстов) или анализа данных таблиц (электронных таблиц). VBA – уникальное приложение, поскольку оно встраивается в другое приложение и расширяет его функциональные возможности.

Visual Basic for Application (VBA) - стандартный макроязык пакета Microsoft Office, предназначенный для расширения функциональных возможностей приложения в котором используется.

С помощью VBA можно:

- создать собственное диалоговое окно и придать ему требуемый внешний вид;
- создать макросы, расширяющие функциональные возможности приложения, в которое встроен VBA;
- изменить меню приложения Microsoft Office;
- управлять другим приложением Microsoft Office или принадлежащими ему данными;
- объединить данные из нескольких приложений Microsoft Office в одном документе;
- автоматически создавать или изменять страницы Web, совместно используя приложения Microsoft Office и VBA.

Для разработчика доступны следующие инструменты и средства, которые используются при создании проекта VBA:

- отладка приложений без предварительной компиляции;
- средства Win32 API;
- SQL и объекты доступа к данным для управления данными и извлечения их из внешних источников данных, таких как Microsoft SQL Server;
- построение и проверка элементов интерфейса непосредственно в среде разработки VBA (Integrated Development Environment, IDE);
- связывание программ и процедур с событиями, которые возникают в приложениях VBA.

Среда разработки

Среда приложений Office ориентирована в первую очередь на пользователей, а не на программистов и в ней можно создавать документы без всякого программирования. Поэтому программист обычно начинает работать с документами не на пустом месте, а с их заготовками, созданными пользователями, т.е. и сам программист может выступать в роли пользователя. Средства совместной работы над документами Office обеспечивают одновременную работу программистов и пользователей.

Среда MS Office предлагает два способа создания программ, отличающихся подходом к процессу: использование макрорекордера и ручное кодирование (на языке VBA). Эти подходы ориентированы на разные категории: непосредственно пользователей и программистов соответственно.

Макрорекордер (MacroRecorder) – это программный инструмент, записывающий действия пользователя при работе с документами и приложениями, с сохранением записи в виде макроса -исходного кода на языке VBA. При вызове сохраненного макроса воспроизводится вся сохраненная последовательность действий.

Макрорекордер представляет возможность создания программного проекта или, по крайней мере, его отдельных компонентов автоматически, без программирования. Для записи и воспроизведения макроса не требуется специальных знаний, поэтому пользователь может самостоятельно создавать программы (макросы), в общем случае даже не представляя себе, как они работают.

Для программиста макрорекордер полезен тем, что позволяет создавать фрагменты программы автоматически, тем самым увеличивая скорость разработки и уменьшая время отладки.

Интегрированная среда разработки на VBA (Visual Basic Environment, VBA) - встроенное в MS Office средство для написания, тестирования и отладки приложений на VBA. Среда VBA представляет все возможности для создания законченных офисных приложений, включая средства визуального проектирования пользовательского интерфейса. VBA ориентирована на использование программистами для разработки офисных приложений (это отнюдь не означает, что пользователи не могут применять VBA).

Поддержка ООП

Разработка приложений для MS Office тесно связана с парадигмой объектно-ориентированного программирования. Все документы (более того, сами компоненты пакета) в MS Office - суть объекты, наделенные собственными наборами свойств (характеристик объекта), методов (подпрограмм управления свойствами) и событий (подпрограмм, обрабатывающих изменения состояния объекта в результате некоторых действий). Соответственно, для обеспечения более полной интеграции с пакетом, входной язык (VBA) также поддерживает ООП.

Все объекты приложения MS Office образуют иерархическую структуру, которая определяет связь между ними и способ доступа. Такая структура называется объектной моделью (object model). За рамки объектной модели выходят, но также могут использоваться в офисных приложениях, внешние объекты, поддерживающие технологии DDE, OLE/ActiveX и ряд других.

В объектно-ориентированную концепцию удачно вписывается технология *визуального программирования*. Все отображаемые элементы графического интерфейса, такие как формы, элементы управления, меню и панели инструментов являются объектами, наделенными набором свойств и методов и способными реагировать на события (например, щелчки мыши, нажатия клавиш и т.п.). При визуальном подходе не требуется программного задания (хотя это и возможно) их основных свойств (например, ширина или высота, цвет фона и т.п.). Эти свойства можно задать при помощи мыши (например, ширину и высоту формы путем операции "перетаскивания" маркеров) или

установить их в окне свойств (название формы, цвет фона формы и т. д.). Таким образом, визуальное программирование делает проектирование интерфейса программы более наглядным и быстрым. При этом сохраняется возможность управлять всеми объектами и программно.

Преимущества офисного программирования

Преимущества, которые получает конечный пользователь, использующий программируемые офисные документы:

- Пользователь получает документы, обладающие новыми функциями и способные решать задачи, характерные для проблемной области пользователя.
- Пользователь находится в единой офисной среде независимо от того, с каким документом он работает в данный момент и какой программист разрабатывал этот документ.
- Большинство доступных при работе с документами функций являются общими для всех документов, поскольку их предоставляет сама офисная среда. Единый стиль интерфейса разных документов облегчает работу с ними.
- Пользователь сам, не будучи программистом, способен создавать простые виды программируемых офисных документов, постепенно совершенствуясь в этой деятельности.

Преимущества, которые получает программист, работающий в Office:

- В распоряжении программиста находится мощная интегрированная среда. Для него эта среда представлена в виде совокупности хорошо организованных объектов, доступных в языке программирования и по принципу работы ничем не отличающихся от встроенных объектов языка или объектов, создаваемых самим программистом.
- Большинство повседневных задач становятся для него простыми, – чтобы их решить, зачастую достаточно стандартных средств.
- Там, где стандартных средств не хватает, где у документа должны появиться новые функциональные возможности, где необходимо создать документ по заказу, вступает в силу язык программирования – VBA, существенная особенность которого – возможность работы с объектами любого из приложений Office.

- Офисное программирование позволяет применять на практике идеи компонентного программирования. Компонентный подход предполагает взаимодействие компонентов, создаваемых в разных программных средах, на разных языках, на разных платформах и находящихся на разных машинах. Работа с компонентами (DLL, ActiveX, AddIns, ComAddIns) является неотъемлемой частью офисного программирования.

ТЕМА 2.3 МАКРОСЫ. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МАКРОРЕКОРДЕРА

Макросы

Независимо от используемых операционной системы и программных приложений MS Office пользователь часто выполняет одни и те же последовательности команд для многих рутинных задач. Вместо повторения последовательности команд каждый раз, когда необходимо выполнить какую-либо задачу, можно создать макрос (масго), который вместо пользователя будет выполнять эту последовательность. Термин масго произошел от греческого слова, означающего расширенный или растянутый.

Макрос – это программа (в контексте офисного программирования - созданная автоматически), состоящая из списка команд, которые должны быть выполнены приложением.

Основными преимуществами использования макросов являются:

- повышение точности и скорости работы, поскольку компьютеры лучше приспособлены для выполнения повторяющихся задач, чем человек;
- при выполнении макросов обычно нет необходимости в присутствии человека-оператора; в случае, если макрос очень длинный и выполняет операции, требующие значительного времени (например, поиск в базе данных и сортировка), пользователь может переключиться на другое приложение.

Макрос служит для объединения нескольких различных действий в одну процедуру, которую можно легко вызвать. Этот список команд состоит в основном из макрокоманд, которые тесно связаны с приложением, в котором создается макрос – т.е. с командами Word, Excel или других приложений Microsoft Office.

Можно выделить *три основные разновидности макросов*:

1. *Командные макросы* – это наиболее распространенные макросы, обычно состоящие из операторов, эквивалентным тем или иным командам меню или параметрам диалоговых окон. Основным предназначением такого макроса является выполнение действий, аналогичных командам меню – т.е. изменение окружения и основных объектов приложения.
2. *Пользовательские функции* – работают аналогично встроенным функциям приложения. Отличие этих функций от командных макросов состоит в том, что они используют значения передаваемых им аргументов, производят некоторые вычисления и возвращают результат в точку вызова, но не изменяют среды приложения.
3. *Макрофункции* – представляют сочетание командных макросов и пользовательских функций. Они могут использовать аргументы и возвращать результат, подобно пользовательским функциям, а также могут изменять среду приложения, как и командные макросы. Чаще всего эти макросы вызываются из других макросов, и активно используются для модульного программирования.

Поддержка макросов позволяет порой обойтись вообще безо всякого программирования: достаточно включить автоматическую запись выполняемых пользователем действий и в результате получить готовый макрос, а затем назначить ему кнопку на панели инструментов или новую команду меню, которые будут использоваться для вызова. Простые макросы удастся создавать, не написав вручную ни одной строки программного кода.

Для разработки же серьезных приложений приходится программировать.

Таким образом, различают 2 способа разработки макроса:

- автоматическое создание, с использованием макрорекордера;
- написание макроса "с нуля", используя язык программирования VBA.

Отметим, что возможен и комбинированный подход: фрагменты будущей программы записываются автоматически, а затем они корректируются и дополняются "рукописным" кодом.

Для записи макросов из приложений Microsoft Office используется **макрорекордер**. Это встроенный инструмент, который фиксирует все действия пользователя, включая ошибки и неправильные запуски. При выполнении макроса интерпретируется каждая

записанная макрорекордером команда точно в такой последовательности, в которой пользователь выполнял их во время записи.

Для **записи макроса** в приложении Microsoft Office можно использовать меню "Сервис/Макрос/Начать запись" или выбрать кнопку "Записать макрос" на панели инструментов Visual Basic. До начала записи нужно указать имя макроса и определить, где он будет храниться и как будет доступен. Затем выполнить действия, которые требуется сохранить в макросе. Для завершения записи нужно на панели инструментов "Остановка записи" щелкнуть кнопку "Остановить запись".

Для **выполнения макроса** необходимо:

1. Установить курсор в место вставки выполнения макроса.
2. Выбрать пункт меню "Сервис/Макрос/Макросы".
3. В появившемся диалоговом окне "Макрос" выбрать имя нужного макроса и выбрать "Выполнить".

Чтобы **просмотреть код** записанного макроса, надо выбрать меню "Сервис/Макрос/Макросы". В появившемся диалоговом окне выбрать имя нужного макроса и щелкнуть кнопку "Изменить". Исходный код указанного макроса будет загружен в окно редактора Visual Basic.

Структура записанного макроса

Макросы, создаваемые макрорекордером MS Office, сохраняются в специальной части файла данных, называемой *модулем*. Модуль VBA содержит исходный код программы на языке VBA. Фактически макрос является подпрограммой (а точнее, процедурой) VBA. Записанный макрос имеет строго определенную структуру. Ниже представлен исходный код простого макроса, созданного в Microsoft Word.

Листинг 1. Пример макроса

```
Sub Hello()  
' Макрос изменяет размер, начертание шрифта, выравнивание абзаца и  
' выводит надпись в активный документ MS Word  
,  
  
Selection.Font.Size = 24  
Selection.Font.Bold = wdToggle  
Selection.ParagraphFormat.Alignment = wdAlignParagraphCenter
```

```
Selection.TypeText Text:="Hello, World!"  
End Sub
```

В общем виде структуру кода макроса можно представить следующим образом²:

```
Sub имяМакроса ()  
' текст комментария  
    Оператор1  
    Оператор2 ...  
    ОператорN  
End Sub
```

Каждый макрос VBA начинается с ключевого слова Sub, за которым следует имя макроса. Строку, содержащую ключевое слово Sub и имя макроса, называют *строкой объявления (declaration)* макроса. За именем макроса всегда следуют пустые круглые скобки (т.к. макрос является процедурой VBA без параметров).

За строкой объявления макроса следуют строки комментариев. *Комментарий (comment)* – это строка в макросе VBA, которая не содержит инструкций, являющихся частью этого макроса. Каждая строка комментария начинается с символа апострофа ('). Комментарии содержат имя макроса и текст, который был введен пользователем в текстовое поле "Описание" ("Description") диалогового окна "Запись макроса" ("Record Macro") в момент записи этого макроса.

Сразу за объявлением макроса следует *тело макроса (body)*. Каждая строка в теле макроса состоит из одного или более операторов VBA. *Оператор VBA (statement)* – это последовательность ключевых слов и других символов, которые вместе составляют одну полную инструкцию для VBA. Макрос VBA состоит из одного или нескольких операторов.

Конец макроса выделяется ключевой строкой End Sub, завершающей тело макроса.

ТЕМА 2.4 СРЕДА РАЗРАБОТКИ VBA

Visual Basic for Application (VBA) – это система программирования, которая используется как единое средство программирования во всех приложениях Microsoft

² Локализованные версии пакета MS Office позволяют использовать в макросах символы национальных алфавитов (например, в идентификаторах). Однако не следует пользоваться этой сомнительной возможностью во избежание сложностей с отладкой и портированием приложений на VBA.

Office. Всякая система программирования включает в себя, по меньшей мере, три составные части:

1. Язык (или языки) программирования.
2. Среду разработки, т.е. набор инструментов для написания программ, редактирования, отладки и т.п.
3. Библиотеку (или библиотеки) стандартных программ, т.е. набор готовых программ (процедур, функций, объектов и т.д.), которые можно использовать как готовые элементы при построении новых программ.

Для создания офисных приложений в MS Office имеется *интегрированная среда разработки* (Integrated Development Environment, *IDE*) с унифицированным интерфейсом. VBA IDE – это набор инструментов разработки программного обеспечения, таких как редактор Visual Basic (Visual Basic Editor, VBA), средства отладки, средства управления проектом и т.д.

Вызов VBA IDE из любого приложения выполняется через комбинацию клавиш Alt+F11 или меню "Сервис/Макрос/Редактор Visual Basic".

Структура VBA

VBA – это стандартное интерфейсное окно, содержащее меню, панели инструментов, другие окна и элементы, которые применяются при создании проектов VBA. Общий вид окна редактора Visual Basic представлен на рис. 3.

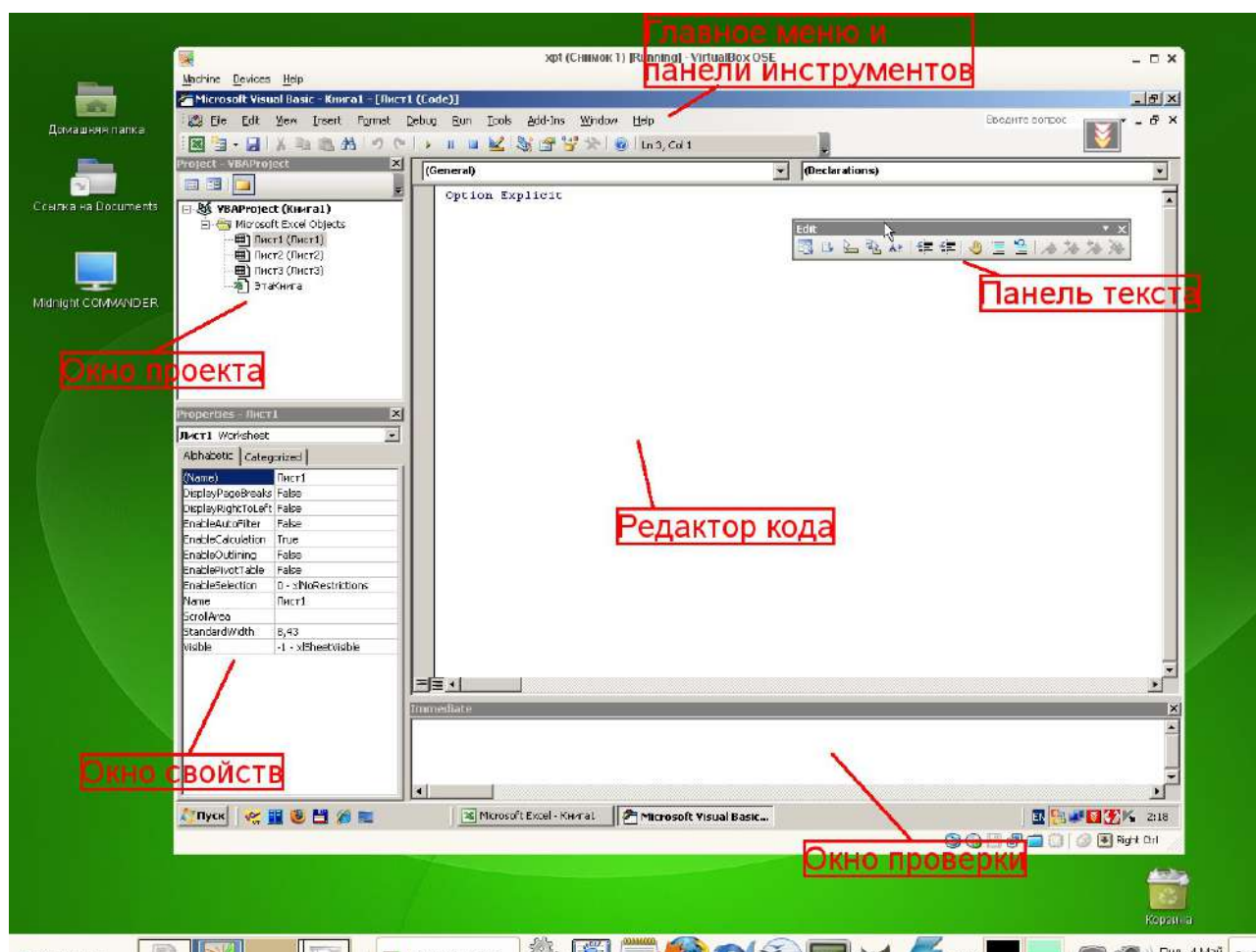


Рисунок 3. Окно редактора Visual Basic

Основными (открываемыми по умолчанию) являются три окна: окно проекта, окно свойств и окно редактирования кода. Краткое описание этих и некоторых других компонентов VBA приведено в таб. 4. Все они доступны через команды, представленные в меню "Вид".

Таблица 4. Назначение компонентов VBA

Наименование окна	Описание
Project (Проект)	Предназначено для отображения всех открытых проектов, а также их составляющих: модулей, форм и ссылок на другие проекты
Toolbox (Панель элементов)	Содержит элементы управления для конструирования форм
UserForm	Используется для создания форм путем размещения на них элементов

Наименование окна	Описание
	управления
Code (Программа)	Предназначено для просмотра, написания и редактирования программы на языке VBA. Поскольку среда разработки является многооконной, то для каждого модуля проекта можно открыть отдельное окно
Properties (Свойства)	Отображает свойства выделенных объектов. В этом окне можно задавать новые значения свойств формы и элементов управления
Object Browser (Просмотр объектов)	Отображает классы, свойства, методы, события и константы различных библиотек объектов. Используется для быстрого получения информации об объектах
Immediate (Проверка)	Предназначено для быстрого выполнения вводимых в него инструкций. В данном окне также выводятся результаты выполнения вводимых инструкций
Locals (Локальные переменные)	Автоматически показывает все переменные данной процедуры
Watches (Контрольные значения)	Применяется при отладке программ для просмотра значений выражений

Характеристики компонентов VBA

Окно проекта (Project)

Проект – это совокупность всех программных модулей, связанных с документом Microsoft Office. Окно *Project (Проект)* предназначено для быстрого получения информации о различных составляющих проекта.

Проект может содержать модули следующих видов:

- *Объекты основного приложения.* Проекты VBA выполняются совместно с другими приложениями. Приложение, в котором разрабатывается и выполняется проект VBA, называется основным.
- *Модули форм.* В VBA имеется возможность создавать пользовательские формы, предназначенные для ввода или вывода данных, а также процедуры обработки событий, возникающие в этих формах.

- *Модули кода.* Модульность - один из основных принципов парадигмы структурного программирования. Каждый модуль, как правило, содержит подпрограммы, сходные по назначению. Небольшие модули проще отлаживать и использовать повторно. В частности, в VBA имеются средства импорта/экспорта готового кода.
- *Модули классов.* VBA позволяет создавать и использовать собственные объекты. Описание объектов включается в модули класса. Каждый модуль класса содержит полную информацию об одном типе объекта.

С помощью окна проекта можно добавить или удалить какой-либо объект из проекта. Модули кода добавляются в проект командой "Вставить/Модуль". Формы создаются командой "Вставить/UserForm", а модули класса командой "Вставить/Модуль класса".

Окно проекта можно использовать также для быстрой навигации по формам проекта и программному коду. Для этого необходимо выбрать в контекстном меню соответственно команды "Объект" или "Программа".

Окно свойств (Properties)

Список свойств выделенного объекта выводится в окне Properties (Свойства). Для того чтобы выделить объект, необходимо с помощью окна проекта выбрать форму и перейти в режим конструктора, используя команду "View Object". Свойства объекта можно упорядочить в алфавитном порядке (Alphabetic (По алфавиту)) или по категориям (Categorized (По категориям)), выбрав соответствующую вкладку. Предусмотрена также возможность получения быстрой справки по какому-либо свойству объекта. Для этого достаточно установить курсор на нужное свойство и нажать клавишу F1.

Окно просмотра объектов(Object Browser)

Окно Object Browser (Просмотр объектов) предназначено для просмотра объектов, доступных при создании программы. Точнее, в этом окне отображаются не сами объекты, а структура соответствующего класса объектов. Окно просмотра объектов может использоваться для поиска метода или свойства объекта.

Окно Code (Окно редактирования кода)

Окно Code (Программа) представляет собой текстовый редактор, предназначенный для написания и редактирования кода процедур приложения. Это окно появляется на экране, например, при создании нового модуля. Код внутри модуля организован в виде отдельных разделов для каждого объекта, программируемого в модуле. Переключение между разделами выполняется путем выбора значений из списка "Object" ("Объект"), который находится в левом верхнем углу окна. Каждый раздел может содержать несколько процедур, которые можно выбрать из списка "Procedure" ("Процедура") в правом верхнем углу.

Интеллектуальные возможности редактора кода:

1. При написании кода пользователю предлагается список компонентов, логически завершающих вводимую пользователем инструкцию.
2. На экране автоматически отображаются сведения о процедурах, функциях, свойствах и методах после набора их имени.
3. Автоматически проверяется синтаксис набранной строки кода сразу после нажатия клавиши Enter. В результате проверки выполняется выделение определенных фрагментов текста:
 - красным цветом – синтаксические ошибки; • синим цветом – зарезервированные ключевые слова;
 - зеленым цветом – комментарии.
4. Если курсор расположить на ключевом слове VBA, имени процедуры, функции, свойства или метода и нажать клавишу F1, то на экране появится окно со справочной информацией об этой функции.

Окно редактирования форм (UserForm)

Для создания диалоговых окон, разрабатываемых приложений VBA, используются формы. Редактор форм является одним из основных средств визуального программирования. При добавлении формы в проект (команда "Insert" – "UserForm" ("Вставить" – "UserForm")) на экран выводится незаполненная форма с панелью инструментов Toolbox (Панель элементов).

Используя панель инструментов Toolbox (Панель элементов) из незаполненной формы конструируется требуемое для приложения диалоговое окно. Размеры формы и

размещаемых на ней элементов управления можно изменять. Также окно редактирования форм поддерживает операции буфера обмена. Кроме того, команды меню "Format" ("Формат") автоматизируют и облегчают процесс выравнивания элементов управления как по их взаимному местоположению, так и по размерам.

Окна отладочной информации

Окно Immediate (Проверка) позволяет ввести инструкцию и выполнить ее. При этом инструкция должна быть записана в одну строку, директивы которой будут выполнены после нажатия клавиши Enter. Данное окно можно использовать для быстрой проверки действий, выполняемой той или иной инструкцией. Это позволяет не запускать всю процедуру, что удобно при отладке программ.

Окно Locals (Локальные переменные) автоматически отображает все объявленные переменные текущей процедуры и их значения.

Окно Watches (Контрольные значения) применяется при отладке программ для просмотра значений выражений.



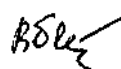
Министерство науки и высшего образования РФ
ФГБОУ ВО
«Уральский государственный горный университет»

ОДОБРЕНО

Методической комиссией
горно-механического факультета

«__» _____ 2018 г.

Председатель комиссии

 проф. В. П. Барановский

Брагин В. Г., Волков Е. Б., Казаков Ю. М.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Учебное пособие

УДК 531
Б 87

Рецензент: *Н. М. Суслов*, д-р техн. наук, заведующий кафедрой ГМК
Уральского государственного горного университета.

Учебное пособие рассмотрено на заседании кафедры технической механики от
«07» июня 2018 г. (протокол № 7) и рекомендовано для издания в УГГУ.

Печатается по решению Учебно-методического совета Уральского государственного горного университета.

Брагин В. Г., Волков Е. Б., Казаков Ю. М.

Б 87 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА: Учебное пособие / Ю. М. Казаков, В. Г. Брагин, Е. Б. Волков. – Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2018. – 250 с.
ISBN 978-5-8019-0460-3

Учебное пособие содержит краткие методические указания, примеры решений задач и упражнения для самостоятельной работы по основным темам курса теоретической механики: статика, кинематика точки и простейшие движения твёрдых тел, сложное движение точки, динамика точки и механической системы. Учебное пособие для студентов всех специальностей очной и заочной форм обучения.

ISBN 978-5-8019-0460-3

©Брагин В. Г., Волков Е. Б.,
Казаков Ю. М., 2018

©Уральский государственный горный
университет, 2018

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. СТАТИКА.....	4
1.1. Основные понятия статики	4
1.2. Система сходящихся сил. Условия равновесия	9
1.3. Произвольная плоская система сил.....	16
1.4. Равновесие систем тел	26
1.5. Произвольная пространственная система сил	34
1.6. Равновесие тел при наличии сил трения.....	44
2. КИНЕМАТИКА ТОЧКИ И ТВЁРДОГО ТЕЛА.....	55
2.1. Криволинейное движение точки	55
2.2. Поступательное движение и вращение твердого тела	62
вокруг неподвижной оси	62
2.3. Скорости точек при плоскопараллельном движении твёрдого тела	73
2.4. Ускорения точек при плоскопараллельном движении твёрдого тела	84
3. СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ	100
3.1. Основные понятия и определения сложного движения точки.....	100
4. ДИНАМИКА ТОЧКИ	114
4.1. Дифференциальные уравнения движения точки	114
4.2. Колебания материальной точки.....	124
4.3. Теорема об изменении кинетической энергии точки	134
5. ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ СИСТЕМЫ.....	146
5.1. Теорема о движении центра масс системы	146
5.2. Теорема об изменении кинетического момента системы	
относительно оси.....	148
5.3. Теорема об изменении кинетической энергии системы	153
5.4. Применение общих теорем динамики системы к описанию	
движений твёрдого тела	162
6. ПРИНЦИПЫ МЕХАНИКИ	177
6.1. Принцип Даламбера для системы	177
6.2. Принцип возможных перемещений	182
6.3. Общее уравнение динамики.....	189
6.4. Уравнения Лагранжа II рода	201
7. ОТВЕТЫ И КРАТКИЕ ПОЯСНЕНИЯ.....	220
7.1. Ответы к упражнениям главы 1	220
7.2. Ответы к упражнениям главы 2	226
7.3. Ответы к упражнениям главы 3	231
7.4. Ответы к упражнениям главы 4	233
7.5. Ответы к упражнениям главы 5	236
7.6. Ответы к упражнениям главы 6	241
СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ	249

1. СТАТИКА

1.1. Основные понятия статики

Статика представляет раздел теоретической механики, в котором освещаются условия равновесия тел под действием систем сил.

Материальной точкой называют простейшую модель материального тела, размерами которого можно пренебречь и которое можно принять за геометрическую точку, имеющую массу, равную массе тела. Совокупность материальных точек называется **системой материальных точек**. Если система материальных точек такова, что движение каждой точки зависит от положения и движения остальных точек системы, то система называется **механической системой материальных точек**. Любое материальное тело представляет собой механическую систему материальных точек. Если точки системы связаны между собой так, что расстояния между любыми двумя точками не изменяются, то система называется **неизменяемой системой**, а тело – **абсолютно твердым телом**.

Силой в механике называют меру механического действия одного материального объекта (например, твердого тела) на другой. Единицей измерения силы в системе СИ является ньютон (Н). Совокупность сил, действующих на механическую систему (в частности, на твёрдое тело), называют **системой сил**.

Если система сил, приложенная к твердому телу, оставляет его в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения, то такая система сил называется **уравновешенной**, или **системой сил, эквивалентной нулю**.

Если одну систему сил, действующих на твердое тело или материальную точку, можно заменить другой системой, не изменяя при этом состояния покоя или движения, в котором находится тело или материальная точка, то такие две системы сил называются **эквивалентными**. Если система сил эквивалентна одной силе, то эта сила называется **равнодействующей** данной системы сил.

Основные виды связей и их реакции

Всякое твердое тело, которое может занимать произвольное положение в пространстве, называется свободным. Если на тело наложены внешние связи, стесняющие (ограничивающие) свободу его перемещений, то тело является несвободным. Сила, с которой данная связь действует на тело, препятствуя его перемещениям, называется **реакцией связи**. Всякое несвободное твердое тело можно рассматривать как свободное, если освободить тело от связей и заменить действие связей их реакциями. **Реакция связи направлена в сторону, противоположную тому направлению, вдоль которого связь препятствует перемещению тела.**

Опора тела на гладкую плоскость (поверхность) без трения. Реакция $\vec{R}$ абсолютно гладкой поверхности приложена в точке касания и направлена перпендикулярно к общей касательной соприкасающихся поверхностей (рис. 1.1, *a*). Такая реакция называется **нормальной реакцией**.

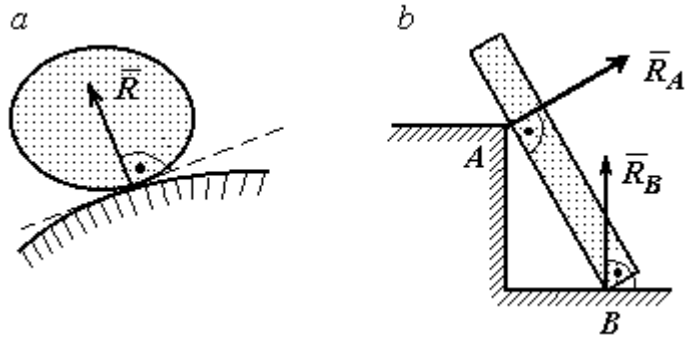


Рис. 1.1. Реакция опоры:

Брус с гладкой поверхностью (рис. 1.1, *b*), опирающийся в точке *B* на гладкий пол и в точке *A* на ребро (точечную опору), имеет реакциями опор $\vec{R}_B$ – реакцию пола и $\vec{R}_A$ – реакцию ребра (точечной опоры). Реакции приложены к брусу и направлены по нормальям к поверхности пола и поверхности бруса.

Цилиндрический шарнир и подвижная опора (каток). Цилиндрический шарнир (на рис. 1.2, *a* обозначен буквой *A*) представляет собой устройство, которое допускает поворот тела в плоскости, перпендикулярной оси шарнира (например, цилиндрическая втулка, надетая на неподвижный цилиндр).

Реакция цилиндрического шарнира $\vec{R}_A$ лежит в плоскости, перпендикулярной оси шарнира. При решении задач неизвестную по величине и направлению реакцию цилиндрического шарнира представляют в виде составляющих, $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, направленных вдоль координатных осей (см. рис. 1.2, *a*). Величина реакции $\vec{R}_A$ определяется по формуле: $R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2}$, где $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$ – составляющие реакции.

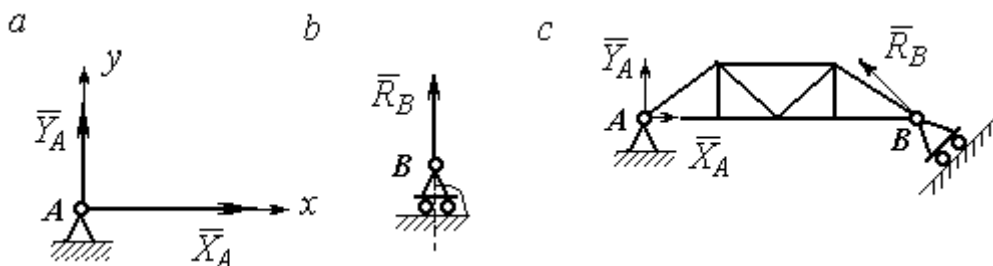


Рис. 1.2. Реакции шарнирных опор:
a – цилиндрический шарнир; *b* – каток; *c* – мостовая конструкция с цилиндрической шарнирной опорой и опорой на каток

Реакция $\vec{R}_B$ опоры на каток (подвижной опоры) (рис. 1.2, *b*) перпендикулярна опорной поверхности.

На рис. 1.2, *c* показаны реакции связей мостовой конструкции с цилиндрической шарнирной опорой и подвижной опорой (катком). Реакция цилиндрического шарнира в точке *A* изображена в виде разложения на взаимно перпендикулярные составляющие $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, реакция $\vec{R}_B$ катка в точке *B* перпендикулярна наклонной плоскости, на которой стоит каток.

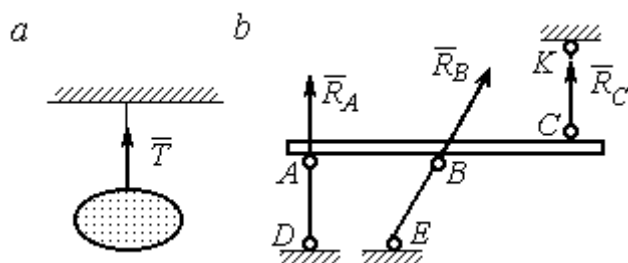


Рис. 1.3. Реакция гибкой нити и невесомого стержня

Гибкая связь и жесткий невесомый стержень. Связь в виде гибкой нерастяжимой нити (каната, троса) препятствует удалению тела от точки подвеса. (рис. 1.3, *a*). Реакция связи $\vec{T}$,

равная натяжению нити, приложена к телу и направлена вдоль нити в сторону противоположную направлению, вдоль которого нить препятствует перемещению тела

Если опорой тела служит невесомый стержень с шарнирами на концах, то реакция прямолинейного стержня приложена к телу и направлена вдоль стержня. Направление реакции стержня противоположно направлению, по которому стержень препятствует перемещению тела.

Реакции невесомых стержней, удерживающих балку, изображённую на рис. 1.3, *b*, направлены исходя из предположения, что балка может перемещаться вниз. При этом стержни *AD* и *BE* сжаты, а стержень *CK* растянут.

Сферический шарнир. Связь в виде сферического шарнира не позволяет перемещать тело в пространстве, но допускает поворот в пространстве вокруг неподвижной точки. Реакция сферического шарнира может иметь любое направление в пространстве. При решении задач реакцию изображают ее составляющими. На рис. 1.4 реакция $\vec{R}_A$ сферического шарнира *A* разложена на составляющие $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Z}_A$ по направлениям координатных осей. Величина реакции сферического шарнира определяется по формуле: $R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2 + Z_A^2}$.

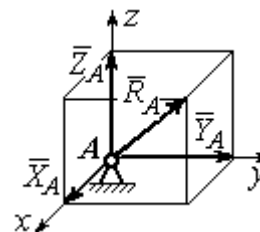


Рис. 1.4. Реакция сферического шарнира

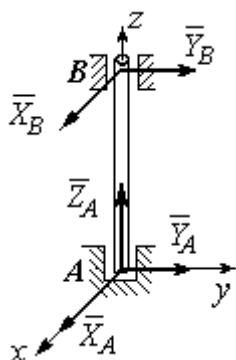


Рис. 1.5. Реакции подшипника и подпятника

Подшипник и подпятник. Подшипник представляет собой цилиндрический шарнир (рис. 1.5, подшипник *B*). Его реакция может иметь любое направление в плоскости, перпендикулярной оси шарнира. При решении задач реакция подшипника раскладывается на две составляющие. Например, на рис. 1.5 реакция $\vec{R}_B$ подшип-

ника B разложена на составляющие $\vec{X}_B, \vec{Y}_B$, параллельные координатным осям.

Величина реакции подшипника определяется по формуле: $R_B = \sqrt{X_B^2 + Y_B^2}$.

Подпятник является цилиндрическим шарниром с упором. В задачах реакция подпятника обычно изображается векторами $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Z}_A$, представляющими разложение силы реакции подпятника по заданным направлениям координатных осей (см. рис. 1.5, подпятник A). Величина реакции подпятника определяется по формуле: $R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2 + Z_A^2}$.

Проекция силы на ось и на плоскость

Проекция силы на ось есть алгебраическая величина, равная произведению модуля силы на косинус угла между силой и положительным направлением оси. Если этот угол острый, проекция положительна, если тупой – отрицательна. Если сила перпендикулярна оси, её проекция на ось равна нулю.

Проекции сил $\vec{F}$, $\vec{Q}$, $\vec{P}$, изображённых на рис. 1.6, a , на ось x :
 $F_x = F \cos \alpha$, $Q_x = Q \cos \alpha_1 = -Q \cos \varphi$, $P_x = P \cos 90^\circ = 0$.

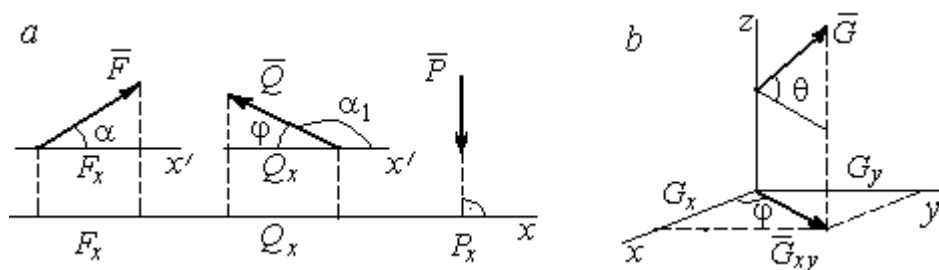


Рис. 1.6. Проекция силы на ось и на плоскость:
 a – проекция силы на ось; b – проекция силы на плоскость

Проекцией силы на плоскость называется вектор, заключённый между проекциями начала и конца силы $\vec{G}$ на эту плоскость.

На рис. 1.6, b вектор $\vec{G}_{xy}$ является проекцией силы $\vec{G}$ на плоскость xy . По величине $G_{xy} = G \cos \theta$, где θ – угол между направлением силы $\vec{G}$ и её проек-

ции $\vec{G}_{xy}$. Проекции силы $\vec{G}$ на оси xyz : $G_x = G_{xy} \cos \varphi = G \cos \theta \cos \varphi$, $G_y = G_{xy} \sin \varphi = G \cos \theta \sin \varphi$, $G_z = G \sin \theta$.

1.2. Система сходящихся сил. Условия равновесия

Для равновесия **пространственной системы сходящихся сил** необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на каждую из трёх осей прямоугольной системы координат были равны нулю:

$$\sum F_{kx} = 0, \sum F_{ky} = 0, \sum F_{kz} = 0,$$

где F_{kx}, F_{ky}, F_{kz} – проекции всех сил на координатные оси.

Для равновесия **плоской системы сходящихся сил** необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на каждую из двух осей прямоугольной системы координат, расположенной в плоскости действия сил, были равны нулю: $\sum F_{kx} = 0, \sum F_{ky} = 0$, где F_{kx}, F_{ky} – проекции всех сил на координатные оси.

Примеры решения задач на равновесие сходящейся системы сил

Задача 1. Каток весом 20 кН удерживается на гладкой наклонной плоскости тросом, который одним концом закреплён на поверхности шара, а другим – на вертикальной стене (рис. 1.7). Угол наклона троса к вертикальной стене $\beta = 120^\circ$. Угол наклона плоскости к горизонту $\alpha = 45^\circ$. Определить силу давления катка на плоскость и натяжение троса.

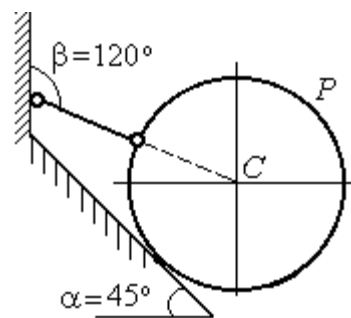


Рис. 1.7. Равновесие шара

Решение

При равновесии на каток действуют сила тяжести $\vec{P}$, реакция троса $\vec{N}$ и реакция опоры $\vec{R}$. Линии действия всех сил находятся в одной плоскости и пересекаются в центре шара. Направления реакций показаны на рис. 1.8.

Условия равновесия плоской сходящейся системы сил:

$$\sum F_{kx} = 0, \sum F_{ky} = 0.$$

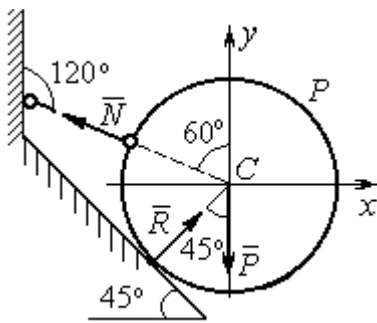


Рис. 1.8. Силы, действующие на каток, при его равновесии

Проведя оси координат, как показано на рис. 1.8, выразим условия равновесия в виде системы уравнений:

$$\sum F_{kx} = -N \cos 30^\circ + R \cos 45^\circ = 0;$$

$$\sum F_{ky} = N \cos 60^\circ + R \cos 45^\circ - P = 0.$$

Подставляя в уравнения исходные данные задачи, найдем: $N = 14,64 \text{ кН}$, $R = 17,93 \text{ кН}$.

Натяжение троса равно модулю его реакции. Сила давления катка на плоскость равна реакции опоры гладкой плоскости, но направлена в противоположную сторону.

Задача 2. Кронштейн состоит из невесомых стержней AC и BC , скрепленных друг с другом и с вертикальной стеной шарнирами, как показано на рис. 1.9. Стержень BC горизонтален, стержень AC составляет с горизонталью угол $\beta = 60^\circ$. К шарниру C прикреплены два троса, удерживающие грузы 1 и 2 весом $G_1 = 10 \text{ кН}$ и $G_2 = 12 \text{ кН}$. Трос, удерживающий груз 1, вертикален, а другой перекинут через блок D так, что угол наклона участка троса CD к вертикали $\alpha = 60^\circ$. Определить реакции стержней BC и AC .

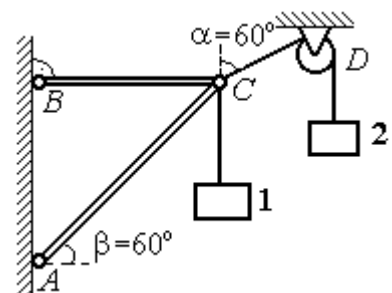


Рис. 1.9. Равновесие кронштейна

Решение

Рассмотрим равновесие узла C , в котором закреплены стержни и тросы. На узел C действуют реакции $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$ тросов, натянутых грузами 1 и 2, и реакции $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$ стержней BC и AC (рис. 1.10). Модули реакций тросов $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$ равны весу грузов: $T_1 = G_1$, $T_2 = G_2$.

Плоская система сил ($\vec{T}_1$, $\vec{T}_2$, $\vec{N}_1$, $\vec{N}_2$) является сходящейся. Условия равновесия: $\sum F_{kx} = 0$, $\sum F_{ky} = 0$. Проведя оси координат xOy , как показано на рис. 1.10, и определяя проекции сил на оси, получим систему уравнений:

$$N_1 + N_2 \cos 60^\circ - T_2 \cos 30^\circ = 0;$$

$$N_2 \cos 30^\circ + T_1 - T_2 \sin 60^\circ = 0.$$

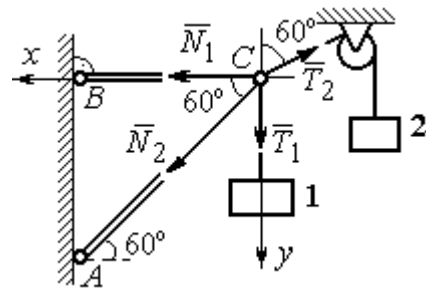


Рис. 1.10. Силы, действующие на узел C при его равновесии

Подставим в уравнения исходные данные задачи. С учётом того, что $T_1 = G_1 = 10$ кН, $T_2 = G_2 = 12$ кН, найдём значения реакций: $N_1 = 12,7$ кН, $N_2 = -4,62$ кН. Отрицательная величина N_2 означает, что вектор $\vec{N}_2$ реакции стержня AC направлен в противоположную сторону.

Задача 3. Груз весом $P = 20$ кН поднимается стержневым краном ABC

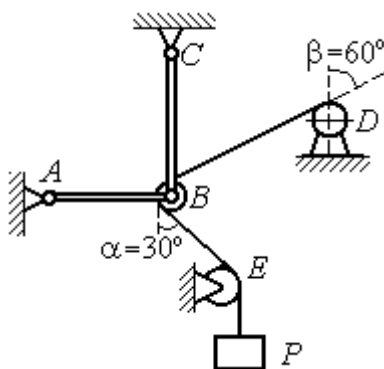


Рис. 1.11. Равновесие стержневой конструкции

посредством каната, перекинутого через блоки B и D (рис. 1.11). Блок B установлен в месте шарнирного соединения невесомых стержней AB и BC , блок D укреплен так, что участок троса DB составляет с вертикалью угол $\beta = 60^\circ$. Стержни AB и BC соединены со стенками шарнирами. Конец троса, несущий груз P , переброшен через блок E и на отрезке BE составляет с вертикалью угол $\alpha = 30^\circ$. Пренебрегая трением в блоке и размерами блока B , определить усилия в стержнях AB и BC при равновесии груза.

Решение

Рассмотрим равновесие блока B вместе с отрезками нити BE и BD . Освободим блок B от связей и заменим их реакциями.

Рассматривая блок и отрезок нити как одно целое, можно не учитывать

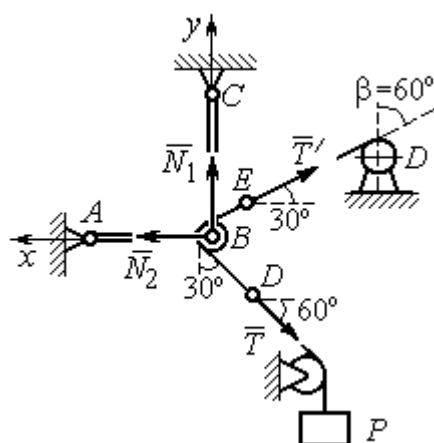


Рис. 1.12. Силы, действующие на блок B , при его равновесии

силы взаимного давления нити и блока. На блок действует реакция $\vec{T}$ нити BD , приложенная в точке D , численно равная весу груза P , реакция $\vec{T}'$ нити BE , приложенная в точке E и также численно равная весу груза P и реакции стержней $\vec{N}_1, \vec{N}_2$ (см. рис. 1.12).

Пренебрегая размерами блока, можно считать систему сил сходящейся. Проведём координатные оси, как показано на рис. 1.12, и

выразим условия равновесия плоской сходящейся системы сил в виде системы уравнений:

$$\sum F_{kx} = N_2 - T' \cos 30^\circ - T \cos 60^\circ = 0; \quad \sum F_{ky} = N_1 + T' \cos 60^\circ - T \cos 30^\circ = 0.$$

Решая полученную систему уравнений с учётом, что $T' = T = P = 20$ кН, получим: $N_1 = 7,32$ кН, $N_2 = 27,32$ кН.

Задача 4. Шахта ориентируется в вертикальной плоскости с помощью несвободного проволочного отвеса $CBDP$, натянутого грузом весом $P = 50$ Н (рис. 1.13).

Определить натяжения частей отвеса CB , BD , DP и натяжения оттяжек BA и DE , если угол отклонения оттяжки BC от горизонтали $\alpha = 60^\circ$, а отклонение средней части отвеса BD от вертикали $\beta = 4^\circ$. Весом проволоки отвеса пренебречь.

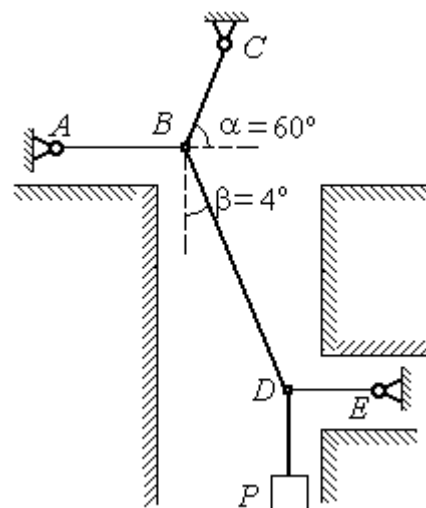


Рис. 1.13. Схема отвеса

Решение

Рассмотрим равновесие узла D , в котором сходятся три силы – реакция $\vec{S}$ средней части отвеса, реакция $\vec{T}_E$ оттяжки DE и реакция $\vec{T}_P$ отвеса на участке

DP , равная весу груза $T_P = P$ (рис. 1.14). Выберем оси координат xDu , как показано на рис. 1.14, и составим уравнения равновесия узла D :

$$\sum F_{kx} = S \cos 86^\circ - T_E = 0; \quad \sum F_{ky} = S \cos 4^\circ - T_P = 0.$$

Из второго уравнения с учётом, что натяжение отвеса на участке DP $T_P = P = 50$ Н, находим натяжение S на сред-

нем участке отвеса: $S = \frac{T_P}{\cos 4^\circ} = 50,12$ Н. Из

первого уравнения находим натяжение $T_E = S \cos 86^\circ = 3,49$ Н.

Теперь рассмотрим равновесие узла B , на который действуют реакция $\vec{T}_A$ оттяжки BA , реакция $\vec{T}_C$ верхней части отвеса BC и реакция $\vec{S}'$ средней части отвеса. Вектор силы $\vec{S}'$ противоположен направлению вектора $\vec{S}$: $\vec{S}' = -\vec{S}$,

а численно (по принципу равенства действия и противодействия) они равны $S' = S$ (см. рис. 1.14). Выберем оси координат xBy , как показано на рис. 1.14, и составим уравнения равновесия узла B :

$$\sum F_{kx} = T_C \cos 60^\circ + S' \cos 86^\circ - T_A = 0; \quad \sum F_{ky} = T_C \cos 30^\circ - S' \cos 4^\circ = 0.$$

Находим натяжение отвеса на верхнем участке BC и натяжение T_A оттяжки BA : $T_C = \frac{S' \cos 4^\circ}{\cos 30^\circ} = 57,73$ Н; $T_A = T_C \cos 60^\circ + S' \cos 86^\circ = 32,36$ Н.

Задача 5. Груз $P = 20$ кН удерживается двумя стержнями AC , AD одинаковой длины и цепью AB , скреплённых в точке A , так, что плоскость треугольника ADC горизонтальна (рис. 1.15). Цепь BA отклонена от вертикальной стены на угол $\beta = 60^\circ$ и расстояние $CE = ED$. Трос закреплён одним концом в точке A , а другой его конец, несущий груз, переброшен через блок K так, что отрезок

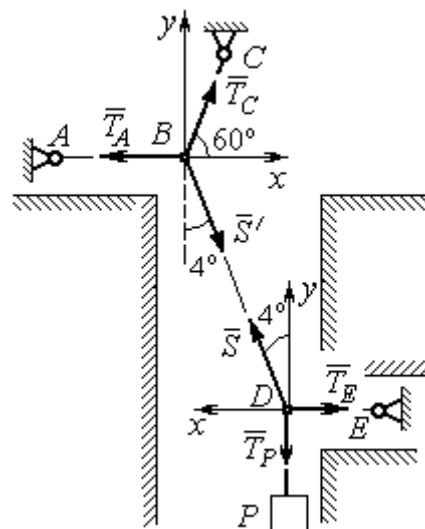


Рис.1.14. Силы, действующие в узлах B и D при равновесии отвеса

троса AK находится в плоскости, параллельной плоскости стены, и составляет с

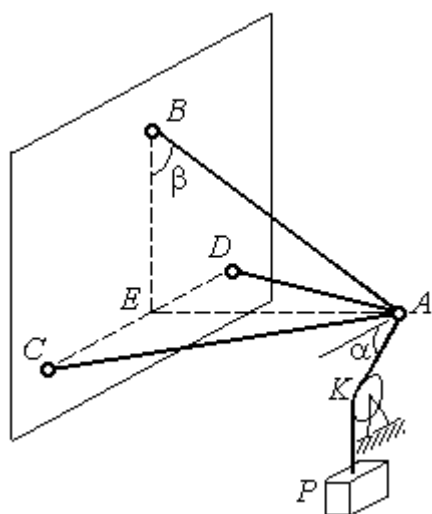


Рис. 1.15. Конструкция пространственного кронштейна

горизонтом угол $\alpha = 30^\circ$. Крепления стержней шарнирные. Углы у оснований стержней $\angle DCA = \angle CDA = 60^\circ$. Определить реакции стержней и натяжение цепи. Весами стержней пренебречь.

Решение

Рассмотрим равновесие узла A . Освобождаем узел от связей, заменяя действие связей реакциями. Реакции стержней $\vec{S}_D$ и $\vec{S}_C$ направлены по стержням,

реакция цепи $\vec{S}_B$ направлена вдоль линии натянутой цепи (рис. 1.16). Реакция троса $\vec{T}$ направлена вдоль троса по линии AK и численно равна весу груза: $T = P$. Направления реакций выбраны в предположении, что стержни и цепь растянуты.

Выберем систему координат, как показано на рис. 1.16. На узел A действует пространственная сходящаяся система сил.

Условия равновесия пространственной сходящейся системы сил $\sum F_{kx} = 0$, $\sum F_{ky} = 0$, $\sum F_{kz} = 0$, где F_{kx} , F_{ky} , F_{kz} — проекции всех сил на координатные оси. Составляем уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx} = S_C \cos 60^\circ - S_D \cos 60^\circ + T \cos 30^\circ = 0;$$

$$\sum F_{ky} = S_C \cos 30^\circ + S_D \cos 30^\circ + S_B \cos 30^\circ = 0; \quad \sum F_{kz} = S_B \cos 60^\circ - T \cos 60^\circ = 0.$$

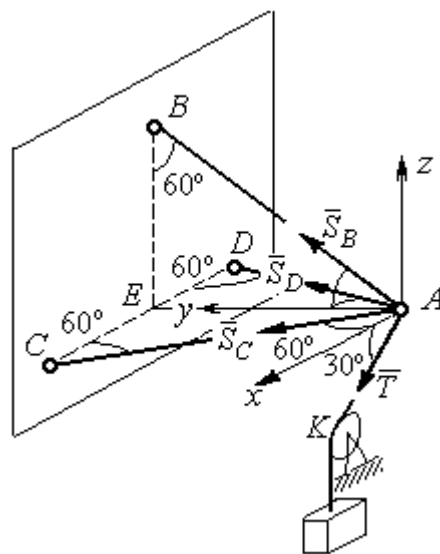


Рис. 1.16. Силы, действующие на узел A , при его равновесии

Решая эту систему, находим $S_B = T = P = 20$ кН; $S_C = -27,32$ кН; $S_D = 7,32$ кН. Знак минус величины S_C показывает, что реакция стержня AC имеет обратное направление. Натяжение цепи равно модулю реакции $\vec{S}_B$.

Задача 6. Подъёмное устройство (рис. 1.17) состоит из двух стержневых опор DB и DA и растяжки DC , соединённых в точке D . В точке D к устройству прикреплена вертикальная нить, удерживающая груз весом $P = 50$ кН.

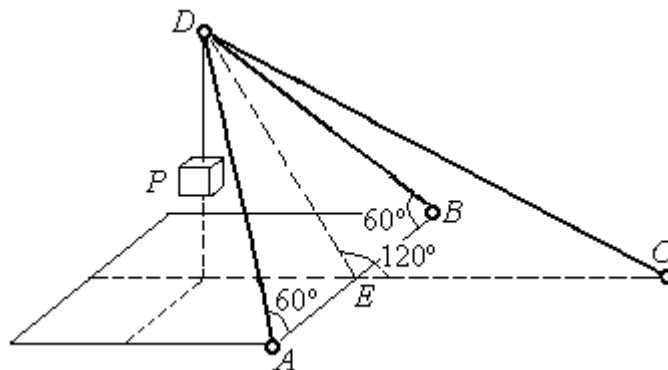


Рис. 1.17. Конструкция подъёмного устройства

Определить реакцию стержневых опор и усилие в растяжке подъёмного устройства, если крепления стержней шарнирные, угол $\angle DEC = 120^\circ$, $AE = EB$, $DE = EC$, а углы в основании опор $\angle DAB = \angle DBA = 60^\circ$.

Решение

Рассматриваем равновесие узла D . Освобождаем узел от связей, заменяя действие связей реакциями. Реакции стержней $\vec{S}_A$, $\vec{S}_B$, $\vec{S}_C$ направлены по стержням, реакция нити $\vec{T}$, численно равная весу тела, направлена вдоль нити (рис. 1.18). Направление реакций выбрано в предположении, что все стержни растянуты.

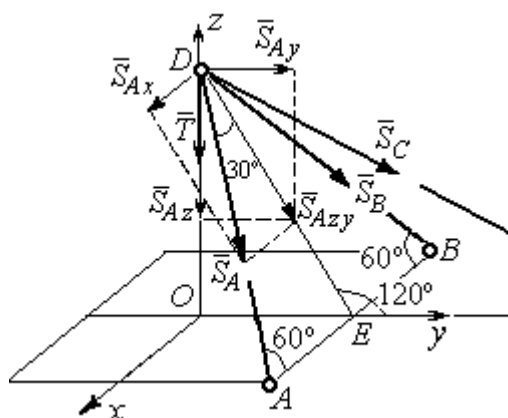


Рис. 1.18. Силы, действующие на узел D , при его равновесии

На узел D действует пространственная сходящаяся система сил. Выберем систему координат $Oxyz$, как показано на рис. 1.18, и составим уравнения равновесия. Заметим, что при определении проекции си-

составим уравнения равновесия. Заметим, что при определении проекции си-

лы $\vec{S}_A$ на оси координат следует вначале получить её проекции $\vec{S}_{Ax}$ на ось Ox и $\vec{S}_{Azy}$ – на плоскость Oyz , а затем найти проекции силы $\vec{S}_{Azy}$ на оси Oy и Oz . На рис. 1.18 показана последовательность вычисления проекций силы $\vec{S}_A$ на оси координат: $S_{Ax} = S_A \cos 60^\circ$, $S_{Ay} = S_{Azy} \cos 60^\circ = S_A \cos 30^\circ \cos 60^\circ$, $S_{Az} = -S_{Azy} \cos 30^\circ = -S_A \cos^2 30^\circ$. Определение проекций силы $\vec{S}_B$ производится аналогично. Сила $\vec{S}_C$ расположена в плоскости Oyz и имеет своими проекциями $S_{Cy} = S_C \cos 30^\circ$, $S_{Cz} = -S_C \cos 60^\circ$. В результате уравнения равновесия узла D принимают вид

$$\sum F_{ky} = S_A \cos 30^\circ \cos 60^\circ + S_B \cos 30^\circ \cos 60^\circ + S_C \cos 30^\circ = 0;$$

$$\sum F_{kx} = S_A \cos 60^\circ - S_B \cos 60^\circ = 0;$$

$$\sum F_{kz} = -S_A \cos^2 30^\circ - S_B \cos^2 30^\circ - S_C \cos 60^\circ - T = 0.$$

Решая систему, получим: $S_A = S_B = -50$ кН, $S_C = 50$ кН.

Отрицательные значения S_A и S_B означают, что реакций стержней AD и DB направлены в противоположную сторону. В результате стержни AD и DB сжаты, а стержень DC растянут.

1.3. Произвольная плоская система сил

Система сил, расположенных в одной плоскости, называется **плоской системой сил**.

Алгебраическим моментом $M_O(\vec{F})$ силы $\vec{F}$ относительно центра O , или просто **моментом силы $\vec{F}$** относительно центра, называют взятое с соответствующим знаком произведение модуля силы $\vec{F}$ и кратчайшего расстояния h от центра до линии действия силы (рис. 1.19, а): $M_O(\vec{F}) = \pm Fh$. Величину h называют **плечом силы**. Единица измерения момента – Н·м. Момент считается положительным, если сила $\vec{F}$ стремится повернуть тело вокруг центра в

направлении против хода часовой стрелки, и отрицательным – в обратном случае.

На рис. 1.19, *b* показаны знаки моментов сил $\vec{F}$ и $\vec{Q}$ относительно центра O : $M_O(\vec{F}) = +Fh_2$, $M_O(\vec{Q}) = -Qh_1$. Момент силы $\vec{R}$ относительно центра O равен нулю: $M_O(\vec{R}) = 0$, так как плечо силы равно нулю.

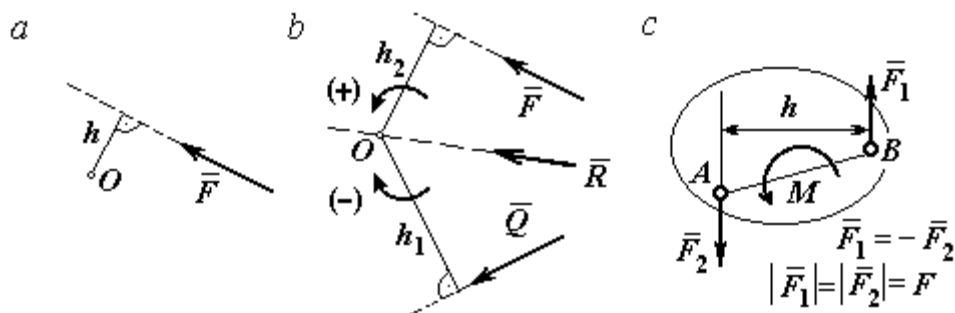


Рис. 1.19. Схемы к вычислению момента силы:
a, b – момент силы относительно центра; *c* – момент пары сил

Парой сил, или просто парой (рис.1.19, *c*), называют систему двух равных по модулю сил, параллельных, направленных в противоположные стороны и не лежащих на одной прямой. **Плечом пары** называют кратчайшее расстояние между линиями действия ее сил. Алгебраическим моментом пары сил, или **моментом пары**, называют взятое со знаком плюс или минус произведение модуля одной из сил пары и плеча пары. Правило знаков такое же, как и для момента силы. Пара сил, показанная на рис. 1.19, *c*, имеет плечо h и момент M : $M = F_1 h = F_2 h$. Поскольку пара сил характеризуется только ее моментом, на схемах пару часто изображают дуговой стрелкой, показывающей направление поворота твердого тела под действием пары (см. M на рис. 1.19, *c*).

Жесткая заделка. Такая связь (рис. 1.20) препятствует не только линейным перемещениям тела, но и повороту. Реакция жесткой заделки состоит из силы

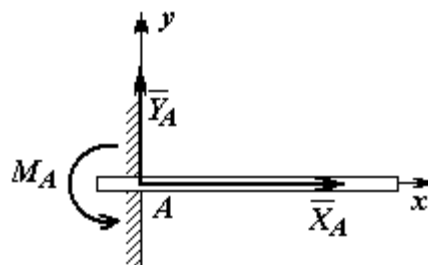


Рис. 1.20. Реакция жесткой заделки

реакции $\vec{R}_A$ и пары сил с моментом M_A . Силу реакции жесткой заделки $\vec{R}_A$ изображают ее составляющими $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$, направленными вдоль координатных осей (см. рис. 1.20). Величина силы реакции $\vec{R}_A$ определяется по формуле: $R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2}$.

При вычислении моментов сил часто применяют **теорему Вариньона** о том, что момент равнодействующей системы сил относительно любого центра равен сумме моментов всех сил этой системы относительно того же центра. На

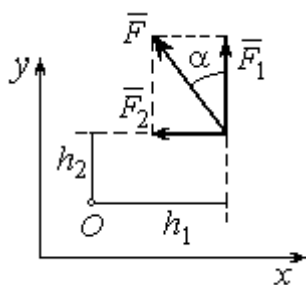


Рис.1.21. Применение теоремы Вариньона

рис. 1.21 показана схема применения теоремы Вариньона. Силу $\vec{F}$ раскладываем на составляющие $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, направленные вдоль координатных осей так, что имеет место равенство $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$. Численно составляющие $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ равны проекциям силы $\vec{F}$ на координатные оси: $F_1 = F \cos \alpha$, $F_2 = F \sin \alpha$. Для каждой из составляющих находим плечи h_1 и h_2 относительно

центра O . Тогда (с учётом знаков) момент силы $\vec{F}$ относительно центра O : $M_O(\vec{F}) = M_O(\vec{F}_1) + M_O(\vec{F}_2) = F_1 h_1 + F_2 h_2$.

Распределённая нагрузка. Силы, приложенные непрерывно вдоль некоторой поверхности, называются **распределёнными**. Распределённая нагрузка характеризуется интенсивностью q . Интенсивность нагрузки, равномерно распределённой вдоль прямой, измеряется в Н/м. На рис. 1.22 приведена плоская система сил, равномерно распределённых вдоль прямой. Равнодействующая $\vec{Q}$ сил, равномерно распределённых вдоль прямой, приложена в середине отрезка действия распределённой нагрузки и по модулю равна про-

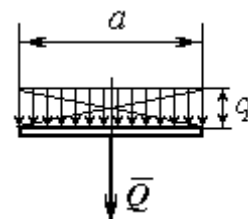


Рис. 1.22. Нагрузка, равномерно распределённая по прямой

нодействующая $\vec{Q}$ сил, равномерно распределённых вдоль прямой, приложена в середине отрезка действия распределённой нагрузки и по модулю равна про-

изведению интенсивности нагрузки на длину её действия: $Q = qa$, где a – длина отрезка действия распределённой нагрузки.

Основная форма условий равновесия плоской системы сил. Для равновесия плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на каждую из двух осей прямоугольной системы координат, расположенной в плоскости действия сил, были равны нулю и сумма моментов сил относительно любого центра, находящегося в плоскости действия сил, была равна нулю:

$$\sum F_{kx} = 0, \quad \sum F_{ky} = 0, \quad \sum M_A(\vec{F}_k) = 0,$$

где F_{kx}, F_{ky} – проекции всех сил на координатные оси; $M_A(\vec{F}_k)$ – моменты всех сил относительно произвольно выбранного центра A .

Примеры решения задач на равновесие произвольной плоской системы сил

Задача 7. Однородная балка AB весом $P = 100$ кН прикреплена к стене шарниром A (рис.1.23). Балка удерживается под углом 60° к вертикали при помощи троса, прикреплённого к балке в точке B , перекинутого через блок D и несущего груз Q . Участок троса DB образует с вертикалью угол 30° . В точке C к балке подвешен груз G весом $G = 200$ кН. Определить вес груза Q , удерживающий балку в равновесии, и реакцию шарнира A , пренебрегая трением в блоке, если расстояние $BC = 0,25BA$.

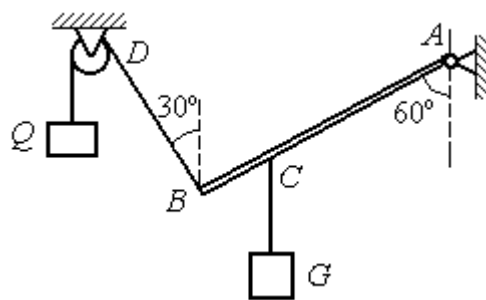


Рис. 1.23. Равновесие балки

Решение

Объектом равновесия является балка AB . На балку действуют сила тяжести $\vec{P}$, приложенная в середине отрезка AB , реакция шарнира A , представлен-

ная в виде двух составляющих $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$, направленных вдоль координатных осей, реакция $\vec{T}_1$ нити, удерживающей груз Q , и реакция $\vec{T}_2$ нити, удерживающей груз G . Направления сил и реакций связей показаны на рис. 1.24.

Силы – $\vec{T}_1$, $\vec{T}_2$, $\vec{P}$, $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, действующие на балку, составляют произвольную плоскую систему. Условия равновесия произвольной плоской системы сил:

$$\sum F_{kx} = 0; \sum F_{ky} = 0; \sum M_A(\vec{F}_k) = 0.$$

Выберем систему координат xAy , как показано на рис. 1.24.

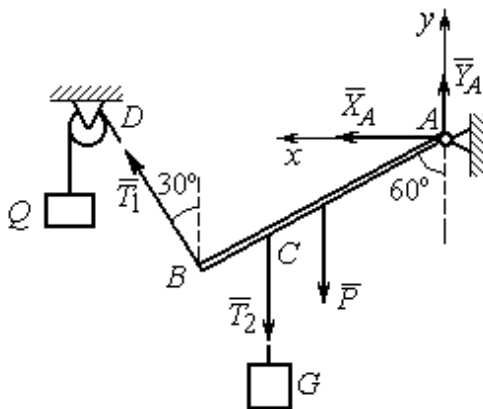


Рис. 1.24. Внешние силы и реакции связей при равновесии балки

Первые два уравнения равновесия имеют вид

$$\sum F_{kx} = X_A + T_1 \cos 60^\circ = 0;$$

$$\sum F_{ky} = Y_A + T_1 \cos 30^\circ - T_2 - P = 0.$$

Выберем центром точку A и будем вычислять моменты сил относительно этого центра. Обозначим (для удобства записи) длину $AB = \ell$. Условие равновесия балки в форме равенства нулю суммы моментов сил относительно центра A имеет вид

$$\sum M_A(\vec{F}_k) = -T_1 \ell + T_2 \frac{3}{4} \ell \cos 30^\circ + P \frac{1}{2} \ell \cos 30^\circ = 0.$$

Подставим данные из условия задачи, с учётом, что реакция нити, удерживающей груз Q , по модулю равна весу этого груза: $T_1 = Q$, а реакция нити, удерживающей груз G , численно равна весу груза G : $T_2 = G$.

Получим систему уравнений:

$$X_A + Q \cdot 0,5 = 0, \quad Y_A + Q \cdot 0,866 - 300 = 0, \quad -Q + 173,2 = 0.$$

Решая систему, найдём $Q = 173,2$ кН, $X_A = -86,6$ кН, $Y_A = 150,01$ кН.

Задача 8. Рама ACE (рис. 1.25, a) в точке A закреплена на цилиндрической шарнирной опоре, а в точке B поддерживается вертикальным невесомым стержнем BK . На раму действуют: пара сил с моментом $M = 8 \text{ кН}\cdot\text{м}$, сила $\vec{F}$, равная по модулю $F = 10 \text{ кН}$, приложенная в точке D под углом 60° к раме, и равномерно распределенная на отрезке AB нагрузка интенсивностью $q = 2 \text{ кН/м}$. В точке E под прямым углом к отрезку CE рамы прикреплен трос, переброшенный через блок и несущий груз $P = 20 \text{ кН}$.

Пренебрегая весом балки, определить реакцию шарнира A и реакцию стержневой опоры BK , если $a = 2 \text{ м}$.

Решение

Рассмотрим равновесие рамы ACE . Выбираем систему координат xAy , например, как показано на рис. 1.25, b .

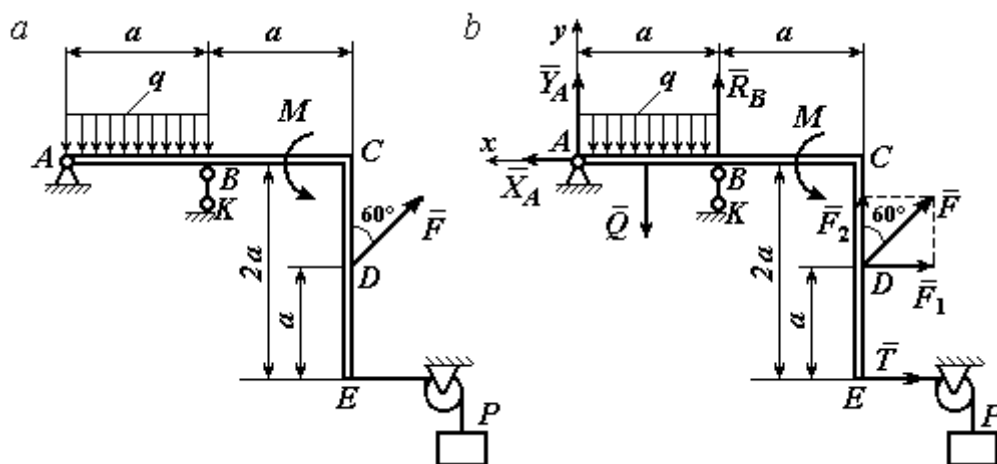


Рис. 1.25. Равновесие рамы:
 a – конструкция и нагрузка рамы; b – внешние силы и реакции связей при равновесии рамы

Заменяем действие связей их реакциями. Изображаем реакцию $\vec{R}_A$ шарнира A двумя ее составляющими $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$, направленными, соответственно, вдоль горизонтальной оси Ax и вертикальной Ay . Реакция $\vec{R}_B$ невесомой стержневой опоры BK приложена в точке B и направлена вдоль стержня BK . Действие груза P на раму изображается реакцией троса $\vec{T}$, модуль которой ра-

вен весу груза $T = P$. Заменяем распределенную нагрузку её равнодействующей $\vec{Q}$. Сила $\vec{Q}$ приложена в середине отрезка AB и численно равна: $Q = qa = 2 \cdot 2 = 4$ кН. На рис. 1.25, b показано направление внешних сил и реакций при равновесии рамы. Направление реакции стержневой опоры BK выбрано в предположении, что стержень сжимается.

При равновесии рамы ACE действующие на неё силы составляют уравновешенную произвольную плоскую систему сил $(\vec{Q}, \vec{F}, \vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{R}_B, \vec{T}, M) \sim 0$. Условия равновесия имеют вид $\sum F_{kx} = 0$; $\sum F_{ky} = 0$; $\sum M_A(\vec{F}_k) = 0$. Вычисляя проекции сил на оси Ax, Ay , первые два уравнения из условий равновесия получим в виде:

$$\sum F_{kx} = X_A - F \cos 30^\circ - T = 0; \quad \sum F_{ky} = Y_A - Q + R_B + F \cos 60^\circ = 0. \quad (1.1)$$

При составлении третьего уравнения моменты сил будем вычислять относительно центра A . В этом случае линии действия сил $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$, составляющих реакцию шарнира A , проходят через центр A , плечи сил равны нулю, и, следовательно, моменты этих сил относительно данного центра равны нулю: $M_A(\vec{X}_A) = 0$, $M_A(\vec{Y}_A) = 0$.

При определении момента силы $\vec{F}$ удобнее воспользоваться теоремой Вариньона. С этой целью представим вектор силы $\vec{F}$ как равнодействующую двух сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, параллельных осям Ax и Ay : $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ (см. рис. 1.25, b). Величины сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ определяются как проекции силы F на оси координат: $F_1 = F \cos 30^\circ$, $F_2 = F \cos 60^\circ$. По теореме Вариньона момент силы $\vec{F}$ относительно центра A равен сумме моментов сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ относительно того же центра A : $M_A(\vec{F}) = M_A(\vec{F}_1) + M_A(\vec{F}_2) = F_1 \cdot a + F_2 \cdot 2a$.

В результате уравнение равновесия в форме моментов имеет вид

$$\sum M_A(\vec{F}_k) = -Q \cdot 0,5a + R_B a + M + F \cos 60^\circ \cdot 2a + F \cos 30^\circ \cdot a + T 2a = 0. \quad (1.2)$$

Подставляя в уравнения равновесия (1.1), (1.2) численные значения из условий задачи, получим систему уравнений относительно неизвестных X_A, Y_A, R_B . Решая эту систему, найдем: $X_A = 28,66$ кН; $Y_A = 59,66$ кН; $R_B = -60,66$ кН.

Отрицательное значение величины R_B означает, что фактическое направление реакции $\vec{R}_B$ стержневой опоры BK противоположно направлению, показанному на рис. 1.25, *b*, т. е. стержень BK растягивается. Реакция шарнирной опоры A – сила $\vec{R}_A$ – находится как геометрическая (векторная) сумма сил $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$. Величина реакции $R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = \sqrt{28,66^2 + 59,66^2} = 66,18$ кН.

Задача 9. Прямоугольная рама $ABCED$ (рис. 1.26) в точке A закреплена жёсткой заделкой. В точке E к раме прикреплена нить, составляющая угол 60° к горизонту. Другой конец нити, переброшенный через невесомый блок, несёт груз весом $P = 15$ кН. На раму

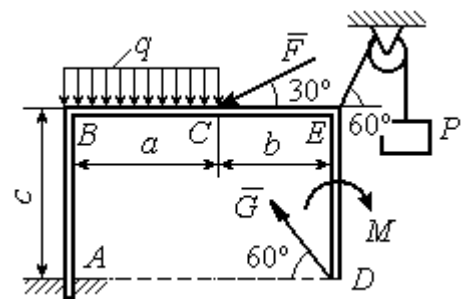


Рис. 1.26. Конструкция рамы

действуют: пара сил с моментом $M = 12$ кН·м, сила $\vec{F}$, равная по модулю $F = 10$ кН, приложенная в точке C под углом 30° к горизонтальному участку рамы BE , и равномерно распределенная на отрезке BC нагрузка интенсивностью $q = 2$ кН/м. В точке D под углом 60° к горизонту на раму действует сила $\vec{G}$, численно равная 20 кН.

Пренебрегая весом рамы, определить реакцию жесткой заделки в точке A , если размеры рамы: $a = 2$ м, $b = 1$ м, $c = 5$ м.

Решение

Объектом равновесия является рама $ABCED$. Связями в данной конструкции являются жесткая заделка рамы в точке A и нить, натянутая грузом P . Заменяем действие связей их реакциями. Изображаем реакцию жесткой заделки в точке A в виде силы, которую представим двумя ее составляющими – $\vec{X}_A$ и

$\vec{Y}_A$, и парой сил с моментом M_A (рис. 1.27). Реакция нити $\vec{T}$, приложенная к раме в точке E , направлена вдоль нити и численно равна весу груза $T = P$. За-

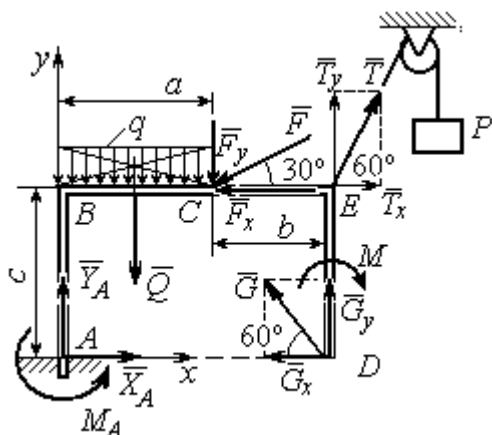


Рис. 1.27. Внешние силы и реакции связей при равновесии рамы

меняем распределенную нагрузку её равнодействующей $\vec{Q}$. Сила $\vec{Q}$ приложена в середине отрезка AB и численно равна: $Q = qa = 4$ кН.

Действующие на раму силы составляют уравновешенную произвольную плоскую систему сил: $(\vec{Q}, \vec{F}, \vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{G}, \vec{T}, M) \sim 0$.

Условия равновесия для такой системы

сил: $\sum F_{kx} = 0$; $\sum F_{ky} = 0$; $\sum M_A(\vec{F}_k) = 0$.

Выбираем систему координат xAy , например, как показано на рис. 1.27, и составляем уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx} = X_A - F \cos 30^\circ + T \cos 60^\circ - G \cos 60^\circ = 0; \quad (3)$$

$$\sum F_{ky} = Y_A - Q - F \cos 60^\circ + T \cos 30^\circ + G \cos 30^\circ = 0. \quad (4)$$

Моменты сил будем вычислять относительно центра A . В этом случае моменты сил $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$ равны нулю: $M_A(\vec{X}_A) = 0$; $M_A(\vec{Y}_A) = 0$.

При определении момента силы $\vec{F}$ удобно воспользоваться теоремой Вариньона. С этой целью представим вектор силы $\vec{F}$ как равнодействующую двух сил $\vec{F}_x$ и $\vec{F}_y$, параллельных осям Ax и Ay : $\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y$ (см. рис. 1.27). Величины сил $\vec{F}_x$ и $\vec{F}_y$ определяются как проекции силы $\vec{F}$ на оси координат: $F_x = F \cos 30^\circ$, $F_y = F \cos 60^\circ$. Плечо вектора силы $\vec{F}_x$ относительно центра A равно c (как длина перпендикуляра, проведённого из центра A на линию действия силы $\vec{F}_x$), плечом силы $\vec{F}_y$ является расстояние a . По теореме Вариньона

момент силы $\vec{F}$ относительно центра A равен алгебраической сумме моментов сил $\vec{F}_x$ и $\vec{F}_y$ относительно того же центра:

$$M_A(\vec{F}) = M_A(\vec{F}_x) + M_A(\vec{F}_y) = F_x \cdot c - F_y \cdot a = F \cos 30^\circ \cdot c - F \cos 60^\circ \cdot a.$$

Аналогично вычисляем моменты сил $\vec{G}$ и $\vec{T}$: $M_A(\vec{G}) = G \cos 30^\circ \cdot (a + b)$;

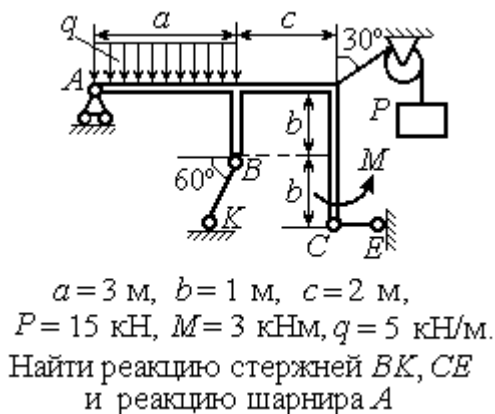
$M_A(\vec{T}) = -T \cos 60^\circ \cdot c + T \cos 30^\circ \cdot (a + b)$. В результате уравнение моментов имеет вид:

$$\begin{aligned} \sum M_A(\vec{F}_k) = F \cos 30^\circ \cdot c - F \cos 60^\circ \cdot a - T \cos 60^\circ \cdot c + T \cos 30^\circ \cdot (a + b) + \\ + G \cos 30^\circ \cdot (a + b) - Q \frac{a}{2} - M + M_A = 0. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Подставляя в уравнения равновесия (1.3) – (1.5) численные значения из условий задачи, получим систему уравнений относительно неизвестных X_A, Y_A, M_A , откуда найдём значения реакций: $X_A = 11,16$ кН; $Y_A = -21,31$ кН; $M_A = -70,73$ Н·м. Знаки показывают, что составляющая $\vec{Y}_A$ силы реакции жёсткой заделки и момент реакции M_A направлены в противоположную сторону. Величина силы реакции жесткой заделки $R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = 24,05$ кН.

Упражнения

Упражнение 1.1



Упражнение 1.2

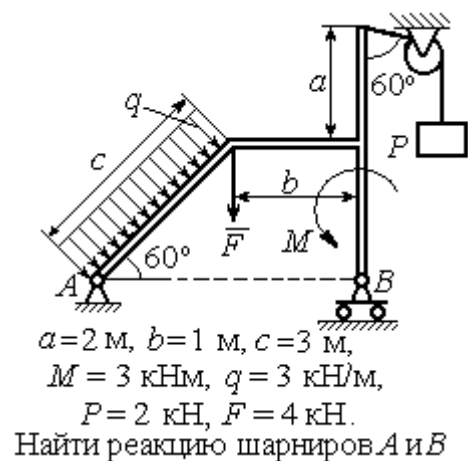
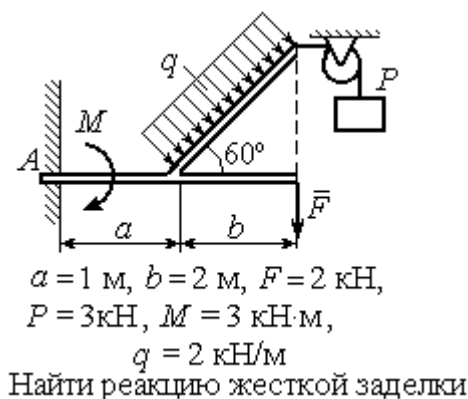


Рис. 1.28. Задания для самостоятельного решения. Упражнения 1.1, 1.2

Упражнение 1.3



Упражнение 1.4

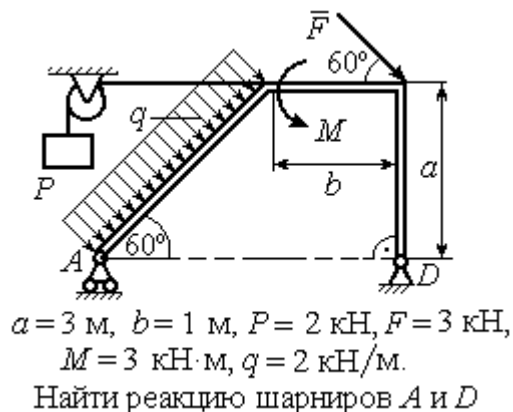


Рис. 1.29. Задания для самостоятельного решения. Упражнения 1.3, 1.4

1.4. Равновесие систем тел

Связи, соединяющие части конструкции, называются **внутренними** в отличие от **внешних** связей, скрепляющих конструкцию с внешними телами, не входящими в данную конструкцию.

Одним из способов решения задач на равновесие сил, действующих на сочленённую конструкцию, является **разбиение конструкции на отдельные тела** и составление уравнений равновесия для каждого из тел, входящих в конструкцию. В уравнения равновесия будут входить только силы, непосредственно приложенные к телу, равновесие которого рассматривается. При этом **реакции внутренних связей, приложенные к разным телам, будут попарно равны по модулю и противоположны по направлению.**

Примеры решения задач на равновесие систем тел

Задача 10. Диск весом $Q = 100 \text{ кН}$ опирается на вертикальную стенку и на наклонную балку AB . На диск действует сила $\vec{F}$, равная по величине 50 кН (рис. 1.30). Линия действия силы $\vec{F}$ проходит через центр диска под углом 30° к его вертикальному диаметру.

Однородная балка AB весом $G = 80$ кН закреплена в точке A шарнирно и удерживается под углом 60° к стене при помощи вертикального троса, один конец которого закреплён на балке в точке B , а другой – переброшен через блок и несёт груз весом P . Определить давление диска на стенку и на балку, реакцию шарнира A и вес груза P , удерживающий конструкцию в равновесии, если длина балки AB $\ell = 6$ м, радиус диска $r = 1$ м.

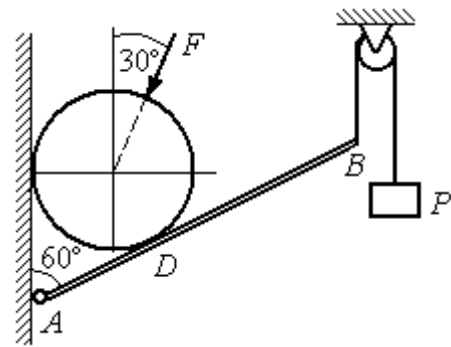


Рис. 1.30. Равновесие составной конструкции

Решение

Объект равновесия включает балку и диск и представляет собой составную конструкцию. Опора диска на балку в точке D является внутренней связью конструкции. Рассмотрим равновесие диска и балки отдельно.

Освобождаем диск от связей. На диск действует сила веса $\vec{Q}$, сила $\vec{F}$ и

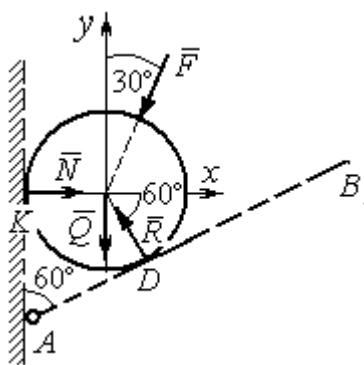


Рис. 1.31. Внешние силы и реакции связей при равновесии диска

реакции $\vec{N}$ и $\vec{R}$ опор диска на стену в точке K и на балку в точке D (рис. 1.31). Силы, приложенные к диску, составляют плоскую систему сходящихся сил. Выберем систему координат, как показано на рис. 1.31, и составим уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx} = -F \cos 60^\circ - R \cos 60^\circ + N = 0; \quad (1.6)$$

$$\sum F_{ky} = -F \cos 30^\circ + R \cos 30^\circ - Q = 0. \quad (1.7)$$

Рассмотрим равновесие балки AB (рис. 1.32).

На балку действуют сила тяжести $\vec{G}$, реакция шарнира A , (на рис. 1.32 показано её разложение на составляющие $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$), реакция нити $\vec{T}$, численно равная весу груза P , и сила $\vec{R}'$ давления диска на балку. Сила давления $\vec{R}'$ про-

тивоположна реакции $\vec{R}$ опоры диска на балку и численно равна ей. Система сил ($\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{G}, \vec{T}, \vec{R}'$), действующих на

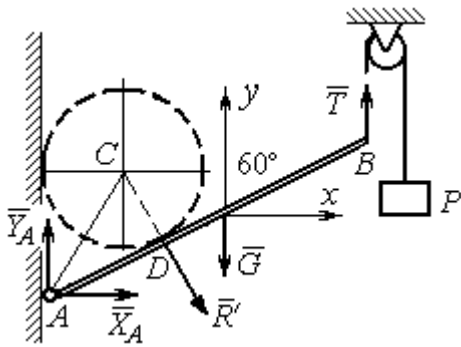


Рис. 1.32. Силы, действующие на балку, при равновесии

балку, является произвольной плоской. Условия равновесия такой системы сил: $\sum F_{kx} = 0$;

$$\sum F_{ky} = 0; \sum M_A(\vec{F}_k) = 0.$$

Выберем оси, как показано на рис. 1.32, и составим уравнения равновесия, полагая точку A центром, относительно которого производятся вычисления моментов сил:

$$\sum F_{kx} = X_A + R' \cos 60^\circ = 0, \quad (1.8)$$

$$\sum F_{ky} = Y_A - R' \cos 30^\circ - G + T = 0, \quad (1.9)$$

$$\sum M_A(\vec{F}_k) = -R' \cdot AD - G \cdot \frac{\ell}{2} \cos 30^\circ + T \ell \cos 30^\circ = 0. \quad (1.10)$$

Добавив к уравнениям (1.8) – (1.10) равновесия балки AB уравнения (1.6), (1.7) равновесия диска с учётом, что $R' = R$, получим систему пяти уравнений с пятью неизвестными. Подставляя данные из условия задачи и решая совместную систему, найдём: $R = 165,47$ кН; $N = 107,74$ кН; $P = 95,26$ кН; $X_A = -82,73$ кН; $Y_A = 128,03$ кН.

Сила давления диска на стену равна модулю реакции опоры $\vec{N}$ и направлена в противоположную сторону, сила давления диска на балку равна $\vec{R}'$.

Задача 11. Кронштейн состоит из горизонтальной балки AD , прикрепленной к вертикальной стене в точке A , и откоса BC , соединённого с балкой AD в точке C под углом

60° и прикреплённого к вертикальной стене в точке B (рис. 1.33). Все соедине-

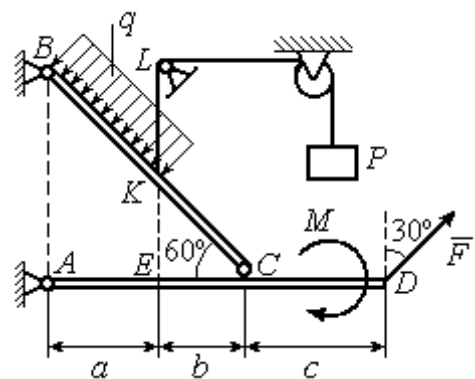


Рис.1.33. Равновесие кронштейна как сочленённой конструкции

ния шарнирные. На конструкцию действуют сила $\vec{F}$, приложенная в точке D под углом 30° к вертикали и равная по модулю $F=10$ кН, пара сил с моментом $M=8$ кН·м и равномерно распределенная на отрезке BK нагрузка интенсивностью $q=3$ кН/м. В точке K к балке BC прикреплена нить, другой конец которой, переброшенный через невесомые блоки, несёт груз весом $P=5$ кН (см. рис. 1.33).

Определить реакции шарниров A , B и C , если $a=2$ м, $b=1$ м, $c=3$ м, а на отрезке KL нить натянута вертикально.

Решение

Рассмотрим равновесие каждой из составных частей конструкции – балки BC и балки AD . Освобождаем балки от связей и заменяем их реакциями (рис. 1.34).

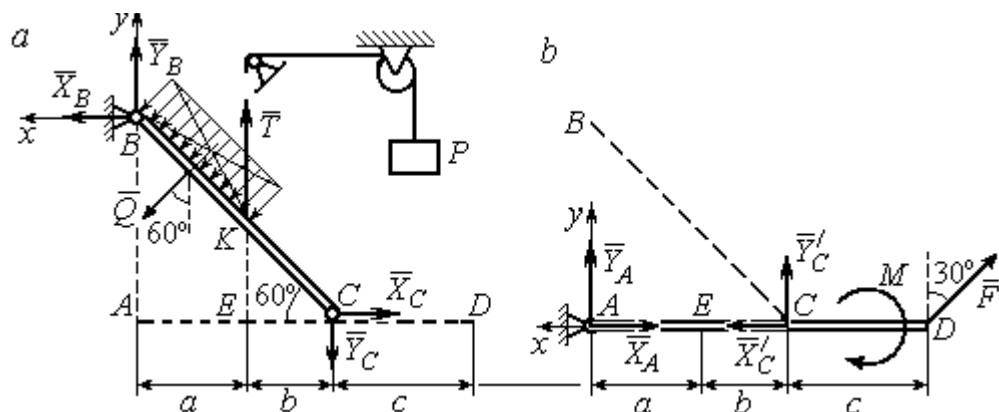


Рис. 1.34. Равновесие элементов конструкции кранштейна:
 a - силы, действующие на балку BC ; b - силы, действующие на балку AD

На рис. 1.34, a показаны реакции внешних и внутренних связей балки BC : реакция $\vec{R}_B$ шарнира B , реакция нити $\vec{T}$, равная по величине весу груза, $T=P$ и реакция $\vec{R}_C$ внутреннего шарнира C . Реакции шарниров B и C представлены в виде разложения на составляющие $\vec{X}_B$, $\vec{Y}_B$ и $\vec{X}_C$, $\vec{Y}_C$. Заменяем равномерную нагрузку равнодействующей силой $\vec{Q}$, приложенной в середине отрезка BK (см. рис. 1.34, a) и численно равной $Q=q \cdot BK = q \cdot \frac{a}{\cos 60^\circ} = q \cdot 2a$.

Система сил $(\vec{Q}, \vec{X}_B, \vec{Y}_B, \vec{X}_C, \vec{Y}_C, \vec{T})$, действующая на балку BC , является произвольной плоской уравновешенной системой сил. Выберем оси координат xBy , как показано на рис. 1.34, a , и составим уравнения равновесия. При этом моменты сил будем вычислять относительно центра C :

$$\sum F_{kx} = X_B + Q\cos 30^\circ - X_C = 0; \quad (1.11)$$

$$\sum F_{ky} = Y_B - Q\cos 60^\circ + T - Y_C = 0; \quad (1.12)$$

$$\sum M_C(\vec{F}_k) = X_B \cdot AB - Y_B(a+b) - Tb + Q\left(CK + \frac{1}{2}BK\right) = 0, \quad (1.13)$$

где $AB = (a+b)\operatorname{tg} 60^\circ$; $CK = 2b$; $\frac{1}{2}BK = a$.

Рассмотрим равновесие балки AD (рис. 1.34, b).

На балку действует сила $\vec{F}$, реакция $\vec{R}_A$ шарнира A и реакция $\vec{R}'_C$ внутреннего шарнира C . Реакция $\vec{R}'_C$ равна по величине и противоположна по направлению реакции $\vec{R}_C$. На рис. 1.34, b реакция $\vec{R}_A$ представлена составляющими $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$, реакция $\vec{R}'_C$ – составляющими $\vec{X}'_C$ и $\vec{Y}'_C$. При этом следует отметить: $\vec{X}'_C = -\vec{X}_C$; $\vec{Y}'_C = -\vec{Y}_C$.

Выберем оси координат xAy как показано на рис. 1.34, b , и составим уравнения равновесия балки AD , вычисляя моменты сил относительно центра C :

$$\sum F_{kx} = -X_A + X'_C - F\cos 60^\circ = 0; \quad (1.14)$$

$$\sum F_{ky} = Y_A + Y'_C + F\cos 30^\circ = 0; \quad (1.15)$$

$$\sum M_C(\vec{F}_k) = -Y_A(a+b) + F\cos 30^\circ \cdot c - M = 0. \quad (1.16)$$

Решая совместно систему уравнений (1.11) – (1.16) с учётом исходных данных задачи и равенства модулей сил $X_C = X'_C$ и $Y_C = Y'_C$, находим:

$$X_A = 5,99 \text{ кН}, Y_A = 5,99 \text{ кН}, X_C = 10,99 \text{ кН}, Y_C = -14,65 \text{ кН};$$

$$X_B = 0,6 \text{ кН}, Y_B = -13,65 \text{ кН},$$

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = 8,47 \text{ кН}, R_C = \sqrt{X_C^2 + Y_C^2} = 18,31 \text{ кН},$$

$$R_B = \sqrt{X_B^2 + Y_B^2} = 13,65 \text{ кН}.$$

Задача 12. Вертикальная балка AB с горизонтальной перекладиной LC закреплена в точке A с помощью жесткой заделки (рис. 1.35). Наклонная балка EC с углом наклона к горизонту 60° в точке C шарнирно прикреплена к горизонтальной перекладине LC балки AB , а в точке E опирается на каток установленный на горизонтальной поверхности. На конструкцию действуют равномерно распределенная на отрезках BL и DE нагрузка с одинаковой интенсивностью $q = 2 \text{ кН/м}$, сила $\vec{F}$, приложенная в точке D перпендикулярно балке EC и равная по величине $F = 10 \text{ кН}$, и пара сил с моментом $M = 5 \text{ кН}\cdot\text{м}$. Определить реакцию жесткой заделки A и реакции шарниров C и E , если параметр a , определяющий размеры конструкции, равен $a = 2 \text{ м}$.

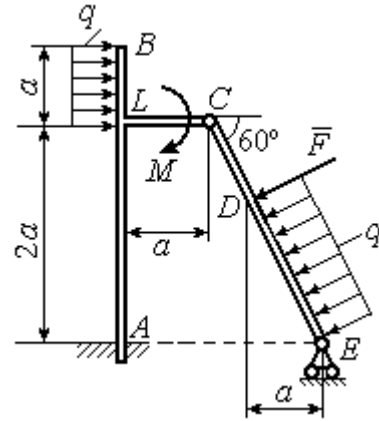


Рис. 1.35. Равновесие сочленённой конструкции

Решение

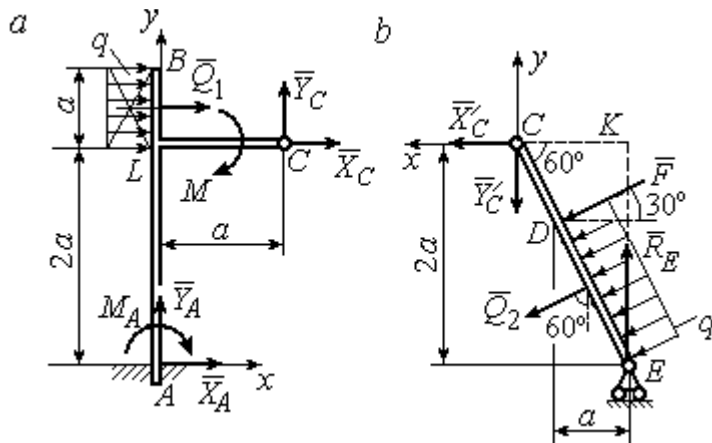


Рис. 1.36. Равновесие элементов конструкции:
 а - силы и реакции связей, действующие на балку AB ;
 б - силы и реакции связей, действующие на балку CE

но равной $Q_1 = qa = 4 \text{ кН}$. На балку действует сила $\vec{Q}_1$, пара сил с моментом M и реакции связей – жёсткой заделки в точке A и шарнира C .

Разделим систему на две части по шарниру C и рассмотрим равновесие балок ABC и EC отдельно.

Рассмотрим балку ABC (рис. 1.36, а). Заменим распределенную нагрузку эквивалентной силой $\vec{Q}_1$, числен-

На рис. 1.36, *a* изображена реакция жесткой заделки в точке *A* в виде силы, разложенной на составляющие $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, и пары с моментом M_A . Реакция $\vec{R}_C$ шарнира *C* показана разложением на составляющие $\vec{X}_C$, $\vec{Y}_C$. Силы образуют произвольную плоскую систему.

Введём систему координат, как показано на рис. 1.36, *a*, и составим уравнения равновесия балки, выбрав центром вычисления моментов сил точку *A*.

Имеем систему

$$\sum F_{kx} = X_A + Q_1 + X_C = 0; \quad \sum F_{ky} = Y_A + Y_C = 0; \quad (1.17)$$

$$\sum M_A(\vec{F}_k) = -M_A - Q_1 \cdot \left(2a + \frac{a}{2}\right) - M + Y_C a - X_C 2a = 0. \quad (1.18)$$

Рассмотрим теперь равновесие балки *EC* (рис. 1.36, *b*). Заменим распределённую нагрузку эквивалентной силой $\vec{Q}_2$, приложенной в середине отрезка *ED* и равной $Q_2 = \frac{qa}{\cos 60^\circ} = q \cdot 2a = 8 \text{ кН}$. На балку действуют силы $\vec{Q}_2$, $\vec{F}$, реакция $\vec{R}_E$ подвижной опоры – катка *E* и реакция $\vec{R}'_C$ шарнира *C*. На рис. 1.36, *b* реакция $\vec{R}'_C$ показана в виде разложения на составляющие $\vec{X}'_C$, $\vec{Y}'_C$. При этом силы $\vec{X}'_C$, $\vec{Y}'_C$ направлены противоположно силам $\vec{X}_C$, $\vec{Y}_C$ и равны им по модулю: $X_C = X'_C$; $Y_C = Y'_C$ (см. рис. 1.36, *a*, *b*).

Действующие на балку *EC* силы образуют уравновешенную произвольную плоскую систему сил. Выберем систему координат, как показано на рис. 1.36, *b*, и составим уравнения равновесия, вычисляя моменты сил относительно центра *C*. Получим:

$$\sum F_{kx} = Q_2 \sin 60^\circ + F \cos 30^\circ + \vec{X}'_C = 0, \quad (1.19)$$

$$\sum F_{ky} = R_E - Q_2 \cos 60^\circ - F \sin 30^\circ - Y'_C = 0, \quad (1.20)$$

$$\sum M_C(\vec{F}_k) = -F \cdot \left(\frac{2a}{\cos 30^\circ} - 2a \right) - Q_2 \cdot \left(\frac{2a}{\cos 30^\circ} - a \right) + R_E \cdot 2a \tan 30^\circ = 0. \quad (1.21)$$

Подставим в совместную систему (1.17) – (1.21) исходные данные задачи и, воспользовавшись тем, что модули сил $\vec{X}_C$, $\vec{Y}_C$ и $\vec{X}'_C$, $\vec{Y}'_C$ равны, найдём:

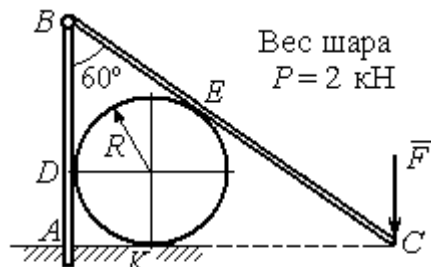
$$X_A = 11,59 \text{ кН}; \quad Y_A = -2,76 \text{ кН}; \quad M_A = 42,87 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$X_C = -15,59 \text{ кН}; \quad Y_C = 2,76 \text{ кН}; \quad R_E = 11,76 \text{ кН}.$$

Полные величины сил реакции жесткой заделки и взаимного давления в шарнире C : $R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = 11,91 \text{ кН}$; $R_C = \sqrt{X_C^2 + Y_C^2} = 15,83 \text{ кН}$.

Упражнения

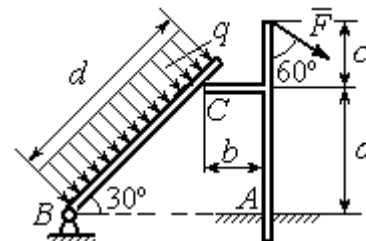
Упражнение 1.5



$$R = 1 \text{ м}, \quad F = 8 \text{ кН}.$$

Найти реакцию жесткой заделки в точке A , реакцию шарнира B , реакцию опоры шара в точках D, K, E

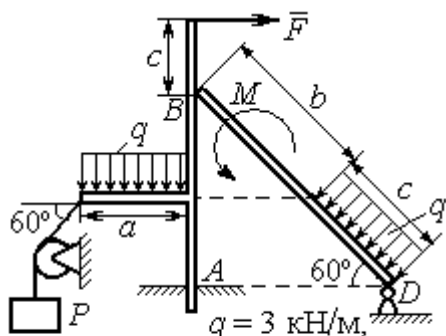
Упражнение 1.6



$$a = 2 \text{ м}, \quad b = 1 \text{ м}, \quad c = 1 \text{ м}, \quad d = 5 \text{ м}, \\ q = 3 \text{ кН/м}, \quad F = 4 \text{ кН}.$$

Найти реакцию жесткой заделки в точке A , реакцию шарнира B и реакцию опоры в точке C

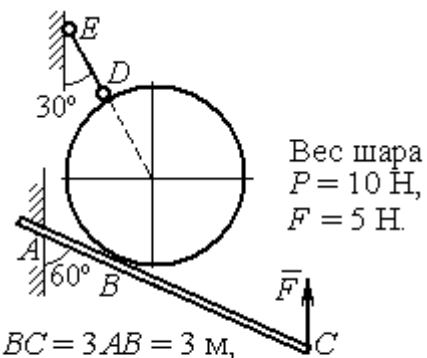
Упражнение 1.7



$$q = 3 \text{ кН/м}, \quad F = 4 \text{ кН}, \quad P = 3 \text{ кН}, \quad M = 2 \text{ кН}\cdot\text{м}, \\ a = 2 \text{ м}, \quad b = 3 \text{ м}, \quad c = 1 \text{ м}$$

Найти реакцию заделки A , шарнира D и реакцию опоры B

Упражнение 1.8



$$\text{Вес шара} \\ P = 10 \text{ Н}, \\ F = 5 \text{ Н}.$$

$$BC = 3AB = 3 \text{ м},$$

Найти реакцию жесткой заделки A , реакцию стержня DE и реакцию опоры в точке B

Рис. 1.37. Задания для самостоятельного решения. Упражнения 1.5 – 1.8

1.5. Произвольная пространственная система сил

Моментом силы относительно оси называют момент вектора проекции этой силы на плоскость, перпендикулярную оси, относительно точки пересечения

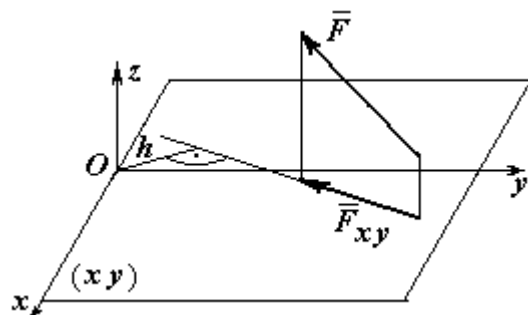


Рис. 1.38. Момент силы относительно оси

ния оси с плоскостью. На рис. 1.38 показано вычисление момента силы $\vec{F}$ относительно оси z :

$$M_z(\vec{F}) = M_O(\vec{F}_{xy}) = F_{xy}h,$$

где O – точка пересечения оси z с плоскостью xy , перпендикулярной оси z ;

$\vec{F}_{xy}$ – вектор проекции силы $\vec{F}$ на плос-

кость xy ; h – плечо силы $\vec{F}_{xy}$ относительно центра O . Момент силы относительно оси считается положительным, если при взгляде с положительного направления оси он создаёт вращение против хода часовой стрелки.

Равновесие пространственной системы сил. Для равновесия пространственной системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на оси прямоугольной системы координат x, y, z были равны нулю и суммы моментов всех сил относительно тех же осей также были равны нулю:

$$\sum F_{kx} = 0; \sum F_{ky} = 0; \sum F_{kz} = 0;$$

$$\sum M_x(\vec{F}_k) = 0; \sum M_y(\vec{F}_k) = 0; \sum M_z(\vec{F}_k) = 0,$$

где F_{kx}, F_{ky}, F_{kz} – проекции всех сил на координатные оси; $M_x(\vec{F}_k), M_y(\vec{F}_k), M_z(\vec{F}_k)$ – моменты всех сил относительно выбранных осей, $k = 1, 2, \dots$

Примеры решения задач на равновесие пространственных систем сил

Задача 13. Горизонтальный вал (рис. 1.39) закреплен в подпятнике C и подшипнике K . Вал имеет шкив B радиуса R и шкив D радиуса r .

Оба шкива перпендикулярны оси вала. Рукоять AE параллельна оси Cx .

Нить, удерживающая груз Q , сходит со шкива D по касательной в точке L параллельно плоскости zCx , так что радиус шкива D , проведённый в точку схода нити, составляет с вертикальным диаметром угол 30° .

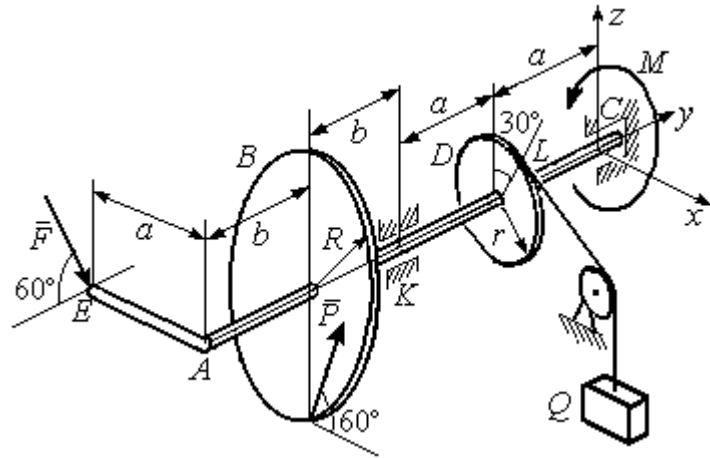


Рис. 1 39. Равновесие вала

На вал действуют силы: $\vec{F}$, $\vec{P}$ и пара сил с моментом M . Сила $\vec{F}$ находится в плос-

кости, параллельной zCy , и составляет угол 60° с направлением оси Cy . Сила $\vec{P}$ приложена в нижней точке шкива B , параллельна плоскости zCx и составляет угол 60° с направлением оси Cx . Определить вес удерживаемого груза Q и реакции подшипника и подпятника, если $P = 4$ кН; $F = 2$ кН; $M = 3$ кН·м; $R = 0,6$ м; $r = 0,3$ м; $a = 0,8$ м; $b = 0,4$ м.

Решение

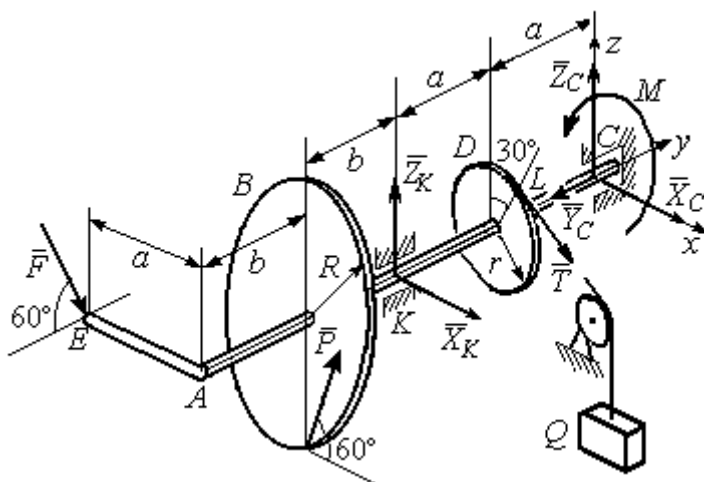


Рис. 1.40. Активные силы и реакции связей, действующие на вал, при его равновесии

Рассмотрим равновесие вала. На вал действуют активные силы $\vec{F}$, $\vec{P}$, пара с моментом M и реакции связей. Связями являются нить, натянутая грузом Q , подпятник C и подшипник K . Освобождаем вал от связей, заменяя их действие реакциями. Реакцию $\vec{R}_C$ подпятника C рас-

кладываем на три составляющие: $\vec{X}_C$, $\vec{Y}_C$, $\vec{Z}_C$, направленные вдоль координатных осей (рис. 1.40). Реакция $\vec{R}_K$ подшипника K лежит в плоскости, пер-

пендикулярной оси вала, и ее составляющими будут вектора $\vec{X}_K, \vec{Z}_K$, направленные вдоль координатных осей x, z . Реакция нити $\vec{T}$ направлена вдоль нити от точки L и по модулю равна весу груза Q .

Активные силы и реакции связей составляют произвольную пространственную уравновешенную систему сил. При составлении уравнений равновесия изобразим вал вместе с действующими на него силами в проекциях на координатные плоскости (рис. 1.41).

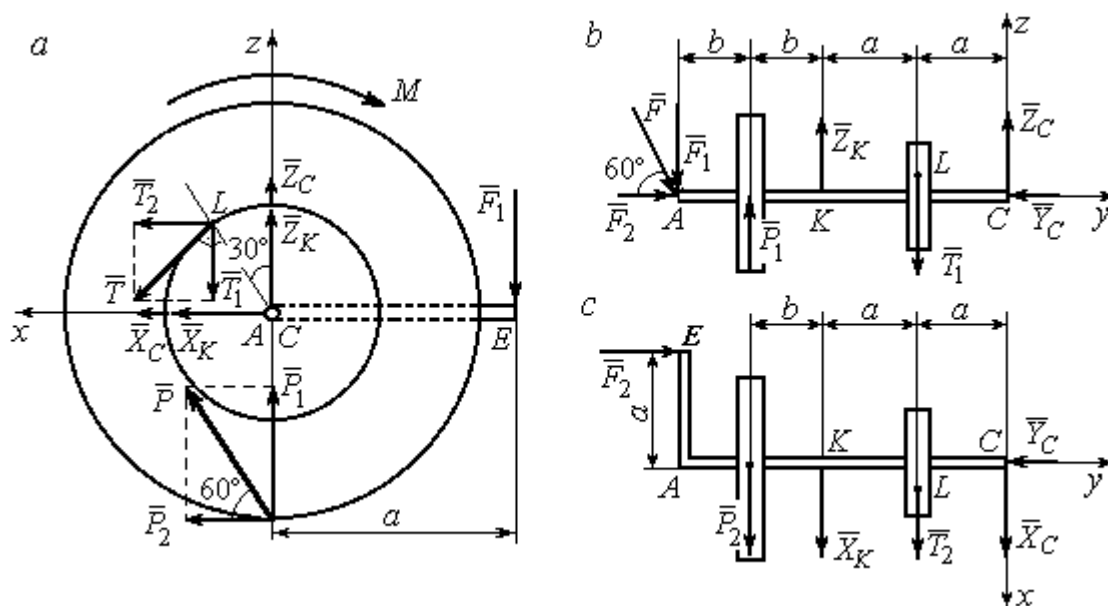


Рис. 1.41. Вал и действующие на него силы в проекциях на координатные плоскости:

- a – вид вала в проекции на плоскость zCx с положительного конца оси y ;
- b – вид вала в проекции на плоскость zCy с положительного конца оси x ;
- c – вид вала в проекции на плоскость xCy с положительного конца оси z

На рис. 1.41, a показаны проекции вала и всех сил на плоскость zCx . Вычисляя моменты проекций сил относительно точки C , получим значения моментов этих сил относительно оси y . При вычислении моментов сил относительно оси x достаточно вычислить моменты проекций сил на плоскость zCy относительно точки C (рис. 1.41, b), а вычисляя моменты проекций сил на

плоскость xCy относительно точки C , получим значения моментов сил относительно оси z (рис. 1.41, c).

Величины проекций сил определяются равенствами: $P_1 = P \cos 30^\circ$;
 $P_2 = P \cos 60^\circ$; $T_1 = T \cos 60^\circ$; $T_2 = T \cos 30^\circ$; $F_1 = F \cos 30^\circ$; $F_2 = F \cos 60^\circ$.

Составляем уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx} = P \cos 60^\circ + X_K + T \cos 30^\circ + X_C = 0; \quad \sum F_{ky} = F \cos 60^\circ - Y_C = 0;$$

$$\sum F_{kz} = P \cos 30^\circ + Z_K - T \cos 60^\circ + Z_C - F \cos 30^\circ = 0;$$

$$\sum M_x(\vec{F}_k) = T \cos 60^\circ \cdot a - Z_K \cdot 2a - P \cos 30^\circ \cdot (2a + b) + \\ + F \cos 30^\circ \cdot (2a + 2b) = 0;$$

$$\sum M_y(\vec{F}_k) = -F \cos 30^\circ \cdot a - P \cos 60^\circ \cdot R + T \cdot r - M = 0;$$

$$\sum M_z(\vec{F}_k) = T \cos 30^\circ \cdot a + X_K \cdot 2a + P \cos 60^\circ \cdot (2a + b) - F \cos 60^\circ \cdot a = 0.$$

Подставляя исходные данные задачи, получим систему шести уравнений с шестью неизвестными, решая которую, найдём:

$$X_C = -8,09 \text{ кН}, \quad Y_C = 1 \text{ кН}, \quad Z_C = 4,65 \text{ кН}, \quad Z_K = 2,92 \text{ кН};$$

$$X_K = -10,02 \text{ кН}, \quad T = 18,6 \text{ кН}.$$

Реакции подпятника и подшипника:

$$R_C = \sqrt{X_C^2 + Y_C^2 + Z_C^2} = 9,4 \text{ кН}, \quad R_K = \sqrt{X_K^2 + Z_K^2} = 10,44 \text{ кН}.$$

Вес удерживаемого груза Q равен реакции нити T .

Задача 14. Однородная прямоугольная плита (рис. 1.42) веса 25 кН прикреплена к полу при помощи шарового шарнира A , подшипника B и удерживается в вертикальном положении стержнем CO , лежащим в плоскости, перпендикулярной плоскости плиты так, что $\angle COB = 60^\circ$. В плоскости плиты на неё действуют пара сил с моментом $M = 6 \text{ кН} \cdot \text{м}$, сила $\vec{F}_1$, равная $F_1 = 10 \text{ кН}$, приложенная на верхней стороне плиты в точке H под углом 30° к линии EC , и сила $\vec{F}_2$, равная $F_2 = 5 \text{ кН}$, приложенная в точке D параллельно стороне AB .

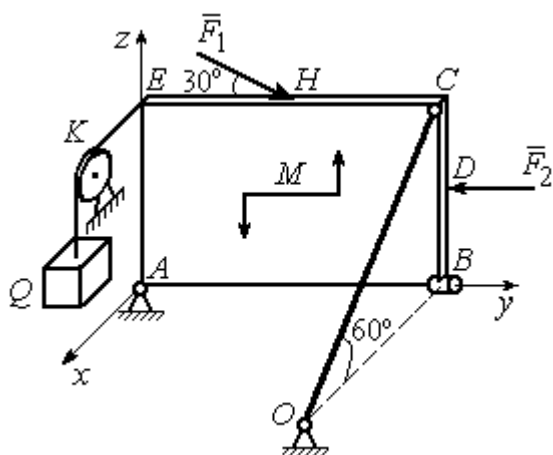


Рис. 1.42. Равновесие плиты

В точке E к плите прикреплён трос, на другом конце которого, перекинутым через блок K , подвешен груз весом $Q = 20$ кН. Отрезок троса EK перпендикулярен плоскости плиты.

Определить реакции шарнира A , подшипника B и реакцию стержня CO , если ширина плиты $AB = 3$ м; высота $AE = 2$ м; $EH = HC$, $CD = DB$.

Решение

Рассмотрим равновесие плиты $ABCE$. На плиту действуют активные силы $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, сила тяжести плиты $\vec{P}$, пара сил с моментом M и реакции связей. Связями являются пространственный шарнир A , нить, натянутая грузом Q , подшипник B и невесомый стержень CO .

Выберем систему координат, как показано на рис. 1.43. Освобождаем плиту от связей, заменяя их действие реакциями. Реакцию $\vec{R}_A$ шарнира A раскладываем на три составляющие: $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, $\vec{Z}_A$, направленные вдоль координатных осей. Реакция нити $\vec{T}$ направлена вдоль нити параллельно оси Ax и равна весу груза

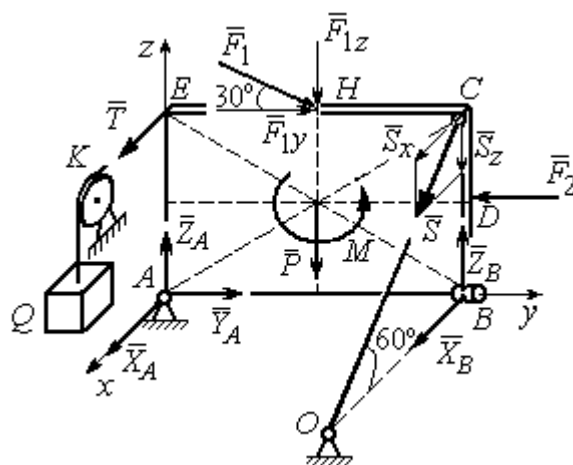


Рис. 1.43. Силы, действующие на плиту, при её равновесии

$T = Q$, реакция $\vec{R}_B$ подшипника B расположена в плоскости, перпендикулярной оси Ay , и представлена в виде двух своих составляющих $\vec{X}_B$, $\vec{Z}_B$, реакция $\vec{S}$ невесомого стержня CO направлена вдоль стержня. Направления активных сил и реакций связей показаны на рис. 1.43.

Силы, действующие на плиту, и реакции связей составляют пространственную уравновешенную систему сил. Составим уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx} = X_A + T + X_B + S \cos 60^\circ = 0;$$

$$\sum F_{ky} = Y_A - F_2 + F_1 \cos 30^\circ = 0;$$

$$\sum F_{kz} = Z_A - F_1 \cos 60^\circ - P + Z_B - S \cos 30^\circ = 0;$$

$$\begin{aligned} \sum M_x(\vec{F}_k) = & -F_1 \cos 60^\circ \cdot 0,5 \cdot AB - F_1 \cos 30^\circ \cdot AE - P \cdot 0,5 \cdot AB + \\ & + F_2 \cdot BD + Z_B \cdot AB - S \cos 30^\circ \cdot AB + M = 0; \end{aligned}$$

$$\sum M_y(\vec{F}_k) = T \cdot AE + S \cos 60^\circ \cdot CB = 0;$$

$$\sum M_z(\vec{F}_k) = -X_B \cdot AB + S \cos 60^\circ \cdot EC = 0.$$

Подставляя исходные данные задачи, получим систему уравнений, решая которую, найдём значения реакций: $S = -40$ кН; $X_B = -20$ кН; $Z_B = -17,53$ кН; $X_A = 20$ кН; $Y_A = -3,66$ кН; $Z_A = 12,89$ кН.

Задача 15. Прямоугольная фрамуга $ACEB$ весом $P = 50$ Н, закрепленная в точках A и B цилиндрическими шарнирами, открыта на угол 60° (рис. 1.44). На фрамуге в точке H закреплена верёвка, другой конец которой, переброшенный через невесомый блок K , несёт груз Q . При этом линия верёвки HK параллельна прямой ED . На фрамугу действует сила $\vec{F}$, приложенная в верхнем углу в точке C перпендикулярно плоскости фрамуги и равная по величине $F = 15$ Н.

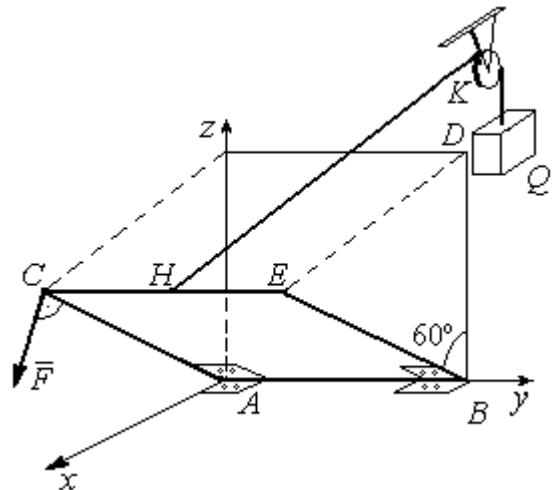


Рис. 1.44. Равновесие фрамуги

Определить вес груза Q , необходимый для удержания фрамуги в равновесии и реакции цилиндрических шарниров A и B , если размеры фрамуги $BE = BD = 2$ м; $AB = 3$ м; $CH = HE$.

Решение

Рассмотрим равновесие фрамуги $ABCE$. Изображаем внешние активные

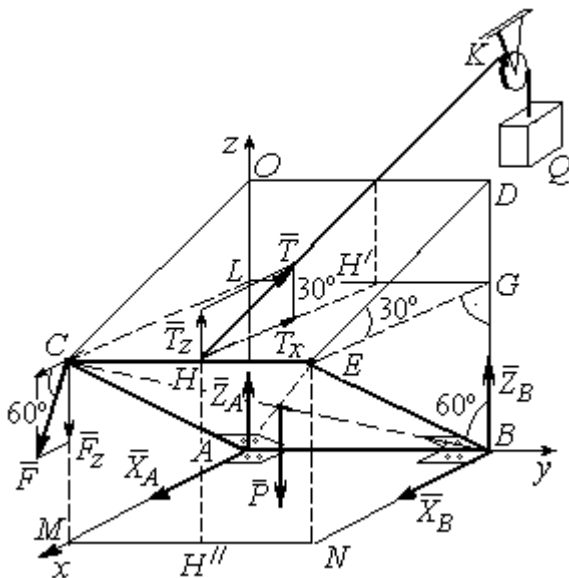


Рис. 1.45. Активные силы и реакции при равновесии фрамуги

силы: силу $\vec{F}$, силу тяжести фрамуги $\vec{P}$, а также реакции связей. Связями являются два цилиндрических шарнира A и B (связь, аналогичная подшипнику) и нить, натянутая грузом Q . Выберем систему координат $Axuz$, как показано на рис. 1.45. Освобождаем фрамугу от связей, заменяя их действие реакциями. Реакции $\vec{R}_A$ и $\vec{R}_B$ шарниров A и B раскладываем на взаимно перпендикулярные составляющие: $\vec{X}_A$, $\vec{Z}_A$ и $\vec{X}_B$, $\vec{Z}_B$ в

плоскостях, перпендикулярных оси вращения фрамуги (ось Ay), реакция нити $\vec{T}$ направлена вдоль нити и равна весу груза $T = Q$. Направления активных сил и реакций связей показаны на рис. 1.45.

Силы, действующие на фрамугу, составляют уравновешенную пространственную систему сил.

Составим уравнения равновесия. При этом для удобства вычисления моментов сил относительно осей изобразим плоскости, перпендикулярные этим осям, с проекциями на них сил, действующих на фрамугу (рис. 1.46). Тогда моменты сил, действующих на фрамугу, например, относительно оси Ax определяются как моменты векторов проекций этих сил на плоскость zAy относительно точки A – пересечения оси Ax и перпендикулярной ей плоскости zAy (см. рис. 1.46, a). Аналогично при вычислении моментов сил относительно оси Az достаточно вычислить моменты векторов проекций сил на плоскость xAy относительно точки A (см. рис. 1.46, b).

Значения моментов сил относительно оси Ay получим, вычисляя моменты векторов проекций сил на плоскость zAx относительно точки A (см. рис. 1.46, c).

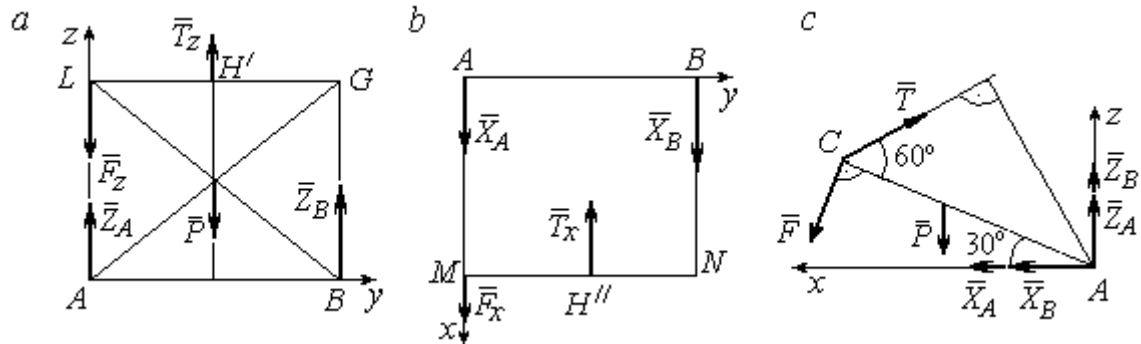


Рис. 1.46. Фрамуга и действующие на неё силы в проекциях на координатные плоскости:

a – проекция на плоскость zAy со стороны положительного направления оси x ;
 b – проекция на плоскость xAy со стороны положительного направления оси z ; c – проекция на плоскость zAx со стороны положительного направления оси y

Уравнения равновесия фрамуги имеют вид:

$$X_A + X_B + F \cos 60^\circ - T \cos 30^\circ = 0;$$

$$Z_A + Z_B - P - F \cos 30^\circ + T \cos 60^\circ = 0;$$

$$\begin{aligned} \sum M_x(\vec{F}_k) &= T_z \cdot 0,5 \cdot AB - P \cdot 0,5 \cdot AB + Z_B \cdot AB = \\ &= T \cos 60^\circ \cdot 0,5 \cdot AB - P \cdot 0,5 \cdot AB + Z_B \cdot AB = 0; \end{aligned}$$

$$\sum M_y(\vec{F}_k) = P \cdot 0,5 \cdot AC \cos 30^\circ + F \cdot AC - T \cdot AC \sin 60^\circ = 0;$$

$$\sum M_z(\vec{F}_k) = -X_B \cdot AB + T_x \cdot 0,5 \cdot AB = -X_B \cdot AB + T \cos 30^\circ \cdot 0,5 \cdot AB = 0.$$

Подставляя исходные данные из условия задачи и решая систему, найдём реакции шарниров фрамуги:

$$X_B = 18,22 \text{ Н}, Z_B = 14,41 \text{ Н}, R_B = \sqrt{X_B^2 + Z_B^2} = 23,31 \text{ Н};$$

$$X_A = 10,83 \text{ Н}, Z_A = 27,41 \text{ Н}, R_A = \sqrt{X_A^2 + Z_A^2} = 29,47 \text{ Н}.$$

Вес груза, удерживающий фрамугу в равновесии, численно равен реакции верёвки: $Q = T = 42,37 \text{ Н}$.

Задача 16. Горизонтальный коленчатый вал AD (рис. 1.47) закреплён в подпятнике A и подшипнике C . Вал имеет шкив радиуса r и рукоять DH , перпендикулярные оси вала. Рукоять DH образует угол 30° к направлению оси Ax . Колено вала расположено в горизонтальной плоскости xAy . Нить, удерживающая груз Q , намотана на шкив и сходит с него вертикально вниз. На вал действуют силы $\vec{F}$, $\vec{P}$, $\vec{G}$ и пара сил с моментом M . Сила $\vec{F}$ приложена в верхней

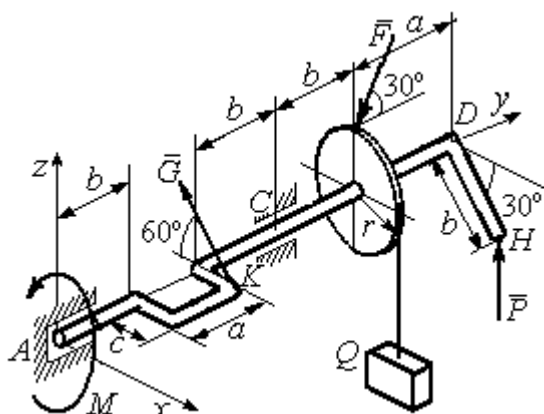


Рис. 1.47. Равновесие вала

пендикулярные оси вала. Рукоять DH образует угол 30° к направлению оси Ax . Колено вала расположено в горизонтальной плоскости xAy . Нить, удерживающая груз Q , намотана на шкив и сходит с него вертикально вниз. На вал действуют силы $\vec{F}$, $\vec{P}$, $\vec{G}$ и пара сил с моментом M . Сила $\vec{F}$ приложена в верхней

точке вертикального диаметра шкива под углом 30° к направлению оси Ay и находится в плоскости zAy . Сила $\vec{P}$ приложена в нижней точке H рукояти параллельно оси Az . Сила $\vec{G}$ приложена в крайней точке K стойки колена вала под углом 60° к стойке и находится в плоскости, перпендикулярной оси вала. Пара сил с моментом M создаёт вращение вала вокруг оси Ay .

Определить вес удерживаемого груза Q и реакции подшипника и подпятника, если: $P = 10$ кН; $F = 12$ кН; $G = 6$ кН; $M = 3$ кН·м; $r = 0,3$ м; $a = 0,8$ м; $b = 0,4$ м; $c = 0,2$ м.

Решение

Рассмотрим равновесие вала. На вал действуют активные силы – $\vec{F}$, $\vec{P}$, $\vec{G}$, пара сил с моментом M и реакции связей. Связями являются нить, натянутая грузом Q , подпятник A и подшипник C .

Освобождаем вал от связей, заменяя их действие реакциями.

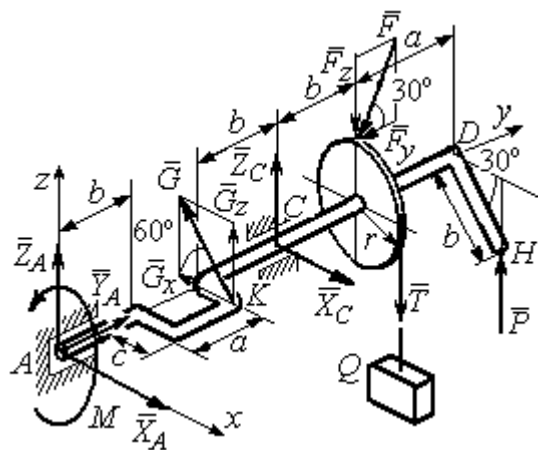


Рис. 1.48. Силы и реакции, действующие на вал при равновесии

Реакцию подпятника A раскладываем на три составляющие: $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Z}_A$, направленные вдоль координатных осей. Реакция подшипника C лежит в плоскости, перпендикулярной оси вала, и также может быть разложена на составляющие $\vec{X}_C, \vec{Z}_C$, направленные вдоль координатных осей Ax, Az . Реакция нити $\vec{T}$ направлена вдоль нити и по модулю равна весу груза, $T = Q$. Действие на вал активных сил и реакций связи показано на рис. 1.48.

Указанные силы составляют произвольную пространственную уравновешенную систему сил.

Составим уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx} = X_A - G \cos 60^\circ + X_C = 0;$$

$$\sum F_{ky} = Y_A - F \cos 30^\circ = 0;$$

$$\sum F_{kz} = Z_A + G \cos 30^\circ + Z_C - F \cos 60^\circ - T + P = 0.$$

$$\begin{aligned} \sum M_x(\vec{F}_k) = G_z(b+a) + Z_C(b+a+b) - F_z(b+a+b+b) + F_y r - \\ - T(b+a+b+b) + P(b+a+b+b+a) = 0; \end{aligned}$$

$$\sum M_y(\vec{F}_k) = -G_z c + Tr - Pb \cos 30^\circ - M = 0;$$

$$\sum M_z(\vec{F}_k) = G_x(b+a) - X_C(b+a+b) = 0,$$

где значения проекций сил на оси $G_z = G \cos 30^\circ$; $G_x = G \cos 60^\circ$; $F_z = F \cos 60^\circ$; $F_y = F \cos 30^\circ$.

Подставляя исходные данные и решая систему, получим значения реакций:

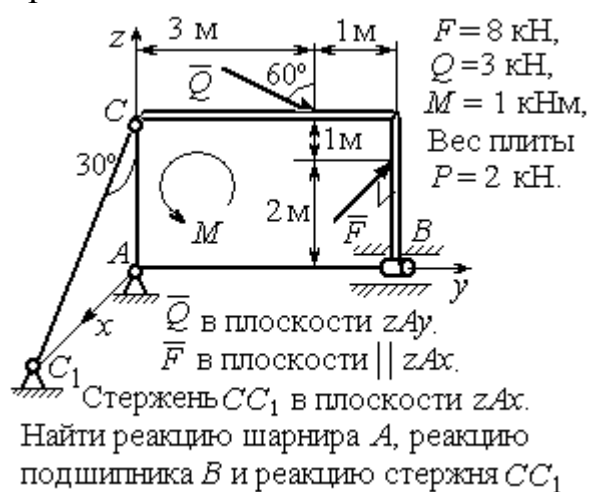
$$X_C = 2,25 \text{ кН}; Z_C = 13,57 \text{ кН}; R_C = \sqrt{X_C^2 + Z_C^2} = 15,58 \text{ кН};$$

$$Z_A = 0,39 \text{ кН}; Y_A = 10,39 \text{ кН}; X_A = 0,75 \text{ кН}; R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2 + Z_A^2} = 10,42 \text{ кН}.$$

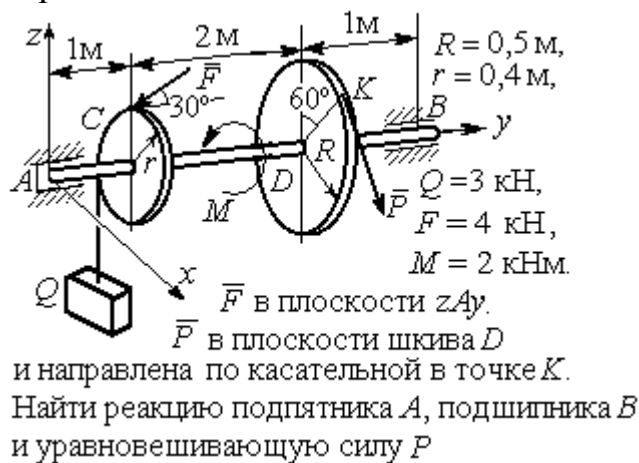
Вес удерживаемого груза равен реакции нити $Q = T = 25,03 \text{ кН}$.

Упражнения

Упражнение 1.9



Упражнение 1.10



Упражнение 1.11



Упражнение 1.12

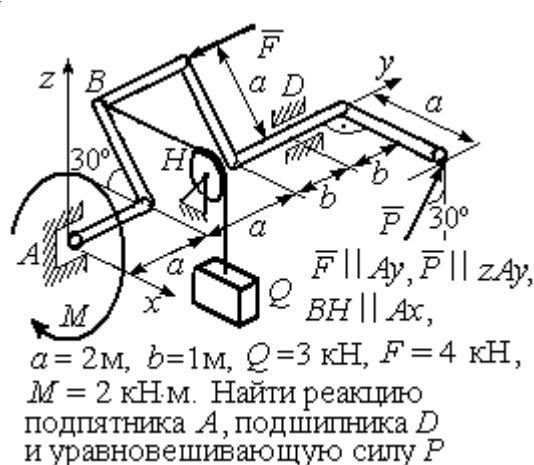


Рис. 1.49. Задания для самостоятельного решения. Упражнения 1.9 – 1.12

1.6. Равновесие тел при наличии сил трения

Трение скольжения. При наличии трения скольжения полная реакция $\vec{R}$ шероховатой опоры раскладывается на нормальную составляющую $\vec{N}$ опоры и

силу $\vec{F}_{\text{тр с}}$ трения скольжения, направленную по касательной к поверхности в точке опоры.

В покое сила трения скольжения может принимать любые значения от нуля до некоторого предельного значения $F_{\text{тр с}}$, называемого **предельной силой трения скольжения** (рис. 1.50).

Наибольший угол φ_0 , который полная реакция шероховатой поверхности образует с нормалью к поверхности, называется **предельным углом трения**.

Предельная сила трения численно равна произведению коэффициента трения на величину нормальной реакции опоры тела на поверхность: $F_{\text{тр с}} = f \cdot N$, где f – безразмерный коэффициент трения, определяемый экспериментально.

Изучение равновесия тел с учетом сил трения сводится к рассмотрению предельного равновесия, когда сила трения принимает предельное значение.

Трением качения называется сопротивление, возникающее при качении одного тела по шероховатой поверхности другого. Реакция шероховатой опоры раскладывается на нормальную составляющую $\vec{N}$ и силу трения качения $\vec{F}_{\text{тр к}}$, направленную по касательной к поверхности качения. При этом за счёт небольшого вдавливания в поверхность качения нормальная реакция опоры $\vec{N}$

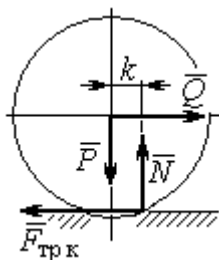


Рис. 1.51. Реакция опоры с трением качения

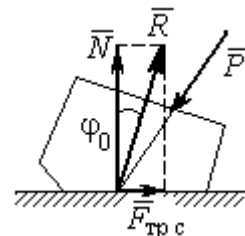


Рис. 1.50. Реакция опоры с трением скольжения

смещена в сторону от линии действия силы тяжести $\vec{P}$ так, что вместе с ней образует пару, противодействующую качению (рис. 1.51). В предельном положении равновесия тела смещение нормальной реакции опоры максимально. Величина максимального смещения k называется **коэффициентом трения качения**, измеряемого в единицах длины. Момент,

создаваемый парой $(\vec{N}, \vec{P})$, называется **моментом трения качения** $M_{\text{тр к}} = kN$.

Максимальная сила трения качения $\vec{F}_{\text{тр к}}$ определяется из условия, что в предельном положении равновесия момент трения качения равен моменту качения, создаваемого парой $(\vec{F}_{\text{тр к}}, \vec{Q})$ (рис. 1.51).

Если максимальная сила трения качения меньше предельной силы трения скольжения, движение представляет качение без скольжения.

Примеры решения задач на равновесие тел с трением

Задача 17. Груз Q весом 50 Н удерживается нитью на шероховатой наклонной плоскости (рис.1.52). Один конец нити закреплен на грузе Q , а к

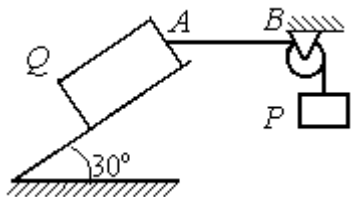


Рис.1.52. Равновесие груза на наклонной плоскости с трением

другому, перекинута через невесомый блок, подвешен груз весом P . Отрезок нити AB горизонтальный. Угол наклона плоскости составляет 30° к горизонту. Определить максимальное и минимальное значения веса груза P , при которых груз Q может начать скольжение по плос-

кости без опрокидывания, если коэффициент трения скольжения между грузом Q и наклонной плоскостью $f = 0,4$.

Решение

Рассмотрим равновесие груза Q при минимальном значении веса груза P . На груз действуют сила тяжести $\vec{Q}$, реакция нити $\vec{T}_{\text{min}}$ и реакция шероховатой поверхности наклонной плоскости, состоящая из нормальной реакции наклонной плоскости $\vec{N}$ и силы трения $\vec{F}_{\text{тр1}}$ (рис. 1.53, а). Особенностью задач на равновесие призм является то, что точка приложения нормальной реакции не определена. В случае необходимости она находится из уравнений равновесия.

Определим направление силы трения. Если вес уравнивающего груза P имеет минимальное значение $P_{\min}$, то при его дальнейшем уменьшении груз Q начнёт двигаться вниз по наклонной плоскости. Таким образом, предельная сила трения $\vec{F}_{\text{тр}1}$, обеспечивающая равновесие при минимальном значении веса груза P , направлена вверх по наклонной плоскости (см. рис. 1.53, a).

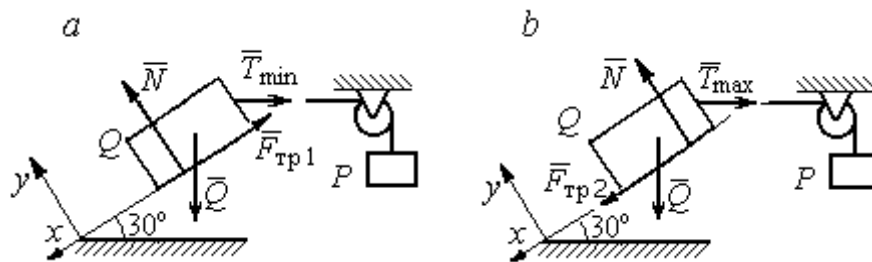


Рис. 1.53. Силы, действующие на груз при равновесии:
 a – минимальный вес уравнивающего груза;
 b – максимальный вес уравнивающего груза

Выберем систему координат, как показано на рис. 1.53, и составим уравнения равновесия в виде проекций сил:

$$\sum F_{kx} = Q \cos 60^\circ - T_{\min} \cos 30^\circ - F_{\text{тр}} = 0;$$

$$\sum F_{ky} = -Q \cos 30^\circ + N - T_{\min} \cos 60^\circ = 0.$$

Полагая в первом уравнении $F_{\text{тр}1} = fN$, решаем систему и находим реакцию нити $T_{\min} = 7,21$ Н. Минимальное значение веса уравнивающего груза равно реакции нити: $P_{\min} = T_{\min} = 7,21$ Н.

Рассмотрим равновесие груза Q при максимальном $P_{\max}$ значении веса груза P . На груз действует сила тяжести $\vec{Q}$, реакция нити $\vec{T}_{\max}$ и реакция шероховатой поверхности наклонной плоскости, состоящая, как и в первом случае, из нормальной реакции наклонной плоскости $\vec{N}$ и силы трения $\vec{F}_{\text{тр}2}$ (см. рис. 1.53, b).

При определении направления силы трения заметим, что увеличение веса груза P больше максимального вызывает движение груза Q вверх по наклонной плоскости. Тогда предельная сила трения $\vec{F}_{\text{тр}2}$, действующая против возможного движения, должна быть направлена вниз по наклонной плоскости (см. рис. 1.53, b). Уравнения равновесия груза Q :

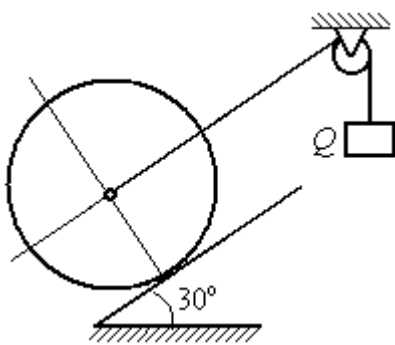
$$\sum F_{kx} = Q \cos 60^\circ - T_{\max} \cos 30^\circ + F_{\text{тр}2} = 0;$$

$$\sum F_{ky} = -Q \cos 30^\circ + N - T_{\max} \cos 60^\circ = 0.$$

Решаем систему, подставляя вместо силы трения её значение $F_{\text{тр}2} = fN$, и находим максимальное значение веса груза P : $P_{\max} = T_{\max} = 63,54 \text{ Н}$.

Таким образом, груз Q будет находиться в равновесии на наклонной плоскости, если вес уравнивающего груза находится в пределах $8,87 < P < 48,87 \text{ Н}$.

Задача 18. Цилиндрический каток радиуса $r = 0,5 \text{ м}$, весом $P = 50 \text{ Н}$ удерживается в равновесии на наклонной плоскости нитью, один конец кото-



рой закреплён в центре катка, а другой перекинут через блок и несёт груз весом Q (рис. 1.54). Коэффициент трения качения катка $f_k = 0,02 \text{ м}$. Наклонная плоскость составляет угол 30° с горизонтом.

Определить наименьшую и наибольшую величину веса Q , при которых каток будет в равновесии. Найти наименьшее значение коэффициента трения скольжения f_c , при котором в случае движения каток будет катиться без скольжения.

Решение

Рассмотрим равновесие катка при минимальном значении веса груза Q . На каток действует сила тяжести $\vec{P}$, реакции нити $\vec{Q}_{\min}$ и реакция шероховатой

поверхности наклонной плоскости $\vec{R}$, имеющая своими составляющими нормальную реакцию поверхности $\vec{N}$ и силу трения качения $\vec{F}_{\text{тр1к}}$ (рис. 1.55, *a*).

Минимальный вес груза $Q_{\min}$ удерживает каток от качения вниз по наклонной плоскости. В этом случае составляющие реакции шероховатой поверхности наклонной плоскости приложены в точке K_1 , слева от нормально-

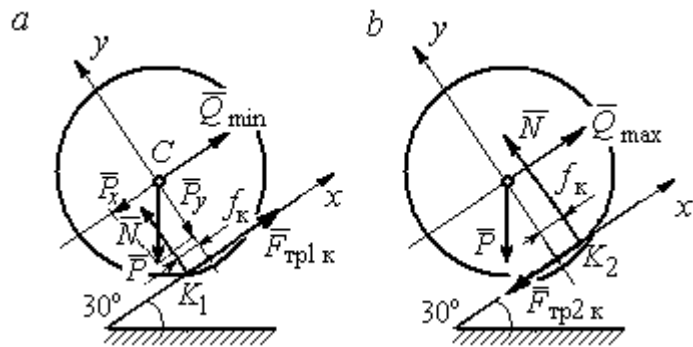


Рис. 1.55. Силы, действующие на каток, при равновесии:

a – минимальный вес груза; *b* – максимальный вес груза

го к плоскости диаметра катка (см. рис. 1.55, *a*). Выбор точки приложения реакции шероховатой поверхности основан на том, что пара $(\vec{N}, \vec{P}_y)$ должна создавать момент трения качения, противодействующий предполагаемому движению.

На каток действует плоская уравновешенная система сил $(\vec{Q}_{\min}, \vec{F}_{\text{тр1к}}, \vec{N}, \vec{P}) \propto 0$. Выберем систему координат, как показано на рис. 1.55, *a*, и составим уравнения равновесия катка, где уравнение моментов сил составлено относительно точки K_1 :

$$\sum F_{kx} = -P \cos 60^\circ + Q_{\min} + F_{\text{тр1к}} = 0;$$

$$\sum F_{ky} = -P \cos 30^\circ + N = 0;$$

$$\sum M_{K_1}(\vec{F}_k) = P \cos 60^\circ \cdot r - Q_{\min} r - P \cos 30^\circ \cdot f_k = 0.$$

Подставляем данные задачи и находим минимальное значение веса груза, при котором каток находится в равновесии $Q_{\min} = 7,68$ Н, величину нормальной реакции наклонной плоскости $N = 43,3$ Н и значение силы трения качения, удерживающей каток в равновесии, $F_{\text{тр1к}} = 17,32$ Н.

Рассмотрим равновесие катка при максимальном значении веса груза $Q_{\max}$. Здесь нарушение предельного равновесия при увеличении веса груза Q вызывает движение катка вверх по наклонной плоскости. В таком случае точка приложения реакции опоры шероховатой поверхности (точка K_2) расположена справа от нормального к плоскости качения диаметра катка (рис. 1.55, *b*).

На каток действует плоская уравновешенная система сил $(\vec{Q}_{\max}, \vec{F}_{\text{тр}2\text{к}}, \vec{N}, \vec{P}) \propto 0$. Выберем систему координат, как показано на рис. 1.55, *b*. Уравнения равновесия катка, где уравнение моментов сил составлено относительно точки K_2 имеют вид:

$$\sum F_{kx} = -P \cos 60^\circ + Q_{\max} - F_{\text{тр}2\text{к}} = 0;$$

$$\sum F_{ky} = -P \cos 30^\circ + N = 0;$$

$$\sum M_{K_2}(\vec{F}_k) = -P \cos 60^\circ \cdot r + Q_{\max} r - P \cos 30^\circ \cdot f_k = 0.$$

Решая систему, получим: $Q_{\max} = 42,32 \text{ Н}$; $N = 43,3 \text{ Н}$; $F_{\text{тр}2\text{к}} = 17,32 \text{ Н}$.

Таким образом, на шероховатой поверхности каток находится в равновесии, если вес уравновешивающего груза выбран в пределах $7,68 \leq Q \leq 42,32 \text{ Н}$.

При любом движении (вверх или вниз) качение катка будет без скольжения, если предельная сила трения скольжения $F_{\text{тр}c}$ больше аналогичной силы трения качения: $F_{\text{тр}c} > F_{\text{тр}к}$. Величина силы трения скольжения не зависит от направления движения: $F_{\text{тр}c} = f_c N = 43,3 f_c$, где f_c – коэффициент трения скольжения. Величина силы трения качения также не зависит от направления движения: $F_{\text{тр}к} = F_{\text{тр}1к} = F_{\text{тр}2к} = 17,32 \text{ Н}$. Таким образом, для определения требуемого коэффициента скольжения имеет место неравенство $43,3 f > 17,32$, откуда $f > 0,4$.

Задача 19. Для подъёма и опускания грузов в выработках используется ступенчатый ворот с тормозом, изображённый на рис. 1.56. Радиусы большой и малой ступенек барабана ворота $R = 0,5$ м и $r = 0,2$ м. Ворот тормозят, надавливая на конец A рычага AB , соединённого цепью CD с

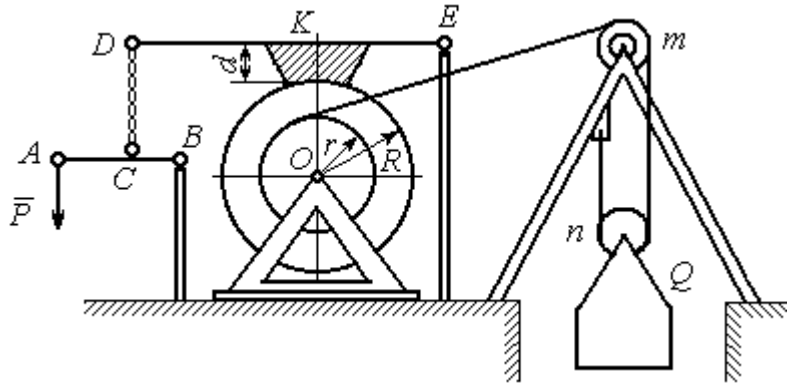


Рис. 1.56. Ворот с колодочным тормозом

концом D тормозного рычага ED с расположенной на нём тормозной колодкой. Коэффициент трения между тормозной колодкой и барабаном ворота $f = 0,4$. На малой ступеньке барабана ворота навита верёвка, другой конец которой, переброшенный через невесомые неподвижный блок m и подвижный блок n , удерживает груз Q весом 1 кН (см. рис. 1.56). Угол наклона к горизонту участка верёвки, соединяющей барабан с неподвижным блоком m , составляет 30° .

Определить величину силы $\vec{P}$, уравнивающей груз Q , и реакции шарниров O и E , если вес ворота $G = 140$ Н, высота тормозной колодки $d = 0,1$ м, расстояния $AB = 1$ м, $BC = 0,1$ м; $ED = 1,2$ м; $EK = 0,6$ м.

Решение

Рассмотрим отдельно равновесие барабана ворота, тормозного рычага DE и рычага AB (рис. 1.57).

Для того; чтобы определить силу натяжения верёвки, прикреплённой к барабану, рассмотрим равновесие груза вместе с подвижным блоком n (см. рис. 1.57, а). На объект равновесия действует сила тяжести груза $\vec{Q}$ и реакции $\vec{T}'$ и $\vec{T}''$ двух ветвей верёвки, огибающей снизу блок n .

Уравнения равновесия такой системы сил:

$$T' + T'' - Q = 0; \quad T''r_{\text{бл}} = T'r_{\text{бл}},$$

где моменты сил вычислены относительно центра блока; $r_{\text{бл}}$ – радиус блока n .

Решая систему уравнений, получим: $T' = T'' = 0,5Q = 500 \text{ Н}$.

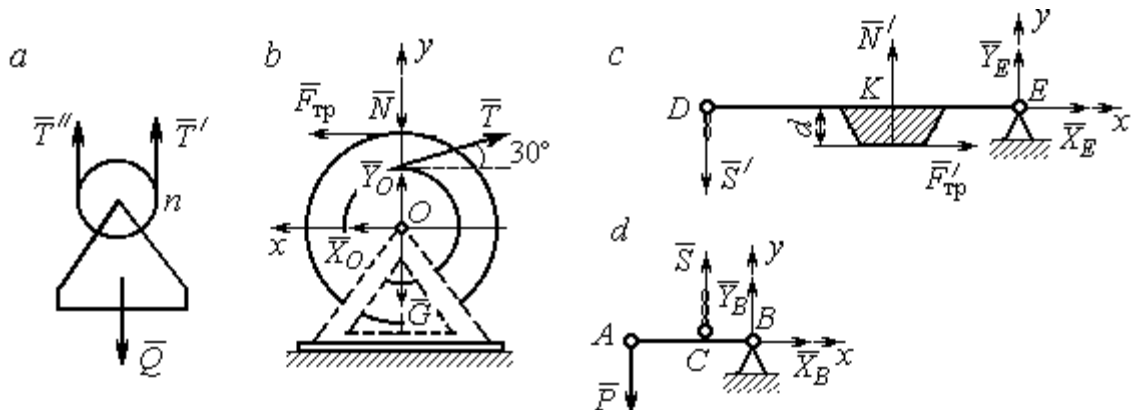


Рис. 1.57. Равновесие элементов конструкции ворота:
 а – равновесие груза; б – силы, действующие на барабан; в – силы, действующие на тормозной рычаг DE; д – силы, действующие на рычаг AB

Рассмотрим равновесие барабана. На барабан действуют: сила веса барабана $\vec{G}$, сила давления $\vec{N}$ со стороны рычага, направленная по радиусу барабана, сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$, действующая по касательной к барабану в сторону, противоположную движению барабана при опускании груза, реакция $\vec{R}_O$ шарнира O , представленная двумя составляющими $\vec{X}_O, \vec{Y}_O$, и реакция верёвки $\vec{T}$, численно равная модулю силы $\vec{T}'$ (см. рис. 1.57, б).

Силы, действующие на барабан, составляют уравновешенную произвольную плоскую систему сил $(\vec{G}, \vec{X}_O, \vec{Y}_O, \vec{T}, \vec{N}, \vec{F}_{\text{тр}}) \sim 0$. Составим уравнение моментов относительно точки O :

$$-Tr + F_{\text{тр}}R = 0, \text{ откуда с учётом } T = T' \quad F_{\text{тр}} = 200 \text{ Н.}$$

Величина силы $\vec{N}$ давления рычага на барабан находится из вида зависимости силы трения $F_{\text{тр}} = fN$, тогда $N = \frac{F_{\text{тр}}}{f} = 500 \text{ Н}$.

Составим уравнения равновесия барабана в виде проекций сил на оси, выбранные, как показано на рис. 1.57, б:

$$\sum F_{kx} = X_O + F_{\text{тр}} - T \cos 30^\circ = 0;$$

$$\sum F_{ky} = Y_O + T \cos 60^\circ - N - G = 0.$$

Решая систему, найдём реакцию шарнира O :

$$X_O = 233 \text{ Н}; Y_O = 390 \text{ Н}; R_O = \sqrt{X_O^2 + Y_O^2} = 454,3 \text{ Н}.$$

Рассмотрим теперь равновесие тормозного рычага DE (см. рис. 1.57, c).

На рычаг действуют сила $\vec{N}'$ давления со стороны барабана и сила трения $\vec{F}'_{\text{тр}}$, приложенные в точке касания тормозной колодки с барабаном, равные по величине и противоположные по направлению, соответственно, силам $\vec{N}$ и $\vec{F}_{\text{тр}}$. Кроме того, в точке D на рычаг действует сила $\vec{S}'$, под действием которой рычаг прижимается к барабану, и реакция шарнира E , разложенная на составляющие $\vec{X}_E, \vec{Y}_E$ вдоль осей x, y . Уравнения равновесия рычага имеют вид:

$$\sum F_{kx} = X_E + F'_{\text{тр}} = 0; \quad \sum F_{ky} = Y_E + N' - S' = 0;$$

$$\sum M_E(\vec{F}_k) = S' \cdot DE - N' \cdot EK + F'_{\text{тр}} d = 0.$$

Подставляя в систему данные из условия задачи, с учётом найденных значений $F'_{\text{тр}} = F_{\text{тр}} = 200 \text{ Н}$, $N' = N = 500 \text{ Н}$, определим усилие S' , с которым тормозной рычаг прижимается к барабану, и реакцию шарнира E :

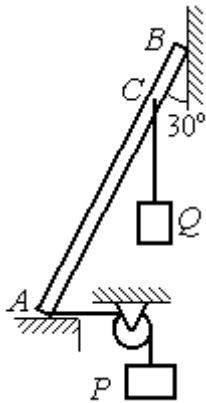
$$S' = 233,33 \text{ Н}; X_E = -200 \text{ Н}; Y_E = -266,67 \text{ Н}; R_E = \sqrt{X_E^2 + Y_E^2} = 333,34 \text{ Н}.$$

Силу $\vec{P}$, необходимую для уравнивания груза Q , найдём рассматривая равновесие рычага AB (см. рис. 1.57, d). На рычаг действуют сила $\vec{P}$, реакция цепи $\vec{S}$ и реакция шарнира B , показанная на рис. 1.57, d составляющими $\vec{X}_B, \vec{Y}_B$.

Составим уравнение равновесия рычага в форме равенства нулю суммы моментов сил относительно точки B : $P \cdot AB - S \cdot CB = 0$. С учётом того, что модули сил $\vec{S}$ и $\vec{S}'$ равны, найдём $P = 23,3 \text{ Н}$.

Упражнения

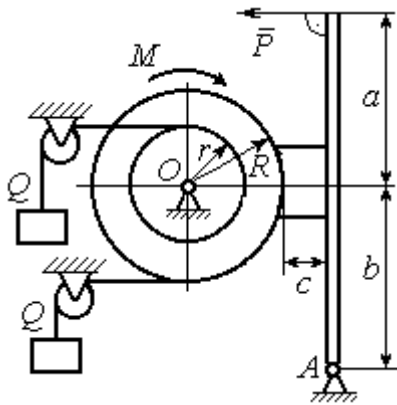
Упражнение 1.13



Невесомый стержень AB опирается в точках A и B на шероховатые поверхности – горизонтальный пол и вертикальную стену. Коэффициент трения между стержнем и полом и между стержнем и стеной $f = 0,2$. Угол наклона стержня к вертикальной стене 30° . В точке C к стержню подвешен груз Q . Стержень удерживается в равновесии горизонтальной нитью, прикреплённой в точке A и перекинутой через блок. К другому концу нити подвешен груз P . В каких границах можно изменять вес груза P , не нарушая равновесия стержня?

$$AB = 3 \text{ м}, AC = 2 \text{ м}, Q = 200 \text{ Н}.$$

Упражнение 1.14



Шкив O состоит из двух барабанов радиусов R и r . На барабаны навиты верёвки, натянутые одинаковыми грузами Q . К шкиву приложена пара сил с моментом M . Шкив затормаживается с помощью рычажного тормоза. Коэффициент трения между тормозной колодкой и шкивом $f = 0,4$. Определить силу $\vec{P}$, приложенную к рычагу тормозной колодки и уравнивающую шкив. Найти реакцию шарнира A .

$$a = b = 1 \text{ м}; c = 0,1 \text{ м}; Q = 100 \text{ Н}; M = 120 \text{ Н} \cdot \text{м}; \\ R = 0,6 \text{ м}; r = 0,2 \text{ м}.$$

Рис. 1.58. Задания для самостоятельного решения. Упражнения № 1.13, 1.14

2. КИНЕМАТИКА ТОЧКИ И ТВЁРДОГО ТЕЛА

2.1. Криволинейное движение точки

Кривая, которую описывает движущаяся точка, называется **траекторией** точки. Движение точки может быть задано **векторным, координатным** или **естественным** способами.

Координатный способ задания движения точки основан на том, что положение точки определяется ее координатами, заданными для каждого момента времени (рис. 2.1): $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$.

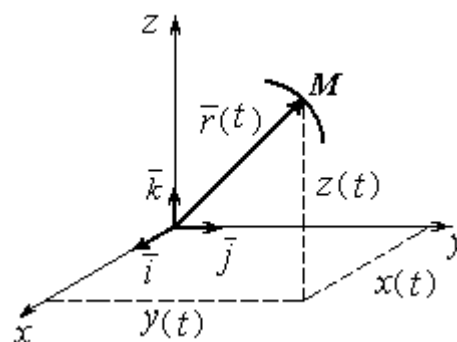


Рис. 2.1. Векторный и координатный способы задания движения точки

Мгновенная скорость, или скорость точки в данный момент времени, является векторной величиной и определяется как производная по времени от радиус-вектора точки: $\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}$. **Вектор скорости точки $\vec{V}$ всегда направлен по касательной к траектории в сторону движения точки.** Величины V_x , V_y , V_z проекций вектора скорости $\vec{V}$ на координатные оси определяются как производные по времени от соответствующих координат: $V_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$; $V_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}$; $V_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}$. Модуль вектора скорости: $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$.

Мгновенное ускорение точки, или ускорение в данный момент времени, является векторной величиной и определяется как производная по времени от вектора скорости точки или как вторая производная от радиус-вектора точки:

$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$. Величины a_x , a_y , a_z проекций вектора ускорения на координатные оси определяются как производные по времени от соответствующих проекций вектора скорости:

натные оси определяются равенствами: $a_x = \frac{dV_x}{dt} = \dot{V}_x = \ddot{x}$; $a_y = \frac{dV_y}{dt} = \dot{V}_y = \ddot{y}$;

$a_z = \frac{dV_z}{dt} = \dot{V}_z = \ddot{z}$. Модуль вектора ускорения: $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

Естественный способ задания движения используется, если траектория движения точки заранее известна. Тогда положение точки однозначно опреде-

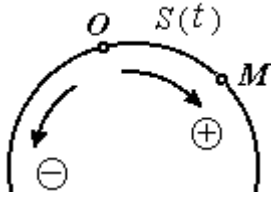


Рис. 2.2. Естественный способ задания движения точки

ляется длиной дуги $OM = S(t)$, отсчитываемой от некоторой фиксированной точки O , принятой за начало отсчета (рис. 2.2). При этом заранее устанавливаются положительное и отрицательное направления отсчета дуговой координаты.

При естественном способе задания движения вектор скорости точки определяется равенством: $\vec{V} = \dot{S} \vec{\tau} = V_\tau \vec{\tau}$, где S – дуговая координата; $\vec{\tau}$ – единичный вектор касательной к траектории движения, направленный в сторону положительного направления дуговой координаты. Величина $V_\tau = \dot{S}$ называется алгебраической скоростью точки и представляет собой проекцию вектора скорости точки на касательную к траектории.

Вектор ускорения точки $\vec{a}$ раскладывается на составляющие по направлениям естественных осей – касательную (ось τ) и перпендикулярную к ней нормальную (ось n):

$$\vec{a} = a_\tau \vec{\tau} + a_n \vec{n} \text{ или } \vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n,$$

где $\vec{\tau}$ – единичный направляющий вектор касательной; $\vec{n}$ – единичный направляющий вектор нормали траектории; a_τ – проекция ускорения точки на касательную называется **касательным ускорением**; a_n – проекция вектора ускорения точки на нормаль называется **нормальным ускорением** (рис. 2.3). Касательная составляющая ускорения характеризует изменение величины скорости точки, нормальная – изменение направления вектора скорости.

Если проекции V_τ и a_τ имеют одинаковые знаки (направлены в одну сторону), движение будет ускоренным, если разных знаков (разнонаправлены) – замедленным (см. рис. 2.3, *a*, *b*).

Проекции ускорения на естественные оси и модуль вектора ускорения вычисляются по формулам:

$$a_\tau = \ddot{S} = \dot{V}_\tau, \quad a_n = \frac{V^2}{\rho};$$

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2},$$

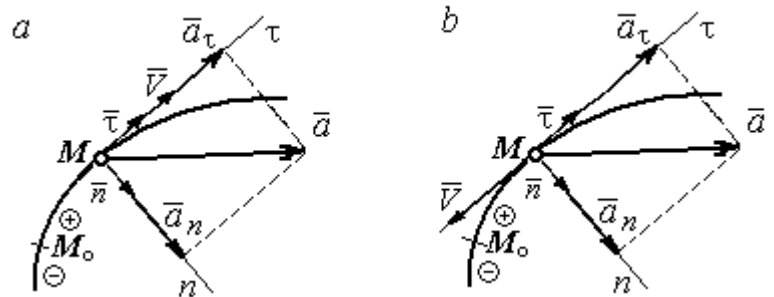


Рис. 2.3. Скорость и ускорение точки. Разложение ускорения на нормальную и касательную составляющие:
a – ускоренное движение; *b* – замедленное движение

где ρ – радиус кривизны траектории. Иногда при вычислении касательной составляющей ускорения удобнее пользоваться формулой $a_\tau = \frac{a_x V_x + a_y V_y}{V_\tau}$.

Вектор нормальной составляющей ускорения $\vec{a}_n$ всегда направлен к центру кривизны траектории. Вектор касательной составляющей ускорения $\vec{a}_\tau$ направлен в сторону положительного направления касательной (по направлению единичного вектора $\vec{\tau}$), если $\ddot{S} > 0$, и в противоположную сторону – при $\ddot{S} < 0$.

Криволинейное движение точки называется **равномерным**, если проекция вектора скорости на касательную – постоянная величина: $V_\tau = \text{const}$.

Криволинейное движение точки называется **равнопеременным**, если постоянна проекция вектора ускорения на касательную: $a_\tau = \text{const}$.

Примеры решения задач на криволинейное движение точки

Задача 20. Движение точки задано координатным способом уравнениями $x(t) = 2\sin\pi t$, $y(t) = \cos 2\pi t$, где x, y – в сантиметрах, t – в секундах.

Найти траекторию точки, величину и направление скорости и ускорения в моменты времени $t_1 = 0,25$ с, $t_2 = 0,75$ с. Определить участки ускоренного и замедленного движений точки.

Решение

Определяем траекторию точки. Из уравнений движения находим $y = \cos 2\pi t = \cos^2 \pi t - \sin^2 \pi t = 1 - 2\sin^2 \pi t = 1 - \frac{x^2}{2}$. Траекторией точки является парабола $y = 1 - \frac{x^2}{2}$ (рис. 2.4). Однако не вся парабола будет траекторией движения, а только та её часть, точки которой согласно уравнениям движения удовлетворяют неравенствам: $-2 \leq x \leq 2$, $-1 \leq y \leq 1$.

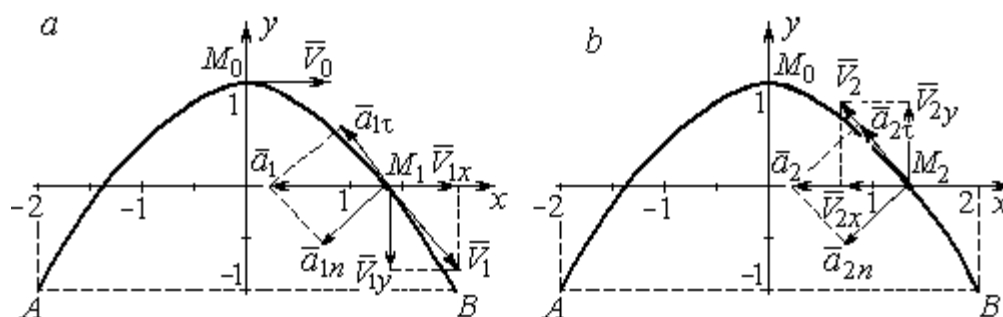


Рис. 2.4. Траектория движения точки:

a – замедленное движение точки на участке от M_0 к B ;
b – ускоренное движение точки на участке от B к M_0

Определяем параметры движения точки в момент времени $t_1 = 0,25$ с.

Находим координаты x_1, y_1 положения точки M_1 :

$$x_1 = x(0,25) = 2\sin \frac{\pi}{4} = \sqrt{2} \text{ см}, \quad y_1 = y(0,25) = \cos \frac{\pi}{2} = 0.$$

Находим проекции V_{1x}, V_{1y} вектора $\vec{V}_1$ скорости точки на оси системы координат:

$$V_x(t) = \dot{x} = 2\pi \cos \pi t; \quad V_y(t) = \dot{y} = -2\pi \sin 2\pi t;$$

$$V_{1x} = V_x(0,25) = 2\pi \cos \frac{\pi}{4} = \pi\sqrt{2} \text{ см/с}; \quad V_{1y} = V_y(0,25) = -2\pi \sin \frac{\pi}{2} = -2\pi \text{ см/с}.$$

Модуль скорости $V_1 = \sqrt{V_{1x}^2 + V_{1y}^2} = \pi\sqrt{6}$ см/с.

Находим проекции a_{1x} , a_{1y} вектора $\vec{a}_1$ ускорения точки на оси системы координат:

$$a_x(t) = \dot{V}_x = -2\pi^2 \sin \pi t; \quad a_y(t) = \dot{V}_y = -4\pi^2 \cos 2\pi t;$$

$$a_{1x} = a_x(0,25) = -2\pi^2 \sin \frac{\pi}{4} = -\pi^2 \sqrt{2} \text{ см/с}^2; \quad a_{1y} = a_y(0,25) = -4\pi^2 \cos \frac{\pi}{2} = 0.$$

Модуль вектора ускорения $a_1 = \sqrt{a_{1x}^2 + a_{1y}^2} = \pi^2 \sqrt{2}$ см/с.

Положение точки M_1 в момент времени $t_1 = 0,25$ с, построение векторов скорости $\vec{V}_1$ и ускорения $\vec{a}_1$ по их проекциям показано на рис. 2.4, а.

Для того чтобы определить характер движения точки в положении M_1 – ускоренное или замедленное, найдём направление касательного ускорения. С этой целью разложим известный уже вектор ускорения $\vec{a}_1$ на нормальную и касательную составляющие согласно равенству $\vec{a}_1 = \vec{a}_{1\tau} + \vec{a}_{1n}$. При этом направление касательной совпадает с направлением вектора скорости $\vec{V}_1$, а направление нормали – перпендикулярно ему. Касательное ускорение $\vec{a}_{1\tau}$ оказалось направленным противоположно вектору скорости $\vec{V}_1$ (см. рис. 2.4, а). Следовательно, точка в рассматриваемый момент движется замедленно.

В момент времени $t_2 = 0,75$ с положение M_2 совпадает с положением M_1 :

$$x_2 = x(0,75) = 2\sin \frac{3\pi}{4} = \sqrt{2} \text{ см}; \quad y_2 = y(0,75) = \cos 2\pi \frac{3}{4} = 0.$$

Проекции векторов скорости $\vec{V}_2$ и ускорения $\vec{a}_2$ точки на оси координат:

$$V_{2x} = V_x(0,75) = 2\pi \cos \frac{3\pi}{4} = -\pi\sqrt{2} \text{ см/с}; \quad V_{2y} = V_y(0,75) = -2\pi \sin 2\pi \frac{3}{4} = 2\pi \text{ см/с};$$

$$a_{2x} = a_x(0,75) = -2\pi^2 \sin \frac{3\pi}{4} = -\pi^2 \sqrt{2} \text{ см/с}^2; \quad a_{2y} = a_y(0,75) = -4\pi^2 \cos 2\pi \frac{3}{4} = 0.$$

Модули скорости и ускорения точки в момент времени $t_2 = 0,75$ с:

$$V_2 = \sqrt{V_{2x}^2 + V_{2y}^2} = \pi\sqrt{6} \text{ см/с}; \quad a_2 = |a_{2x}| = \pi^2\sqrt{2} \text{ см/с}^2.$$

Положение точки M_2 в момент времени $t_2 = 0,75$ с, построение векторов скорости $\vec{V}_2$ и ускорения $\vec{a}_2$ по их проекциям, а также разложение вектора ускорения $\vec{a}_2$ на составляющие $\vec{a}_{2n}$ и $\vec{a}_{2\tau}$ показано на рис. 2.4, *b*. В данном случае вектор касательного ускорения совпадает по направлению с вектором скорости (см. рис. 2.4, *b*), поэтому движение ускоренное.

В целом движение точки по траектории происходит следующим образом. Из начального положения M_0 ($t_0 = 0$) точка с замедлением перемещается по правой ветви параболы. Достигнув положения B на траектории ($t_B = 0,5$ с), точка совершает мгновенную остановку и начинает обратное ускоренное движение. Достигнув положения M_0 ($t_{M_0} = 1$ с), точка переходит на левую часть параболы, где движется аналогично.

Задача 21. Рудничный поезд выходит на закруглённый участок пути радиуса $R = 1$ км с начальной скоростью 54 км/ч. Считая движение поезда равнопеременным, определить его скорость и ускорение в конце 10-й секунды движения по закруглённому участку, если за это время поезд прошёл путь 500 м.

Решение

Примем за начало отсчёта расстояния точку M_0 , где поезд выходит на за-

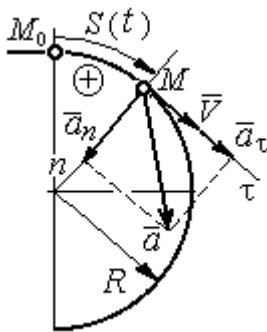


Рис. 2.5. Скорость и ускорение поезда

закруглённый участок пути (рис. 2.5). Предположим, движение поезда равноускоренное и происходит в сторону возрастания дуговой координаты S . В этом случае вектор скорости и вектор касательного ускорения направлены в положительную сторону касательной.

При равнопеременном движении проекция вектора ускорения на касательную постоянна: $a_\tau = \text{const}$. Так как

$a_\tau = \frac{dV_\tau}{dt}$, то $V_\tau = a_\tau t + C_1$, где V_τ – проекция вектора скорости на касательную

ось. Далее, поскольку $V_\tau = \frac{dS}{dt}$, имеем $S = \frac{a_\tau t^2}{2} + C_1 t + C_2$. Константы интегрирования C_1 и C_2 находятся из начальных условий: при $t = 0$ $S = 0$ и $V_\tau = V_0 = 54 \text{ км/ч} = 15 \text{ м/с}$. Подставив эти условия в уравнения движения, найдём константы интегрирования: $C_1 = 15 \text{ м/с}$; $C_2 = 0$.

В результате получена система уравнений:

$$V_\tau = a_\tau t + 15; \quad S = \frac{a_\tau t^2}{2} + 15t.$$

По условию задачи через 10 с от начала движения по закруглённому участку поезд прошёл по дуге путь $S = 500 \text{ м}$. Подставляя это условие во второе уравнение, получим $a_\tau = 7 \text{ м/с}^2$. Скорость поезда в конце пройденного пути с учётом известной величины касательного ускорения найдём из первого уравнения $V_\tau = 85 \text{ м/с}$. Следует заметить, что при указанном движении поезда проекция вектора скорости на касательную ось положительна и равна его модулю: $V_\tau = V$.

Нормальное ускорение поезда при движении по дуге окружности радиуса $R = 1000 \text{ м}$ в момент времени $t = 10 \text{ с}$ равно $a_n = \frac{V_\tau^2}{R} = 7,23 \text{ м/с}^2$. Величина (модуль) полного ускорения поезда $a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = 10,06 \text{ м/с}^2$. Разложение вектора ускорения поезда на нормальную и касательную составляющие показано на рис. 2.5.

Задача 22. Вагонетка движется равнопеременно по дуге окружности радиуса $R = 80 \text{ м}$. За время движения скорость вагонетки изменилась от начальной $V_0 = 18 \text{ км/ч}$ до конечной $V_1 = 9 \text{ км/ч}$.

Определить характер движения – ускоренное или замедленное. Найти ускорение вагонетки в начале и в конце участка движения, если за это время она прошла путь $S = 60 \text{ м}$.

Решение

Выберем некоторую точку на траектории в качестве начальной, а направление положительного отсчёта расстояний – в сторону движения вагонетки.

Уравнения равнопеременного движения точки при начальных условиях: $t = 0$; $S = 0$ и $V_\tau = V_0 = 5$ м/с имеют вид:

$$V_\tau = 5 + a_\tau t; \quad S = 5t + \frac{a_\tau t^2}{2}.$$

Подставим в уравнения параметры движения в момент времени $t = t_1$, когда скорость вагонетки стала $V_{1\tau} = 2,5$ м/с, а пройденный ею путь составил 60 м.

Получим систему:

$$-2,5 = a_\tau t_1; \quad 60 = 5t_1 + \frac{a_\tau t_1^2}{2},$$

откуда найдём касательное ускорение: $a_\tau = -0,16$ м/с².

Отрицательная величина означает, что вектор касательного ускорения направлен в сторону, противоположную направлению вектора скорости, и движение равнозамедленное.

Нормальное ускорение вагонетки в начале движения $a_{n0} = \frac{V_0^2}{R} = 0,31$ м/с².

Полное ускорение $a_0 = \sqrt{a_{n0}^2 + a_\tau^2} = 0,35$ м/с². В конце движения нормальное

ускорение $a_{n1} = \frac{V_1^2}{R} = 0,08$ м/с². Полное ускорение $a_1 = \sqrt{a_{n1}^2 + a_\tau^2} = 0,18$ м/с².

2.2. Поступательное движение и вращение твердого тела вокруг неподвижной оси

Движение твёрдого тела называется **поступательным**, если любой прямолинейный отрезок, связанный с телом, остаётся в процессе движения параллельным самому себе. При **поступательном** движении твёрдого тела все его

точки движутся по одинаковым траекториям, имеют равные скорости и ускорения.

Вращением твёрдого тела вокруг неподвижной оси называется такое его движение, при котором две точки тела остаются неподвижными в течение всего времени движения. Прямая, проходящая через неподвижные точки, называется **осью вращения** тела.

Положение вращающегося тела определяется углом поворота $\varphi = \varphi(t)$ относительно какой-либо системы отсчёта, например, относительно неподвижной плоскости, проходящей через ось вращения.

Вектор угловой скорости вращения тела $\vec{\omega}$ лежит на оси вращения и направлен в сторону, откуда вращение тела видно против хода часовой стрелки. **Алгебраическим значением угловой скорости** вращения тела называют проекцию вектора угловой скорости на ось вращения (ось z) $\omega_z = \dot{\varphi}$. При $\dot{\varphi} > 0$ тело вращается в сторону положительного направления отсчёта угла φ , при $\dot{\varphi} < 0$ – в обратную сторону. Направление угловой скорости обычно показывают дуговой стрелкой вокруг оси вращения. Модуль алгебраического значения угловой скорости вращения тела называется угловой скоростью $\omega = |\omega_z| = |\dot{\varphi}|$.

Алгебраическим значением **углового ускорения** вращающегося тела называют проекцию вектора углового ускорения на ось вращения (ось z) $\varepsilon_z = \dot{\omega}_z = \ddot{\varphi}$. Модуль алгебраического значения углового ускорения вращения тела называется угловым ускорением: $\varepsilon = |\varepsilon_z| = |\dot{\omega}_z| = |\ddot{\varphi}|$.

Вектор углового ускорения направлен вдоль оси вращения. Если $\varepsilon_z \omega_z > 0$ (вектора угловой скорости и углового ускорения сонаправлены), движение ускоренное, если $\varepsilon_z \omega_z < 0$ (векторы угловой скорости и углового ускорения противоположны по направлению), – замедленное.

При равномерном вращении угловая скорость тела (алгебраическое значение) – постоянная величина: $\omega_z = \text{const}$. Угол поворота тела изменяется по линейному закону $\varphi = \varphi_0 + \omega_z t$, где φ_0 – начальный угол поворота тела.

При равнопеременном вращении постоянной величиной является алгебраическое значение углового ускорения: $\varepsilon_z = \text{const}$. В этом случае справедливы уравнения движения: $\omega_z = \omega_{z0} + \varepsilon_z t$; $\varphi = \varphi_0 + \omega_{z0} t + \frac{\varepsilon_z t^2}{2}$.

При вращательном движении тела все его точки движутся по окружностям, радиусы которых равны расстояниям от выбранной точки до неподвижной оси. **Скорость точки** вращающегося твердого тела (в отличие от угловой скорости тела) называют **линейной**, или **окружной скоростью** точки. Модуль скорости точки рассчитывается по формуле: $V = \omega h$, где ω – угловая скорость тела; h – расстояние от точки до оси вращения. Вектор скорости направлен по

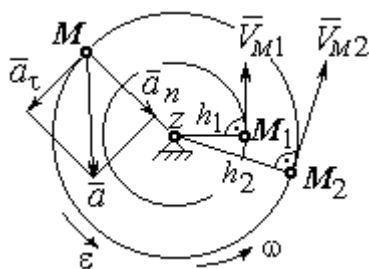


Рис. 2.6. Скорость и ускорение точек вращающегося тела

касательной к описываемой точкой окружности в сторону вращения тела.

При вращении тела отношение скоростей двух точек тела равно отношению расстояний от

этих точек до оси вращения: $\frac{V_{M_1}}{V_{M_2}} = \frac{h_1}{h_2}$ (рис. 2.6).

Ускорение точки вращающегося твердого

тела рассчитывается как ускорение точки при естественном способе задания движения в виде суммы векторов касательного и нормального ускорений (см. рис. 2.6): $\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$, где модули векторов $a_\tau = \varepsilon h$, $a_n = \omega^2 h$;

$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$; ω , ε – угловая скорость и угловое ускорение тела, $\varepsilon = |\varepsilon_z|$; h – расстояние от точки до оси вращения. **Вектор касательного ускорения точки** $\vec{a}_\tau$ направлен по касательной к описываемой точкой окружности в сторону движения точки, если вращение тела ускоренное, и в противоположную сторо-

ну, если движение тела замедленное. **Вектор нормального ускорения точки** $\vec{a}_n$ направлен вдоль радиуса описываемой точкой окружности к её центру.

При **передаче вращения** одного тела другому без проскальзывания соотношения между угловыми скоростями и угловыми ускорениями выражаются из равенства скоростей и касательных ускорений в точке

контакта: $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1}$; $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{r_2}{r_1}$ (рис. 2.7).

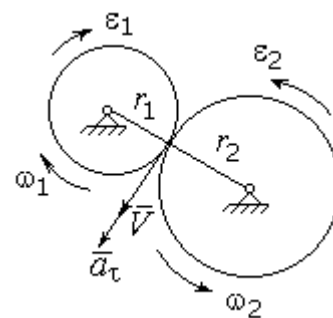


Рис. 2.7. Передача вращения одного тела другому

Примеры решения задач на вращательное движение тел

Задача 23. Вал, начиная вращаться равноускоренно из состояния покоя, за первые 2 мин. сделал 3600 оборотов. Определить угловую скорость вала в конце 2-й минуты и угловое ускорение вала.

Решение

Допустим, вращение вала вокруг оси z происходит в сторону положительного направления отсчёта угла. Тогда алгебраические значения угловой скорости и углового ускорения равны модулям соответствующих векторов $\omega_z = \omega$; $\varepsilon_z = \varepsilon$.

Воспользуемся уравнениями равнопеременного вращения вала с нулевыми начальными условиями (начальный угол поворота $\varphi_0 = 0$ и начальная угловая скорость вала $\omega_0 = 0$). Имеем $\omega = \varepsilon t$; $\varphi = \frac{\varepsilon t^2}{2}$.

Подставим в уравнения параметры движения вала в момент времени $t = t_1 = 2 \text{ мин} = 120 \text{ с}$; $\varphi_1 = 3600 \text{ об} = 7200\pi \text{ рад}$. Получим систему:

$$\omega_1 = \varepsilon \cdot 120, \quad 7200\pi = \frac{\varepsilon \cdot 120^2}{2}, \text{ откуда } \varepsilon = \pi \text{ с}^{-2}; \quad \omega_1 = 120\pi \text{ с}^{-1}.$$

Задача 24. В механизме стрелочного индикатора (рис. 2.8) движение от рейки мерительного штифта 1 передаётся шестерне 2, скреплённой на одной

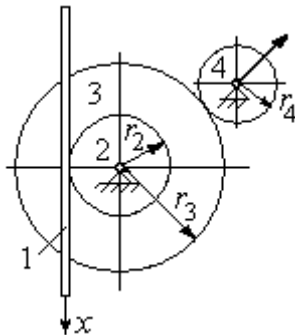


Рис. 2.8. Механизм стрелочного индикатора

оси с зубчатым колесом 3. Колесо 3 сцепляется, в свою очередь, с шестернёй 4, несущей стрелку-индикатор. Определить угловую скорость стрелки, если движение штифта задаётся уравнением $x = 4\sin\pi t$ и радиусы зубчатых колёс: $r_2 = 6$ см, $r_3 = 10$ см, $r_4 = 4$ см.

Решение

Мерительный штифт движется поступательно вдоль оси x (см. рис. 2.8). Проекция скорости любой точки штифта на ось x $V_{1x} = \dot{x} = 4\pi\cos\pi t$ см/с. Такую же скорость имеет и точка касания штифта с шестернёй 2.

Полагая, что точка касания штифта с шестернёй 2 принадлежит и шестерне, найдём алгебраическое значение угловой скорости шестерни 2:

$$\omega_{2z} = \frac{V_{1x}}{r_2} = \frac{4\pi\cos\pi t}{6} = \frac{2\pi}{3}\cos\pi t \text{ рад/с.}$$

Зубчатое колесо 3 скреплено с шестернёй 2 на одной оси и имеет ту же угловую скорость $\omega_{3z} = \omega_{2z}$. Вращение колеса 3 через точку зацепления передаётся шестерне 4. Выразим соотношение между алгебраическими значениями угловых скоростей при передаче вращения одно-

го тела другому: $\frac{\omega_{3z}}{\omega_{4z}} = \frac{r_4}{r_3}$. Отсюда получим: $\omega_{4z} = \frac{V_{1x}r_3}{r_2r_4} = \frac{5\pi}{3}\cos\pi t \text{ с}^{-1}$.

Угловая скорость стрелки равна угловой скорости шестерни 4.

Задача 25. Ведущее колесо 1 подъёмного устройства (рис. 2.9) передаёт движение шестерне 2. На одной оси с шестернёй 2 расположен шкив 3, жёстко скреплённый с шестернёй. Шкив 3 соединяется со шкивом 4 бесконечным

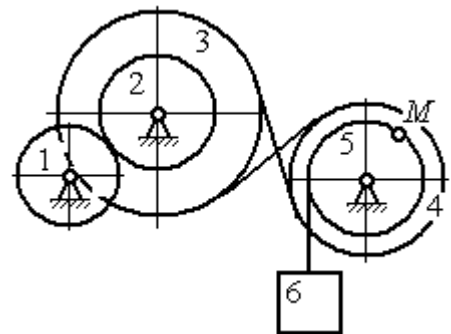


Рис. 2.9. Схема механизма подъёмного устройства

перекрёстным ремнём. Барабан 5 скреплён со шкивом 4 и находится с ним на одной оси. На барабан намотана нить, удерживающая груз 6. По заданному уравнению движения колеса 1 определить скорость, нормальное, касательное и полное ускорения точки M на ободе барабана 5 в момент времени $t_1 = 1$ с, а также скорость и ускорение груза 6. Скольжение между звеньями механизма отсутствует.

Значения радиусов колёса, шкивов и барабана механизма: $r_1 = 20$ см, $r_2 = 10$ см, $r_3 = 40$ см, $r_4 = 16$ см, $r_5 = 8$ см. Уравнение вращения колеса 1: $\varphi_1 = 2t^2 - 5t$ рад.

Решение

Ведущим звеном в механизме является колесо 1. Выберем положительное направление отсчёта угла поворота колеса 1 в сторону, противоположную

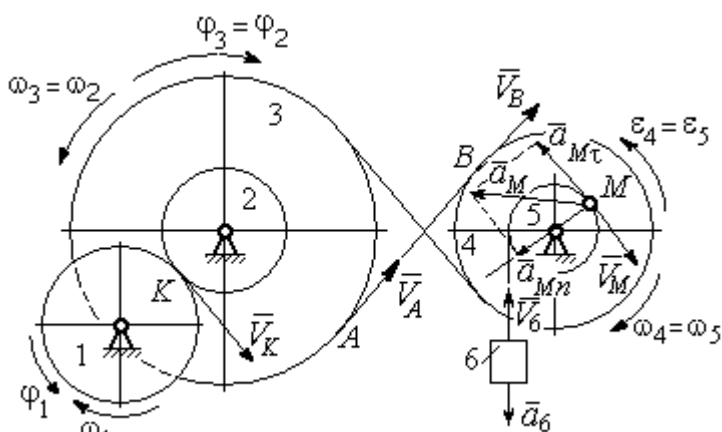


Рис. 2.10. Расчётная схема механизма

направлению вращения часовой стрелки. На рис. 2.10 это направление показано дуговой стрелкой φ_1 .

Продифференцировав по времени уравнение движения колеса 1, получим алгебраическое значение его угловой

скорости: $\omega_{1z} = \dot{\varphi}_1 = 4t - 5$ рад/с. В момент времени $t_1 = 1$ с алгебраическое значение угловой скорости колеса 1 отрицательно: $\dot{\varphi}_1(1) = -1$ рад/с. Это означает, что в данный момент времени колесо 1 вращается в сторону, противоположную положительному направлению отсчёта угла φ_1 . Угловая скорость колеса 1 равна модулю: $\omega_1 = |\omega_{1z}| = 1$ рад/с. Направление угловой скорости ω_1 колеса 1 в момент времени $t_1 = 1$ с показано дуговой стрелкой ω_1 .

Вращение колеса 1 передаётся шестерне 2 через точку контакта K . Из соотношения $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1}$ найдём угловую скорость шестерни 2: $\omega_2 = \frac{\omega_1 r_1}{r_2}$. Шкив 3, закреплённый на одной оси с шестернёй 2 имеет такую же угловую скорость, $\omega_3 = \omega_2$. Направление угловых скоростей шестерни 2 и шкива 3 показано на рис. 2.10 дуговой стрелкой ω_2 .

Передача движения шкива 3 шкиву 4 производится с помощью ремённой передачи. На участке от точки A , где ремень сходит со шкива 3, и до точки B , где ремень набегаёт на шкив 4, ремень движется поступательно, поэтому скорости точек A и B равны: $V_A = V_B$. Выразив скорости точек через угловые скорости тел, имеем равенство $\omega_3 r_3 = \omega_4 r_4$, откуда с учётом, что $\omega_3 = \omega_2$, найдём угловую скорость шкива 4: $\omega_4 = \frac{\omega_3 r_3}{r_4} = \frac{\omega_1 r_1 r_3}{r_2 r_4}$. Угловая скорость барабана 5 равна угловой скорости шкива 4, $\omega_5 = \omega_4$. Направление угловых скоростей шкива 4 и барабана 5 показано на рис. 2.10 дуговой стрелкой ω_4 .

Величина (модуль) скорости точки M рассчитывается по формуле:

$$V_M = \omega_5 r_5. \text{ В момент времени } t_1 = 1 \text{ с } \omega_5 = \frac{\omega_1 r_1 r_3}{r_2 r_4} = 5 \text{ рад/с и } V_M = 20 \text{ см/с.}$$

Вектор скорости $\vec{V}_M$ направлен по касательной к ободу барабана в точке M и направлен в сторону вращения барабана 5 (см. рис. 2.10).

Нить, несущая груз 6, сматываясь с обода барабана, имеет скорость, равную скорости точек обода барабана, и, следовательно, равна скорости точки M : $V_6 = V_M$. Направление скорости груза 6 определяется направлением вращения барабана 5. При $t_1 = 1$ с груз поднимается со скоростью $V_6 = 20$ см/с.

Определим ускорение точки M . Вектор ускорения точки M равен сумме векторов: $\vec{a}_M = \vec{a}_M^{\tau} + \vec{a}_M^n$, где $\vec{a}_M^{\tau}$, $\vec{a}_M^n$ — касательная и нормальная составляющие ускорения.

Найдём алгебраическое значение угловой скорости барабана 5:

$$\omega_{5z} = \frac{\omega_{1z} r_1 r_3}{r_2 r_4} = 20t - 25 \text{ рад/с.}$$

Алгебраическое значение углового ускорения барабана 5 ε_{5z} равно производной $\varepsilon_{5z} = \dot{\omega}_{5z} = 20 \text{ рад/с}^2$. Так как в момент времени $t_1 = 1 \text{ с}$ знаки алгебраических значений угловой скорости барабана и его углового ускорения разные ($\omega_{5z} = -5 \text{ рад/с}$, $\vec{a}_M = \vec{a}_M^{\tau} + \vec{a}_M^n$, $\varepsilon_{5z} = +20 \text{ рад/с}^2$), угловое ускорение (по величине равное модулю $\varepsilon_5 = |\varepsilon_{5z}|$) направлено в сторону, противоположную угловой скорости. На рис. 2.10 направление углового ускорения барабана 5 показано дуговой стрелкой ε_5 .

Касательное ускорение точки: $a_{M\tau} = \varepsilon_5 r_5 = 80 \text{ см/с}^2$. Вектор $\vec{a}_{M\tau}$ касательного ускорения точки M направлен по касательной к траектории в точке M в сторону углового ускорения ε_5 (см. рис. 2.10).

Нормальное ускорение точки M рассчитывается как $a_M^n = \omega_5^2 r_5$, где угловая скорость барабана $\omega_5 = |\omega_{5z}|$. В момент времени $t_1 = 1 \text{ с}$ $\omega_5 = 5 \text{ рад/с}$ и величина нормального ускорения: $\vec{a}_M^n = 100 \text{ см/с}^2$. Вектор нормального ускорения $\vec{a}_M^n$ направлен по радиусу к центру барабана 5.

Модуль полного ускорения точки M в заданный момент времени: $a_M = \sqrt{(a_M^{\tau})^2 + (a_M^n)^2} = 128,06 \text{ см/с}^2$. Вектор ускорения $\vec{a}_M$ направлен по диагонали прямоугольника, построенного на векторах $\vec{a}_M^n$ и $\vec{a}_M^{\tau}$ (см. рис. 2.10).

Ускорение a_6 груза 6 находится из условия, что груз движется прямолинейно. При прямолинейном движении нормальная составляющая ускорения равна нулю. В результате, ускорение груза 6 $a_6 = a_6^{\tau} = \dot{V}_6 = \dot{V}_M = a_M^{\tau} = \varepsilon_5 r_5 = 80 \text{ см/с}^2$. Направление вектора ускорения груза 6 определяется направлением углового ускорения барабана 5. На рис. 2.10 направление ускорения груза 6 показано вектором $\vec{a}_6$.

Задача 26. По заданному уравнению поступательного движения звена 1 механизма (рис. 2.11, *a*) определить скорость, нормальное, касательное и полное ускорения точки M диска 3 в момент времени $t_1 = 1$ с, а также скорость и ускорение звена 4. Скольжение между звеньями механизма отсутствует. Значения радиусов колес механизма и закон движения звена 1: $R_2 = 20$ см, $r_2 = 5$ см, $R_3 = 8$ см, $r_3 = 4$ см, $x_1 = \cos \pi t + \sin \pi t$ см.

Решение

Звено 1 движется поступательно вдоль оси x . Положительное направление движения задаётся направлением оси x (рис. 2.11, *a*). Продифференцировав по времени уравнение движения звена 1, получим его алгебраическое значение скорости: $V_{1x}(t) = \dot{x}_1 = -\pi \sin \pi t + \pi \cos \pi t$.

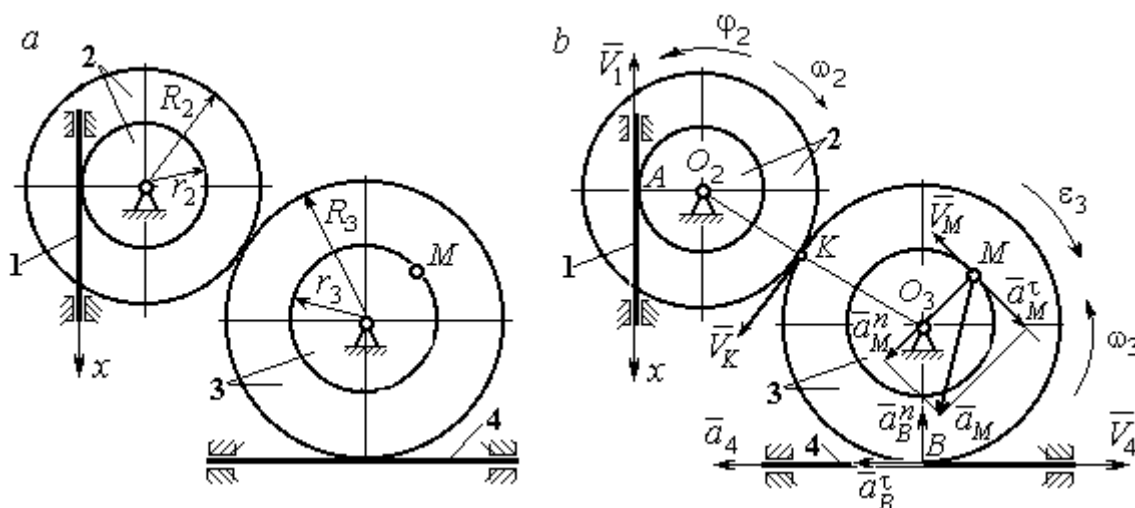


Рис. 2.11. Кинематика поступательного и вращательного движений твердого тела:
a – схема механизма; *b* – расчетная схема для определения скоростей и ускорений точек механизма

В момент времени $t_1 = 1$ с алгебраическое значение скорости звена 1 отрицательное: $V_{1x}(1) = -\pi$ см/с. Это показывает, что в данный момент времени звено 1 движется в сторону, противоположную положительному направлению оси x . Скорость звена 1 равна модулю производной $V_1(1) = |\dot{x}_1| = \pi$ см/с. На рис. 2.11, *b* показано направление вектора скорости $\vec{V}_1$.

Точка A соприкосновения звена 1 с диском 2 имеет ту же скорость, что и звено 1. Угловая скорость диска 2 определяется из равенства $\omega_2 = \frac{V_1}{r_2}$ рад/с. Направление угловой скорости вращения диска 2 показано на рис. 2.11, b дуговой стрелкой ω_2 .

Передача вращения диска 2 диску 3 происходит в точке K . Из соотношения $\frac{\omega_3}{\omega_2} = \frac{R_2}{R_3}$ находим угловую скорость диска 3: $\omega_3 = \frac{V_1 R_2}{r_2 R_3} = \frac{\pi}{2}$. Направление угловой скорости диска 3 показано на рис. 2.11, b дуговой стрелкой ω_3 .

Модуль скорости точки M $V_M = \omega_3 r_3 = 2\pi$ см/с. Вектор скорости $\vec{V}_M$ направлен по касательной к траектории движения точки M в сторону вращения диска 3 (см. рис. 2.11, b).

Звено 4 движется поступательно. Величина и направление скорости звена 4 совпадают с величиной и направлением скорости точки B касания звена 4 с диском 3: $V_4 = V_B = \omega_3 R_3$. В момент времени $t_1 = 1$ с $V_4 = 4\pi$ см/с. Направление вектора скорости $\vec{V}_4$ определяется направлением вращения диска 3.

Определим ускорение точки M . Найдём алгебраическое значение ω_{3z} угловой скорости диска 3: $\omega_{3z} = \frac{V_{1x} R_2}{r_2 R_3} = \frac{\pi}{2}(-\sin \pi t + \cos \pi t)$. Алгебраическое значение ε_{3z} углового ускорения диска 3: $\varepsilon_{3z} = \dot{\omega}_{3z} = -\frac{\pi^2}{2}(\cos \pi t + \sin \pi t)$ и в момент времени $t_1 = 1$ с $\varepsilon_{3z} = \frac{\pi^2}{2}$. Разные знаки алгебраических значений угловой скорости и углового ускорения диска 3 ($\omega_{3z} = -\frac{\pi}{2}$; $\varepsilon_{3z} = +\frac{\pi^2}{2}$) показывают, что угловое ускорение направлено в сторону, противоположную угловой скорости. На рис. 2.11, b направление углового ускорения диска 3 показано дуговой стрелкой ε_3 .

Касательное ускорение точки M рассчитывается по формуле $a_M^\tau = \varepsilon_3 r_3$, где угловое ускорение $\varepsilon_3 = |\varepsilon_{3z}|$. В момент времени $t_1 = 1$ с $a_M^\tau = 2\pi^2$ см/с². Вектор касательного ускорения точки M $\vec{a}_M^\tau$ направлен по касательной к траектории точки M в сторону углового ускорения ε_3 (см. рис. 2.11, б).

Нормальное ускорение точки M рассчитывается как $a_M^n = \omega_3^2 r_3$. В момент времени $t_1 = 1$ с величина нормального ускорения $a_M^n = \pi^2$ см/с². Вектор нормального ускорения $\vec{a}_M^n$ направлен по радиусу к центру диска 3.

Модуль полного ускорения точки M : $a_M = \sqrt{(a_M^n)^2 + (a_M^\tau)^2} = \pi^2 \sqrt{5}$ см/с². Вектор полного ускорения $\vec{a}_M$ направлен по диагонали прямоугольника, построенного на векторах $\vec{a}_M^n$ и $\vec{a}_M^\tau$.

Звено 4 движется поступательно и прямолинейно. Ускорение звена 4 равно проекции ускорения точки B (касания диска 3 со звеном 4) на линию движения звена 4: $a_4 = a_B^\tau = \varepsilon_3 R_3 = 4\pi^2$ см/с². Направление ускорения звена 4 совпадает с касательным ускорением точки B .

Упражнения

Упражнение 2.1



Упражнение 2.2



Рис. 2.12. Задания для самостоятельного решения. Упражнения 2.1, 2.2

2.3. Скорости точек при плоскопараллельном движении твёрдого тела

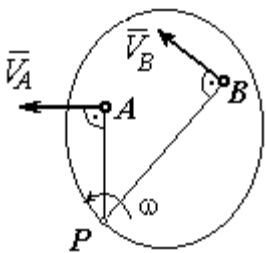
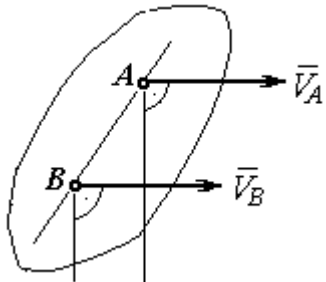
Плоскопараллельным, или **плоским** движением твёрдого тела, называется такое движение, при котором все точки тела движутся параллельно некоторой неподвижной (основной) плоскости.

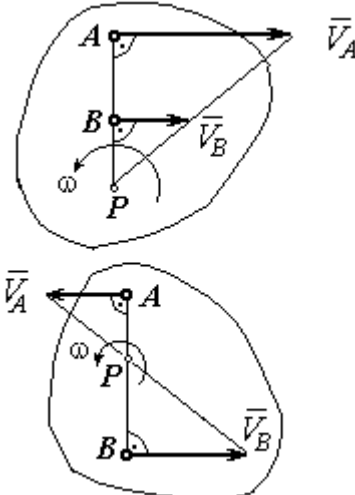
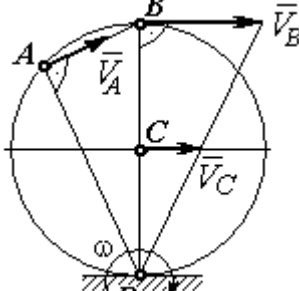
Для скоростей $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_M$ двух точек A и M тела, совершающего плоское движение, справедливо утверждение: **проекции скоростей двух точек твёрдого тела на ось, проходящую через эти точки, равны друг другу:** $V_A \cos \alpha = V_M \cos \beta$, где α , β – углы между векторами скорости $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_M$ и осью, проходящей через точки A и M .

Мгновенным центром скоростей (МЦС) называется точка P плоской фигуры, скорость которой в данный момент времени равна нулю. При известном положении МЦС скорость любой точки плоской фигуры находят так, как если бы движение фигуры было мгновенно вращательным вокруг мгновенного центра скоростей с угловой скоростью, равной угловой скорости плоской фигуры. Способы построения мгновенного центра скоростей приведены в табл. 2.1.

Таблица 2.1

Способы построения мгновенного центра скоростей

1. Если известны направления скоростей $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$ каких-нибудь двух точек A и B плоской фигуры, то мгновенный центр скоростей P находится в точке пересечения перпендикуляров, восстановленных из этих точек к векторам скоростей.	
2. Если скорости двух точек $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$ параллельны, но точки A и B не лежат на общем перпендикуляре к скоростям, то, как видно из рисунка, мгновенный центр P бесконечно удалён. В этом случае угловая скорость $\omega = 0$ и тело в данный момент движется поступательно (движение является мгновенным поступательным). При таком движении скорость любой точки тела равна $\vec{V}_A$.	

3. Если скорости двух точек $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$ параллельны, а точки A и B лежат на общем перпендикуляре к скоростям, то мгновенный центр скоростей P находится как пересечение прямой, соединяющей точки A и B и линии, проходящей через концы векторов, изображающих скорости $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$.	
4. Если плоскопараллельное движение осуществляется путем качения без скольжения одного тела по неподвижной поверхности другого, то мгновенный центр скоростей P расположен в точке касания катящегося тела с неподвижной поверхностью.	

Примеры решения задач на плоскопараллельное движение тела

Задача 27. Приводной механизм насоса находится в положении, показанном на рис. 2.13. Кривошип O_1C вращается с постоянной угловой скоростью

$\omega_{O_1C} = 2$ рад/с вокруг оси, проходящей через точку O_1 перпендикулярно плоскости чертежа.

Определить скорость поршня D и угловые скорости шатуна BC , коромысла AB и штока AD , если $O_1C = 20$ см, $OB = 2 \cdot OA = 40$ см, $AD = 60$ см.

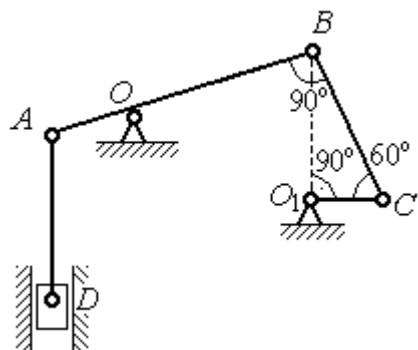


Рис. 2.13. Приводной механизм насоса

Решение

Предположим для определённости, что кривошип O_1C вращается в направлении по ходу часовой стрелки. Вектор $\vec{V}_C$ скорости точки C направлен

перпендикулярно кривошипу O_1C , в сторону его вращения (рис. 2.14). Модуль скорости $V_C = \omega_{O_1C} \cdot O_1C = 40$ см/с.

Коромысло AB качается (вращается) вокруг оси, проходящей через точку O , параллельно оси вращения кривошипа.

Скорость точки B направлена перпен-

дикулярно коромыслу AB вдоль шатуна BC (рис. 2.14).

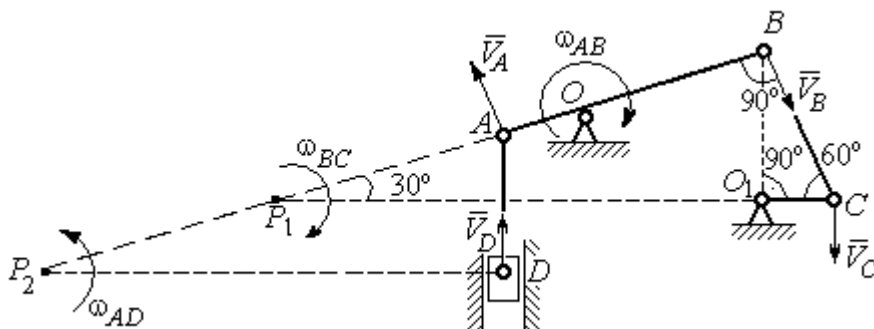


Рис. 2.14. Расчётная кинематическая схема механизма привода насоса

Шатун BC совершает плоскопараллельное движение. Мгновенный центр скоростей шатуна P_1 расположен в точке пересечения перпендикуляров к скоростям $\vec{V}_C$ и $\vec{V}_B$ точек C и B шатуна. Находим $P_1C = 4O_1C = 80$ см. Угловая скорость вращения шатуна BC $\omega_{BC} = \frac{V_C}{CP_1} = 0,5$ рад/с. Направление угловой скорости вращения шатуна BC определяется направлением вращения кривошипа O_1C и на рис. 2.14 показано дуговой стрелкой ω_{BC} .

Скорость V_B найдём по теореме о проекциях скоростей. Спроектируем вектора скоростей $\vec{V}_C$ и $\vec{V}_B$ точек C и B на линию BC . Получим $V_B \cos 0^\circ = V_C \cos 30^\circ$. Отсюда $V_B = 20\sqrt{3}$ см/с.

Угловая скорость коромысла AB $\omega_{AB} = \frac{V_B}{OB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ рад/с. Направление угловой скорости коромысла определяется направлением вектора скорости $\vec{V}_B$ и показано дуговой стрелкой ω_{AB} .

Скорость точки A коромысла равна половине скорости точки B : $V_A = \frac{1}{2}V_B = 10\sqrt{3}$ см/с. Вектор скорости $\vec{V}_A$ направлен перпендикулярно коромыслу AB в сторону его вращения.

Точка P_2 пересечения перпендикуляров к скоростям $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_D$ является мгновенным центром скоростей штока AD . Тогда угловая скорость штока $\omega_{AD} = \frac{V_A}{AP_2} = \frac{\sqrt{3}}{12}$ рад/с. Направление угловой скорости штока определяется по направлению скорости точки A и на рис. 2.14 показано дуговой стрелкой ω_{AD} .

Скорость поршня $V_D = \omega_{AD} \cdot P_2D = 15$ см/с.

Задача 28. Механизм качалки (рис. 2.15) состоит из кривошипа OA ,

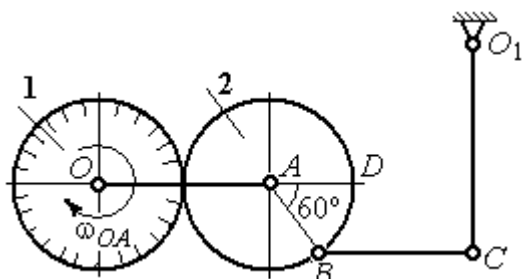


Рис. 2.15. Схема механизма качалки

вращающегося вокруг оси O и несущего в точке A ось подвижной шестерни 2, которая катится по неподвижной шестерне 1. Вращение кривошипа происходит с угловой скоростью $\omega_{OA} = 2$ рад/с. Радиусы шестерён $r_1 = r_2 = 6$ см. К ободу шестерни 2 в

точке B шарнирно прикреплён шатун BC длиной $BC = 8$ см, который в точке C передаёт движение коромыслу CO_1 длиной $CO_1 = 16$ см.

Определить угловые скорости шестерни 2, шатуна BC , коромысла CO_1 , а также скорости точек A , B , C , D в момент, когда кривошип OA и шатун BC горизонтальны и угол $\angle DAB = 60^\circ$.

Решение

Найдём скорость точки A кривошипа: $V_A = \omega_{OA} \cdot OA = 24$ см/с. Вектор скорости точки $\vec{V}_A$ расположен перпендикулярно кривошипу OA и направлен в сторону вращения кривошипа (рис. 2.16).

Мгновенный центр скоростей P_2 шестерни 2 находится в точке касания с неподвижной поверхностью шестерни 1. Угловая скорость шестерни 2

$\omega_2 = \frac{V_A}{AP_2} = 4$ рад/с. Направление угло-

вой скорости шестерни 2 определяется направлением вектора скорости $\vec{V}_A$ и на рис. 2.16 показано дуговой стрелкой ω_2 .

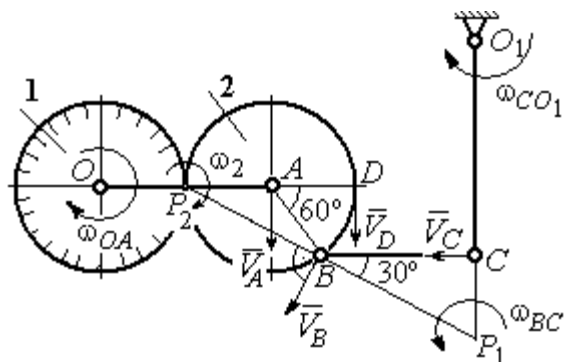


Рис.2.16. Расчётная кинематическая схема механизма качалки

Найдём расстояние P_2B из равнобедренного треугольника P_2AB по

теореме косинусов: $P_2B = \sqrt{r^2 + r^2 - 2r^2 \cos 120^\circ} = 6\sqrt{3}$ см. Скорость точки B $V_B = \omega_2 \cdot P_2B = 24\sqrt{3}$ см/с. Вектор скорости $\vec{V}_B$ перпендикулярен линии P_2B и направлен в сторону вращения шестерни 2.

Скорость точки D : $V_D = \omega_2 \cdot P_2D = 48$ см/с. Вектор скорости $\vec{V}_D$ перпендикулярен линии P_2D и направлен в ту же сторону (см. рис. 2.16).

Скорость точки C перпендикулярна линии CO_1 . Восстанавливая перпендикуляры к скоростям $\vec{V}_B$ и $\vec{V}_C$, получим точку пересечения P_1 , которая будет мгновенным центром скоростей шатуна BC . Расстояние $P_1B = \frac{BC}{\cos 30^\circ} = \frac{16}{\sqrt{3}}$ см.

Угловая скорость шатуна $\omega_{BC} = \frac{V_B}{P_1B} = \frac{9}{2}$ рад/с. Направление угловой скорости определяется по направлению скорости $\vec{V}_B$ и показано дуговой стрелкой ω_{BC} .

Скорость точки C : $V_C = \omega_{BC} \cdot P_1C = \frac{36}{\sqrt{3}}$ см/с. Направление вектора скорости определяется направлением вращения шатуна BC .

Угловая скорость коромысла CO_1 : $\omega_{CO_1} = \frac{V_C}{O_1C} = \frac{9}{4\sqrt{3}}$ рад/с.

Задача 29. В планетарном механизме (рис. 2.17) кривошип OA длиной

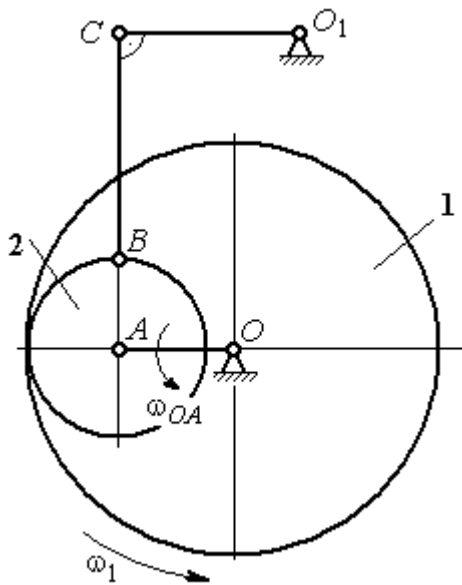


Рис. 2.17. Планетарный механизм

$OA = 25$ см вращается вокруг неподвижной оси O , перпендикулярной плоскости рисунка, с угловой скоростью $\omega_{OA} = 3,6$ рад/с. На конец A кривошипа насажена шестерёнка 2, находящаяся во внутреннем зацеплении с колесом 1 радиуса $r_1 = 45$ см, соосным с кривошипом OA и вращающимся с угловой скоростью $\omega_1 = 1$ рад/с. Шатун BC , шарнирно соединённый с шестерёнкой 2 на её ободе в точке B , приводит в движение кривошип CO_1 . Определить угловые скорости шестерёнки 2, шатуна BC и кривошипа CO_1 . Определить угловые скорости шестерёнки 2, шатуна BC и кривошипа CO_1 , скорости точек A , B , C в положении, показанном на рис.2.17, если длина шатуна $BC = 100$ см, длина кривошипа $CO_1 = 50$ см.

Решение

Найдём скорости точек A и D

$$V_A = \omega_{OA} \cdot OA = 90 \text{ см/с}; \quad V_D = \omega_1 \cdot r_1 = 45 \text{ см/с}.$$

Вектор скорости $\vec{V}_A$ направлен перпендикулярно кривошипу OA в сторону его вращения. Вектор скорости $\vec{V}_D$ перпендикулярен радиусу OD колеса 1 и направлен в сторону вращения колеса (рис. 2.18).

Мгновенный центр скоростей P_2 шестерни 2 находится на пересечении прямой, соединяющей точки A и D , и линии, проходящей через концы векторов $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_D$, изображающих скорости точек A и D . Расстояние P_2D от центра скоростей до точки D находится из пропорции $\frac{V_A}{V_D} = \frac{AP_2}{DP_2} = \frac{DP_2 + 20}{DP_2}$, откуда $P_2D = 20$ см.

Угловая скорость шестерёнки 2 $\omega_2 = \frac{V_D}{P_2D} = 2,25$ рад/с. Направление уг-

ловой скорости ω_2 показано на рис. 2.18 дуговой стрелкой ω_2 .

Скорость точки B , которая находится на ободе шестеренки, $V_B = \omega_2 \cdot P_2B = 45\sqrt{5}$ см/с. Вектор скорости $\vec{V}_B$ перпендикулярен линии P_2B и направлен в сторону вращения шестерни 2.

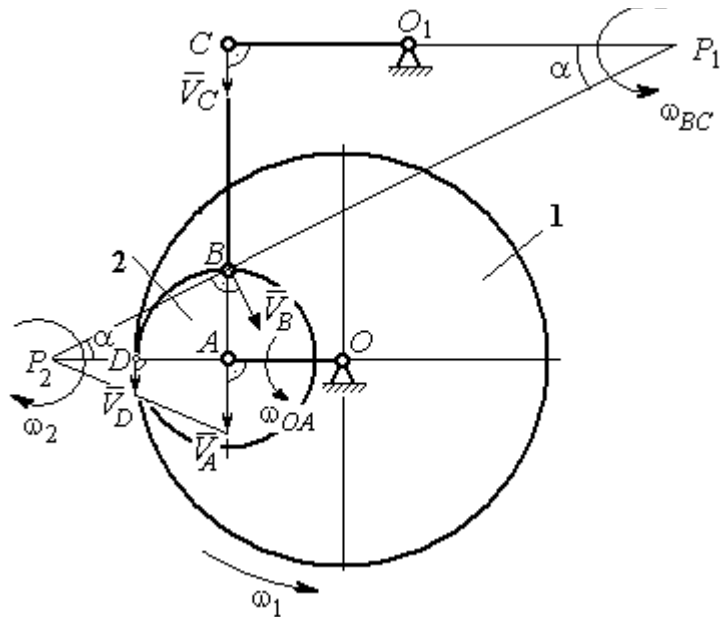


Рис. 2.18. Расчётная кинематическая схема планетарного механизма

Направим вектор скорости $\vec{V}_C$ перпендикулярно кривошипу CO_1 и восстановим перпендикуляры к скоростям $\vec{V}_C$ и $\vec{V}_B$. Точка P_1 пересечения перпендикуляров является мгновенным центром скоростей шатуна BC . Расстояние P_1B найдём из треугольника P_1BC : $P_1B = \frac{BC}{\sin \alpha}$, где $\sin \alpha = \frac{AB}{P_2B} = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Тогда

$P_1B = 100\sqrt{5}$ см. Угловая скорость шатуна $\omega_{BC} = \frac{V_B}{P_1B} = 0,45$ рад/с. Скорость

точки C шатуна BC найдём по теореме о проекциях скоростей. Спроектируем скорости $\vec{V}_C$ и $\vec{V}_B$ точек C и B на линию, проходящую через эти точки. Имеем: $V_C \cos 0^\circ = V_B \cos \alpha$, откуда $V_C = 90$ см/с.

Угловая скорость кривошипа CO_1 $\omega_{CO_1} = \frac{V_C}{O_1C} = 1,8$ рад/с.

Задача 30. В плоском механизме (рис. 2.19) кривошип OA вращается вокруг оси O с угловой скоростью ω_{OA} . На конец A кривошипа насажена шестерня 2, находящаяся во внешнем зацеплении с неподвижным колесом 1. Радиусы колеса и шестерни r_1 и r_2 . Шестерня 2 соединяется с колесом 3 шатуном BC , закреплённым на шестерне в точке B и на колесе в точке C . Колесо 3 катится без скольжения по горизонтальной поверхности. Все соединения шарнирные. Качение шестерни 2 по неподвижному колесу 1 без проскальзывания. Для положения механизма, изображенного на рис. 2.19, определить скорости точек A , B , C и угловые скорости шатуна BC , шестерни 2 и колеса 3, если $\omega_{OA} = 4$ рад/с; $r_1 = 4$ см; $r_2 = r_3 = 8$ см.

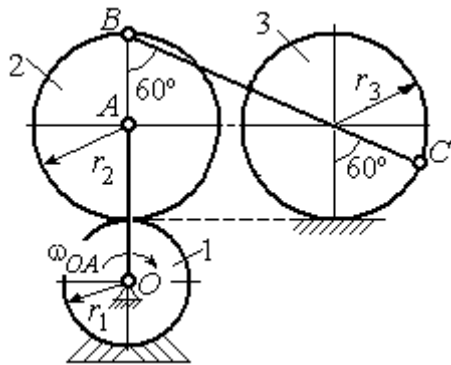


Рис. 2.19. Схема движения плоского механизма

круг оси O с угловой скоростью ω_{OA} . На конец A кривошипа насажена шестерня 2, находящаяся во внешнем зацеплении с неподвижным колесом 1. Радиусы колеса и шестерни r_1 и r_2 . Шестерня 2 соединяется с колесом 3 шатуном BC , закреплённым на шестерне в точке B и на колесе в точке C . Колесо 3 катится

без скольжения по горизонтальной поверхности. Все соединения шарнирные. Качение шестерни 2 по неподвижному колесу 1 без проскальзывания. Для положения механизма, изображенного на рис. 2.19, определить скорости точек A , B , C и угловые скорости шатуна BC , шестерни 2 и колеса 3, если $\omega_{OA} = 4$ рад/с; $r_1 = 4$ см; $r_2 = r_3 = 8$ см.

Решение

Рассмотрим вращательное движение кривошипа OA . Скорость точки A кривошипа: $V_A = \omega_{OA} \cdot OA = 48$ см/с. Вектор скорости $\vec{V}_A$ направлен перпендикулярно кривошипу OA в сторону его вращения (рис. 2.20).

При качении шестерни 2 по неподвижной поверхности колеса 1 точка их соприкосновения P_2 является мгновенным центром скоростей шестерни.

Угловая скорость шестерни 2

$$\omega_2 = \frac{V_A}{AP_2} = 6 \text{ рад/с.}$$

Скорость точки B шестерни 2 $V_B = \omega_2 \cdot BP_2 = 96$ см/с.

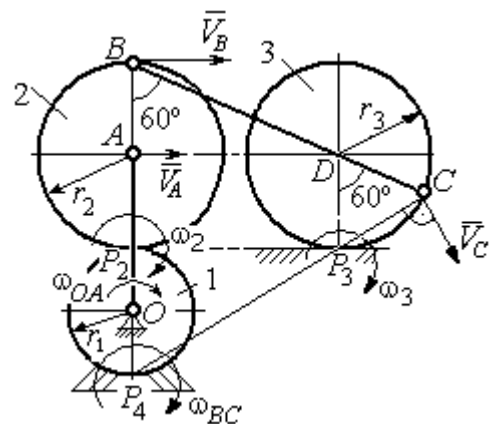


Рис. 2.20. Расчетная схема для определения угловых скоростей звеньев механизма

Точка P_3 касания колеса 3 с неподвижной поверхностью является его мгновенным центром скоростей. Вектор $\vec{V}_C$ скорости точки C колеса 3 перпендикулярен линии P_3C и направлен в сторону качения колеса (см. рис. 2.20).

Мгновенный центр скоростей шатуна BC – точка P_4 находится на пересечении перпендикуляров, восстановленных к скоростям точек B и C . По построению $BP_4 = BC = BD + DC = 2r_2 + r_3 = 24$ см. Угловая скорость шатуна BC $\omega_{BC} = \frac{V_B}{BP_4} = 4$ рад/с. Так как $BP_4 = CP_4$, скорости точек C и B $V_C = 96$ см/с.

Угловая скорость колеса 3 $\omega_3 = \frac{V_C}{CP_3} = 12$ рад/с.

Задача 31. В плоском механизме (рис. 2.21) кривошип OC , вращаясь вокруг неподвижной оси O , приводит в движение два шатуна CD и CE , присоединённых к кривошипу в точке C . Шатун CE прикреплен в точке E к ободу цилиндрического выступа диска 1, который катится без проскальзывания своим выступом по неподвижному горизонтальному рельсу. К другому шатуну CD в точке D прикреплен ползун, перемещающийся вдоль направления вертикального диаметра диска 1. Все соединения шарнирные. Радиусы диска и цилиндрического выступа $R_1 = 3$ см, $r_1 = 2$ см. Длина шатуна $CE = 4$ см. В заданном положении механизма (см. рис. 2.21) шатун CE горизонтален.

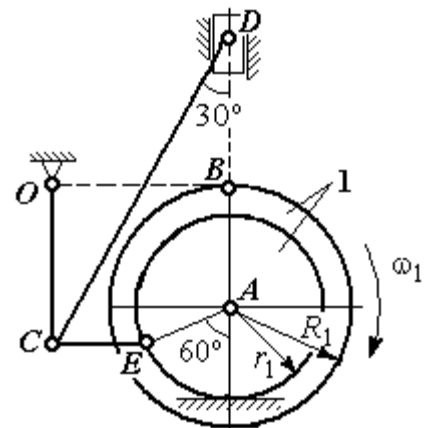


Рис. 2.21. Схема движения плоского механизма

Определить скорости точек A , E , C , D и угловые скорости диска 1, шатунов CE , CD и кривошипа CO , если известна скорость точки B на ободу диска 1 $V_B = 10$ см/с и направление ω_1 угловой скорости диска.

Решение

Изобразим вектор скорости точки B диска 1 в соответствии с заданным направлением его движения. При качении диска 1 по неподвижной поверхности

рельса точка P_1 касания обода выступа с поверхностью рельса является его мгновенным центром скоростей (рис. 2.22).

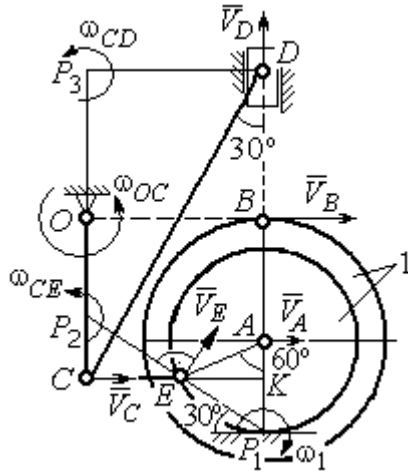


Рис. 2.22. Расчётная схема для определения скоростей точек и угловых скоростей звеньев механизма

Угловая скорость диска 1

$$\omega_1 = \frac{V_B}{BP_1} = 2 \text{ рад/с.}$$

Скорость точки A

$$V_A = \omega_1 \cdot AP_1 = 4 \text{ см/с.}$$

Скорость точки E

$$V_E = \omega_1 \cdot EP_1 = 4 \text{ см/с.}$$

Вектор скорости $\vec{V}_A$

и вектор скорости $\vec{V}_E$ перпендикулярны,

соответственно, линиям AP_1 EP_1 и направлены в сторону вращения диска.

Шатун CE совершает плоскопараллельное движение. Скорость точки C шатуна неизвестна по величине, но известно, что вектор скорости $\vec{V}_C$ перпендикулярен кривошипу OC и направлен вдоль CE в сторону точки E . Мгновенный центр скоростей P_2 шатуна CE находится на пересечении перпендикуляров, восстановленных к скоростям $\vec{V}_E$ и $\vec{V}_C$ (см. рис. 2.22).

$$\text{Расстояние } EP_2 = \frac{EC}{\cos 30^\circ} = 4,62 \text{ см.}$$

$$\omega_{CE} = \frac{V_E}{EP_2} = 0,86 \text{ рад/с.}$$

Направление угловой скорости шатуна, определяемое по направлению скорости точки E , на рис. 2.22 показано дуговой стрелкой

$$\omega_{CE}. \text{ Скорость точки } C \text{ шатуна } CE \text{ } V_C = \omega_{CE} \cdot CP_2 = \frac{V_E}{2} = 2 \text{ см/с.}$$

Длина кривошипа $OC = BK = R_1 + r_1 \sin 30^\circ = 4$ см. Угловая скорость кривошипа $\omega_{OC} = \frac{V_C}{OC} = 0,5$ рад/с.

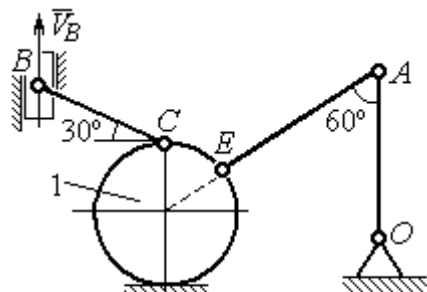
Для шатуна CD известны величина и направление вектора $\vec{V}_C$ скорости точки C и направление вектора $\vec{V}_D$ скорости точки D . Мгновенный центр скоростей шатуна CD находится в точке P_3 , полученной на пересечении перпендикуляров, восстановленных к скоростям $\vec{V}_C$ и $\vec{V}_D$.

Расстояние $CP_3 = DK = (CE + r_1 \cos 30^\circ) \operatorname{ctg} 30^\circ = 9,92$ см (см. рис. 2.22). Угловая скорость шатуна CD : $\omega_{CD} = \frac{V_C}{CP_3} = 0,21$ рад/с.

Скорость ползуна D : $V_D = \omega_{CD} DP_3 = \omega_{CD} (CE + r_1 \cos 30^\circ) = 1,2$ см/с.

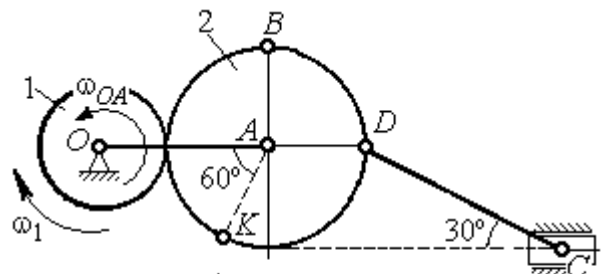
Упражнения

Упражнение 2.3



$R_1 = 2$ см, $OA = AE = 6$ см,
 $BC = 5$ см, $V_B = 5$ см/с.
 Найти: ω_{OA} , ω_{AE} , ω_{CB} , ω_1 , V_C , V_A , V_E

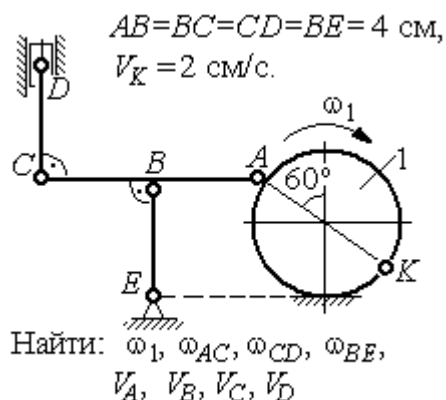
Упражнение 2.4



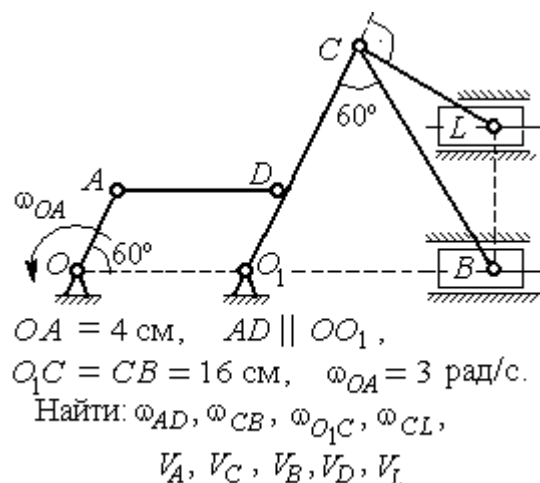
$\omega_{OA} = 2$ рад/с, $\omega_1 = 6$ рад/с,
 $r_1 = 3$ см, $r_2 = 6$ см.
 Найти: ω_2 , ω_{DC} , V_B , V_K , V_D , V_C

Рис. 2.23. Задания для самостоятельного решения. Упражнения 2.3, 2.4

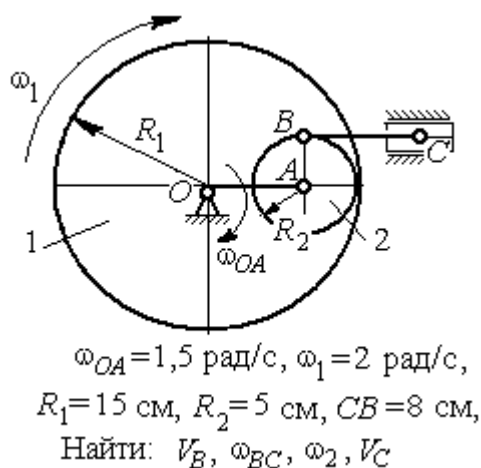
Упражнение 2.5



Упражнение 2.6



Упражнение 2.7



Упражнение 2.8

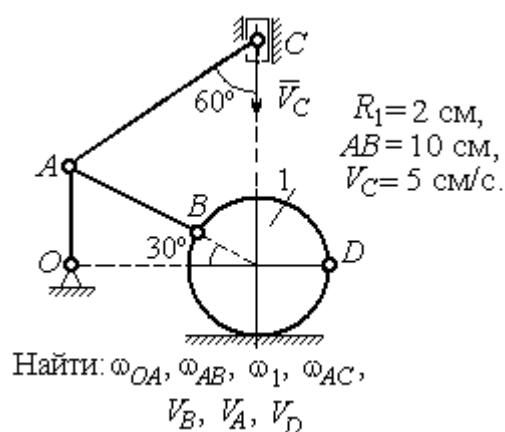


Рис. 2.24. Задания для самостоятельного решения. Упражнения 2.5 – 2.8

2.4. Ускорения точек при плоскопараллельном движении твёрдого тела

Ускорение любой точки M плоской фигуры при плоскопараллельном движении твёрдого тела представляется как сумма векторов $\vec{a}_M = \vec{a}_A + \vec{a}_{MA}^{\tau} + \vec{a}_{MA}^n$, где $\vec{a}_A$ – ускорение полюса A ; $\vec{a}_{MA}^{\tau}$, $\vec{a}_{MA}^n$ – касательная и

нормальная составляющие ускорения точки M при вращении фигуры вокруг полюса A (рис. 2.25).

Вектор нормального ускорения $\vec{a}_{MA}^n$ всегда направлен от точки M к полюсу A . Вектор касательного ускорения $\vec{a}_{MA}^\tau$ направлен перпендикулярно отрезку AM в сторону вращения, если оно ускоренное (см. рис. 2.25, a), и против вращения, если оно замедленное (см. рис. 2.25, b). Величины касательного и нормального составляющих ускорения точки M определяются по формулам:

$a_{MA}^\tau = \varepsilon \cdot AM$; $a_{MA}^n = \omega^2 \cdot AM$, где ω , ε – угловая скорость и угловое ускорение тела (плоской фигуры); AM – расстояние от точки M до полюса A .

Если при движении плоской фигуры известны траектории движения полюса A и точки M , то для определения ускорения точки M используется векторное равенство $\vec{a}_M^\tau + \vec{a}_M^n = \vec{a}_A^\tau + \vec{a}_A^n + \vec{a}_{MA}^\tau + \vec{a}_{MA}^n$, где $\vec{a}_M^\tau$, $\vec{a}_M^n$, $\vec{a}_A^\tau$, $\vec{a}_A^n$ – касательная и нормальная составляющие ускорения точки M и полюса A при движении их по заданным траекториям.

Примеры решения задач на определение ускорений точек

Задача 32. Поршень D гидравлического пресса приводится в движение шарнирно-рычажным механизмом $OABD$. В положении механизма, указанном на рис. 2.26, точка L рычага имеет скорость $V_L = 0,6$ м/с и ускорение $a_L = 0,5$ м/с². Длина рычага $OA = 2 \cdot AL = 0,6$ м, длина звена $AB = 0,4$ м. Определить скорость и ускорение поршня D , угловую скорость и ускорение звена AB .

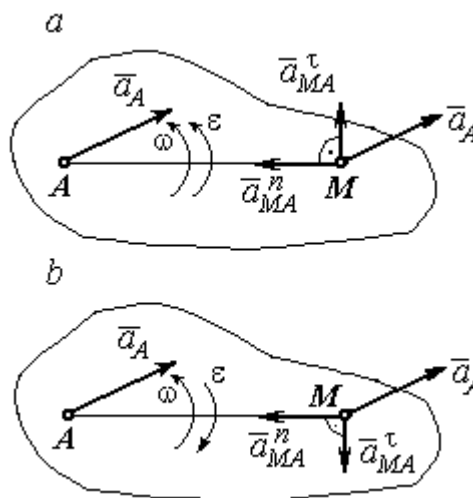


Рис. 2.25. Ускорение точки плоской фигуры:
 a – ускоренное движение;
 b – замедленное движение

Решение

Найдём угловую скорость рычага OL : $\omega_{OL} = \frac{V_L}{OL} = \frac{2}{3}$ рад/с.

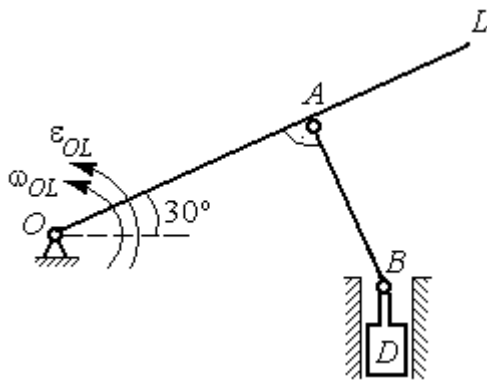


Рис. 2.26. Шарнирно-рычажный механизм гидравлического пресса

Ускорение точки L представляется в виде суммы векторов нормального и касательного ускорений: $\vec{a}_L = \vec{a}_L^\tau + \vec{a}_L^n$ (рис. 2.27). Модуль нормального ускорения точки L $a_L^n = \omega_{OL}^2 \cdot OL = 0,4$ м/с². Модуль её касательного ускорения и угловое ускорение рычага, соответственно, равны:

$$a_L^\tau = \sqrt{a_L^2 - (a_L^n)^2} = 0,3 \text{ м/с}^2, \quad \epsilon_{OL} = \frac{a_L^\tau}{OL} = \frac{1}{3} \text{ рад/с}^2.$$

Скорость $\vec{V}_A$ точки A перпендикулярна рычагу OL и направлена в сторону вращения рычага. Её модуль $V_A = \omega_{OL} \cdot OA = 0,4$ м/с. Скорость $\vec{V}_B$ точки B направлена вертикально вверх вдоль линии движения поршня. Направления векторов скоростей $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$ показаны на рис. 2.27. Точка P_1 – пересечения перпендикуляров, восстановленных к векторам скоростей $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$ – определяет положение мгновенного центра скоростей звена AB . Расстояние $AP_1 = P_1B \cdot \cos 30^\circ = 0,4\sqrt{3}$ м.

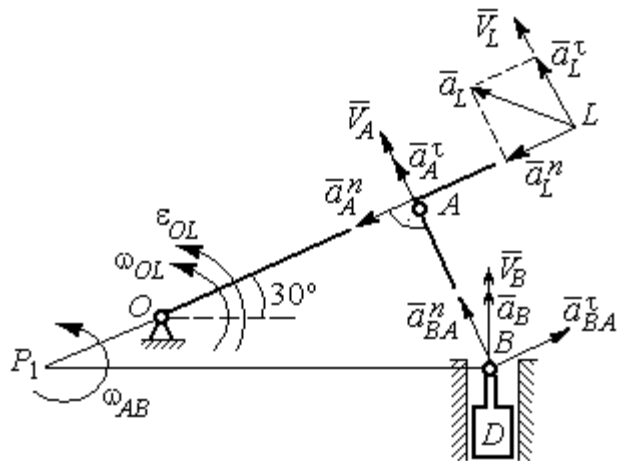


Рис. 2.27. Расчётная кинематическая схема механизма

Угловая скорость звена AB $\omega_{AB} = \frac{V_A}{P_1A} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ рад/с.

Представим ускорение точки B через полюс A : $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^\tau + \vec{a}_{BA}^n$, где $\vec{a}_A$ – ускорение полюса A ; $\vec{a}_{BA}^\tau$, $\vec{a}_{BA}^n$ – касательная и нормальная составляющие ускорения точки B при вращении звена AB вокруг полюса A . Так как траекторией точки A является окружность с центром в точке O , ускорение этой точки может быть разложено на две составляющие: $\vec{a}_A = \vec{a}_A^\tau + \vec{a}_A^n$. В результате ускорение точки B представляется в виде векторной суммы $\vec{a}_B = \vec{a}_A^\tau + \vec{a}_A^n + \vec{a}_{BA}^\tau + \vec{a}_{BA}^n$. Направления векторов ускорений показаны на рис. 2.27.

Модули ускорений:

$$a_A^n = \omega_{OL}^2 \cdot OA = 0,27 \text{ см/с}^2; a_{BA}^n = \omega_{AB}^2 \cdot AB = 0,13 \text{ см/с}^2;$$

$$a_A^\tau = \varepsilon_{OL} \cdot OA = 0,2 \text{ см/с}^2.$$

Ускорение $a_{BA}^\tau = \varepsilon_{AB} \cdot AB$ остаётся неизвестной величиной, так как угловое ускорение ε_{AB} звена AB неизвестно.

Спроектируем векторное равенство ускорения точки B на оси x , y , где ось x проходит вдоль линии звена AB , ось y – перпендикулярна ей (рис. 2.28). Получим равенства:

$$a_B \cdot \cos 30^\circ = a_A^\tau + a_{BA}^n; a_B \cdot \cos 60^\circ = -a_A^n + a_{BA}^\tau.$$

Решая систему уравнений, находим модуль ускорения точки B : $a_B = 0,38 \text{ см/с}^2$ и величину касательного ускорения: $a_{BA}^\tau = 0,46 \text{ см/с}^2$. Угловое ускорение стержня AB

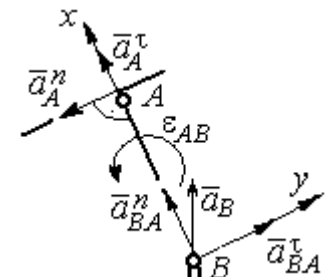


Рис. 2.28. Вычисление проекций векторов ускорений

$\varepsilon_{AB} = \frac{a_{BA}^\tau}{AB} = 1,15 \text{ рад/с}^2$. Направление углового ускорения ε_{AB} звена AB определяется направлением вектора $\vec{a}_{BA}^\tau$ касательного ускорения точки B при вращении звена вокруг полюса A (см. рис. 2.28).

Ускорение поршня D равно ускорению точки B : $a_D = a_B = 0,38 \text{ см/с}^2$.

Задача 34. Колесо 1 радиуса $r_1 = 0,6$ м катится без скольжения по прямой

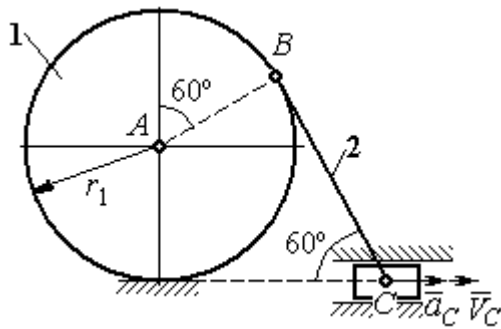


Рис. 2.29. Механизм, связывающий качение колеса с поступательным движением ползуна

молинейному участку пути и приводит в движение шатун 2, соединённый шарнирно с колесом в точке B на его ободе. На другом конце шатуна в точке C к нему присоединён ползун, перемещающийся горизонтально (рис. 2.29).

В положении механизма, показанном на рис. 2.29, найти ускорение центра

A колеса 1, его угловое ускорение, а также угловое ускорение шатуна 2, если заданы скорость и ускорение ползуна C : $V_C = 9$ м/с; $a_C = 4$ м/с².

Решение

При качении диска 1 по неподвижной поверхности точка P_1 касания его с поверхностью является мгновенным центром скоростей диска. Вектор скорости $\vec{V}_B$ перпендикулярен линии P_1B . Восстановим перпендикуляры к скоростям $\vec{V}_B$ и $\vec{V}_C$. Их пересечение в точке P_2 определяет положение мгновенного центра скоростей шатуна 2 (рис. 2.30).

Вычислим необходимые расстояния.

Расстояние P_1B (см. рис. 2.30) найдём из треугольника P_1AB по теореме косинусов:

$P_1B = r_1\sqrt{3} = 1,04$ м. Из построения мгновенных центров скоростей P_1 и P_2 следует: $P_1B = BP_2 = BC$. Расстояние P_2C определяется из треугольника P_1P_2C : $P_2C = P_1P_2 \cdot \cos 30^\circ = 1,8$ м.

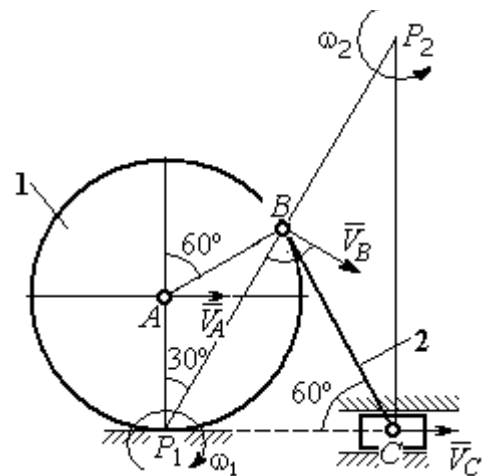


Рис. 2.30. Расчётная схема механизма для определения скоростей точек

Угловая скорость шатуна 2 $\omega_2 = \frac{V_C}{P_2C} = 5 \text{ рад/с}$. Направление угловой скорости ω_2 определяется направлением скорости $\vec{V}_C$.

Скорость точки B найдём по формуле $V_B = \omega_2 \cdot P_2B = 5,2 \text{ м/с}$.

Угловая скорость диска 1 $\omega_1 = \frac{V_B}{P_1B} = 5 \text{ рад/с}$. Скорость центра колеса 1 $V_A = \omega_1 \cdot P_1A = 3 \text{ м/с}$.

Найдём ускорение точки A .

Примем точку B за полюс и выразим ускорение точки A через полюс B :

$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{a}_{AB}^\tau + \vec{a}_{AB}^n$, где $\vec{a}_B$ – ускорение полюса B ; $\vec{a}_{AB}^\tau$, $\vec{a}_{AB}^n$ – касательная и нормальная составляющие ускорения точки A при вращении диска 1 вокруг полюса B (рис. 2.31). Направления ускорения точки $\vec{a}_A$ и касательной составляющей ускорения $\vec{a}_{AB}^\tau$ точки A выбраны в предположении ускоренного движения диска.

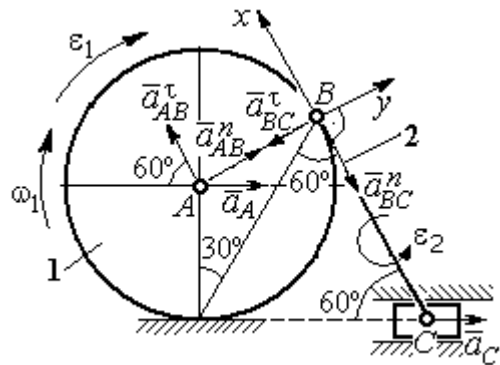


Рис. 2.31. Расчётная схема механизма для определения ускорений точек

Ускорение полюса B выразим через полюс C : $\vec{a}_B = \vec{a}_C + \vec{a}_{BC}^\tau + \vec{a}_{BC}^n$, где $\vec{a}_C$ – ускорение полюса C ; $\vec{a}_{BC}^\tau$, $\vec{a}_{BC}^n$ – касательная и нормальная составляющие ускорения точки B при вращении шатуна 2 вокруг полюса C . Направление касательной составляющей ускорения $\vec{a}_{BC}^\tau$ точки B выбрано в направлении вращения шатуна 2 (см. рис. 2.30) исходя из предположения его ускоренного движения. В результате ускорение точки A выражается векторной суммой:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_{AB}^\tau + \vec{a}_{AB}^n + \vec{a}_{BC}^\tau + \vec{a}_{BC}^n + \vec{a}_C.$$

Направления векторов ускорений показаны на рис. 2.31.

Заметим, что в любой момент времени движения колеса 1 расстояние от точки A до мгновенного центра скоростей колеса P_1 остаётся постоянным, равным радиусу колеса. Дифференцируем выражение $V_A = \omega_1 \cdot P_1 A = \omega_1 \cdot r_1$. Получим $\frac{dV_A}{dt} = \frac{d\omega_1}{dt} r_1 = \varepsilon_1 \cdot r_1$, откуда с учётом $\frac{dV_A}{dt} = a_A$ (прямолинейное движение точки A) угловое ускорение диска 1 $\varepsilon_1 = \frac{a_A}{r_1}$. В результате, касательное ускоре-

ние a_{AB}^τ точки A при вращении диска 1 вокруг полюса B $a_{AB}^\tau = \varepsilon_1 \cdot AB = a_A$.

Найдём модули векторов ускорений:

$$a_{AB}^n = \omega_1^2 \cdot AB = 15 \text{ м/с}^2; \quad a_{BC}^n = \omega_2^2 \cdot BC = 26 \text{ м/с}^2.$$

Ускорение $a_{BC}^\tau = \varepsilon_2 \cdot BC$ остаётся неизвестным. Применить здесь способ дифференцирования выражения $V_C = \omega_2 \cdot P_2 C$ для определения углового ускорения ε_2 невозможно, так как расстояние $P_2 C$ от мгновенного центра скоростей P_2 шатуна 2 до точки C меняется во время движения механизма неизвестным образом.

Спроектируем векторное равенство ускорения точки A на оси x , y , выбранные, как показано на рис. 2.31. Получим систему уравнений:

$$\text{проекция на ось } x: -a_A \cos 60^\circ = a_{AB}^\tau - a_{BC}^n - a_C \cos 60^\circ;$$

$$\text{проекция на ось } y: a_A \cos 30^\circ = a_{AB}^n - a_{BC}^\tau + a_C \cos 30^\circ.$$

Из первого уравнения с учётом того, что $a_{AB}^\tau = a_A$, найдём ускорение точки A : $a_A = 18,67 \text{ м/с}^2$. Положительное значение ускорения точки A означает, что вектор $\vec{a}_A$ направлен так, как показано на рис. 2.31, – в сторону направления вектора скорости $\vec{V}_A$. Из этого следует, что диск 1 движется ускоренно и угловое ускорение направлено в сторону его угловой скорости.

Из второго уравнения получим: $a_{BC}^{\tau} = 2,29 \text{ м/с}^2$. Угловое ускорение ша-

туна 2: $\varepsilon_2 = \frac{|a_{BC}^{\tau}|}{BC} = 2,2 \text{ рад/с}^2$. Из того, что касательное ускорение a_{BC}^{τ} положительно, следует, что направление вектора $\vec{a}_{BC}^{\tau}$ совпадает с направлением, указанным на рис. 2.31. Это, в свою очередь, означает, что в данном положении механизма угловое ускорение шатуна 2 направлено так, как показано на рис. 2.31, – по направлению его угловой скорости, то есть шатун 2 вращается ускоренно.

Задача 35. По неподвижной шестерне 1 радиуса r_1 обкатывается шестерня 2 радиуса r_2 , насаженная в центре на кривошипе OA (рис. 2.32). Кривошип OA вращается вокруг оси O с угловой скоростью ω_{OA} и угловым ускорением ε_{OA} . На ободе шестерни 2 в точке B шарнирно прикреплен стержень BC , соединенный другим концом с центром C диска 3, катящегося без скольжения вдоль горизонтальной прямой. Радиус диска 3 равен радиусу шестерни 2: $r_3 = r_2$. Для положения механизма, изображенного на рис. 2.32, определить ускорение точки D и угловое ускорение стержня BC , если $r_1 = 0,2 \text{ м}$, $r_2 = 0,4 \text{ м}$, $\omega_{OA} = 4 \text{ рад/с}$, $\varepsilon_{OA} = 2 \text{ рад/с}^2$. Длина стержня $BC = 1 \text{ м}$.

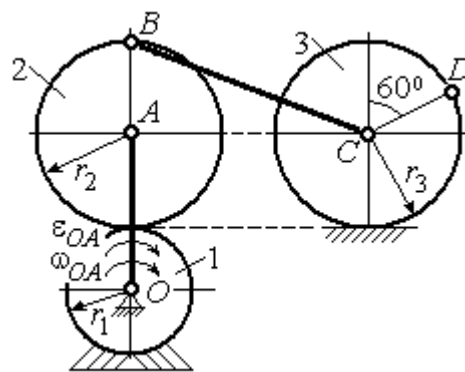


Рис. 2.32. Схема движения плоского механизма

Решение

Найдём угловые скорости звеньев механизма.

Рассмотрим вращательное движение кривошипа OA . Скорость его точки A : $V_A = \omega_{OA} \cdot OA = 2,4 \text{ м/с}$. Вектор скорости $\vec{V}_A$ направлен перпендикулярно кривошипу OA в сторону его вращения (рис. 2.33).

При качении подвижной шестерни 2 по неподвижной 1, точка их соприкосновения P_2 является мгновенным центром скоростей шестерни 2. Угловая скорость шестерни 2: $\omega_2 = \frac{V_A}{AP_2} = 6$ рад/с. Скорость точки B шестерни 2:

$$V_B = \omega_2 \cdot BP_2 = 4,8 \text{ м/с.}$$

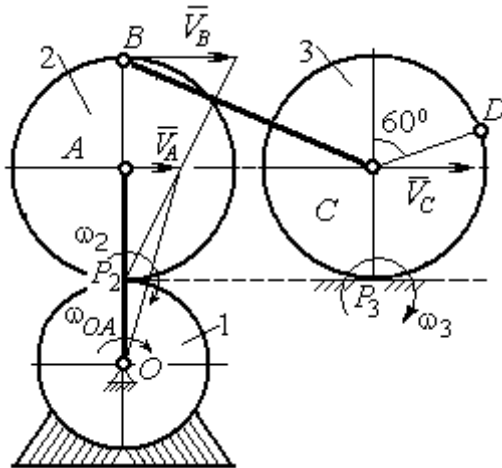


Рис. 2.33. Расчетная схема для определения угловых скоростей звеньев механизма

Для определения угловой скорости стержня BC заметим, что скорости двух точек стержня $\vec{V}_B$ и $\vec{V}_C$ параллельны, но точки B и C не лежат на общем перпендикуляре к скоростям. В этом случае мгновенный центр скоростей стержня BC отсутствует (или бесконечно удалён), угловая скорость стержня равна нулю и стержень совершает мгновенное поступательное движение.

При таком движении мгновенные скорости всех точек стержня BC одинаковы по величине и направлению. Таким образом, $\omega_{BC} = 0$; $V_C = V_B = 4,8$ м/с.

При качении диска 3 по неподвижной поверхности без проскальзывания точка P_3 касания диска с поверхностью является его мгновенным центром скоростей. Угловая скорость диска 3: $\omega_3 = \frac{V_C}{CP_3} = 12$ рад/с. Направление угловой скорости ω_3 определяется направлением вектора $\vec{V}_C$.

Найдём ускорения точек и угловые ускорения звеньев механизма.

Выразим ускорение $\vec{a}_C$ точки C , направленное вдоль линии движения центра колеса 3, через полюс B . Ускорение представляется векторной суммой: $\vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{a}_{CB}^n + \vec{a}_{CB}^{\tau}$, где $\vec{a}_B$ – вектор ускорения полюса B ; $\vec{a}_{CB}^n$, $\vec{a}_{CB}^{\tau}$ – нормальная и касательная составляющие ускорения точки C при вращении

стержня BC вокруг полюса B .

Вектор $\vec{a}_{CB}^n$ направлен вдоль стержня от точки C к полюсу B , вектор $\vec{a}_{CB}^\tau$ перпендикулярен стержню BC . Направление вектора $\vec{a}_{CB}^\tau$ выбрано по предполагаемому угловому ускорению стержня BC , показанному на рис. 2.34 дуговой стрелкой ε_{CB} .

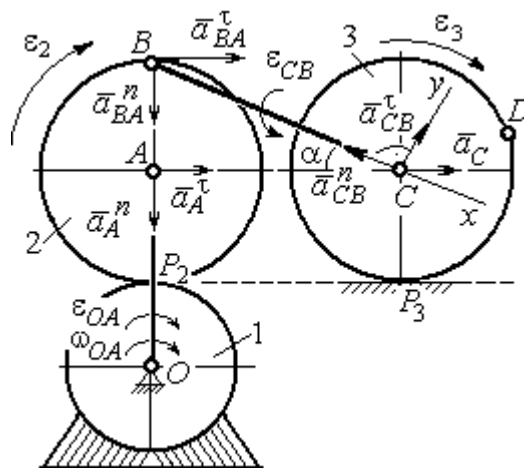


Рис. 2.34. Расчетная схема для определения ускорений точек механизма и угловых ускорений его звеньев

Рассмотрим плоскопараллельное движение шестерни 2 и выразим ускорение точки B через полюс A в виде векторного равенства: $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^\tau$, где $\vec{a}_A$ – ускорение полюса A ; $\vec{a}_{BA}^n$, $\vec{a}_{BA}^\tau$ – нормальная и касательная составляющие ускорения точки B при вращении шестерни 2 вокруг полюса A . Вектор $\vec{a}_{BA}^n$ направлен вдоль радиуса шестерни от точки B к полюсу A , вектор $\vec{a}_{BA}^\tau$ перпендикулярен линии BA . Направление вектора $\vec{a}_{BA}^\tau$ соответствует ускоренному вращению шестерни 2.

Рассмотрим вращение кривошипа OA . Вектор ускорения точки A кривошипа при вращении его вокруг неподвижной оси O представляется в виде суммы: $\vec{a}_A = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^\tau$, где $\vec{a}_A^n$ и $\vec{a}_A^\tau$ – вектора нормальной и касательной составляющих ускорения точки A . Вектор $\vec{a}_A^n$ направлен вдоль кривошипа по направлению к оси вращения, вектор $\vec{a}_A^\tau$ перпендикулярен кривошипу и направлен в сторону углового ускорения ε_{OA} вращения кривошипа.

В результате для определения ускорения точки C имеем векторное равенство:

$$\vec{a}_C = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^\tau + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^\tau + \vec{a}_{CB}^n + \vec{a}_{CB}^\tau.$$

Направления всех векторов ускорений показаны на рис. 2.34.

Вычислим модули векторов, составляющих векторную сумму:

$$a_A^n = \omega_{OA}^2 \cdot OA = 9,6 \text{ м/с}^2; \quad a_A^\tau = \varepsilon_{OA} \cdot OA = 1,2 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{BA}^n = \omega_2^2 \cdot BA = 14,4 \text{ м/с}^2; \quad a_{CB}^n = \omega_{BC}^2 \cdot BC = 0.$$

Заметим, что во время движения шестерни 2 расстояние AP_2 остается постоянным, равным r_2 . Дифференцируя равенство $V_A = \omega_2 \cdot AP_2 = \omega_2 r_2$, получим: $\frac{dV_A}{dt} = \frac{d\omega_2}{dt} r_2$. При криволинейном движении точки A производная от скорости

равна касательному ускорению: $\frac{dV_A}{dt} = a_A^\tau$. С учётом, что $\frac{d\omega_2}{dt} = \varepsilon_2$, по-

лучим: $a_A^\tau = \varepsilon_2 r_2$, откуда $\varepsilon_2 = \frac{a_A^\tau}{r_2} = 3 \text{ рад/с}^2$ и $a_{BA}^\tau = \varepsilon_2 \cdot BA = 1,2 \text{ м/с}^2$.

Выберем оси Cx , Cy , как показано на рис. 2.34, – вдоль отрезка BC и перпендикулярно ему и спроектируем на них векторное равенство ускорения точки C . Получим систему уравнений:

$$a_C \cos \alpha = a_A^n \sin \alpha + a_A^\tau \cos \alpha + a_{BA}^n \sin \alpha + a_{BA}^\tau \cos \alpha - a_{CB}^n;$$

$$a_C \sin \alpha = -a_A^n \cos \alpha + a_A^\tau \sin \alpha - a_{BA}^n \cos \alpha + a_{BA}^\tau \sin \alpha + a_{CB}^\tau,$$

где α – угол между стержнем BC и линией центров AC , $\sin \alpha = \frac{AB}{BC} = 0,4$; $\cos \alpha = 0,92$.

Находим из первого уравнения ускорение точки C : $a_C = 12,83 \text{ м/с}^2$, из второго – касательное ускорение точки C при вращении стержня BC вокруг полюса B : $a_{CB}^\tau = 33,95 \text{ м/с}^2$. Величина углового ускорения стержня BC :

$\varepsilon_{CB} = \frac{|a_{CB}^\tau|}{BC} = 33,95 \text{ рад/с}^2$. Положительное значение a_{CB}^τ означает, что вектор

касательного ускорения $\vec{a}_{CB}^\tau$ направлен так, как показано на рис. 2.34. Тогда и

направление углового ускорения ε_{CB} стержня BC совпадает с направлением, показанным дуговой стрелкой на рис. 2.34.

При качении диска 3 точка C движется по прямой и расстояние CP_3 остается постоянным, равным радиусу диска 3. В этом случае равенство $V_C = \omega_3 \cdot CP_3 = \omega_3 r_3$ можно продифференцировать

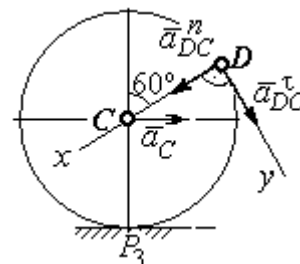


Рис.2.35. Расчетная схема для определения ускорения точки D

по времени. Получим: $\frac{dV_C}{dt} = \frac{d\omega_3}{dt} r_3$. Так как дви-

жение точки C является прямолинейным, производная от скорости точки C

равна ускорению этой точки: $\frac{dV_C}{dt} = a_C$. Тогда с учётом $\frac{d\omega_3}{dt} = \varepsilon_3$ имеем равен-

ство $a_C = \varepsilon_3 r_3$. Угловое ускорение диска 3: $\varepsilon_3 = \frac{a_C}{r_3} = 32,07 \text{ рад/с}^2$.

Выразим ускорение точки D через полюс C , ускорение которого известно и по величине, и по направлению: $\vec{a}_D = \vec{a}_C + \vec{a}_{DC}^n + \vec{a}_{DC}^\tau$, где $\vec{a}_C$ – ускорение точки C ; $\vec{a}_{DC}^n$, $\vec{a}_{DC}^\tau$ – нормальное и касательное составляющие ускорения точки D при вращении диска 3 вокруг полюса C . Модули ускорений

$$a_C = 12,83 \text{ м/с}^2; a_{DC}^n = \omega_3^2 DC = 57,6 \text{ м/с}^2; a_{DC}^\tau = \varepsilon_3 DC = 12,83 \text{ м/с}^2.$$

Проведём оси Dx и Dy , как показано на рис. 2.34, и спроектируем векторное равенство ускорения точки D на оси. Получим систему уравнений:

$$a_{Dx} = -a_C \cos 30^\circ + a_{DC}^n; \quad a_{Dy} = a_C \cos 60^\circ + a_{DC}^\tau.$$

Подставляя в уравнения проекций значения модулей ускорений, найдём: $a_{Dx} = 46,49 \text{ м/с}^2$; $a_{Dy} = 19,25 \text{ м/с}^2$.

$$\text{Величина ускорения точки } D: a_D = \sqrt{a_{Dx}^2 + a_{Dy}^2} = 50,32 \text{ м/с}^2.$$

Заметим, что для определения ускорения точки D невозможно было сразу использовать приём с последовательным выражением ускорения точки D через

ускорения полюсов C , B и A , так как в полученной в результате проекций системе двух уравнений будет три неизвестных величины - a_{Dx} , a_{Dy} и величина ускорения a_{CB}^{τ} .

Задача 36. Механизм качалки (рис. 2.36) включает в себя кривошип OA , вращающийся вокруг неподвижной оси O , шестерню 1 радиуса r_1 , насаженную

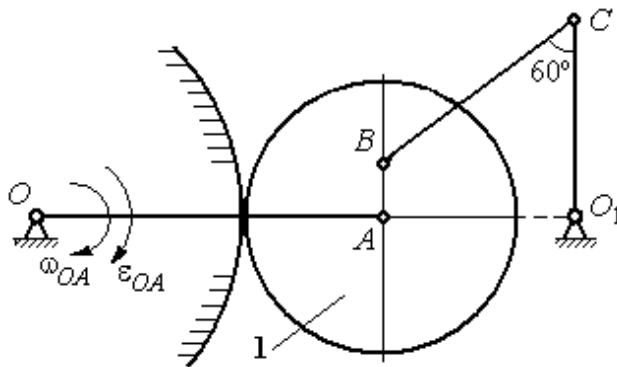


Рис. 2.36. Механизм качалки

на кривошип в точке A и обкатывающуюся по неподвижной цилиндрической поверхности, и шатун BC , присоединённый одним концом в точке B к шестерне, а другим – в точке C к коромыслу CO_1 . В положении,

указанном на рис. 2.36, определить угловую скорость и угловое ускорение коромысла CO_1 , если $\omega_{OA} = 2$ рад/с; $\epsilon_{OA} = 4$ рад/с²; $OA = 0,8$ м; $r_1 = 0,4$ м; $AB = 0,2$ м; $BC = 0,6$ м. Для этого же положения определить ускорение точки C .

Решение

Найдём угловые скорости звеньев механизма.

Скорость точки A кривошипа $V_A = \omega_{OA} \cdot OA = 1,6$ м/с. Вращаясь, кривошип передаёт движение шестерне 1, которая катится по неподвижной поверхности. Точка касания P_1 шестерни с неподвижной поверхностью является мгновенным центром скоростей шестерни. Тогда её угловая скорость $\omega_1 = \frac{V_A}{AP_1} = 4$ рад/с. Направление угловой скорости показано на рис. 2.37 дуговой стрелкой ω_1 .

Расстояние от мгновенного центра скоростей шестерни до её точки B $P_1B = 0,45$ м. Скорость точки B : $V_B = \omega_1 \cdot P_1B = 1,8$ м/с. Вектор скорости $\vec{V}_B$ перпендикулярен линии P_1B и направлен в сторону вращения шестерни.

При вращении коромысла CO_1 вокруг неподвижной оси O_1 вектор скорости $\vec{V}_C$ перпендикулярен коромыслу. Точка P_2 , лежащая на пересечении перпендикуляров, восстановленных к векторам $\vec{V}_B$ и $\vec{V}_C$ – скоростей точек B и C , является мгновенным центром скоростей шатуна BC (рис. 2.37). Расстояние

$$BK = BC \cos 30^\circ = 0,52 \text{ м}; \quad \cos \alpha = \frac{AP_1}{BP_1} = 0,89; \quad P_2B = \frac{BK}{\cos \alpha} = 0,58 \text{ м.}$$

Угловая скорость шатуна $\omega_{BC} = \frac{V_B}{BP_2} = 3,1 \text{ рад/с.}$

Направление угловой скорости шатуна показано на рис. 2.37 дуговой стрелкой ω_{BC} .

Расстояние

$$P_2C = BC \cdot \sin 30^\circ - P_2B \cdot \sin \alpha = 0,04 \text{ м.}$$

Скорость точки C шатуна BC :

$$V_C = \omega_{BC} \cdot P_2C = 0,12 \text{ м/с.}$$

Длина коромысла $CO_1 = CK + KO_1 = 0,5 \text{ м}$, угловая скорость коромысла $\omega_{CO_1} = \frac{V_C}{CO_1} = 0,24 \text{ рад/с.}$

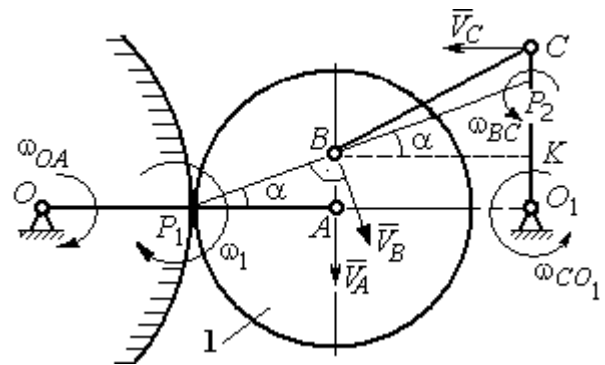


Рис. 2.37. Расчётная схема для определения угловых скоростей звеньев механизма

Найдём ускорения звеньев механизма.

Считая, что точка C принадлежит шатуну BC , выразим ускорение точки C через полюс B : $\vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{a}_{CB}^n + \vec{a}_{CB}^\tau$, где $\vec{a}_B$ – ускорение полюса B ; $\vec{a}_{CB}^n$, $\vec{a}_{CB}^\tau$ – нормальная и касательная составляющие вектора ускорения точки C при вращении шатуна вокруг полюса B .

Полагая, что точка B принадлежит шестерне 1, выразим её ускорение через полюс A : $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^\tau$, где $\vec{a}_A$ – ускорение точки A шестерни; $\vec{a}_{BA}^n$, $\vec{a}_{BA}^\tau$ – нормальная и касательная составляющие вектора ускорения точки B при вращении шестерни вокруг полюса A .

Поскольку точка A принадлежит и кривошипу OA , а точка C – коромыслу CO_1 , вращающихся вокруг своих неподвижных осей, вектора ускорений этих

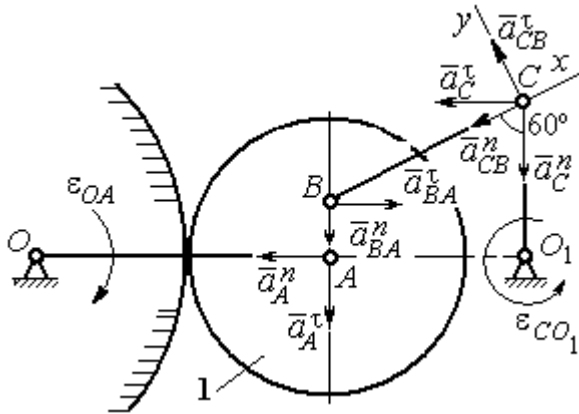


Рис. 2.38. Расчётная схема для определения ускорений точек механизма

точек можно представить в виде сумм векторов:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^\tau, \quad \vec{a}_C = \vec{a}_C^n + \vec{a}_C^\tau,$$

где $\vec{a}_A^n$, $\vec{a}_A^\tau$ – нормальная и касательная составляющие вектора ускорения точки A при вращении кривошипа вокруг оси O ; $\vec{a}_C^n$, $\vec{a}_C^\tau$ – нормальная и касательная составляющие

вектора ускорения точки C при вращении коромысла вокруг оси O_1 .

В результате подстановок получим полное векторное равенство, связывающее ускорения точек механизма:

$$\vec{a}_C^n + \vec{a}_C^\tau = \vec{a}_{CB}^n + \vec{a}_{CB}^\tau + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^\tau + \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^\tau.$$

Направления векторов ускорений показаны на рис. 2.38.

Модули векторов ускорений:

$$a_C^n = \omega_{CO_1}^2 \cdot CO_1 = 0,03 \text{ м/с}^2; \quad a_{CB}^n = \omega_{CB}^2 \cdot CB = 5,77 \text{ м/с}^2,$$

$$a_A^n = \omega_{OA}^2 \cdot OA = 3,2 \text{ м/с}^2; \quad a_A^\tau = \varepsilon_{OA} \cdot OA = 3,2 \text{ м/с}^2,$$

$$a_{BA}^n = \omega_1^2 \cdot BA = 3,2 \text{ м/с}^2; \quad a_{BA}^\tau = \varepsilon_1 \cdot BA.$$

Для определения ε_1 углового ускорения шестерни 1 продифференциру-

ем равенство $V_A = \omega_1 \cdot AP_1 = \omega_1 r_1$. Получим: $a_A^\tau = \varepsilon_1 r_1$, откуда $\varepsilon_1 = \frac{a_A^\tau}{r_1} = 8 \text{ рад/с}^2$.

Тогда $a_{BA}^\tau = 1,6 \text{ м/с}^2$.

Неизвестными в векторном равенстве ускорений остаются модули векторов $\vec{a}_{CB}^\tau$ и $\vec{a}_C^\tau$. Выберем ось x вдоль шатуна BC , как показано на рис. 2.38, и спроектируем на неё полное векторное равенство.

Получим уравнение:

$$-a_C^n \cos 60^\circ - \vec{a}_C^\tau \cos 30^\circ = -a_{CB}^n - a_{BA}^n \cos 60^\circ + a_{BA}^\tau \cos 30^\circ - a_A^n \cos 30^\circ - a_A^\tau \cos 60^\circ,$$

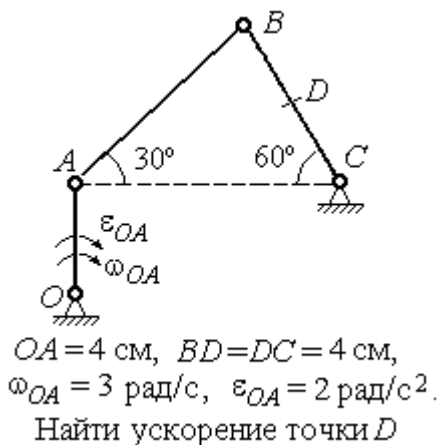
откуда найдём ускорение $a_C^\tau = 11,94 \text{ м/с}^2$. Угловое ускорение качалки

$$\varepsilon_{CO_1} = \frac{|\vec{a}_C^\tau|}{CO_1} = 23,88 \text{ рад/с}^2.$$

Положительное значение касательного ускорения a_C^τ свидетельствует о том, что направление вектора ускорения $\vec{a}_C^\tau$ совпадает с направлением, показанным на рис. 2.38. В эту же сторону направлена и скорость $\vec{V}_C$ точки C (см. рис. 2.37). Следовательно, в данном положении движение качалки ускоренное и угловое ускорение направлено в сторону угловой скорости.

Упражнения

Упражнения 2.9



Упражнения 2.10

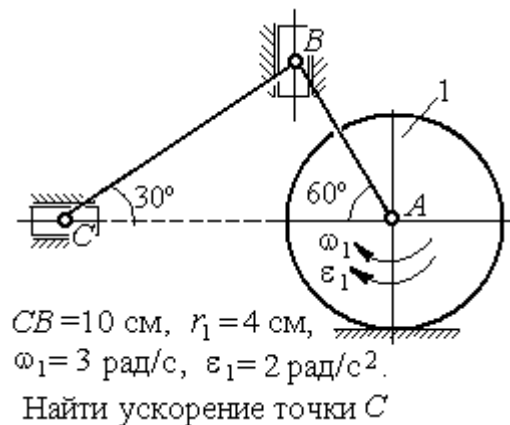


Рис. 2.39. Задания для самостоятельного решения. Упражнения 2.9, 2.10

3. СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

3.1. Основные понятия и определения сложного движения точки

Рассматривается подвижное твердое тело и точка, перемещающаяся относительно тела.

Неподвижная система координат, относительно которой определяются движения точки и тела, называется **основной**. Связанная с телом и движущаяся вместе с ним система координат называется **подвижной**.

Движение точки относительно подвижной системы координат (фактически движение точки относительно тела) называется **относительным**. **Переносным** движением называют движение, которое совершает точка вместе с подвижной системой координат (фактически вместе с телом). Движение точки относительно основной (неподвижной) системы координат называется **абсолютным**.

Скорость точки относительно подвижной системы координат называют **относительной скоростью**, ускорение – **относительным ускорением**.

Переносной скоростью точки и **переносным ускорением** называют скорость и ускорение той точки тела, с которой в данный момент совпадает движущаяся точка.

Скорость и ускорение точки относительно основной системы называют **абсолютной скоростью и абсолютным ускорением**.

При вычислении абсолютной скорости используется теорема о сложении скоростей: **скорость абсолютного движения точки равна векторной сумме переносной и относительной скоростей**: $\vec{V} = \vec{V}_e + \vec{V}_r$, где $\vec{V}$, $\vec{V}_e$, $\vec{V}_r$ – вектора абсолютной, переносной и относительной скоростей точки.

При вычислении абсолютного ускорения используется теорема Кориолиса о сложении ускорений: **абсолютное ускорение точки равно векторной сумме трех ускорений – относительного, переносного и ускорения Кориолиса**: $\vec{a} = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_k$, где $\vec{a}$ – вектор абсолютного ускорения точки; $\vec{a}_e$, $\vec{a}_r$ –

вектора соответственно переносного и относительного ускорений точки; $\vec{a}_k$ – вектор ускорения Кориолиса.

Вектор ускорения Кориолиса определяется векторным произведением: $\vec{a}_k = 2(\vec{\omega}_e \times \vec{V}_r)$, где $\vec{\omega}_e$ – вектор угловой скорости переносного движения; $\vec{V}_r$ – вектор относительной скорости точки. Модуль ускорения Кориолиса:

$|\vec{a}_k| = 2|\vec{\omega}_e| \cdot |\vec{V}_r| \sin \alpha$, где α – угол между вектором угловой скорости переносного движения $\vec{\omega}_e$ и вектором относительной скорости точки $\vec{V}_r$ (рис. 3.1).

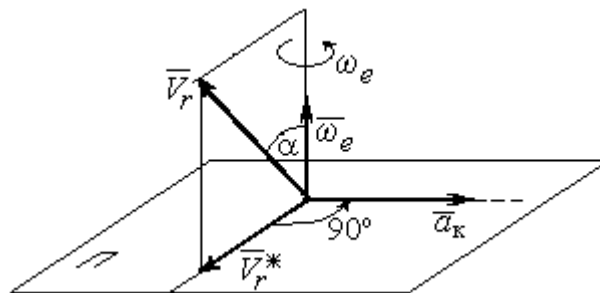


Рис. 3.1. Определение ускорения Кориолиса по правилу Жуковского

На рис. 3.1 показан способ определения вектора ускорения Кориолиса по правилу Н. Е. Жуковского. Правило состоит в следующем. Построим плоскость Π , перпендикулярную вектору угловой скорости $\vec{\omega}_e$, и спроектируем вектор относительной скорости $\vec{V}_r$ на эту плоскость. Проекцию обозначим $\vec{V}_r^*$ (см. рис. 3.1). Чтобы получить направление ускорения Кориолиса, следует вектор проекции относительной скорости $\vec{V}_r^*$ повернуть на 90° в плоскости Π вокруг оси переносного вращения в направлении этого вращения.

Если сложное движение точки происходит в плоскости, перпендикулярной оси переносного вращения, направление ускорения Кориолиса можно получить простым поворотом вектора относительной скорости на угол 90° вокруг оси переносного вращения в направлении этого вращения. При этом модуль ускорения Кориолиса $a_k = 2|\omega_e| \cdot |V_r| \sin 90^\circ = 2\omega_e V_r$.

Примеры решения задач на сложное движение точки

Задача 37. Компрессор с криволинейными каналами (рис. 3.2) вращается с постоянной угловой скоростью $\omega = 10$ рад/с вокруг оси O , перпендикулярной

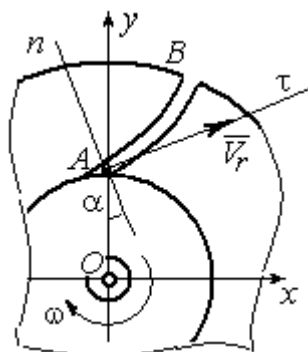


Рис.3.2. Движение воздуха по каналу компрессора

плоскости рисунка. Воздух перемещается по каналу AB с постоянной относительной скоростью $V_r = 4$ м/с. Найти ускорение частицы воздуха в начале канала в точке A и проекции этого ускорения на оси неподвижной системы координат xOy , если радиус $OA = 0,5$ м, радиус кривизны канала в точке A $\rho = 0,8$ м, угол между нормалью n к кривой AB в точке A и радиусом OA $\alpha = 30^\circ$.

Решение

Переносным движением для частицы воздуха будет вращательное движение компрессора, а скорость точки A компрессора, где по условию находится частица воздуха, будет её переносной скоростью: $V_e = \omega \cdot OA = 5$ м/с. Вектор $\vec{V}_e$ переносной скорости частицы перпендикулярен радиусу OA и направлен в сторону угловой скорости вращения компрессора (рис. 3.3).

Вектор $\vec{V}_r$ относительной скорости частицы воздуха направлен вдоль касательной к кривой AB (стенки канала) в точке A .

Вектор абсолютной скорости частицы воздуха равен геометрической сумме векторов относительной и переносной скоростей:

$\vec{V} = \vec{V}_r + \vec{V}_e$ (см. рис. 3.3). Спроектируем это векторное равенство на оси x, y . Получим систему уравнений:

$$V_x = V_e + V_r \cos 30^\circ = 8,46 \text{ м/с}; V_y = V_r \cos 60^\circ = 2 \text{ м/с}.$$

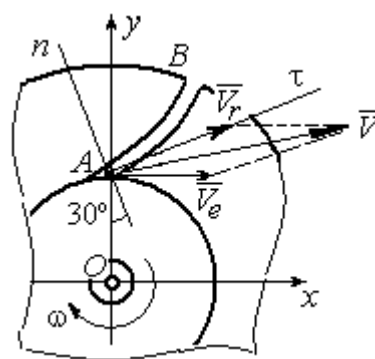


Рис. 3.3. Построение вектора абсолютной скорости частицы

Модуль абсолютной скорости $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = 8,69$ м/с.

Найдём ускорение частицы воздуха.

Абсолютное ускорение частицы определяется по теореме сложения ускорений:

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_k.$$

В относительном движении частица движется между стенками канала по криволинейной траектории, и её ускорение $\vec{a}_r$ представляется суммой: $\vec{a}_r = \vec{a}_r^n + \vec{a}_r^\tau$, где $\vec{a}_r^n$, $\vec{a}_r^\tau$ – вектора нормальной и касательной составляющих относительного ускорения частицы.

Переносное ускорение частицы $\vec{a}_e$ есть ускорение точки A вращающегося компрессора, которое выражается суммой $\vec{a}_e = \vec{a}_e^n + \vec{a}_e^\tau$, где $\vec{a}_e^n$, $\vec{a}_e^\tau$ – вектора нормальной и касательной составляющих переносного ускорения частицы.

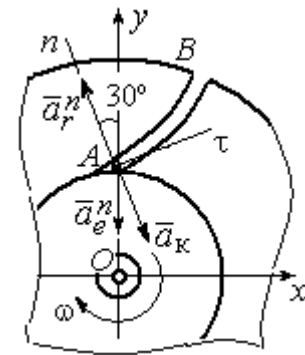


Рис. 3.4. Составляющие ускорения частицы в сложном движении

В результате абсолютное ускорение частицы воздуха в точке A выражается векторной суммой:

$$\vec{a} = \vec{a}_r^n + \vec{a}_r^\tau + \vec{a}_e^n + \vec{a}_e^\tau + \vec{a}_k.$$

Вычислим модули ускорений:

$$a_r^\tau = \dot{V}_r = 0, \quad a_r^n = \frac{V_r^2}{\rho} = 20 \text{ м/с}^2; \quad a_e^\tau = \varepsilon \cdot OA = \dot{\omega} \cdot OA = 0,$$

$$a_e^n = \omega^2 r = 50 \text{ м/с}^2; \quad a_k = 2\omega V_r = 80 \text{ м/с}^2.$$

Направление ускорения Кориолиса определяется простым поворотом вектора относительной скорости на угол 90° вокруг оси переносного вращения в направлении этого вращения. Вектора ускорений показаны на рис. 3.4.

Спроектируем векторное равенство ускорения частицы на оси неподвижной системы координат xOy . Получим:

$$a_x = -a_r^n \cos 60^\circ + a_k \cos 60^\circ = 30 \text{ м/с}^2 ;$$

$$a_y = a_r^n \cos 30^\circ - a_e^n - a_k \cos 30^\circ = -101,96 \text{ м/с}^2.$$

$$\text{Модуль ускорения } a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 106,28 \text{ м/с}^2.$$

Задача 38. При совмещении работы механизмов подъёма груза и поворо-

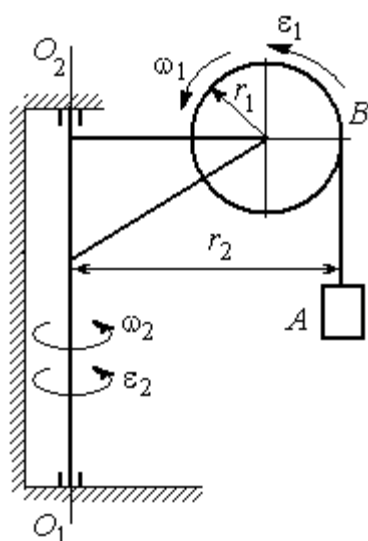


Рис. 3.5. Механизм поворотного крана

та крана (рис. 3.5) груз A перемещается в горизонтальном и вертикальном направлениях. На участке разгона барабан B радиуса $r_1 = 0,5$ м, на который навит канат, поддерживающий груз, вращается с постоянным угловым ускорением $\varepsilon_1 = 3 \text{ рад/с}^2$, а кран разворачивается вокруг оси O_1O_2 с угловым ускорением $\varepsilon_2 = 0,5 \text{ рад/с}^2$.

Пренебрегая отклонением каната от вертикали, определить скорость и ускорение груза в момент времени $t_1 = 1$ с, если вылет стрелы крана до линии подвеса груза $r_2 = 10$ м.

Решение

Подъём груза A на канате является для груза относительным движением, а вращение крана – переносным. Вектор абсолютной скорости груза равен сумме $\vec{V} = \vec{V}_r + \vec{V}_e$, где вектора относительной $\vec{V}_r$ и переносной $\vec{V}_e$ скоростей.

При равноускоренном вращении барабана B из состояния покоя его угловая скорость $\omega_1 = \varepsilon_1 t$. В момент времени $t_1 = 1$ с $\omega_1 = 3 \text{ рад/с}$. Скорость подъёма груза A в этот момент $V_r(1) = \omega_1(1)r_1 = 1,5 \text{ м/с}$. Вектор относительной скорости $\vec{V}_r$ направлен вдоль линии движения груза, в сторону его подъёма (рис. 3.6).

Угловая скорость крана при постоянном угловом ускорении $\omega_2 = \varepsilon_2 t$.

При $t_1 = 1$ с $\omega_2 = 0,5$ рад/с. Переносная скорость груза A равна скорости груза, движущегося вместе со стрелой крана по окружности радиуса r_2 : $V_e = \omega_2 r_2 = 5$ м/с. Вектор переносной скорости груза $\vec{V}_e$ направлен по касательной к траектории переносного движения груза в сторону угловой скорости вращения крана (см. рис. 3.6).

Так как вектора относительной и переносной скоростей груза взаимно перпендикулярны, модуль абсолютной скорости $V = \sqrt{V_r^2 + V_e^2} = 5,22$ м/с.

Найдём абсолютное ускорение груза.

Теорема сложения ускорений имеет вид векторной суммы: $\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_k = \vec{a}_r^n + \vec{a}_r^\tau + \vec{a}_e^n + \vec{a}_e^\tau + \vec{a}_k$, где $\vec{a}_r^n$, $\vec{a}_r^\tau$, $\vec{a}_e^n$, $\vec{a}_e^\tau$, $\vec{a}_k$ – вектора нормального и касательного ускорений груза в относительном и переносном движениях и ускорение Кориолиса. Найдём модули векторов ускорений.

Нормальное относительное ускорение a_r^n груза, движущегося прямолинейно, равно нулю: $a_r^n = 0$, а касательное a_r^τ равно по величине касательному ускорению точки на поверхности барабана: $a_r^\tau = \varepsilon_1 r_1 = 1,5$ м/с². Направление вектора $\vec{a}_r^\tau$ относительного касательного ускорения груза определяется направлением углового ускорения барабана.

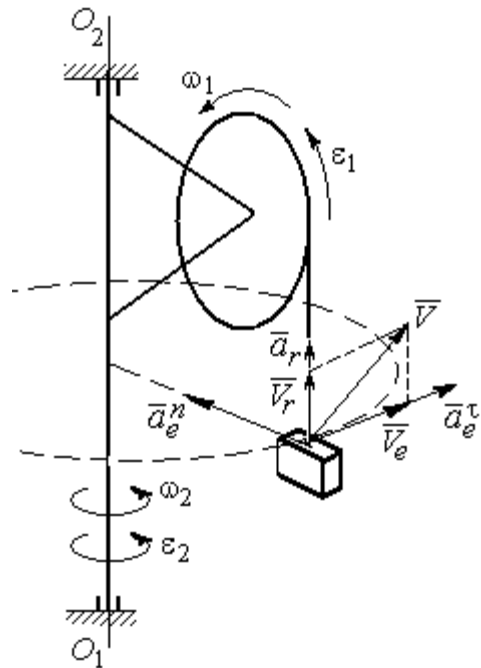


Рис. 3.6. Расчётная схема для определения скорости и ускорения груза на поворотном кране

Переносные нормальное a_e^n и касательное a_e^τ ускорения груза: $a_e^n = \omega_2^2 r_2 = 2,5 \text{ м/с}^2$; $a_e^\tau = \varepsilon_2 r_2 = 5 \text{ м/с}^2$. Вектор касательного ускорения $\vec{a}_e^\tau$ направлен в сторону углового ускорения вращения крана.

Ускорение Кориолиса a_k равно нулю, так как вектор $\vec{V}_r$ параллелен вектору $\vec{\omega}_2$: $a_k = 0$.

Направления векторов ускорений, модули которых отличны от нуля, показаны на рис. 3.6. В результате вектор абсолютного ускорения груза представлен в виде разложения на три взаимно перпендикулярных вектора: $\vec{a} = \vec{a}_e^n + \vec{a}_e^\tau + \vec{a}_r^\tau$, поэтому модуль абсолютного ускорения груза $a = \sqrt{(a_e^n)^2 + (a_e^\tau)^2 + (a_r^\tau)^2} = 5,79 \text{ м/с}^2$.

Задача 39. Фигура, состоящая из половины диска и построенного на его диаметре равнобедренного треугольника (рис. 3.7), вращается вокруг оси, перпендикулярной плоскости фигуры и проходящей через вершину A треугольника, по закону $\varphi_e = 5t - 2t^2$ рад. Положительное направление вращения отмечено на схеме дуговой стрелкой φ .

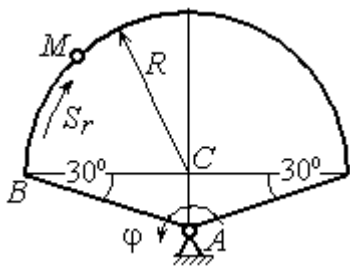


Рис. 3.7. Схема сложного движения точки

По ободу диска из начального положения B движется точка M . Уравнение движения точки:

$B\ddot{M} = S_r = 9\pi t^2$, см.. Положительное направление отсчёта дуги BM показано дуговой стрелкой S_r (см. рис. 3.7). Радиус диска $R = 9$ см. Найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M в момент времени $t_1 = 1$ с.

Решение

Переносным движением точки M является вращение фигуры вокруг оси A , относительным – её движение по окружности обода диска.

Положение точки M на окружности определяется центральным углом:

$\alpha = \frac{S_r}{R}$, где S_r – длина дуги окружности, пройденная точкой. В момент времени $t_1 = 1$ с $S_r = 9\pi$ см и $\alpha = \pi$. Расчётное положение точки M на рис. 3.8 обозначено M_1 .

Угловая скорость вращения фигуры равна модулю производной $\omega_e = |\dot{\phi}_e| = |5 - 4t|$. При $t_1 = 1$ с $\omega_e(1) = 1$ рад/с.

Направление угловой скорости определяется знаком производной $\dot{\phi}_e$. Положительная на данный момент времени величина производной ($\dot{\phi}_e = 1$) показывает, что вращение фигуры происходит в положительном направлении отсчёта угла ϕ_e и отмечено на рис. 3.8 дуговой стрелкой ω_e .

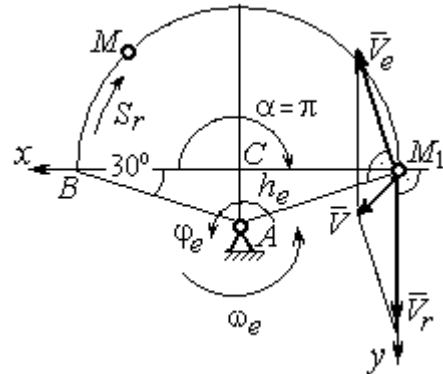


Рис. 3.8. Расчетная схема для вычисления абсолютной скорости точки

Переносная скорость точки V_e – это скорость расчётного положения точки M вращающейся фигуры: $V_e = \omega_e h_e = \omega_e AM_1 = \frac{\omega_e R}{\cos 30^\circ} = 10,39$ см/с. Вектор переносной скорости точки $\vec{V}_e$ перпендикулярен отрезку AM_1 и направлен в сторону вращения фигуры (см. рис. 3.8).

Скорость точки в относительном движении определяется как модуль производной: $V_r = |\dot{S}_r| = |18\pi t|$. При $t_1 = 1$ с $V_r = 56,5$ см/с. Положительное значение производной $\dot{S}_r = 18\pi > 0$ указывает, что в этот момент времени относительное движение точки происходит в положительном направлении отсчёта дуги окружности, по которой движется точка. Вектор $\vec{V}_r$ относительной скорости точки перпендикулярен отрезку CM_1 и направлен в сторону её движения.

Абсолютная скорость точки равна сумме векторов переносной и относительной скоростей $\vec{V} = \vec{V}_e + \vec{V}_r$. Для того чтобы найти абсолютную скорость

точки, выберем оси координат M_1x , M_1y , как показано на рис. 3.8, и спроектируем обе части векторного равенства теоремы сложения скоростей на эти оси:

$$V_x = V_e \cos 60^\circ = 5,2 \text{ см/с}, \quad V_y = -V_e \cos 30^\circ + V_r = 47,5 \text{ см/с}.$$

Модуль абсолютной скорости: $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = 47,8 \text{ см/с}.$

Абсолютное ускорение точки определяется по теореме сложения ускорений: $\vec{a} = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_k.$

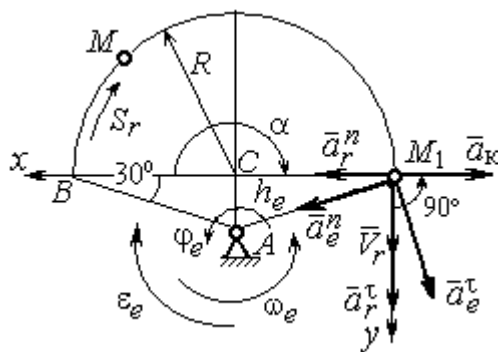


Рис. 3.9. Расчетная схема для определения абсолютного ускорения точки

Переносное ускорение точки представляется в виде суммы: $\vec{a}_e = \vec{a}_e^\tau + \vec{a}_e^n$, где $\vec{a}_e^\tau$ и $\vec{a}_e^n$ – переносные касательное и нормальное ускорения. В относительном движении точки (по дуге окружности) ускорение также может быть разложено на две составляющие – относительные касательное и нормальное ускорения: $\vec{a}_r = \vec{a}_r^\tau + \vec{a}_r^n$. В результате теорема о сложении ускорений приобретает вид: $\vec{a} = \vec{a}_r^\tau + \vec{a}_r^n + \vec{a}_e^\tau + \vec{a}_e^n + \vec{a}_k.$

ма о сложении ускорений приобретает вид: $\vec{a} = \vec{a}_r^\tau + \vec{a}_r^n + \vec{a}_e^\tau + \vec{a}_e^n + \vec{a}_k.$

Вычислим модули и направления векторов ускорений в расчётном положении точки M_1 .

Относительное касательное ускорение a_r^τ вычисляется по формуле: $a_r^\tau = |\ddot{S}_r|$, где $\ddot{S}_r = 18\pi = 56,5 \text{ см/с}^2$. Так как значение второй производной $\ddot{S}_r$ положительно, вектор ускорения $\vec{a}_r^\tau$ направлен по касательной в сторону положительного отсчёта траектории относительного движения. Относительное нормальное ускорение точки a_r^n вычисляется по формуле: $a_r^n = \frac{V_r^2}{R}$ и в момент $t_1 = 1 \text{ с}$ равно $355,3 \text{ см/с}^2$. Вектор ускорения $\vec{a}_r^n$ направлен по радиусу диска к центру C (рис. 3.9).

Угловое ускорение фигуры в момент времени $t_1 = 1$ с, $\varepsilon_e = |\ddot{\phi}_e| = 4$ рад/с².

Поскольку значение второй производной угла поворота отрицательное ($\ddot{\phi}_e = -4$ рад/с²), то угловое ускорение направлено в сторону, противоположную положительному направлению отсчёта угла поворота фигуры, как показано на рис. 3.9 дуговой стрелкой ε_e . Модуль переносного касательного ускорения a_e^τ определяется по формуле $a_e^\tau = \varepsilon_e h_e = \varepsilon_e \cdot AM_1$ и в момент времени $t_1 = 1$ с равен 41,6 см/с². Вектор переносного касательного ускорения точки $\vec{a}_e^\tau$ перпендикулярен AM_1 и направлен в сторону углового ускорения фигуры ε_e (см. рис. 3.9). Переносное нормальное ускорение вычисляется по формуле $a_e^n = \omega_e^2 h_e = \omega_e^2 \cdot AM_1$ и на момент времени $t_1 = 1$ с: $a_e^n = 10,4$ см/с². Вектор переносного нормального ускорения $\vec{a}_e^n$ направлен вдоль отрезка M_1A к оси вращения тела (см. рис. 3.9).

Модуль ускорения Кориолиса в момент времени $t_1 = 1$ с $a_k = 2\omega V_r = 113,1$ см/с². По условию задачи вектор $\vec{V}_r$ скорости относительного движения точки перпендикулярен вектору $\vec{\omega}_e$ угловой скорости переносного движения. В этом случае для определения направления ускорения Кориолиса достаточно повернуть вектор относительной скорости $\vec{V}_r$ на 90° в сторону переносного движения (см. рис. 3.9).

Для определения абсолютного ускорения точки выберем оси M_1x и M_1y , как показано на рис. 3.9, и спроектируем обе части векторного равенства теоремы сложения ускорений на эти оси. Получим:

$$a_x = -a_e^\tau \cos 60^\circ + a_e^n \cos 30^\circ + a_r^n - a_k = 230,4 \text{ см/с}^2;$$

$$a_y = a_e^\tau \cos 30^\circ + a_e^n \cos 60^\circ + a_r^\tau = 97,9 \text{ см/с}^2.$$

Модуль абсолютного ускорения

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 250,3 \text{ см/с}^2.$$

Задача 40. Диск (рис. 3.10) вращается вокруг оси O_1O_2 , проходящей вдоль вертикального диаметра, с угловой скоростью $\omega = 2t^2 + 4\cos\pi t$ рад/с. Положительное направление отсчёта угла поворота диска отмечено на схеме дуговой стрелкой φ . Вдоль другого диаметра диска, наклоненного под углом 30° к вертикальному, движется точка M по закону $CM = S_r = (4t - 1)^2 - 1$ см. Расстояние отсчитывается от точки C на краю диска. Положительное направление движения точки M показано стрелкой S_r . Радиус диска $R = 4$ см. Найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M

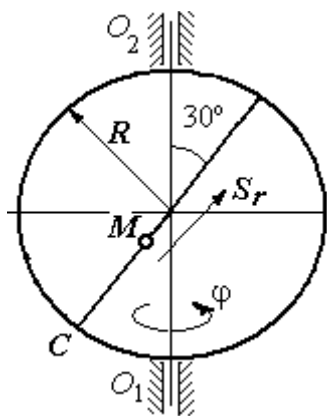


Рис. 3.10. Схема сложного движения точки

в момент времени $t_1 = 1$ с.

Решение

Переносным движением точки M является вращение диска вокруг вертикального диаметра, относительным – её прямолинейное движение вдоль наклонного диаметра диска.

Расстояние S_r , пройденное точкой, к моменту времени $t_1 = 1$ с равно 8 см. При радиусе диска $R = 4$ см точка M в данный момент времени находится на противоположном от точки C конце диаметра. На рис. 3.11 это положение обозначено буквой M_1 .

Угловая скорость диска равна модулю производной: $\omega = |\dot{\varphi}| = |2 + 4\cos\pi t|$ и при $t_1 = 1$ с $\omega = 2$ рад/с. Направление угловой скорости определяется по знаку производной $\dot{\varphi}$. В данном случае производная имеет отрицательное значение ($\dot{\varphi} = -2$ рад/с). Это означает, что вращение диска происходит в сторону, противоположную положительному направлению отсчёта угла поворота. Направление угловой скорости диска в данный момент времени отмечено на рис. 3.11 дуговой стрелкой ω .

Переносная скорость точки V_e – это скорость точки M_1 на вращающемся диске: $V_e = \omega h_e = \omega \cdot KM_1$, где $KM_1 = h_e$ – расстояние от оси вращения диска до точки M_1 . Очевидно, $KM_1 = 0,5R = 2$ см. При $t_1 = 1$ с величина переносной скорости $V_e = 4$ см/с. Вектор переносной скорости $\vec{V}_e$ перпендикулярен плоскости диска $O_1M_1O_2$ и направлен в сторону вращения диска (рис. 3.11, а).

(На рис. 3.11, а символ $\odot$ рядом с вектором означает, что данный вектор направлен перпендикулярно плоскости рисунка «к нам», символ $\oplus$ – «от нас».)

Относительная скорость точки равна модулю производной: $V_r = |\dot{S}_r| =$

$= |8(4t - 1)|$. При $t_1 = 1$ с $V_r = 24$ см/с. Положительное значение самой производной $\dot{S}_r$ указывает, что относительное движение точки в данный момент времени происходит в положительном направлении. Вектор $\vec{V}_r$ относительной скорости точки в положении M_1 направлен вдоль диаметра диска CM_1 в сторону движения.

Абсолютная скорость точки равна сумме векторов переносной и относительной скоростей: $\vec{V} = \vec{V}_e + \vec{V}_r$. Так как векторы $\vec{V}_e$ и $\vec{V}_r$ взаимно перпендикулярны, модуль абсолютной скорости $V = \sqrt{V_e^2 + V_r^2} = 24,33$ см/с. Вектор абсолютной скорости на рис. 3.11 не показан.

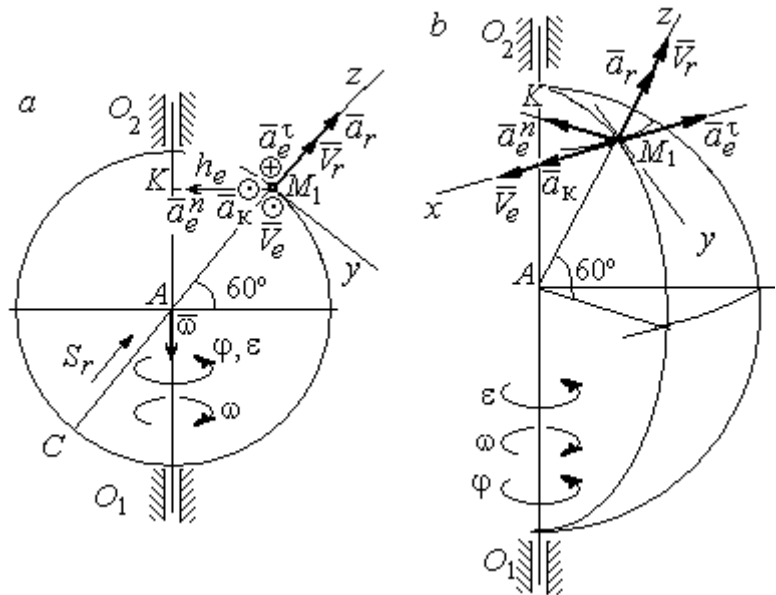


Рис. 3.11. Расчётная схема определения абсолютной скорости и ускорения точки:
а – плоская модель движения;
б – пространственная модель движения

Абсолютное ускорение точки определяется векторной суммой, которая при прямолинейном относительном и вращательном переносном движениях представляется в виде: $\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_e^\tau + \vec{a}_e^n + \vec{a}_k$.

Относительное ускорение точки $a_r = |\ddot{S}_r| = 32 \text{ см/с}^2$. Так как значение второй производной $\ddot{S}_r$ положительно, вектор ускорения $\vec{a}_r$ в точке M_1 направлен по линии движения точки в сторону положительного направления (см. рис. 3.11).

Угловое ускорение диска $\varepsilon = |\dot{\omega}| = |4t - 4\pi \sin \pi t|$. В момент времени $t_1 = 1 \text{ с}$ $\varepsilon = 4 \text{ рад/с}^2$. Положительное значение производной в данный момент времени ($\dot{\omega} = 4 \text{ рад/с}^2$) означает, что угловое ускорение ε направлено в сторону положительного направления отсчёта угла поворота диска. Направление углового ускорения показано на рис. 3.11 дуговой стрелкой ε . Модуль переносного касательного ускорения a_e^τ определяется по формуле $a_e^\tau = \varepsilon h_e$, и при $t_1 = 1 \text{ с}$ $a_e^\tau = 8 \text{ см/с}^2$. Вектор ускорения $\vec{a}_e^\tau$ перпендикулярен плоскости диска $O_1M_1O_2$ в точке M_1 и направлен в сторону углового ускорения (противоположно вектору скорости).

Переносное нормальное ускорение a_e^n рассчитывается по формуле $a_e^n = \omega^2 h_e = \omega^2 \cdot KM_1$, и при $t_1 = 1 \text{ с}$ $a_e^n = 8 \text{ см/с}^2$. Вектор переносного нормального ускорения $\vec{a}_e^n$ направлен вдоль отрезка M_1K к оси вращения диска (см. рис. 3.11).

Вектор скорости относительного движения точки $\vec{V}_r$ составляет с вектором угловой скорости переносного движения $\vec{\omega}$ угол 150° . Модуль ускорения Кориолиса на момент времени $t_1 = 1 \text{ с}$ $a_k = 2|\omega||V_r|\sin 150^\circ = 48 \text{ см/с}^2$. Направление вектора ускорения Кориолиса определяем по правилу Жуковского. Так, вектор относительной скорости точки $\vec{V}_r$ проектируем на плоскость, перпенди-

кулярную вектору $\vec{\omega}$ (т. е. на плоскость, перпендикулярную оси вращения тела). На рис 3.11, a это будет проекция на линию KM_1 . Далее следует повернуть вектор проекции относительной скорости вокруг оси вращения на 90° в сторону угловой скорости вращения диска. На рис 1.11, a вектор ускорения Кориолиса перпендикулярен плоскости рисунка в точке M_1 и направлен «на нас».

Для определения абсолютного ускорения точки выберем оси координат M_1x , M_1y и M_1z , как показано на рис. 3.11 (на рис. 3.11, a ось M_1x направлена перпендикулярно рисунку «к нам» и на рисунке не показана). Спроектируем обе части векторного равенства теоремы сложения ускорений на оси

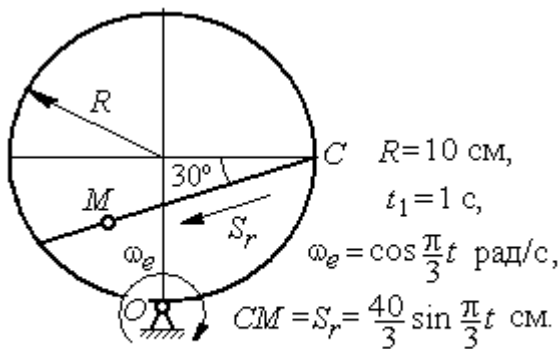
$$a_x = -a_e^\tau + a_k = 40 \text{ см/с}^2; \quad a_y = -a_e^n \cos 30^\circ = 6,93 \text{ см/с}^2;$$

$$a_z = a_r - a_e^n \cos 60^\circ = 28 \text{ см/с}^2.$$

$$\text{Модуль абсолютного ускорения } a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = 49,32 \text{ см/с}^2.$$

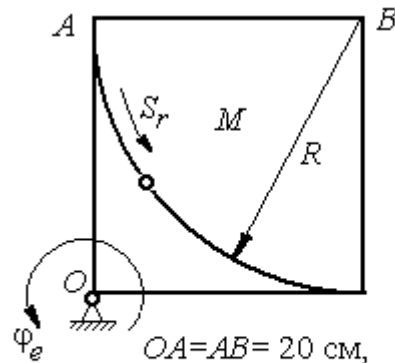
Упражнения

Упражнение 3.1



Найти скорость и ускорение точки M в момент $t = t_1$

Упражнение 3.2



Найти скорость и ускорение точки M в момент $t = t_1 = 1 \text{ с}$

Рис. 3.12. Задания для самостоятельного решения. Упражнения 3.1, 3.2

4. ДИНАМИКА ТОЧКИ

4.1. Дифференциальные уравнения движения точки

Движение материальной точки под действием системы сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_K$ в прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$ описывается **дифференциальными уравнениями**:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = \sum F_{kx}, \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = \sum F_{ky}, \quad m \frac{d^2 z}{dt^2} = \sum F_{kz}.$$

Обозначая вторые производные от координат по времени двумя точками, уравнения движения можно записать в виде:

$$m \ddot{x} = \sum F_{kx}; \quad m \ddot{y} = \sum F_{ky}; \quad m \ddot{z} = \sum F_{kz},$$

где m – масса точки; x, y, z – текущие координаты точки; $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$ – проекции вектора ускорения точки на оси координат; $\sum F_{kx}, \sum F_{ky}, \sum F_{kz}$ – алгебраические суммы проекций всех сил на оси координат.

Для удобства интегрирования дифференциальные уравнения движения иногда представляют в виде:

$$m \frac{dV_x}{dt} = \sum F_{kx}; \quad m \frac{dV_y}{dt} = \sum F_{ky}; \quad m \frac{dV_z}{dt} = \sum F_{kz},$$

где $V_x = \dot{x}, V_y = \dot{y}, V_z = \dot{z}$ – проекции вектора скорости точки на оси координат.

В естественной системе координат движение материальной точки описывается уравнениями в естественной форме:

$$m \frac{dV}{dt} = \sum F_{k\tau}; \quad m \frac{V^2}{\rho} = \sum F_{kn}; \quad 0 = \sum F_{kb},$$

где ρ – радиус кривизны траектории; τ, n, b – оси естественного трехгранника – касательная, нормаль и бинормаль.

В общем случае правые части дифференциальных уравнений зависят от времени, положения и скорости точки. Интегрирование дифференциальных

уравнений производится в зависимости от их вида методами, известными из курса математики.

Примеры решения задач на интегрирование уравнений движения

Задача 41. При обогащении по трению разделение частиц производится следующим образом. Барабанный питатель (рис. 4.1) сообщает частице в точке A сортировочного стола AB начальную скорость V_0 , направленную вдоль поверхности стола, наклоненного под углом α к горизонту. Нижний край стола в точке B поднят на высоту h над уровнем пола. Частица скользит по столу, испытывая силу трения скольжения с коэффициентом трения f . Дойдя до края стола в точке B , частица отрывается от него и совершает свободное падение с высоты h . На каком расстоянии $CK = \ell$ на полу нужно установить стенку приёмного устройства, чтобы частицы с коэффициентом трения меньше заданного $f < f_1$ перелетали за точку C и попадали в приёмник, а с большим коэффициентом $f > f_1$ – не долетали до него.

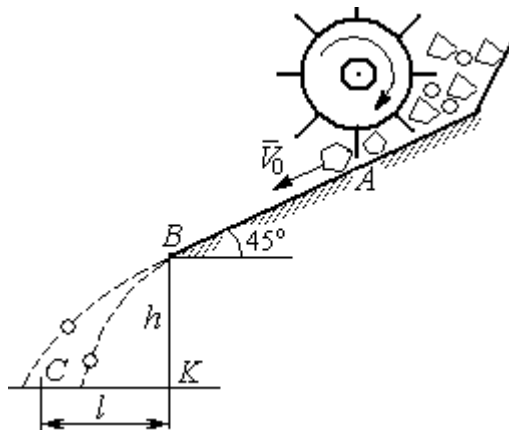


Рис. 4.1. Разделение частиц по трению

Начальная скорость частицы $V_0 = 1$ м/с, длина сортировочного стола $AB = S = 1,2$ м, угол наклона $\alpha = 45^\circ$, высота точки отрыва $BK = h = 1,5$ м, заданный коэффициент трения для разделения частиц $f_1 = 0,4$.

Решение

Из условия задачи следует, что частица с коэффициентом трения, равным заданному, $f = f_1$ в конце своего движения (скольжение по столу + свободное падение) должна попасть ровно в точку C (см. рис. 4.1).

Рассмотрим первый участок движения такой частицы – прямолинейное движение по шероховатой поверхности наклонного стола. На частицу действуют сила тяжести $\vec{P}$, реакция опоры $\vec{N}$ и сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$. Выберем систему координат xAy , направив ось x вдоль линии движения, а ось y – перпендикулярно ей (рис. 4.2). Движение частицы описывается уравнениями:

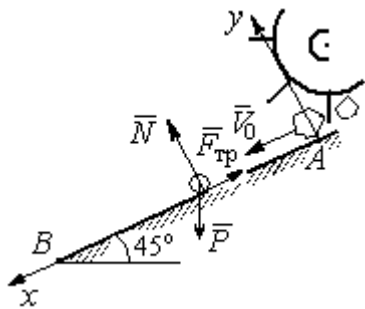


Рис. 4.2. Движение частицы по наклонной плоскости

$$m\ddot{x} = \sum F_{kx} = P\cos 45^\circ - F_{\text{тр}};$$

$$m\ddot{y} = \sum F_{ky} = -P\cos 45^\circ + N.$$

Поскольку вдоль оси y частица не перемещается, то $\ddot{y} = 0$. Тогда второе уравнение движения представляется в виде: $-P\cos 45^\circ + N = 0$, откуда реакция опоры частицы $N = mg\cos 45^\circ$. Сила трения,

которую испытывает частица, двигаясь по сортировочному столу: $F_{\text{тр}} = fN = fmg\cos 45^\circ$, где f – коэффициент трения.

Подставляя в уравнение движения частицы, выражение силы трения и полагая ускорение $\ddot{x} = \frac{dV_x}{dt}$, получим дифференциальное уравнение

$$\frac{dV_x}{dt} = g(1 - f)\cos 45^\circ \text{ или при } f = f_1 = 0,4: \frac{dV_x}{dt} = 4,18.$$

После интегрирования найдём скорость и закон движения частицы как функции времени: $V_x = 4,18t + C_1$; $x = 2,09t^2 + C_1t + C_2$.

Константы интегрирования C_1, C_2 находятся из начальных условий движения. Подставляя начальные условия $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = V_x(0) = V_0$ в уравнение движения частицы, найдём $C_2 = 0$, $C_1 = V_0$.

Окончательно движение частицы на прямолинейном участке AB сортировочного стола описывается системой уравнений: $V_x = 4,18t + 1$; $x = 2,09t^2 + t$.

Допустим частица достигает края стола B в момент времени $t = t_B$. Её координата равна длине сортировочного стола: $x(t_B) = S$, а скорость равна скорости отрыва её от стола: $V_x(t_B) = V_B$. Подставим эти условия в уравнения движения, получим систему: $V_B = 4,18t_B + 1$, $S = 2,09t_B^2 + t_B$, откуда скорость частицы в точке отрыва её от стола $V_B = \sqrt{1 + 8,36S}$. При длине стола $S = 1,2$ м скорость отрыва $V_B = 3,32$ м/с.

Рассмотрим участок BC свободного падения частицы, брошенной с высоты h с начальной скоростью V_B , направленной под углом 45° к горизонту (рис. 4.3). В полёте на частицу действует только сила тяжести $\vec{P}$. Выберем прямоугольную систему координат xKy с началом координат в точке K (см. рис. 4.3). Дифференциальные уравнения движения точки

$$m\ddot{x} = 0; m\ddot{y} = -P = -mg \text{ или } \ddot{x} = 0, \ddot{y} = -g.$$

Интегрируя первое уравнение, получим, что движение частицы вдоль оси x описывается уравнениями $\dot{x} = C_3$; $x = C_3t + C_4$. Константы интегрирования C_3 и C_4 определяются из начальных условий движения: при $t = 0$, $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = V_{Bx}$, где V_{Bx} – проекция вектора скорости $\vec{V}_B$ на ось x , $V_{Bx} = V_B \cos 45^\circ = 2,35$ м/с. После подстановки начальных условий в уравнение движения частицы получим: $C_4 = 0$, $C_3 = 2,35$. В результате, движение частицы вдоль оси x при её свободном падении описывается уравнением $x = 2,35t$.

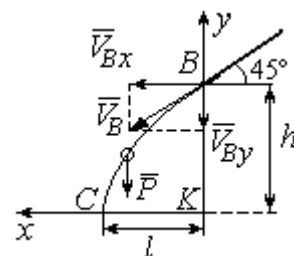


Рис. 4.3. Свободное падение частицы

Проинтегрируем уравнение движения частицы в направлении оси y . Получим: $\dot{y} = -gt + C_5$ и $y = -g\frac{t^2}{2} + C_5t + C_6$. Начальные условия движения частицы вдоль оси y : при $t = 0$, $y(0) = h = 1,5$ м, $\dot{y}(0) = V_{By} = -V_B \cos 45^\circ = -2,35$ м/с, где V_{By} – проекция вектора скорости $\vec{V}_B$ на ось y . Подставляя начальные

условия в уравнение движения, найдём: $C_6 = h$; $C_5 = V_{By} = -2,35$. Таким образом, движение частицы вдоль оси y при её свободном падении описывается уравнением $y = -4,91t^2 - 2,35t + 1,5$.

В момент $t = t_{\Pi}$ падения частицы на пол её вертикальная координата обращается в нуль: $y = 0$, а горизонтальная – равна дальности полёта: $x = \ell$. Подставляя эти условия в уравнения движения частицы, получим систему:

$$\ell = 2,35t_{\Pi}, \quad 0 = -4,91t_{\Pi}^2 - 2,35t_{\Pi} + 1,5.$$

Исключая в системе время t_{Π} , выразим уравнение для определения дальности горизонтального полёта: $\ell^2 + 1,12\ell - 1,68 = 0$. Отсюда находим: $\ell = 0,85$ м.

Таким образом, частицы с коэффициентом трения $f = 0,4$ в конце своего движения падают на горизонтальную поверхность на расстоянии 0,85 м от края стола. Очевидно, именно здесь необходимо установить разделительную стенку приёмного устройства. Частицы с меньшим коэффициентом трения ($f < 0,4$) будут улетать за стенку, а при большем ($f > 0,4$) – не долетать. К примеру, длина горизонтального полёта частицы с коэффициентом трения $f = 0,3$ составляет 0,89 м, а при $f = 0,5$ равна 0,61 м.

Задача 42. Материальная точка массой $m = 1$ кг движется прямолинейно

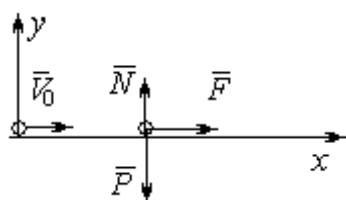


Рис. 4.4. Прямолинейное движение точки

по горизонтальной поверхности под действием силы $F = 10 - kt$ Н, где k – коэффициент пропорциональности; $k = \text{const}$; t – время в секундах. Определить величину коэффициента k , при котором скорость точки за первую секунду от начала движения

увеличится от начального значения $V_0 = 2$ м/с до величины $V_1 = 10$ м/с, а также путь, пройденный точкой до остановки.

Решение

Для описания движения точки выберем прямоугольную систему координат x, y с началом в том месте, откуда точка начала движение (рис. 4.4).

На точку действуют сила тяжести $\vec{P}$, реакция опоры $\vec{N}$ и заданная сила $\vec{F}$. Направление силы $\vec{F}$ на рис. 4.4 соответствует начальному этапу движения, когда проекция силы на ось x положительная. Движение точки описывается уравнением $m\ddot{x} = F_x = 10 - kt$.

Положим $\ddot{x} = \frac{dV}{dt}$. Здесь в силу того, что движение происходит только вдоль одной координаты, индекс x у скорости опущен. Учитывая массу точки, получим уравнение $\frac{dV}{dt} = 10 - kt$. Разделив переменные и проинтегрировав полученное уравнение, найдём закон изменения скорости точки $V = 10t - k\frac{t^2}{2} + C_1$. Выражая скорость через производную от координаты $V = \frac{dx}{dt}$, получим дифференциальное уравнение $\frac{dx}{dt} = 10t - k\frac{t^2}{2} + C_1$, интегрируя которое, найдём уравнение движения точки $x = 5t^2 - k\frac{t^3}{6} + C_1t + C_2$.

Подставляя начальные условия (при $t = 0$, $V = V_0 = 2$ м/с, $x = 0$) в уравнения, получим: $C_1 = 2$, $C_2 = 0$. Окончательно движение точки описывается системой уравнений: $V = 10t - k\frac{t^2}{2} + 2$; $x = 5t^2 - k\frac{t^3}{6} + 2t$.

Известно, что через 1 с от начала движения точка приобрела скорость $V_1 = 10$ м/с. Подставляя это условие в первое уравнение, найдём $k = 4$.

В момент t_1 точка остановилась и её скорость обращается в нуль: $V(t_1) = 0$, а координата равна пройденному пути: $x(t_1) = S$. Подставляя эти условия в уравнения движения с учетом вычисленного значения коэффициента k , получим систему: $0 = 10t_1 - 2t_1^2 + 2$; $S = 5t_1^2 - \frac{2}{3}t_1^3 + 2t_1$, откуда находим путь, пройденный точкой до остановки: $S = 51,86$ м.

Задача 43. Материальная точка массой $m = 1$ кг, находясь на высоте $h_1 = 2$ м над уровнем Земли, подброшена вертикально вверх (ось x) с начальной скоростью $V_0 = 4$ м/с (рис. 4.5, *a*). При движении на точку действует сила сопротивления, пропорциональная квадрату скорости, так, что проекция её на вертикаль направлена в сторону, противоположную движению, $R_x = -0,5mV^2$ Н, где V – скорость точки. Определить, на какой высоте h_2 от уровня Земли скорость падающей обратно точки достигнет значения начальной стартовой скорости.

Решение

Решение задачи осуществляется в два этапа. На первом этапе рассматри-

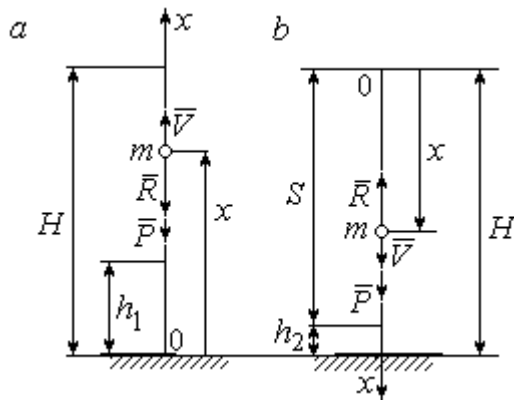


Рис. 4.5. Силы, действующие на точку в полёте:
a – движение точки вверх;
b – движение точки вниз

вается движение точки вверх с высоты h_1 с начальной скоростью V_0 и определение максимальной высоты полёта H , на втором этапе – падение точки вниз с высоты H без начальной скорости (рис. 4.5, *b*).

Рассмотрим первый этап движения и найдём максимальную высоту подъёма точки. На рис. 4.5, *a* показаны силы, действующие на точку в полёте: сила тяжести $\vec{P}$ и сила сопротивления $\vec{R}$. Ось x , вдоль

которой происходит движение точки, выбрана по направлению движения, начало координат – на уровне Земли (см. рис. 4.5, *a*).

Дифференциальное уравнение движения точки в проекции на ось x : $m\ddot{x} = \sum F_x = P_x + R_x$, где проекции сил тяжести и сопротивления на ось x :

$P_x = -P = -mg$; $R_x = -0,5mV^2$. Полагая $\dot{x} = \frac{dV}{dt}$, получим уравнение движения

точки в виде: $\frac{dV}{dt} = -(g + 0,5V^2)$.

Учитывая, что $\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dx} \frac{dx}{dt} = V \frac{dV}{dx} = \frac{dV^2}{2dx}$, исходное уравнение движения

представляется в виде, удобном для интегрирования: $\frac{dV^2}{g + 0,5V^2} = -2dx$.

Проинтегрировав это уравнение, находим: $\ln(g + 0,5V^2) = -x + C$.

В начальном положении, т. е. при $t = 0$, точка находилась на высоте $x = h_1$, а скорость её $V = V_0$. Подставив эти значения в проинтегрированное уравнение, получим: $C = h_1 + \ln(g + 0,5V_0^2)$. Окончательно положение точки в полёте определяется выражением $x = h_1 + \ln\left(\frac{g + 0,5V_0^2}{g + 0,5V^2}\right)$.

При максимальном подъёме точки, т. е. при $x = H$, её скорость обращается в нуль: $V = 0$. Подставляя H , получим: $H = h_1 + \ln\left(1 + \frac{V_0^2}{2g}\right)$. При начальной скорости $V_0 = 4$ м/с, с учётом высоты точки старта $h_1 = 2$ м, высота подъёма точки относительно уровня Земли $H = 2,6$ м.

Рассмотрим второй этап решения задачи – движение точки вниз с максимальной высоты H без начальной скорости. Выберем ось x по направлению движения и поместим начало координат в точке, откуда началось движение вниз (рис. 4.5, *b*). Дифференциальное уравнение движения падающей точки:

$m \frac{dV}{dt} = P_x + R_x = mg - 0,5mV^2$, которое, как и в предыдущем случае, приводится к виду:

$\frac{dV^2}{g - 0,5V^2} = 2dx$.

Проинтегрировав это уравнение, находим: $\ln(g - 0,5V^2) = -x + C_1$.

В начальном положении, т. е. при $t = 0$, координата точки и скорость равны нулю: $x = 0$, $V = 0$. Подставив эти значения, находим: $C_1 = \ln g$.

Окончательно положение падающей точки определяется выражением

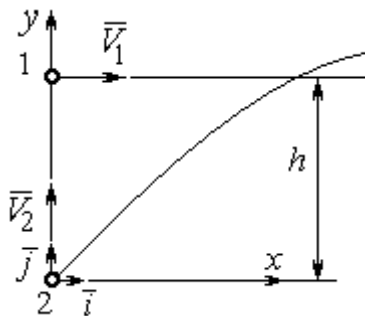
$$x = \ln\left(\frac{g}{g - 0,5V^2}\right).$$

Расстояние S , которое пролетела точка с высоты H , приобретя скорость,

$$V_0: S = \ln\left(\frac{g}{g - 0,5V_0^2}\right). \text{ Высота } h_2 \text{ этого положения от уровня Земли: } h_2 = H - S$$

(см. рис. 4.5, b). С учётом величины начальной скорости $V_0 = 4$ м/с, максимальной высоты подъёма точки $H = 2,6$ м высота $h_2 = 0,91$ м.

Задача 44. Точка 1 движется горизонтально с постоянной скоростью V_1



на высоте h . Точка 2 массой m_2 находится в начале координат (рис. 4.6).

В момент, когда обе точки находились на одной вертикали y , точка 2 стартовала вертикально вверх со скоростью V_2 . В полёте на точку 2 действует отклоняющая сила $\vec{F}_2$, которая представле-

на в виде разложения по единичным векторам $\vec{i}$,

$\vec{j}$ системы координат xu : $\vec{F}_2 = p\vec{i} + q\vec{j}$, где $p, q - \text{const}$. С какой скоростью V_2 должна стартовать точка 2, чтобы обе точки встретились.

Решение

Рассмотрим движение точки 2. На точку действует сила тяжести $\vec{P}_2$ и сила $\vec{F}_2$, проекции которой на оси x, y : $F_{2x} = p$, $F_{2y} = q$ (рис. 4.7).

Уравнения движения точки в проекциях на оси xu имеют вид:

$$m_2\ddot{x} = p, \quad m_2\ddot{y} = q - m_2g.$$

Дважды интегрируя первое уравнение, полу-

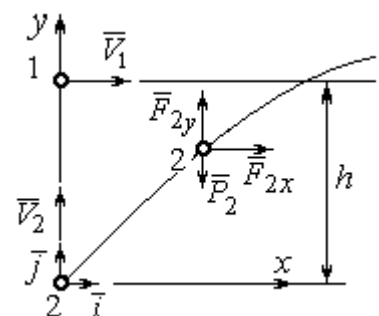


Рис. 4.7. Расчётная схема встречи точек

чим: $\dot{x} = \frac{p}{m_2}t + C_1$; $x = \frac{p}{2m_2}t^2 + C_1t + C_2$. Константы интегрирования найдём из условия, что в начальный момент вторая точка стартовала из начала координат вертикально, то есть при $t = 0$ $x = 0$ и $\dot{x} = V_{2x} = 0$. Подставляя начальные условия в уравнения движения, получим: $C_1 = 0$, $C_2 = 0$. Таким образом, движение точки 2 вдоль оси x описывается уравнением $x = \frac{p}{2m_2}t^2$.

Аналогично, дважды интегрируя второе уравнение движения, получим зависимость скорости движения точки 2 от времени и закон её движения вдоль оси y : $\dot{y} = \left(\frac{q}{m_2} - g\right)t + C_3$; $y = \left(\frac{q}{m_2} - g\right)\frac{t^2}{2} + C_3t + C_4$. Из начальных условий: при $t = 0$ $y = 0$, $\dot{y} = V_{2y} = V_2$ следует: $C_3 = V_2$, $C_4 = 0$.

В результате закон движения точки 2 вдоль оси y : $y = \left(\frac{q}{m_2} - g\right)\frac{t^2}{2} + V_2t$.

Обозначим t_1 – время движения точек до встречи. В момент встречи высота точки 2 $y(t_1) = h$, а расстояние по горизонтали, которое прошла точка 2 до встречи, должно быть равно расстоянию, пройденному точкой 1 за это же время. Подставляя условия встречи в уравнения движения, получим систему:

$$V_1t_1 = \frac{p}{2m_2}t_1^2; \quad h = \left(\frac{q}{m_2} - g\right)\frac{t_1^2}{2} + V_2t_1,$$

откуда найдём: $V_2 = \frac{h}{t_1} - \left(\frac{q}{m_2} - g\right)\frac{t_1}{2}$, где $t_1 = \frac{2V_1m_2}{p}$.

Упражнения

Упражнение 4.1. Тело массы $m = 2$ кг поднимается по прямой по шероховатой поверхности, составляющей угол 30° с горизонтом. Коэффициент трения $f = 0,4$. На тело действует сила $F = kt + 0,5P$, направленная в сторону движения, параллельно плоскости. Определить величину коэффициента k и начальную скорость тела, направленную вверх по наклонной плоскости, если за первую секунду тело прошло путь $S = 2$ м, а скорость увеличилась вдвое относительно начальной.

Упражнение 4.2. Материальную точку массы $m = 1$ кг, находящуюся на высоте $H = 10$ м над уровнем Земли, бросили под углом $\varphi = 30^\circ$ к горизонту с начальной скоростью V_0 . Свободное движение точки происходит в вертикальной плоскости. Определить начальную скорость V_0 и горизонтальную дальность полета l при падении точки на Землю, если высоту $h = 7$ м она пересекла через 1 с от начала движения.

4.2. Колебания материальной точки

Если материальная точка массой m движется вдоль оси Ox под действием линейной восстанавливающей силы, равной $F = cx$, где c – постоянный коэффициент, x – отклонение точки от положения равновесия, куда поместили начало координат, то дифференциальное уравнение свободных прямолинейных колебаний имеет вид:

$$m\ddot{x} + cx = 0, \text{ или } \ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad \omega^2 = \frac{c}{m},$$

где ω – угловая частота колебаний.

Решение дифференциального уравнения свободных колебаний представляется в виде $x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$. Постоянные интегрирования C_1 и C_2 находятся из начальных условий.

Если кроме восстанавливающей силы на материальную точку действует переменная возмущающая сила, колебания точки называются **вынужденными**. В случае гармонического возмущения $Q = H \sin pt$, где H , p – амплитуда и угловая частота возмущающей силы, дифференциальное уравнение вынужденных колебаний материальной точки относительно положения равновесия

$$m\ddot{x} + cx = H \sin pt, \text{ или } \ddot{x} + \omega^2 x = h \sin pt, \quad \omega^2 = \frac{c}{m}, \quad h = \frac{H}{m}$$

где ω – угловая частота собственных колебаний; h – относительная амплитуда возмущающей силы.

Общее решение неоднородного дифференциального уравнения вынужденных колебаний при отсутствии резонанса (частота собственных колебаний точки не совпадает с частотой возмущающей силы $p \neq \omega$) имеет вид:

$x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + \frac{h}{\omega^2 - p^2} \sin p t$, а в случае возникновения резонанса

($p = \omega$) определяется формулой: $x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t - \frac{ht}{2p} \cos p t$. Значения

произвольных постоянных C_1 и C_2 находятся с учётом начальных условий движения.

Колебания груза на двух параллельных пружинах с жесткостью c_1 и c_2 можно рассматривать как колебания груза на одной пружине с эквивалентной жесткостью $c_{\text{экв}} = c_1 + c_2$, где $c_{\text{экв}}$ – жесткость эквивалентной пружины. При последовательном соединении пружин коэффициент жесткости эквивалентной

пружины $c_{\text{экв}} = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2}$.

Примеры решения задач на колебания точки

Задача 45. Подъёмное устройство (рис. 4.8) опускает груз Q массой $m = 400$ кг в шахту при помощи упругого троса с коэффициентом жесткости $c = 8 \cdot 10^4$ Н/м с постоянной скоростью $V = 10$ м/с. В некоторый момент во время спуска трос защемило в блоке. Пренебрегая массой троса, определить дальнейшее движение груза и найти максимальную силу натяжения троса.

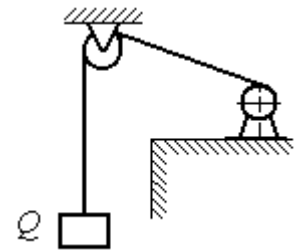


Рис. 4.8. Подъёмное устройство

Решение

После того как произошло защемление троса в обойме блока, вертикальную часть троса длиной ℓ_0 можно рассматривать как пружину с закреплённым верхним концом, а груз – материальной точкой.

Расчетная схема колебаний груза Q на пружине показана на рис. 4.9.

Ось Ox , вдоль которой происходят колебания груза, направлена вертикально вниз. Начало отсчёта координаты x (точка O) выбрано в положении нерастянутой пружины.

На рис. 4.9, *a* положение нерастянутой пружины соответствует положению

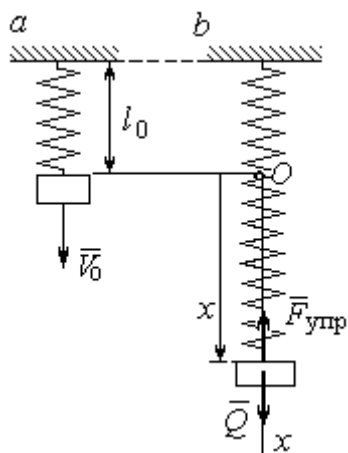


Рис. 4.9. Расчётная схема колебаний груза:

a – положение груза на начало колебаний; *b* – положение груза в произвольный момент времени

груза на тросе в момент его заземления. В произвольном положении груза (рис. 4.9, *b*), обозначенном координатой x , к нему приложены две силы: сила тяжести $\vec{Q}$ и сила упругости пружины $\vec{F}_{\text{упр}}$. Проекция силы упругости пружины на ось Ox : $F_{\text{упр}x} = -c\Delta\ell = -cx$, где $\Delta\ell$ – удлинение пружины. Дифференциальное уравнение движения груза в проекции на ось Ox имеет вид: $m\ddot{x} = Q - cx$. В результате получаем не-

однородное дифференциальное уравнение колебаний:

$$m\ddot{x} + cx = mg \text{ или } \ddot{x} + \omega^2 x = g,$$

где ω – угловая частота собственных колебаний, $\omega = \sqrt{\frac{c}{m}} = 14,14$ рад/с.

Решение неоднородного дифференциального уравнения представляется в виде $x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + \frac{g}{\omega^2}$, где первые два слагаемых представляют общее решения однородного уравнения, последнее – частное решение неоднородного

Для определения произвольных постоянных C_1 и C_2 используем начальные условия движения: при $t = 0$ груз находился в положении $x = 0$, а его скорость равнялась скорости груза $\dot{x} = V_0 = 10$ м/с. Подставляя значение координаты начального положения груза в общее решение уравнения колебаний, полу-

чим: $C_1 = -\frac{g}{\omega^2} = -0,69$ м. Для определения второй константы вычислим скорость груза: $\dot{x} = -C_1\omega\sin\omega t + C_2\omega\cos\omega t$. Подставив начальное значение скорости груза при $t = 0$, получим: $C_2 = \frac{V_0}{\omega} = 0,71$ м. Окончательно, движение груза после заземления троса в обойме блока описывается уравнением

$$x = -0,69\cos 14,14t + 0,71\sin 14,14t + 0,69.$$

Представим уравнение колебаний в виде $x = A\sin(\omega t + \alpha) + \frac{g}{\omega^2}$, где A – амплитуда собственных колебаний груза $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$, α – фаза колебаний; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{C_1}{C_2}$. Максимальное растяжение троса равно максимальному значению координаты груза: $x_{\max} = \max\left[A\sin(\omega t + \alpha) + \frac{g}{\omega^2}\right] = A + \frac{g}{\omega^2} = 1,68$ м. Соответственно, максимальное усилие в тросе равно значению силы упругости при максимальном растяжении: $F_{\text{упр max}} = cx_{\max} = 134,4$ кН.

Задача 46. Рабочий орган вибрационной машины представляет собой массивное тело, расположенное на гладкой наклонной плоскости между двумя пружинами (см. рис. 4.10). Угол наклона плоскости к горизонту 60° . Масса груза $m = 9$ кг. Пружины, зажимающие груз, имеют коэффициенты жесткости $c_1 = 300$ Н/м и $c_2 = 600$ Н/м.

В начальный момент груз, когда пружины не деформированы, груз оттягивают вниз по наклонной плоскости на расстояние $\Delta\ell = 0,12$ м и отпускают без начальной скорости.

Найти период колебаний, амплитуду и уравнение движения груза.

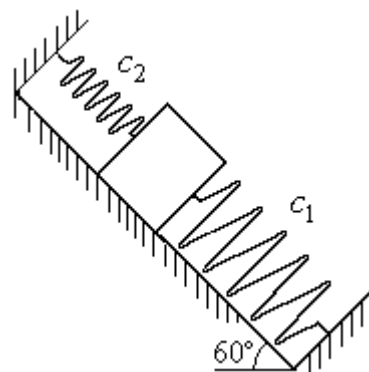


Рис. 4.10. Колебания груза на наклонной плоскости

Решение

Колебания груза, зажатого между двумя пружинами, представим как колебания груза, прикрепленного к одной пружине эквивалентной жёсткости: $c_3 = c_1 + c_2 = 900 \text{ Н/м}$ (рис. 4.11). Ось, вдоль которой происходят колебания, направим вниз по наклонной плоскости. Начало отсчёта координаты груза x

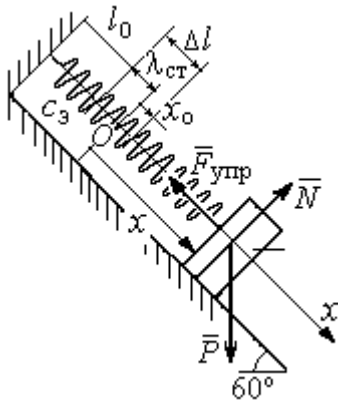


Рис. 4.11. Схема колебаний груза на эквивалентной пружине

выберем в положении его статического равновесия (точка O) (см. рис. 4.11).

Дифференциальное уравнение движения груза в проекции на ось Ox : $m\ddot{x} = P_x - F_{\text{упр}x}$.

Проекция силы упругости пружины на ось Ox :

$F_{\text{упр}x} = -c_3 \Delta \ell$, где $\Delta \ell = (x + \lambda_{\text{ст}})$ – удлинение

пружины, включающее её растяжение $\lambda_{\text{ст}}$ относительно положения нерастянутой пружины и

растяжение x относительно начала координат.

Удлинение пружины $\lambda_{\text{ст}}$ определяется из условия равновесия груза на наклонной плоскости в положении статического равновесия:

$$P \cos 30^\circ - F_{\text{упр}} = 0,87mg - c_3 \lambda_{\text{ст}} = 0.$$

Находим $\lambda_{\text{ст}} = \frac{0,87mg}{c_3} = 0,085 \text{ м}$.

Подставляя выражение силы упругости, с учётом условия статического равновесия груза ($0,87mg = c_3 \lambda_{\text{ст}}$), получим дифференциальное уравнение колебаний: $m\ddot{x} = -c_3 x$ или $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$, где ω – угловая частота собственных колебаний груза, $\omega = \sqrt{\frac{c_3}{m}} = 10 \text{ рад/с}$.

Общее решение уравнения колебаний $x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$.

Для определения произвольных постоянных C_1 и C_2 вычислим начальные условия движения груза.

Координата начального положения груза на оси Ox (см. рис. 4.11) $x_0 = \Delta\ell - \lambda_{\text{ст}} = 0,035$ м. Подставляя значение координаты начального положения груза в общее решение уравнения колебаний при $t = 0$, получим: $C_1 = x_0 = 0,035$ м. Для определения второй константы вычислим скорость груза: $\dot{x} = -C_1\omega_2\sin\omega_2t + C_2\omega_2\cos\omega_2t$. Подставив начальное значение скорости груза: при $t = 0$ $\dot{x} = V_0 = 0$, получим $C_2 = 0$. Окончательно уравнение движения груза относительно его положения статического равновесия $x(t) = 0,035\cos 10t$ м. Амплитуда колебаний $A = 0,035$ м. Период колебаний $T = \frac{2\pi}{\omega} = 0,63$ с.

Задача 47. Пружинный амортизатор состоит из двух одинаковых вертикально стоящих пружин, к верхним концам которых прикреплена невесомая горизонтальная площадка (рис. 4.12). Жёсткость каждой пружины $c = 350$ Н/м. Груз массой $m = 5$ кг падает с высоты $h = 0,3$ м.

Коснувшись площадки, груз начинает двигаться вместе с ней. Определить максимальную осадку амортизатора и уравнение движения груза.

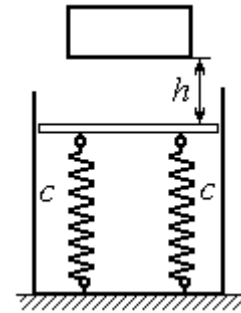


Рис. 4.12. Пружинный амортизатор

Решение

Заменяем две пружины амортизатора одной с жесткостью, эквивалентной двум пружинам: $c_{\text{э}} = 2c = 700$ Н/м. Расчётная схема колебаний груза показана на рис. 4.13. Начало координат оси x (точка O), вдоль которой происходят колебания, выбрано на уровне статического равновесия груза.

При движении (на рис. 4.13, с предполагается движение груза вниз) на груз действуют сила упругости $\vec{F}_{\text{упр}}$ и сила тяжести $\vec{P}$. Уравнение движения груза в проекции на ось x : $m\ddot{x} = P - F_{\text{упр}} = P - c_{\text{э}}\Delta\ell$, где $\Delta\ell$ – удлинение (или сжатие) пружины относительно недеформированного состояния.

В произвольном положении груза, обозначенном координатой x (см. рис. 4.13, c), сжатие пружины относительно её недеформированного состояния

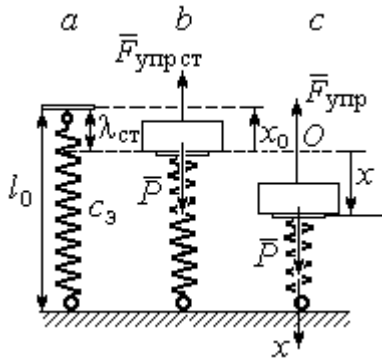


Рис. 4.13. Расчётная схема колебаний на эквивалентной пружине:
 a – недеформированная пружина;
 b – положение статического равновесия груза; c – произвольное положение

(см. рис. 4.13, a) составляет величину: $\Delta l = x + \lambda_{\text{ст}}$. Величина $\lambda_{\text{ст}}$ находится из условия статического равновесия груза, которое выражается равенством (рис. 4.13, b): $P - F_{\text{упр ст}} = P - c_3 \lambda_{\text{ст}} = 0$.

Подставляя это условие в уравнение движения груза, получим дифференциальное уравнение колебаний:

$$m\ddot{x} + c_3 x = 0 \quad \text{или} \quad m\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad \text{где}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{c_3}{m}} = 11,83 \text{ рад/с} - \text{угловая частота колебаний.}$$

Общее решение однородного уравнения колебаний представляется в виде $x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$, где C_1 и C_2 – произвольные постоянные, вычисляемые по начальным условиям движения груза.

По условию задачи груз падает на площадку, установленную на недеформированных пружинах. Это означает, что начальная координата груза при его движении на пружинах соответствует положению недеформированной пружины: $x_0 = -\lambda_{\text{ст}} = -\frac{mg}{c_3} = -0,07 \text{ м}$.

Начальная скорость колебаний груза равна скорости груза при падении его с высоты 1 м. Интегрируя уравнение движения груза во время падения $m\ddot{s} = mg$, где s – путь, пройденный телом, получим зависимость скорости от пройденного пути: $V^2 = 2gs$. Полагая $s = 0,3$, найдём скорость груза при его встрече с площадкой: $V = 2,43 \text{ м/с}$. Проекция начальной скорости колебаний груза на ось x положительна: $V_{0x} = V = 2,43 \text{ м/с}$.

Подставив начальные условия в общее решение уравнения колебаний, получим: $C_1 = x_0 = -0,07$ м; $C_2 = \frac{V_{0x}}{\omega} = 0,2$ м. Окончательно уравнение колебаний груза на амортизаторе $x = -0,07\cos 11,83t + 0,2\sin 11,83t$. Амплитуда колебаний $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = 0,21$ м. Проседание амортизатора H отсчитывается от положения нерастянутых пружин: $H = A + \lambda_{ст} = 0,28$ м.

Задача 48. Для регистрации (записи) вертикальных колебаний тяжёлых платформ используется пружинный виброграф (рис. 4.14). Схема действия прибора состоит в следующем. Массивная платформа A совершает вертикальные гармонические колебания по закону $\xi = \xi(t)$. На платформе установлена вертикальная стойка с горизонтальной перекладиной, к которой прикреплена пружина жесткостью c . К нижнему концу пружины подвешен груз P массой m с индикаторной стрелкой B (см. рис. 4.14). Вертикальная шкала индикаторной стрелки закреплена на платформе A . В начальный момент груз на пружине находился в покое в положении статического равновесия. Определить закон колебаний стрелки B вдоль шкалы, если масса груза $m = 1$ кг, жесткость пружины $c = 10$ Н/м, платформа совершает вертикальные колебания по закону $\xi = a \sin pt$ см, где амплитуда $a = 0,02$ м, частота колебаний платформы $p = 7$ рад/с.

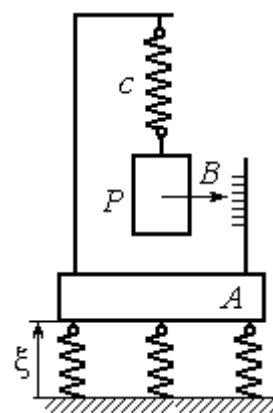


Рис.4.14. Регистратор вертикальных колебаний

Решение

Выберем неподвижную ось x , связанную, например, с неподвижной поверхностью, на которой стоит платформа. Начало координат – точку O выберем на уровне статического равновесия груза на пружине при неподвижной платформе. Произвольное положение груза отмечено координатой x (рис. 4.15).

Растяжение пружины при неподвижной платформе составляет величину $x + \lambda_{\text{ст}}$, где $\lambda_{\text{ст}}$ – удлинение пружины в положении статического равновесия

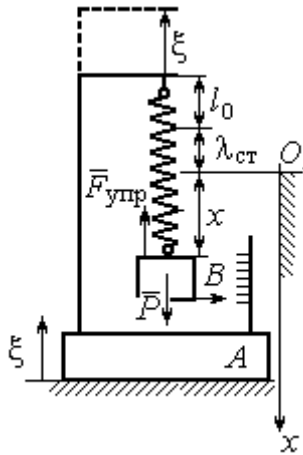


Рис. 4.15. Расчётная схема колебаний груза

груза, определяемое из условия $P - c\lambda_{\text{ст}} = 0$.

Вместе с тем колебание платформы вызывает аналогичное смещение точки подвеса пружины.

В результате растяжение пружины при произвольном положении груза равно сумме:

$$\Delta \ell = (x + \lambda_{\text{ст}} + \xi).$$

На груз действуют сила тяжести $\vec{P}$ и сила упругости пружины $\vec{F}_{\text{упр}}$. Дифференциальное

уравнение движения груза в проекции на ось Ox :

$m\ddot{x} = P_x + F_{\text{упр}x}$, где проекции $P_x = P$, $F_{\text{упр}x} = -c\Delta \ell = -c(x + \lambda_{\text{ст}} + \xi)$. Расчётная

схема колебаний груза показана на рис. 4.15.

С учётом условия статического равновесия груза $P - c\lambda_{\text{ст}} = 0$ получим дифференциальное уравнение вынужденных колебаний груза в виде:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = -h \sin pt,$$

где ω – угловая частота собственных колебаний груза, $\omega = \sqrt{\frac{c}{m}} = 3,16$ рад/с;

h – относительная амплитуда вынужденных колебаний, $h = \frac{ca}{m} = 0,2$ м/с²;

p – угловая частота вынужденных колебаний, $p = 7$ рад/с.

Решение уравнения вынужденных колебаний представляется суммой $x = x_1 + x_2$, где x_1 является общим решением однородного уравнения

$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = 0$, а x_2 – частное решение уравнения вынужденных колебаний:

$$\ddot{x}_2 + \omega^2 x_2 = -h \sin pt.$$

Решив однородное уравнение, находим: $x_1 = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$.

При отсутствии резонанса (а в данном случае частота вынужденных колебаний груза не совпадает с частотой собственных $\omega \neq p$) частное решение уравнения вынужденных колебаний ищем в виде $x_2 = b \sin pt$. Подставляя частное решение в уравнение вынужденных колебаний, получим уравнение $-bp^2 \sin pt + \omega^2 b \sin pt = -h \sin pt$, откуда находим коэффициент: $b = \frac{h}{p^2 - \omega^2}$.

В результате общее решение уравнения колебаний принимает вид:

$$x = x_1 + x_2 = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + \frac{h}{p^2 - \omega^2} \sin pt,$$

где константы C_1 и C_2 подлежат определению.

В начальный момент груз находился на пружине в положении статического равновесия, и потому его начальная координата и скорость равны нулю. Подставляя значение координаты начального положения груза в общее решение уравнения вынужденных колебаний при $t = 0$, получим $C_1 = 0$. Для определения второй константы вычислим скорость груза в произвольный момент времени: $\dot{x} = -C_1 \omega \sin \omega t + C_2 \omega \cos \omega t + \frac{hp}{p^2 - \omega^2} \cos pt$. Подставив начальное значение скорости груза, найдём $C_2 = -\frac{hp}{\omega(p^2 - \omega^2)} = -0,01$ м.

Таким образом, колебания груза относительно неподвижной системы координат описываются уравнением $x = -0,01 \sin 3,16t + 0,05 \sin 7t$ и представляют абсолютное движение груза. Для того чтобы найти закон движения груза относительно платформы – относительное движение, нужно из его абсолютного движения исключить переносное – колебания платформы. Поскольку стрелка прибора закреплена на грузе, а шкала – на платформе, то закон движения стрелки относительно шкалы:

$$x_r = x - \xi = -0,01 \sin 3,16t + 0,05 \sin 7t - 0,02 \sin 7t = -0,01 \sin 3,16t + 0,03 \sin 7t.$$

Упражнения

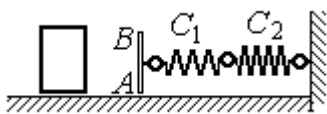


Рис. 4.16. Схема движения груза

Упражнение 4.3. Груз массы $m = 0,5$ кг, получив начальную скорость $V_0 = 6$ м/с, движется по горизонтальной поверхности, испытывая силу сопротивления, равную по величине $F = kV$ и направленную в сторону, противоположную движению. Через 1 с груз соединяется с невесомой вертикальной площадкой AB и продолжает движение вместе с ней, уже без сопротивления. К площадке прикреплены две горизонтальные последовательно соединённые пружины жёсткостью $C_1 = 120$ и $C_2 = 40$ Н/м (рис. 4.16).

Найти величину максимального сжатия пружины, если $k = 0,5$ Н/м/с. Определить закон движения груза.

Упражнение 4.4. Груз массы $m = 1$ кг прикреплен к конструкции, состоящей из трёх вертикальных пружин одинаковой жёсткости $C = 160$ Н/м (рис. 4.17), и находится в равновесии. В некоторый момент времени грузу сообщают скорость $V = 4$ м/с, направленную вверх.

Найти амплитуду и частоту колебаний груза.

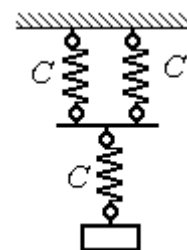


Рис. 4.17. Схема крепления груза на пружинах

4.3. Теорема об изменении кинетической энергии точки

Работой постоянной по величине и направлению силы $\vec{F}$ на прямолинейном перемещении точки приложения силы M (рис. 4.18) называется ска-

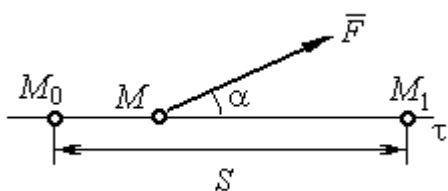


Рис. 4.18. Работа постоянной силы на прямолинейном участке

лярная величина $A(\vec{F}) = FS \cos \alpha$, где F — модуль силы; S — конечное перемещение точки приложения силы; α — угол между направлением вектора силы и направлением перемещения точки приложения силы.

Работа силы тяжести материальной точки при перемещении её из положения M_0 в положение M_1 равна произведению $A_{(M_0 M_1)} = \pm Ph$, где P — величина силы тяжести точки; h — вертикальное перемещение точки (рис. 4.19).

Работа силы тяжести положительна, если начальная точка движения выше конечной (см. рис. 4.19, *a*), и отрицательна, если начальная точка ниже конечной (см. рис. 4.19, *b*).

Работа силы упругости пружины при перемещении вдоль линии действия силы из положения недеформированной пружины на

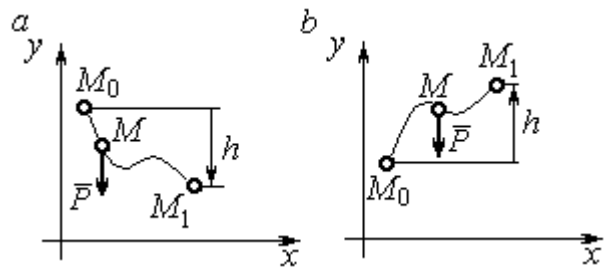


Рис. 4.19. Работа силы тяжести:
a – перемещение точки сверху вниз;
b – перемещение точки снизу вверх

расстояние h определяется формулой $A(\vec{F}_{\text{упр}}) = -\frac{ch^2}{2}$, где c – коэффициент жесткости (или жёсткость) пружины.

Кинетической энергией материальной точки называется скалярная величина $T = \frac{1}{2}mV^2$, где m – масса точки; V – её скорость.

Теорема об изменении кинетической энергии точки. Изменение кинетической энергии материальной точки при переходе её из начального положения в текущее равно алгебраической сумме работ всех действующих на неё сил: $\frac{mV_1^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = \sum A_{(M_0M_1)}$, где V_0, V_1 – скорость точки в начальном положении M_0 и в положении M_1 ; $\sum A_{(M_0M_1)}$ – сумма работ всех сил, действующих на точку, при перемещении её из положения M_0 в положение M_1 . При несвободном движении точки в сумму работ сил войдёт и работа реакций связи.

Для определения реакций связи при несвободном движении точки используются уравнения движения в проекциях на оси естественной системы координат – касательную и нормальную: $m \frac{dV}{dt} = \sum F_\tau$, $m \frac{V^2}{\rho} = \sum F_n$, где $\sum F_\tau$, $\sum F_n$ – суммы проекций сил на касательную и нормальную оси естественной системы координат, ρ – радиус кривизны траектории точки.

Примеры решения задач с использованием теоремы об изменении кинетической энергии точки

Задача 49. Подъёмное устройство в шахте опускает груз массой 500 кг с постоянной скоростью $V_0 = 6$ м/с. После обрыва каната подъёмника срабатывает предохранительное устройство, которое создаёт силу трения между лифтом подъёмного устройства и стенками шахты. Какую силу трения, считая её постоянной, должно создать предохранительное устройство, чтобы остановить лифт на протяжении пути 10 м.

Решение

Рассмотрим падение груза после обрыва каната подъёмника. На груз действуют сила тяжести $\vec{P}$ и сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$, направленная в сторону, противоположную движению. Считая груз материальной точкой, составим уравнение теоремы об изменении кинетической энергии точки. Получим выражение

$$\frac{mV^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = Ps - F_{\text{тр}}s,$$
 где V_0, V – скорость груза в начале движения (сразу после обрыва каната) и в конце; s – путь, проходимый грузом за время движения. В конце движения груз должен остановиться, то есть $V = 0$. Тогда уравнение теоремы об изменении кинетической энергии точки принимает вид:

$$-\frac{mV_0^2}{2} = (P - F_{\text{тр}})s,$$
 откуда находим требуемую для остановки груза силу трения:

ния: $F_{\text{тр}} = P + \frac{mV_0^2}{2s}$. Подставляя условия задачи, получим: $F_{\text{тр}} = 5,81$ кН

Задача 50. Тонкий стержень, расположенный в вертикальной плоскости, состоит из двух дуг сопряженных окружностей радиусов $R = 1$ м и $r = 0,5$ м (рис. 4.20). Линия OO_1 , соединяющая центры окружностей, составляет с горизонтом угол 30° . На стержень надет шарик весом $P = 10$ Н. В точке A , положение которой на дуге радиуса R определяется углом $\alpha = 60^\circ$, шарик сообщают начальную скорость V_0 , после чего он скользит по стержню без трения. Опре-

делить значение начальной скорости, при которой шарик достигнет наивысшей точки B со скоростью, равной половине начальной. При найденном значении начальной скорости рассчитать давление шарика на стержень в точке C , положение которой на дуге радиуса r определяется углом $\beta = 90^\circ$ относительно линии центров.

Решение

При движении шарика по стержню без трения на него действуют сила тяжести $\vec{P}$ и реакция опоры $\vec{N}$. При этом работу совершает только сила тяжести шарика. Реакция гладкой поверхности стержня в любой момент времени перпендикулярна поверхности стержня и поэтому её работа равна нулю.

По теореме об изменении кинетической энергии точки при движении её

из начального положения A в положение B имеем равенство:

$$\frac{mV_B^2}{2} - \frac{mV_A^2}{2} = A(P) = -Ph_{(AB)},$$

где $h_{(AB)}$ – перепад высот точек B и A ,

$$h_{(AB)} = R + DO + r = \frac{3}{2}(R + r) \text{ (см. рис. 4.21);}$$

V_A , V_B – скорость шарика в точках A и B ,

причём $V_A = V_0$, $V_B = 0,5V_0$.

В результате уравнение, составленное на основании теоремы об изменении

кинетической энергии, принимает вид: $\frac{3V_0^2}{8} = g\frac{3}{2}(R + r)$, откуда

$$V_0 = 2\sqrt{(R + r)g} = 7,67 \text{ м/с.}$$

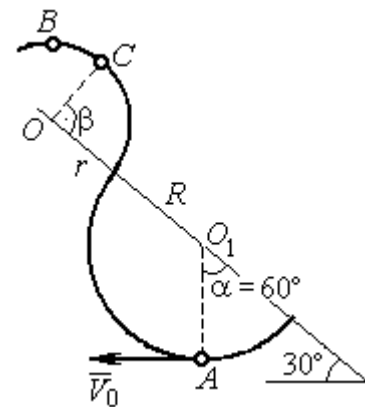


Рис. 4.20. Движение шарика по изогнутому стержню

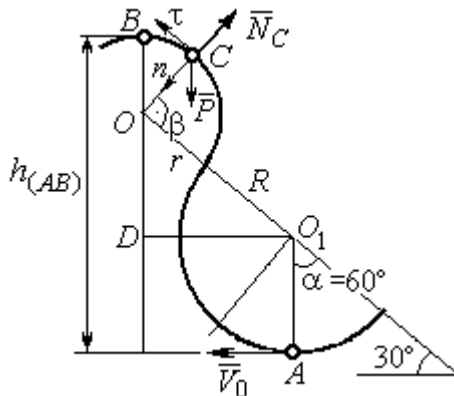


Рис. 4.21. Расчётная схема движения шарика

На рис. 4.21 показаны силы, приложенные к шарiku, в момент, когда он находится в точке C . Проведём в точке C оси естественной системы координат – касательную $C\tau$ и нормаль Cn . Уравнение движения шарика в проекции на нормальную ось имеет вид: $m \frac{V_C^2}{r} = P \cos 30^\circ - N_C$, откуда найдём реакцию N_C .

Для определения скорости шарика в точке C воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии точки при движении шарика из положения C в положение B . Получим равенство $\frac{mV_B^2}{2} - \frac{mV_C^2}{2} = -Ph_{(CB)}$, где $h_{(CB)}$ – перепад высот при движении шарика из начального положения C в положение B . С учётом известных значений $V_B = 0,5 V_0 = 3,84$ м/с и $h_{(CB)} = r \cos 30^\circ = 0,43$ м получим: $V_C = \sqrt{V_B^2 + 2gh_{(CB)}} = 4,82$ м/с.

Из уравнения движения шарика находим реакцию опоры $N_C = P \cos 30^\circ - m \frac{V_C^2}{r} = -38,7$ Н.

Отрицательное значение реакции опоры шарика показывает, что фактическое направление реакции противоположно тому, как показано на рис. 4.21. Искомое давление шарика на трубку равно модулю реакции опоры.

Задача 51. Желоб состоит из шероховатой наклонной прямой AB и гладкой дуги окружности радиуса $r = 0,8$ м, сопряжённых в точке B так, что прямая

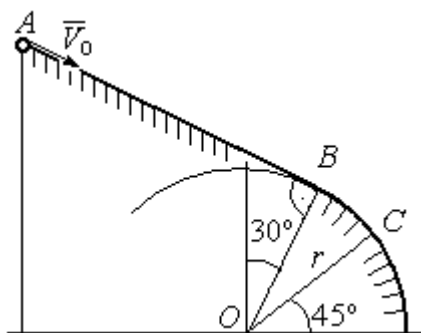


Рис. 4.22. Движение точки по составному желобу

AB является касательной к окружности в точке B (рис. 4.22). Положение точки B на дуге задаётся углом 30° относительно вертикального диаметра окружности. Тяжёлый шарик массой $m = 0,5$ кг начинает движение из точки A со скоростью $V_0 = 0,2$ м/с.

Какой длины S должен быть желоб AB ,

чтобы шарик оторвался от окружности в точке C , определяемой углом 45° относительно горизонтального диаметра, если при движении по прямой AB шарик испытывает сопротивление скольжения с коэффициентом трения $f = 0,4$.

Решение

Рассмотрим движение шарика по дуге окружности. Проведём в точке C оси естественной системы координат – касательную $C\tau$ и нормаль Cn (рис. 4.23). На шарик действуют сила тяжести $\vec{P}$, реакция $\vec{N}_C$ опоры в точке C . Уравнение движения шарика в проекции на ось Cn имеет вид:

$m \frac{V_C^2}{r} = P \cos 45^\circ - N_C$, где V_C – скорость шарика в точке C . Реакция опоры

$$N_C = P \cos 45^\circ - m \frac{V_C^2}{r}.$$

В момент отрыва шарика в точке C реакция опоры обращается в ноль: $N_C = 0$. В результате получаем уравнение $V_C^2 = rg \cos 45^\circ$, из которого находим скорость шарика в момент его отрыва от опоры: $V_C = 2,36$ м/с.

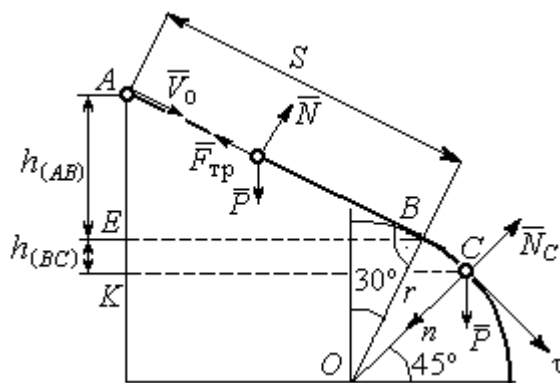


Рис. 4.23. Расчётная схема движения точки

Рассмотрим движение шарика из начального положения A в положение C . На шарик действуют сила тяжести $\vec{P}$, нормальная реакция опоры $\vec{N}$ и, при движении по наклонной прямой AB , сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$ (см. рис. 4.23). Работу совершают сила тяжести шарика и сила трения. Реакция опоры $\vec{N}$ и в том и другом случае перпендикулярна траектории движения, и её работа равна нулю.

Составим уравнение теоремы об изменении кинетической энергии точки

$\frac{mV_C^2}{2} - \frac{mV_A^2}{2} = Ph_{(AC)} - F_{\text{тр}}S$, где S – длина участка AB ; $h_{(AC)}$ – перепад высот на участке AC (см. рис. 4.23); $h_{(AC)} = h_{(AB)} + h_{(BC)} = S \sin 30^\circ + r(\cos 30^\circ - \cos 45^\circ)$.

Модуль силы трения: $F_{\text{тр}} = fN$. Для того чтобы найти реакцию N опоры шарика на наклонную поверхность желоба AB , составим проекцию уравнения движения шарика на ось y , перпендикулярную AB (на рис. 4.23 не показана). Получим: $m\ddot{y} = N - P\cos 30^\circ = 0$. Отсюда $N = P\cos 30^\circ$ и сила трения $F_{\text{тр}} = fP\cos 30^\circ$.

Из уравнения теоремы об изменении кинетической энергии точки найдём выражение для определения длины S участка AB :

$$\frac{V_C^2 - V_A^2}{2g} = S\sin 30^\circ + r(\cos 30^\circ - \cos 45^\circ) - fPS\cos 30^\circ,$$

откуда получим $S = 1$ м.

Задача 52. Груз подвешен на нити длиной $l = 1$ м, закреплённой в непо-

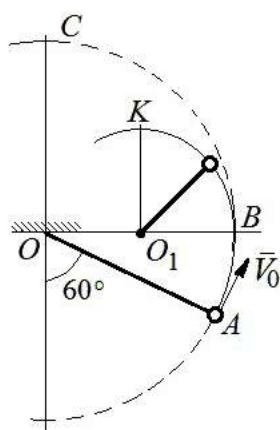


Рис. 4.24. Схема движения груза на нити

движной точке O (рис. 4.24). В начальный момент груз находился в положении A , при котором линия OA составляет с вертикалью угол 60° . В этом положении грузу сообщают начальную скорость $\vec{V}_0$, перпендикулярно нити. Достигнув горизонтального положения, нить, натянутая грузом, встречает препятствие в виде тонкой проволоки в точке O_1 , расположенной на середине длины нити, и дальше

навивается на неё.

Какую минимальную начальную скорость нужно сообщить грузу в точке A , чтобы после встречи нити с проволокой в O_1 груз проскочил верхнюю точку траектории K . На какую максимальную высоту (относительно горизонтального диаметра OB) поднимется груз, двигаясь из той же точки A и с той же начальной скоростью, если нить будет двигаться беспрепятственно. Определить скачок натяжения нити в точке B при переходе груза с одной траектории на другую.

Решение

Построим оси естественной системы координат $nK\tau$ в точке K траектории – окружности радиуса $0,5l$ с

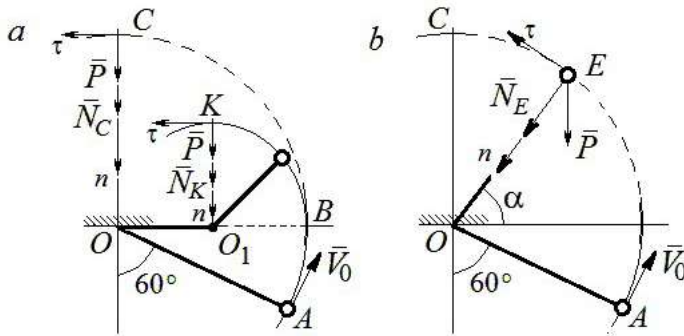


Рис. 4.25. Расчётная схема движения груза:
 а – нить навивается на препятствие;
 б – свободное движение

центра O_1 (рис. 4.25, а). Во время движения на груз действуют сила тяжести и реакция нити. Уравнение движения груза в проекции на ось Kn имеет вид:

$$m \frac{V_K^2}{r} = P + N_K, \text{ где } V_K \text{ – скорость}$$

груза в точке K ; N_K – реакция нити; r – радиус окружности движения груза;

$r = 0,5l$. Из уравнения движения находим реакцию нити: $N_K = m \frac{2V_K^2}{l} - P$.

Так как нить представляет собой гибкую связь, то условием достижимости грузом точки K является требование, что при движении нить должна быть натянута, иначе говоря, всюду во время движения должно выполняться неравенство $N_K \geq 0$. С учётом уравнения движения груза это приводит к неравенству, выражающему требование к скорости в конечной точке: $V_K^2 \geq \frac{1}{2}gl$.

Скорость груза в точке K найдём на основании теоремы об изменении кинетической энергии точки при движении груза из положения A в положение K . Имеем равенство $\frac{mV_K^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = -Ph_{(AK)}$, где $h_{(AK)}$ – перепад высот точек A и K ; $h_{(AK)} = l$ (см. рис. 4.25, а). Решая полученное уравнение, найдём зависимость скорости груза в точке K от начальной: $V_K^2 = V_0^2 - 2gl$. С учётом выполнения неравенства натяжения нити получим: $V_0 \geq \sqrt{\frac{5}{2}gl}$.

При минимальной начальной скорости $V_0 = \sqrt{\frac{5}{2}gl}$ груз достигает верхней точки K . Однако, натяжение нити в точке K обращается в нуль: $N_K = 0$ и нить в этом месте перестаёт быть натянутой. Груз продолжает движение, но уже в виде свободного падения с начальной скоростью $V_K = \sqrt{\frac{1}{2}gl}$.

Определим, на какую высоту поднимется груз из положения A с минимальной начальной скоростью $V_0 = \sqrt{\frac{5}{2}gl}$, если нить движется беспрепятственно (см. рис. 4.25, b). Построим в точке E оси естественной системы координат $nE\tau$ аналогично тому, как это было сделано в точке K . Уравнение движения груза в проекции на ось En имеет вид: $m \frac{V_E^2}{l} = P \sin \alpha + N_E$, где V_E – скорость груза в точке E ; N_E – проекция реакции нити на нормальную ось.

Для определения скорости груза в точке E составим уравнение теоремы об изменении кинетической энергии точки при движении груза из начального положения A в положение E . Получим: $\frac{mV_E^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = -Ph_{(AE)}$, где $h_{(AE)}$ – перепад высот точек A и E ; $h_{(AE)} = \frac{l}{2} + l \sin \alpha$ (см. рис. 4.25, b). Решая полученное уравнение относительно скорости V_E при заданной начальной скорости $V_0 = \sqrt{\frac{5}{2}gl}$, найдём: $mV_E^2 = \frac{3}{2}mgl - 2mgl \sin \alpha$. С другой стороны, из уравнения движения груза (учитывая, что в точке E натяжение нити равно нулю: $N_E = 0$) получим: $mV_E^2 = Pl \sin \alpha$. Приравнявая выражения, получим $\sin \alpha = \frac{1}{2}$. Высота подъёма относительно горизонтального радиуса составляет $\frac{1}{2}l$.

Для определения скачка натяжения нити при переходе груза в точке B с окружности радиуса l на окружность радиуса $\frac{1}{2}l$, т. е. в момент, когда нить начинает навиваться на проволоку, напишем проекции уравнения движения груза на нормальную ось в точке B . Получим для малой окружности $\frac{2mV_B^2}{l} = N_B$ и для большой $\frac{mV_B^2}{l} = N'_B$, где N_B и N'_B – проекции реакции нити в точке B при движении груза по окружности радиусов $\frac{1}{2}l$ и l . Из уравнений видно, что переход груза с большой окружности на малую вызывает двукратное увеличение натяжения нити: $N'_B = \frac{3}{2}mg$, $N_B = 3mg$.

Задача 53. Шарик массой $m = 0,5$ кг движется в вертикальной плоскости из положения A внутри трубки, которая состоит из полуокружности AB радиуса $R = 0,6$ м и прямолинейного участка BD , сопряжённого в точке B с окружностью (рис. 4.26). Диаметр полуокружности AB составляет с горизонталью угол 60° . Начальная скорость шарика $V_0 = 5$ м/с. В конце кругового участка в точке B шарик упирается в недеформированную пружину жесткостью $c = 100$ Н/м. Найти величину S максимального сжатия пружины.

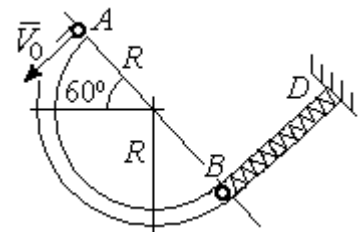


Рис. 4.26. Схема движения шарика

Решение

Найдём скорость шарика в точке B . Для этого составим уравнение теоремы об изменении кинетической энергии точки при движении шарика из начального положения A в положение B . Получим:

$$\frac{mV_B^2}{2} - \frac{mV_A^2}{2} = A(P) = Ph_{(AB)}, \quad \text{где } h_{(AB)} - \text{перепад высот точек } A \text{ и } B,$$

$$h_{(AB)} = 2R \sin 60^\circ = 1,04 \text{ м (рис. 4.27).}$$

Решая уравнение, найдём скорость шарика в точке B :

$$V_B = \sqrt{V_A^2 + 2gh_{(AB)}} = 6,74 \text{ м/с}.$$

Для того, чтобы найти величину максимального сжатия пружины, рассмотрим движение шарика на прямолинейном отрезке трубки BD . На этом отрезке работу совершают сила тяжести шарика и сила упругости пружины, приложенные к шарiku (см. рис. 4.27).

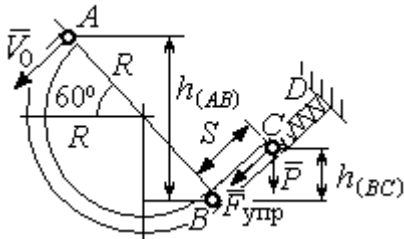


Рис. 4.27. Расчетная схема движения шарика

Обозначим S – максимальное сжатие пружины, равное BC . На основании теоремы об изменении кинетической энергии точки, применённой к движению шарика на от-

резке BC , имеем уравнение
$$\frac{mV_C^2}{2} - \frac{mV_B^2}{2} = A(P) + A(F_{\text{упр}}) = -Ph_{(BC)} - \frac{cS^2}{2},$$

где $h_{(BC)}$ – перепад высот точек B и C ; $h_{(BC)} = S \sin 30^\circ = 0,5S$ (см. рис. 4.27).

В точке C максимального сжатия пружины скорость шарика обращается в нуль: $V_C = 0$. Подставляя это условие, с учётом $V_B = 6,74 \text{ м/с}$, получим уравнение для определения величины максимального сжатия пружины: $S^2 + 0,05S - 0,23 = 0$.

Выбирая положительный корень уравнения, находим: $S = 0,45 \text{ м}$.

Упражнения

Упражнение 4.5. Лётчик в самолёте пикирует из точки A по прямой, составляющей с горизонтом угол φ , с начальной скоростью V_0 . Пройдя расстояние $AB = l$, самолёт продолжает движение по дуге окружности радиуса R , сопряженной с прямой AB в точке B (рис. 4.28).

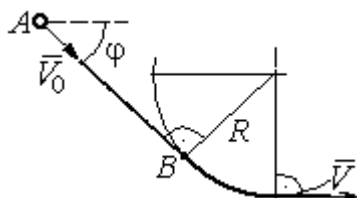


Рис. 4.28. Схема движения самолёта

Каким должен быть радиус окружности, чтобы в точке C – выхода самолёта на горизонтальный полёт – сила давления человека на корпус самолёта не превосходила его тройной вес.

Упражнение 4.6. Пружина жесткостью $C = 100 \text{ Н/м}$, сжатая из недеформированного состояния на расстояние $KA = a = 0,3 \text{ м}$, выталкивает шарик массой $m = 0,5 \text{ кг}$, который отделяется от неё в точке K и продолжает движение в трубке по дуге KCB , окружности радиуса $R = 1 \text{ м}$, затем – по горизонтальному участку BD . Определить давление шарика на трубку в точке C . Какой путь пройдёт шарик до остановки по прямой BD , если здесь на него действует сила трения с коэффициентом $f = 0,4$.

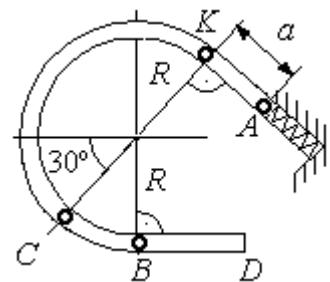


Рис. 4.29. Схема движения шарика в трубке

5. ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ СИСТЕМЫ

5.1. Теорема о движении центра масс системы

Центром масс системы материальных точек называют точку C , координаты которой x_C, y_C, z_C удовлетворяют равенствам:

$$mx_C = \sum m_k x_k, \quad my_C = \sum m_k y_k, \quad mz_C = \sum m_k z_k,$$

где m – масса системы: $m = \sum m_k$; m_k, x_k, y_k, z_k – массы и координаты материальных точек системы.

Теорема о движении центра масс системы. Центр масс механической системы движется как материальная точка с массой, равной массе системы, и к которой приложены внешние силы, действующие на систему: $m\vec{a}_C = \sum \vec{F}_k^e$, где $\vec{a}_C$ – вектор ускорения центра масс системы; $\sum \vec{F}_k^e$ – сумма всех внешних сил, действующих на систему.

Пример решения задач на применение теоремы о движении центра масс

Задача 54. Груз 1, находящийся на верхнем основании прямоугольной пирамиды $ABCD$, соединен с грузом 2 нерастяжимой нитью, перекинутой через

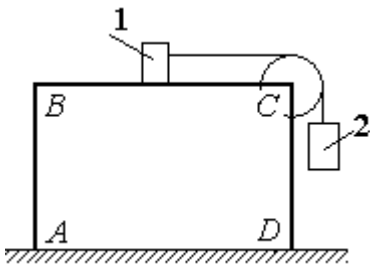


Рис. 5.1. Пирамида с системой подвижных грузов

блок C (рис. 5.1). Определить перемещение пирамиды, если груз 2 опустился на высоту 1 м. Масса груза 1 $m_1 = 15$ кг, груза 2 $m_2 = 20$ кг, пирамиды $m = 50$ кг. Трение при движении груза 1 по пирамиде и пирамиды по горизонтальной поверхности не учитывать.

Решение

Рассматриваем механическую систему, состоящую из двух грузов, соединённых нерастяжимой нитью, блока C и пирамиды $ABCD$.

Внешние силы, приложенные к системе: силы тяжести грузов и пирамиды – $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}$ и нормальная реакция $\vec{N}$ опоры поверхности, на которой стоит пирамида. Направления векторов внешних сил показаны на рис. 5.2.

Выберем неподвижную систему координат Axy , как показано на рис. 5.2. Все внешние силы, действующие на механическую систему, вертикальны, поэтому дифференциальное уравнение, составленное на основании теоремы о движении центра масс механической системы в проекции на ось Ax , имеет вид:

$$(m + m_1 + m_2)\ddot{x}_C = P_{1x} + P_{2x} + P_x + N_x = 0$$

$$\text{или } \ddot{x}_C = 0,$$

где x_C – координата центра масс системы.

Проинтегрировав его дважды, получим закон движения центра масс системы: $x_C = C_1 t + C_2$, где константы интегрирования C_1 и C_2 находятся из начальных условий. Предположим, в начальный момент движение в механической системе отсутствовало и координата центра масс системы была равна x_{C0} (на рис. 5.2, a не показана), то есть при $t = 0$ $x_C(0) = x_{C0}$ и $\dot{x}_C(0) = 0$. Подставляя начальные

условия, получим: $C_1 = 0$, $C_2 = x_{C0}$. В результате закон движения центра масс системы имеет вид: $x_C = x_{C0}$. Последнее означает, что при любом перемещении тел в системе координата центра масс системы на оси Ax остаётся постоянной, равной своему начальному значению.

Предположим, в начальный момент времени груз 1 находился у левого края призмы, как показано на рис. 5.2, a .

Начальная координата x_{C0} центра масс системы находится из равенства $(m_1 + m_2 + m)x_{C0} = \sum m_k x_k = m_1 \cdot 0 + m_2 l_2 + ml$, где l_2 – расстояние от начала координат до линии действия силы тяжести груза 2 (координата центра масс гру-

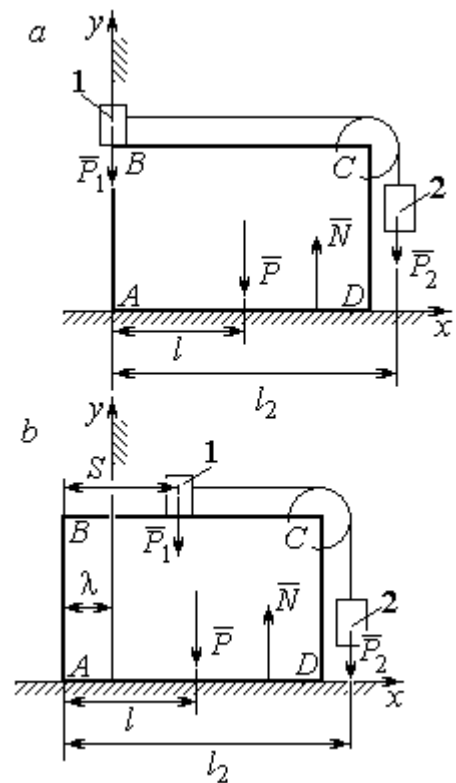


Рис. 5.2. Расчётная схема перемещения пирамиды: a – начальное положение; b – положение пирамиды при перемещении грузов на расстояние S

за 2 на оси Ax); l – аналогичное расстояние до линии действия силы тяжести пирамиды (см. рис. 5.2, a). Тогда начальная координата центра масс системы:

$$x_{C0} = \frac{m_2 l_2 + m l}{(m_1 + m_2 + m)}.$$

Положение грузов в системе, после того как груз 1 переместился на расстояние S , и положение призмы показано на рис. 5.2, b . На рисунке отмечено, что при перемещении груза 1 вправо на расстояние S призма $ABCD$ сместилась влево на расстояние λ . Координата x_{C1} центра масс для нового положения системы определяется из равенства:

$$(m_1 + m_2 + m)x_{C1} = m_1(S - \lambda) + m_2(l_2 - \lambda) + m(l - \lambda).$$

Выражая отсюда координату x_{C1} и приравнявая её начальному значению координаты центра масс $x_{C0} = x_{C1}$, найдём перемещение пирамиды

$$\lambda = \frac{m_1 S}{(m_1 + m_2 + m)}.$$

Подставляя данные задачи, получим $\lambda = 0,18$ м.

5.2. Теорема об изменении кинетического момента системы относительно оси

Момент инерции однородного диска радиусом R , массой m относительно оси z , проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости диска:

$$J_z = \frac{1}{2} m R^2.$$

Для неоднородных тел момент инерции относительно оси z вы-

числяется по формуле: $J_z = m i_z^2$, где i_z – радиус инерции тела.

Кинетическим моментом (моментом количества движения) системы относительно неподвижной оси z называется величина, равная сумме моментов количеств движения точек относительно этой оси $\vec{L}_z = \sum M_z(m_k \vec{V}_k)$.

Для твёрдого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси z , кинетический момент: $L_z = J_z \omega$, где J_z и ω – момент инерции и угловая скорость

тела. **Теорема об изменении кинетического момента системы относительно оси.** Производная по времени от кинетического момента системы относительно неподвижной оси z равна сумме моментов внешних сил относительно той же

оси:
$$\frac{dL_z}{dt} = \sum M_z(\vec{F}_k^e).$$

Примеры решения задач на применение теоремы об изменении кинетического момента системы

Задача 55. Для подъёма груза используется лебёдка со ступенчатым барабаном и противовесом. Груз 1 массой m_1 поднимается на канате, навитом на барабан 2 массой m_2 радиуса R . Противовес 3 массой m_3 прикреплён к канату, который навит на малую ступень барабана радиуса r (рис. 5.3). Радиус инерции барабана относительно оси вращения i_z . На барабан действует постоянный момент сил сопротивления $M_c = 60 \text{ Н}\cdot\text{м}$. В начале движения к барабану лебёдки прикладывается вращающий момент, пропорциональный времени: $M_{вр} = 620 + 30t \text{ Н}\cdot\text{м}$, который через 2 с отключается. Определить, на какую высоту поднимется груз, если движение началось из состояния покоя. Массы грузов и барабана: $m_1 = 100 \text{ кг}$, $m_2 = 50 \text{ кг}$, $m_3 = 20 \text{ кг}$. Радиусы ступеней барабана и радиус инерции: $R = 0,6 \text{ м}$; $r = 0,4 \text{ м}$; $i_z = 0,5 \text{ м}$.

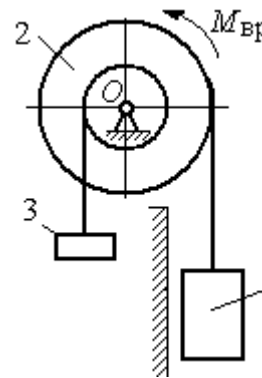


Рис. 5.3. Барабан лебёдки с грузом и противовесом

Решение

Решение следует рассматривать на двух этапах. На первом груз поднимается под действием вращающего момента, на втором – по инерции.

Рассмотрим механическую систему, состоящую из груза 1, барабана 2 и противовеса 3. На систему действуют силы тяжести груза $\vec{P}_1$, барабана $\vec{P}_2$, противовеса $\vec{P}_3$, реакция шарнира $\vec{R}$, пара сил с моментом, равным моменту вра-

щения $M_{вр}$, и пара сил с моментом сопротивления M_c . Направления векторов

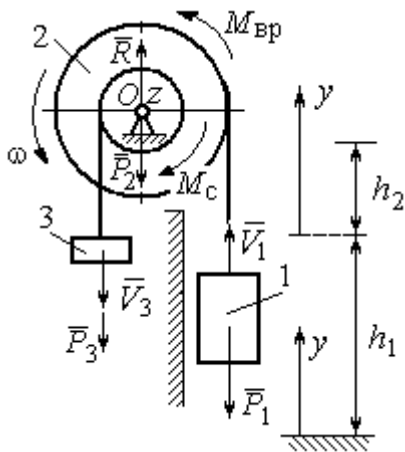


Рис. 5.4. Силы, действующие на систему во время движения

сил и моментов показаны на рис. 5.4. Выберем начало оси y , вдоль которой поднимается груз на первом участке движения, в точке начала движения (см. рис. 5.4).

Воспользуемся теоремой об изменении кинетического момента системы относительно оси z , проходящей через центр O :

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum M_z(\vec{F}_k^e). \text{ Кинетический момент си-}$$

стемы относительно оси z равен сумме кинетических моментов барабана, груза и противовеса: $L_z = L_z^{бар} + L_z^{гр} + L_z^{пр}$. Кинетический момент барабана, вращающегося вокруг неподвижной оси z : $L_z^{бар} = J_z \omega$, где J_z – момент инерции барабана относительно оси z , $J_z = m_2 i_z^2$; ω – угловая скорость барабана. Рассматривая груз и противовес как материальные точки, найдём их кинетические моменты относительно оси z : $L_z^{гр} = M_z(m_1 \vec{V}_1) = m_1 V_1 R$; $L_z^{пр} = M_z(m_3 \vec{V}_3) = m_3 V_3 r$.

Суммарный кинетический момент системы:

$$L_z = L_z^{бар} + L_z^{гр} + L_z^{пр} = m_2 i_z^2 \omega + m_1 V_1 R + m_3 V_3 r.$$

Выразим скорости груза 1 и противовеса 3 через угловую скорость барабана: $V_1 = \omega R$, $V_3 = \omega r$ – и подставим их в выражение кинетического момента.

Получим
$$L_z = (m_2 i_z^2 + m_1 R^2 + m_3 r^2) \omega = (m_2 i_z^2 + m_1 R^2 + m_3 r^2) \frac{V_1}{R}.$$

Суммарный момент внешних сил относительно оси z

$$\sum M_z(\vec{F}_k^e) = M_{вр} - M_c - P_1 R + P_3 r.$$

Дифференциальное уравнение движения груза:

$$(m_2 i_z^2 + m_1 R^2 + m_3 r^2) \frac{dV_1}{dt} = (M_{вр} - M_c - P_1 R + P_3 r) R,$$

или с учётом данных задачи $\frac{dV_1}{dt} = 0,58 + 0,35t$.

Дважды интегрируя это уравнение с нулевыми начальными условиями, найдём скорость груза V_1 и проходимый им путь y как функции времени:

$$V_1(t) = 0,58t + 0,175t^2; \quad y(t) = 0,29t^2 + 0,058t^3.$$

Из уравнений движения найдём: при $t = 2$ с (конец первого участка) груз поднялся на высоту $h_1 = y(2) = 1,62$ м и имел скорость $V_1 = V_1(2) = 1,86$ м/с.

На втором участке движения груз продолжает подниматься вверх. Уравнение движения груза здесь аналогично первому участку, за исключением вращающего момента (см. рис. 5.4):

$$(m_2 i_z^2 + m_1 R^2 + m_3 r^2) \frac{dV_1}{dt} = (-M_c - P_1 R + P_3 r) R, \text{ или } \frac{dV_1}{dt} = -6,61.$$

Представим ускорение груза в виде: $\frac{dV_1}{dt} = \frac{dV_1 dy}{dy dt} = V_1 \frac{dV_1}{dy}$. Теперь урав-

нение движения груза на втором участке имеет вид: $V_1 \frac{dV_1}{dy} = -6,61$. Интегрируя

его, получим зависимость скорости груза от пройденного пути

$\frac{V_1^2}{2} = -6,61y + C_3$. Выберем начало второго участка на высоте h_1 . Из началь-

ных условий движения груза: при $t = 0$, $y = 0$, $V_1 = 1,86$ м/с, получим: $C_3 = 1,73$.

Максимальную высоту h_2 , на которую поднялся груз на втором участке, определим из условия, что в этой точке скорость груза обращается в нуль. Имеем $0 = -6,61h_2 + 1,73$, откуда $h_2 = 0,26$ м. Максимальная высота подъёма груза $H = h_1 + h_2 = 1,88$ м.

Задача 56. Тележка C поворотного подъёмного крана (рис. 5.5) движется с постоянной относительно стрелы скоростью $V = 0,5$ м/с. Длина стрелы

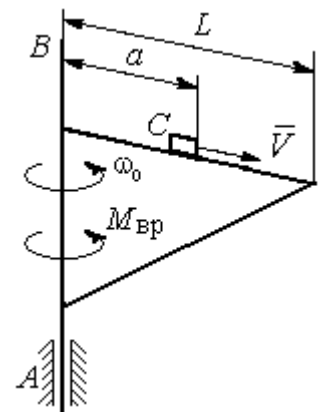


Рис. 5.5. Поворотный кран

$L = 10$ м, масса тележки с грузом $m_1 = 100$ кг, момент инерции крана относительно оси вращения AB без учёта тележки и груза $J = 1800$ кг·м². Двигатель крана создаёт постоянный вращающий момент $M_{\text{вр}} = 400$ Н·м. Определить угловую скорость крана в момент, когда тележка достигнет края стрелы, если в начальный момент конструкция вращалась с угловой скоростью $\omega_0 = 2$ рад/с, а тележка находилась на расстоянии $a = 1$ м от оси вращения.

Решение

На систему действуют внешние силы: $\vec{P}_1$ – сила тяжести тележки с гру-

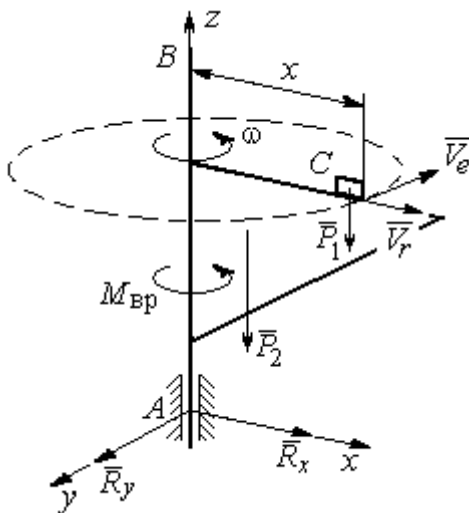


Рис. 5.6. Внешние силы, действующие на кран при его движении

зом, $\vec{P}_2$ – сила тяжести поворотного крана (на рис. 5.6 показана в условном центре тяжести крана); $\vec{R}_x$, $\vec{R}_y$ – составляющие реакции подшипника A и пара сил с моментом, равным вращающему моменту $M_{\text{вр}}$ (см. рис. 5.6). Применим к описанию движения системы теорему об изменении кинетического момента системы относительно оси вращения z , направленной вдоль линии AB .

Поскольку силы тяжести параллельны оси вращения крана, а составляющие реакции шарнира A пересекают её, то моменты этих сил относительно оси z равны нулю и теорема об изменении кинетического момента системы принимает вид: $\frac{dL_z}{dt} = M_{\text{вр}}$. Интегрируя это уравнение при постоянном вращающем моменте, получим равенство: $L_z - L_{z0} = M_{\text{вр}}t$, где L_z, L_{z0} – кинетический момент системы в текущий и начальный моменты времени.

Кинетический момент системы L_z равен сумме: $L_z = L_z^{\text{кран}} + L_z^{\text{груз}}$. Кинетический момент крана как твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной

оси: $L_z^{\text{кран}} = J\omega$. Полагая тележку с грузом материальной точкой, определим её кинетический момент $L_z^{\text{груз}}$, как момент вектора количества движения тележки относительно оси z . Тележка с грузом участвует в сложном движении. Вектор абсолютной скорости тележки $\vec{V}_{\text{абс}}$ равен сумме $\vec{V}_{\text{абс}} = \vec{V}_r + \vec{V}_e$, где $\vec{V}_r$ – относительная скорость тележки (перемещение по стреле крана); $\vec{V}_e$ – переносная скорость (движение вместе с краном). Воспользовавшись теоремой Вариньона при вычислении момента количества движения тележки с грузом, получим:

$$L_z^{\text{груз}} = M_z(m_1 \vec{V}_{\text{абс}}) = M_z(m_1 \vec{V}_e + m_1 \vec{V}_r) = M_z(m_1 \vec{V}_e) = m_1 V_e x = m_1 \omega x^2.$$

В результате суммарный кинетический момент системы в текущий момент времени $L_z = L_z^{\text{кран}} + L_z^{\text{груз}} = (J + m_1 x^2)\omega$. Тогда начальный кинетический момент систем: $L_{z0} = (J + m_1 a^2)\omega_0$.

Подставляя выражения начального и текущего кинетического моментов в уравнение движения, получим: $(J + m_1 x^2)\omega - (J + m_1 a^2)\omega_0 = M_{\text{вр}} t$, откуда закон изменения угловой скорости крана $\omega = \frac{M_{\text{вр}} t + (J + m_1 a^2)\omega_0}{(J + m_1 x^2)}$. Момент времени t_k , когда тележка достигнет края стрелы ($x = L$), найдём из условия движения тележки по стреле с постоянной скоростью: $V t_k = L - a$. С учётом данных задачи угловая скорость крана в этот момент $\omega(t_k) = 0,93$ рад/с.

5.3. Теорема об изменении кинетической энергии системы

Кинетическая энергия тела при поступательном движении

$T = \frac{1}{2} m V_C^2$, где m – масса тела; V_C – скорость центра масс тела; **при враща-**

тельном движении вокруг неподвижной оси z : $T = \frac{1}{2} J_z \omega^2$, где J_z – момент

инерции тела относительно оси z ; ω – угловая скорость тела; **при плоскопа-**

параллельном движении: $T = \frac{1}{2}mV_C^2 + \frac{1}{2}J_{zC}\omega^2$, где m – масса тела; V_C , ω – скорость центра масс и угловая скорость тела; J_{zC} – момент инерции тела относительно оси z , проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения.

Работа постоянной силы F при прямолинейном перемещении точки приложения силы $A = FScos\alpha$, где S – перемещение точки; α – постоянный угол между перемещением и направлением силы. **Работа пары сил с постоянным моментом M** при повороте тела на конечный угол φ вычисляется по формуле: $A = \pm M\varphi$, где φ – угол поворота тела. Работа считается положительной, если пара сил стремится повернуть тело в направлении его вращения, и отрицательной – в противном случае.

Мощностью силы F называют величину, равную скалярному произведению силы на скорость точки её приложения: $N = \vec{F} \cdot \vec{V}$, где V – скорость точки приложения силы. При плоском движении тела мощность силы равна сумме скалярных произведений: $N = \vec{F} \cdot \vec{V}_O + \vec{M}_O \cdot \vec{\omega}$, где V_O – скорость точки, выбранной полюсом; ω – угловая скорость тела; $\vec{M}_O = M_O(\vec{F})$ – момент силы относительно полюса. Если в качестве полюса выбрать точку K – мгновенный центр скоростей, то мощность силы $N(\vec{F}) = \vec{M}_K(\vec{F}) \cdot \vec{\omega}$, где $M_K(\vec{F})$ – момент силы относительно мгновенного центра скоростей.

Теорема об изменении кинетической энергии системы в дифференциальной форме. Производная по времени от кинетической энергии системы равна сумме мощностей внешних и внутренних сил $\frac{dT}{dt} = \sum N(\vec{F}_k^e) + \sum N(\vec{F}_k^i)$.

Теорема об изменении кинетической энергии системы на конечном перемещении. Изменение кинетической энергии системы при перемещении её

из начального состояния в текущее равно сумме работ внешних и внутренних сил, действующих на систему: $T - T_0 = \sum A(\vec{F}_k^e) + \sum A(\vec{F}_k^i)$.

Механические системы, состоящие из абсолютно твердых тел, соединенных гибкими нерастяжимыми нитями, называются **неизменяемыми**. В неизменяемых системах сумма работ и сумма мощностей внутренних сил равны нулю: $\sum A(\vec{F}_k^i) = 0$.

Примеры решения задач на применение теоремы об изменении кинетической энергии системы

Задача 57. Планетарный механизм, позволяющий получать повышенные передаточные отношения угловых скоростей, состоит из трех одинаковых колёс, соединённых кривошипом OA (рис. 5.7). Колесо 1 неподвижно, кривошип OA вращается с угловой скоростью ω_{OA} и приводит в движение колёса 2 и 3. Полагая массы колёс и их радиусы одинаковыми, равными m и r , и пренебрегая массой кривошипа, найти кинетическую энергию механизма.

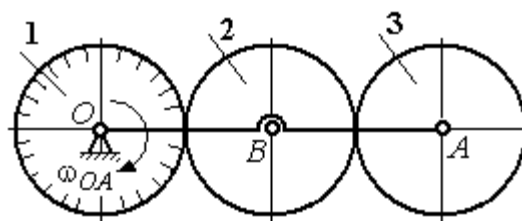


Рис. 5.7. Планетарный механизм

Решение

Кинетическая энергия механизма T равна сумме энергий колёс 2 и 3:

$T = T_2 + T_3$. Энергия колеса 1 равна нулю потому, что оно неподвижно, а энергия кривошипа равна нулю, так как массой кривошипа пренебрегаем. При движении механизма колесо 2, увлекаемое кривошипом, катится по неподвижной поверхности первого колеса. Энергия колеса 2:

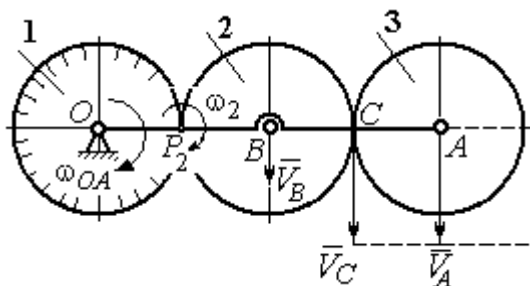


Рис. 5.8. Расчётная схема вычисления энергии механизма

$T_2 = \frac{mV_B^2}{2} + \frac{J_{2B}\omega_2^2}{2}$, где V_B – скорость центра масс колеса 2, J_{2B} – момент инерции колеса 2 относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости колеса, $J_{2B} = \frac{mr^2}{2}$.

Выразим кинетическую энергию колеса 2 через угловую скорость ω_{OA} кривошипа OA .

Скорость точки B , лежащей на кривошипе OA : $V_B = \omega_{OA} \cdot OB = \omega_{OA} 2r$.

Так как точка P_2 касания колёс 1 и 2 является мгновенным центром скоростей колеса 2 (рис. 5.8), угловая скорость колеса 2 $\omega_2 = \frac{V_B}{BP_2}$. В результате получим: $\omega_2 = 2\omega_{OA}$. Подставив зависимости V_B и ω_2 в выражение кинетической энергии колеса 2, найдём:

$$T_2 = \frac{m(\omega_{OA} 2r)^2}{2} + \frac{mr^2}{2} \cdot \frac{(2\omega_{OA})^2}{2} = 3m\omega_{OA}^2 r^2.$$

Вычислим кинетическую энергию колеса 3. Найдём скорость точки C , считая, что она принадлежит колесу 2: $V_C = \omega_2 \cdot P_2C = 4\omega_{OA}r$. Скорость точки A – центра колеса 3 определим, полагая, что точка A лежит и на кривошипе: $V_A = \omega_{OA} \cdot OA = 4\omega_{OA}r$. Скорости двух точек A и C колеса 3 равны и параллельны, причём линия AC перпендикулярна векторам скоростей $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_C$ (см. рис. 5.8). В этом случае мгновенный центр скоростей отсутствует и колесо 3 совершает мгновенно-поступательное движение. Энергия поступательного

движения колеса 3: $T_3 = \frac{mV_A^2}{2} = \frac{m(4\omega_{OA}r)^2}{2} = 8m\omega_{OA}^2 r^2$.

Окончательно, энергия механизма: $T = T_2 + T_3 = 11m\omega_{OA}^2 r^2$.

Задача 58. Горизонтальный желоб DE опирается на блок 1 и на каток 3 одинакового радиуса r (рис. 5.9). Блок 1 весом P_1 вращается вокруг неподвиж-

ной оси O_1 . Каток 3 катится по горизонтальному рельсу без проскальзывания. На одной оси с катком 3 жестко связано колесо 2 радиуса R . Их общий вес равен Q , а общий радиус инерции относительно оси z , проходящей через центр масс C перпендикулярно плоскости катка, равен i_z . Система движется в вертикальной плоскости под действием сил тяжести, силы $\vec{F}$ и пары сил с моментом M . Массой желоба пренебрегаем. Скольжение между желобом и блоком 1, а также катком 3 отсутствует. Определить ускорение центра масс колеса 2 и катка 3 и угловое ускорение блока 1, если: $P_1 = 40$ Н, $Q = 60$ Н, $F = 50$ Н, $M = 45$ Н·м, $R = 0,8$ м, $r = 0,6$ м, $i_z = 0,4$ м.

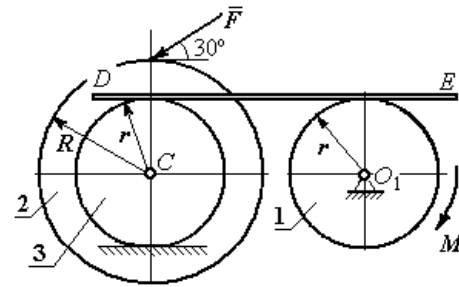


Рис. 5.9. Схема движения механической системы

Решение

Для решения задачи воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии для неизменяемых механических систем: $\frac{dT}{dt} = \sum N(\vec{F}_k^e)$, где T – энергия системы в её текущем положении; $\sum N(\vec{F}_k^e)$ – суммарная мощность внешних сил.

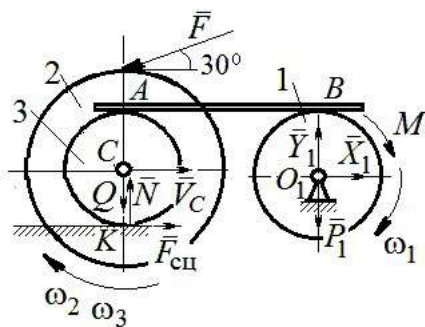


Рис. 5.10. Расчетная схема для исследования движения системы

Предположим, во время движения системы блок 1 вращается по ходу часовой стрелки.

Угловые скорости ω_1 , ω_2 блока 1, катка 3 и скорость $\vec{V}_C$ центра масс катка 3 показаны на рис. 5.10. Угловая скорость колеса 2 и катка 3 равны: $\omega_3 = \omega_2$.

Кинетическая энергия вращательного движения блока 1 $T_1 = \frac{1}{2} J_{zO_1} \omega_1^2$,

где J_{zO_1} – осевой момент инерции блока, $J_{zO_1} = \frac{m_1 r^2}{2}$.

Фигура, состоящая из катка 3 и колеса 2, движется плоскопараллельно.

Кинетическая энергия фигуры определяется по формуле:

$T_2 = \frac{1}{2} m V_C^2 + \frac{1}{2} J_{zC} \omega_2^2$, где m – общая масса катка и колеса, $m = \frac{Q}{g}$, J_{zC} – мо-

мент инерции фигуры относительно оси z , проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости диска, $J_{zC} = m i_z^2$,

У катка 3 мгновенный центр скоростей находится в точке касания его с неподвижной поверхностью (точка K на рис. 5.10). Тогда $\omega_3 = \frac{V_C}{r}$. Скорость точки A катка $V_A = \omega_3 2r = 2V_C$. Приравнивая скорость точки A на катке 2 к скорости точки B на блоке 1, получим $\omega_1 = \frac{2V_C}{r}$.

Найдём кинетическую энергию системы, выраженную через скорость центра масс катка 3:

$$T = T_1 + T_2 = \frac{P_1}{g} V_C^2 + \frac{Q}{2g} \left(1 + \frac{i_z^2}{r^2} \right) V_C^2 = \frac{V_C^2}{2g} \left[2P_1 + Q \left(1 + \frac{i_z^2}{r^2} \right) \right].$$

Найдём сумму мощностей внешних сил.

На блок 1 действуют: сила тяжести $\vec{P}_1$, пара сил с моментом M и реакция шарнира O_1 , разложенная на составляющие $\vec{X}_1$, $\vec{Y}_1$ (рис. 5.10). Мощности силы тяжести $\vec{P}_1$ и сил реакции $\vec{X}_1$, $\vec{Y}_1$ подшипника O_1 равны нулю, так как нет перемещения точек приложения этих сил. Момент M направлен в сторону вращения блока 1, его мощность $N(M) = M \omega_1 = M \frac{2V_C}{r}$.

На каток 3 (вместе с жестко связанным с ним колесом 2) действуют: сила $\vec{F}$, сила тяжести $\vec{Q}$ катка и колеса, нормальная реакция опоры $\vec{N}$ и сила сцепления $\vec{F}_{\text{сц}}$ катка 3 с поверхностью.

Мощности сил $\vec{N}$ и $\vec{F}_{\text{сц}}$ равны нулю, так как точкой приложения этих сил является мгновенный центр скоростей катка 3, скорость которого равна нулю. Мощность силы тяжести $\vec{Q}$ равна нулю, так как угол между вектором силы и вектором скорости точки C равен 90° .

Для определения мощности силы $\vec{F}$, приложенной к колесу, выберем в качестве полюса точку K – мгновенный центр скоростей диска 2. С учётом того, что скорость $V_K = 0$, получим:

$$\begin{aligned} N(\vec{F}) &= \vec{F} \cdot \vec{V}_K + \vec{M}_K(\vec{F}) \cdot \vec{\omega}_2 = \vec{M}_K(\vec{F}) \cdot \vec{\omega}_2 = \\ &= -F(r+R)\omega_2 \cos 30^\circ = -FV_C \left(1 + \frac{R}{r}\right) \cos 30^\circ. \end{aligned}$$

Поскольку вращение, создаваемое моментом силы $\vec{F}$ относительно центра K , противоположно выбранному направлению угловой скорости катка, мощность силы $\vec{F}$ отрицательная.

Суммарная мощность внешних сил:

$$\sum N(F^e) = -FV_C \left(1 + \frac{R}{r}\right) \cos 30^\circ + M \frac{2V_C}{r}.$$

Составляем уравнение теоремы об изменении кинетической энергии системы. Находим производную по времени от кинетической энергии системы

$$\frac{dT}{dt} = \frac{V_C}{g} a_C \left[2P_1 + Q \left(1 + \frac{i_z^2}{r^2} \right) \right] \text{ и приравниваем суммарной мощности внешних}$$

сил. Получим:

$$\frac{1}{g} a_C \left[2P_1 + Q \left(1 + \frac{i_z^2}{r^2} \right) \right] = -F \left(1 + \frac{R}{r} \right) \cos 30^\circ + \frac{2M}{r},$$

откуда с учётом исходных данных задачи ускорение центра масс диска 2 $a_C = 2,88 \text{ м/с}^2$. Для определения углового ускорения блока 1 продифференцируем по времени равенство $\omega_1 = \frac{2V_C}{r}$. Получим: $\varepsilon_1 = \frac{2a_C}{r} = 9,6 \text{ рад/с}^2$.

Задача 59. Каток радиуса r , весом P закатывают вверх по наклонной

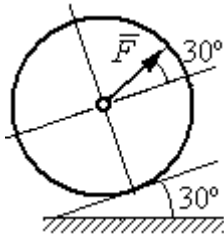


Рис. 5.11. Движение катка на наклонной плоскости

плоскости приложив в центре катка силу $\vec{F}$ под углом 30° к наклонной плоскости (рис. 5.11). Сама плоскость наклонена под углом 30° к горизонту. Величина силы $F = 2P$. В начальном положении центр катка имел скорость V_0 .

На какое расстояние S переместился центр катка, если в конце перемещения его скорость удвоилась.

Решение

Применим теорему об изменении кинетической энергии на конечном перемещении системы: $T - T_0 = \sum A(F_k)$. На каток действует сила тяжести $\vec{P}$, сила $\vec{F}$, нормальная реакция опоры $\vec{N}$ и сила $\vec{F}_{\text{сц}}$ сцепления диска с наклонной плоскостью (рис. 5.12). При перемещении центра катка на расстояние S вдоль наклонной плоскости работу совершают только сила $\vec{F}$: $A(\vec{F}) = F \cos 30^\circ S$ и сила тяжести:

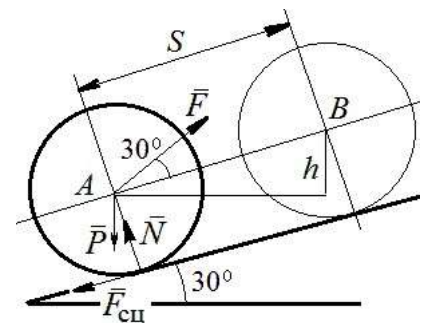


Рис. 5.12. Расчётная схема движения катка

$A(\vec{P}) = -Ph$, где h – перепад высот при перемещении центра масс катка. Работа реакции опоры и силы сцепления равна нулю.

Кинетическая энергия катка $T = \frac{1}{2} m V_A^2 + \frac{1}{2} J_{zA} \omega^2$, где J_{zA} – момент инерции фигуры относительно оси z , проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости диска, $J_{zA} = \frac{mr^2}{2}$. Выражая угловую скорость катка через

скорость центра масс $\omega = \frac{V_A}{r}$, с учётом выражения момента инерции катка, по-

лучим энергию катка в виде: $T = \frac{3}{4} m V_A^2$.

Составим уравнение теоремы об изменении кинетической энергии при перемещении центра катка на расстояние S : $\frac{3}{4} m V_B^2 - \frac{3}{4} m V_A^2 = F \cos 30^\circ S - Ph$, где $V_A = V_0$, $V_B = 2V_0$, $F = 2P$, $h = S \sin 30^\circ$.

$$\text{Найдём искомое перемещение: } S = \frac{9V_0^2}{4g(2\cos 30^\circ - \sin 30^\circ)}.$$

Упражнения

Упражнение 5.1. Крановая тележка массы m_1 может перемещаться по горизонтальной балке без трения (рис. 5.13). В центре масс тележки закреплён трос длиной l , на другом конце которого привязан груз массы m_2 . Трос может совершать колебательные движения в вертикальной плоскости. В начальный момент трос был в вертикальном положении. Определить горизонтальное перемещение тележки в зависимости от угла наклона троса. Весом троса пренебречь.

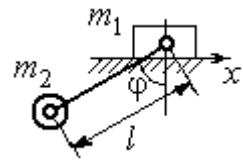


Рис. 5.13. Движение крановой тележки

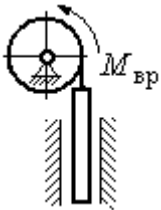


Рис. 5.14. Схема механизма лебёдки

Упражнение 5.2. К барабану лебёдки, поднимающей штангу, приложен вращающий момент, пропорциональный времени $M_{вр} = kt$ (рис. 5.14). Штанга массы m_1 поднимается посредством каната, навитого на барабан массы m_2 и радиуса r . В начальный момент система находилась в покое. Определить угловую скорость барабана, считая его однородным диском.

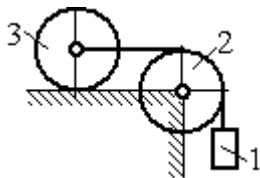


Рис. 5.15. Схема движения системы
приложен момент M .

Упражнение 5.3. Груз 1 массы m_1 подвешен на нерастяжимом тросе, другой конец которого переброшен через блок 2 и закреплён в центре масс катка 3 (рис. 5.15). Каток 3 катится по горизонтальной поверхности без проскальзывания. Блок 2 и каток 3 – однородные диски массы m_2 и m_3 , радиуса r . В начальный момент система находилась в покое. Определить скорость груза, когда он опустится на высоту h , если к катку 3 приложен момент M .

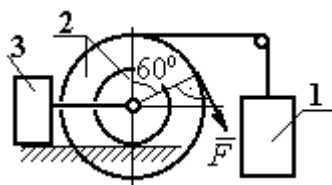


Рис. 5.16. Схема механизма катка

Упражнение 5.4. Механическая система включает два груза 1 и 3 одинакового веса P и каток 2 весом $2P$, радиусом $R = 2r$ с цилиндрическим выступом радиусом r (рис. 5.16). Каток катится выступом по неподвижной поверхности без проскальзывания. К катку по касательной к окружности приложена сила $F = 2P$. Найти ускорение центра масс катка, если его радиус инерции относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно

плоскости движения: $i_{zC} = r\sqrt{2}$.

5.4. Применение общих теорем динамики системы к описанию движений твёрдого тела

Поступательное движение твёрдого тела описывается дифференциальными уравнениями: $m\ddot{x} = \sum F_{kx}^e$, $m\ddot{y} = \sum F_{ky}^e$, $m\ddot{z} = \sum F_{kz}^e$ - или в алгебраической форме $ma_{Cx} = \sum F_{kx}^e$, $ma_{Cy} = \sum F_{ky}^e$, $ma_{Cz} = \sum F_{kz}^e$, где m – масса тела; $\ddot{x} = a_{Cx}$, $\ddot{y} = a_{Cy}$, $\ddot{z} = a_{Cz}$ – проекции ускорения центра масс тела на координатные оси; F_{kx}^e , F_{ky}^e , F_{kz}^e – проекции внешних сил.

Вращательное движение твёрдого тела относительно неподвижной оси z описывается дифференциальным уравнением: $J_z \frac{d\omega}{dt} = \sum M_z(\vec{F}_k^e)$ или алгебраическим уравнением: $J_z \varepsilon = \sum M_z(\vec{F}_k^e)$, где ω , ε – угловая скорость и угловое ускорение тела; $\sum M_z(\vec{F}_k^e)$ – сумма моментов внешних сил относительно оси z ; J_z – момент инерции тела относительно оси z .

Плоскопараллельное движение твёрдого тела описывается уравнениями движения центра масс и вращательного движения тела относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения.

В проекции на координатные оси уравнения плоскопараллельного движения тела имеют вид:

$$ma_{Cx} = \sum F_{kx}^e; ma_{Cy} = \sum F_{ky}^e; J_{zC}\varepsilon = \sum M_{zC}(\vec{F}_k^e),$$

где a_{Cx} , a_{Cy} – проекции ускорения центра масс тела; F_{kx}^e , F_{ky}^e – проекции на оси координат внешних сил, действующих на тело; J_{zC} – момент инерции тела относительно оси z , проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения; ε – угловое ускорение тела; $M_{zC}(\vec{F}_k^e)$ – моменты внешних сил относительно оси, проходящей через центр масс.

Проводя динамический расчет механической системы, следует рассматривать движение каждого тела системы в отдельности, предварительно освободив его от связей и заменив их действие реакциями.

Примеры решения задач на составление уравнений движения твердых тел

Задача 59. Лебёдка поднимает груз 1 массы $m_1 = 50$ кг посредством троса, переброшенного через блок 3 и навитого на барабан 2 массы $m_2 = 20$ кг, радиуса $r = 0,8$ м (рис. 5.17). К барабану приложен постоянный вращающий момент $M_{вр} = 480$ Н·м. Определить ускорение груза, натяжение троса и реакцию шарнира барабана 2. Весом троса и массой блока 3 пренебречь, барабан считать сплошным цилиндром.

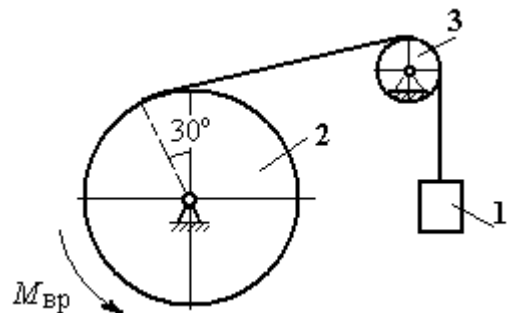


Рис. 5.17. Механизм лебёдки

Решение

Составим уравнение движения груза 1. Для этого освобождаем груз от связей, заменив действие троса реакцией. На груз действует сила тяжести $\vec{P}_1$ и реакция троса $\vec{H}_1$ (рис. 5.18). Выберем ось x по направлению движения груза. Уравнение движения груза в проекции на ось x : $m_1 a_1 = H_1 - P_1$.

Рассмотрим движение барабана 2. Освободим барабан от связей и заменим их действие реакциями.

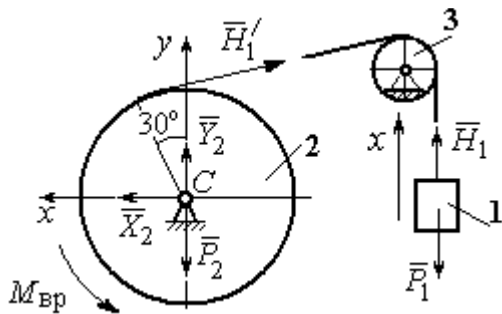


Рис. 5.18. Внешние силы и реакции, действующие на груз и барабан при движении системы

На барабан действует сила тяжести $\vec{P}_2$, пара сил с моментом вращения $M_{вр}$, реакция троса $\vec{H}_1'$ и реакция шарнира (на рис. 5.18 разложена на составляющие $\vec{X}_2$, $\vec{Y}_2$). Так как массой блока 3 пренебрегаем, то модули сил $\vec{H}_1$ и $\vec{H}_1'$ равны. Направления действия сил и момента показаны на рис. 5.18.

Уравнение вращательного движения барабана относительно оси z :

$$J_z \varepsilon_2 = \sum M_z(F_k) = M_{вр} - H_1' r, \text{ где момент инерции барабана } J_z = \frac{m_2 r^2}{2}.$$

Продифференцируем по времени равенство $V_1 = \omega_2 r$ и выразим угловое ускорение барабана через ускорение груза 1. Получим $\varepsilon_2 = \frac{a_1}{r}$. Подставляя выражение углового ускорения в уравнение вращательного движения барабана с учётом равенства модулей сил $\vec{H}_1$ и $\vec{H}_1'$, напомним уравнения движения барабана и груза в виде системы уравнений:

$$m_1 a_1 = H_1 - P_1, \quad m_2 a_1 = \frac{2M_{вр}}{r} - 2H_1,$$

откуда находим $a_1 = 1,82 \text{ м/с}^2$, $H_1 = 581,8 \text{ Н}$. Натяжение троса численно равно реакции.

Для определения реакции шарнира составим (формально) уравнение движения центра масс блока 2 в проекциях на оси x, y (см. рис. 5.18):

$$m_2 a_{Cx} = X_2 - H_1' \cos 30^\circ = 0, \quad m_2 a_{Cy} = Y_2 + H_1' \cos 60^\circ - P_2 = 0.$$

Отсюда $X_2 = 503,84 \text{ Н}$, $Y_2 = -94,7 \text{ Н}$, $R_2 = \sqrt{X_2^2 + Y_2^2} = 512,66 \text{ Н}$.

Задача 60. Барабан весом G , радиусом R имеет цилиндрический выступ радиусом r (рис. 5.19). Барабан скатывается по наклонной плоскости с углом наклона 30° , опираясь на неё поверхностью выступа. К барабану приложены постоянные силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$. Сила $\vec{F}_1$ направлена по касательной к поверхности барабана. Сила $\vec{F}_2$ действует под углом 30° к диаметру барабана, перпендикулярному наклонной плоскости. В начальный момент времени барабан приведён в равновесие парой сил с моментом M .

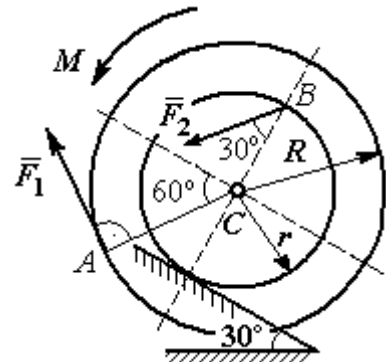


Рис. 5.19. Схема движения барабана по наклонной плоскости

Определить угловое ускорение барабана и закон движения центра масс, если в положении равновесия величину уравнивающего момента увеличить в 1,2 раза. Исходные данные для решения задачи: $R = 0,6 \text{ м}$, $r = 0,2 \text{ м}$, $G = 100 \text{ Н}$, $F_1 = 60 \text{ Н}$, $F_2 = 25 \text{ Н}$, радиус инерции барабана $i_z = 0,4 \text{ м}$.

Решение

На барабан действуют силы $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, сила тяжести $\vec{G}$, пара сил с неизвестным моментом M , нормальная реакция опоры $\vec{N}$ и сила $\vec{F}_{\text{сц}}$ сцепления барабана с поверхностью.

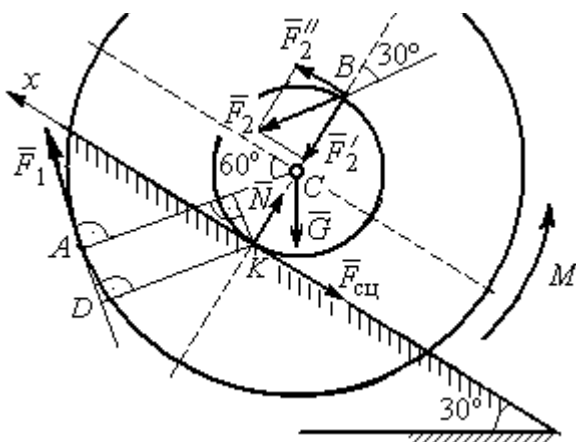


Рис. 5.20. Силы, действующие на барабан, во время движения

Сила сцепления приложена в точке K касания выступа барабана с наклонной плоскостью и направлена вдоль неё (рис. 5.20).

Для определения момента M , приводящего барабан в равновесие, запишем уравнение равно-

весия в виде равенства нулю моментов сил $\sum M_K(\vec{F}_k^e) = 0$ относительно точки K . Точка K выбрана с той целью, что в уравнение не будет входить момент неизвестной силы сцепления.

На рис. 5.20 показано разложение силы $\vec{F}_2$: $\vec{F}_2 = \vec{F}_2' + \vec{F}_2''$. Значения составляющих определяются как проекции: $F_2' = F_2 \cos 30^\circ$, $F_2'' = F_2 \sin 30^\circ$.

Применяя теорему Вариньона, вычислим момент силы $\vec{F}_2$ относительно точки K : $M_K(\vec{F}_2) = M_K(\vec{F}_2') + M_K(\vec{F}_2'') = F_2 \sin 30^\circ \cdot 2r$.

Момент силы $\vec{F}_1$ относительно точки K :

$$M_K(\vec{F}_1) = -F_1 \cdot KD = -F_1(R - r \cos 30^\circ).$$

В результате уравнение моментов сил при равновесии барабана принимает вид

$$\sum M_K(\vec{F}_k^e) = -F_1(R - r \cos 30^\circ) + F_2 \sin 30^\circ \cdot 2r - Gr \sin 30^\circ + M = 0.$$

Подставляя сюда исходные данные задачи, находим величину удерживающего момента $M = 30,61$ Н·м. Направление момента показано дуговой стрелкой на рис. 5.20.

Увеличим значение момента M , удерживающего барабан в равновесии, в 1,2 раза: $M_1 = 1,2M$. Возникшее после этого качение барабана вверх по наклонной плоскости представляет собой плоскопараллельное движение, которое описывается с применением теорем о движении центра масс и об изменении кинетического момента.

Уравнение движения центра масс барабана в проекции на ось x , направленную вверх по наклонной плоскости, имеет вид:

$$m\ddot{x}_C = F_1 \cos 30^\circ + F_2 \cos 60^\circ - G \cos 60^\circ - F_{\text{сц}},$$

где x_C – координата центра масс барабана.

Применив теорему об изменении кинетического момента барабана относительно оси z , проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости

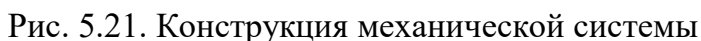
$$J_{zC}\ddot{\varphi} = -F_1 R + F_2 r \cos 60^\circ + F_{\text{сц}} r + M_1,$$

где φ – угол поворота барабана; J_{zC} – момент инерции барабана, $J_{zC} = m i_z^2$;

i_z – радиус инерции. С учётом соотношения $\ddot{\varphi} = \frac{\ddot{x}_C}{r}$ получим уравнение:

После подстановки данных задачи находим дифференциальное уравнение движения центра масс: $\ddot{x}_C = 0,6$. Дважды интегрируя его с нулевыми начальными условиями (так как движение началось из состояния покоя), находим закон движения центра масс: $x_C = 0,3t^2$ м. Из уравнения следует, что барабан движется в сторону положительного направления оси x .

Задача 61. Механизм (рис. 5.21) включает в себя груз 1, каток 2 и ступенчатый барабан 3, соединённых нерастяжимыми нитями. Движение механизма происходит из состояния покоя в вертикальной плоскости под действием сил тяжести $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$, силы



$\vec{F}$, приложенной в центре масс катка 2, и пары сил с моментом M , приложенной к барабану 3. Качение катка 2 по наклонной плоскости с углом наклона к горизонту 30° происходит без проскальзывания.

Каток 2 считать однородным диском радиуса R_2 . Радиусы ступеней барабана 3: R_3 , r_3 , радиус инерции барабана i_3 .

Найти ускорение груза 1, силы натяжения нитей и динамическую реакцию шарнира барабана 3, если $P_1 = P_2 = 2P$; $P_3 = 3P$, $F = 3P$; $M = Pr$, $R_2 = 2r$; $R_3 = 3r$; $r_3 = r$; $i_3 = r\sqrt{3}$.

Решение

Рассмотрим движение каждого тела системы отдельно, предварительно освободив тела от связей и заменив их действие реакциями. На рис. 5.22 изображены силы, действующие на тела системы, после освобождения их от связей и направление движения каждого тела.

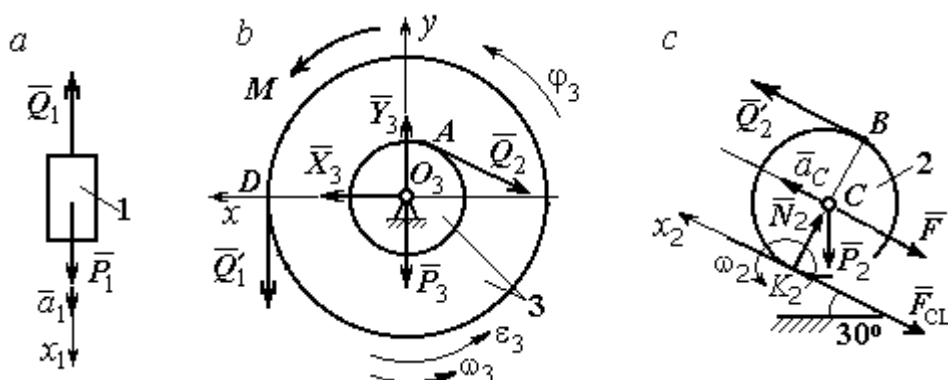


Рис. 5.22. Расчетные схемы для описания движения тел, входящих в систему

Допустим, груз движется вниз со скоростью V_1 , ускорением a_1 . К нему приложена сила тяжести $\vec{P}_1$ и реакция нити $\vec{Q}_1$ (рис. 5.22, а). Направим ось x_1 в сторону движения груза. Уравнение движения груза вдоль оси x_1 имеет вид:

$$m_1 a_1 = \sum F_{kx} = P_1 - Q_1 = 2P - Q_1.$$

Барабан 3 вращается вокруг неподвижной оси z , проходящей через центр масс O_3 . На диск 3 действует сила тяжести $\vec{P}_3$, реакция подшипника $\vec{R}_3$ (на

рис. 5.22, *b* показано разложение реакции на составляющие $\vec{X}_3, \vec{Y}_3$), пара сил с моментом M и реакции нитей $\vec{Q}'_1$ и $\vec{Q}_2$.

При составлении уравнения вращательного движения барабана моменты сил относительно оси считаем положительными, если они создают поворот в сторону вращения барабана. Уравнение вращения барабана 3 имеет вид:

$$J_{zO_3} \varepsilon_3 = \sum M_{zO_3} (F_k) = Q'_1 R_3 + M - Q_2 r_3 = Q'_1 3r + Pr - Q_2 r,$$

Момент инерции барабана относительно оси z : $J_{zO_3} = m_3 i_3^2 = \frac{9Pr^2}{g}$;

Каток 2 совершает плоскопараллельное движение. К нему приложена сила тяжести $\vec{P}_2$, сила $\vec{F}$, реакция нити $\vec{Q}'_2$, нормальная реакция $\vec{N}_2$ наклонной плоскости и сила $\vec{F}_{\text{сц}}$ сцепления диска с поверхностью (рис. 5.22, *c*).

Выберем ось x_2 по направлению движения центра масс катка 2. Плоскопараллельное движение катка описывается уравнениями движения его центра масс в проекции на ось x_2 и вращения вокруг оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости диска:

$$m_2 a_C = Q'_2 - F - F_{\text{сц}} - P_2 \cos 60^\circ = Q'_2 - 3P - F_{\text{сц}} - P;$$

$$J_C \varepsilon_2 = Q'_2 R_2 + F_{\text{сц}} R_2 = Q'_2 2r + F_{\text{сц}} 2r, \quad J_C = \frac{m_2 R_2^2}{2}.$$

При составлении второго уравнения момент силы считается положительным, если он создаёт поворот в сторону вращения катка.

К системе четырех уравнений, описывающих движения тел в системе, необходимо добавить уравнения связей между ускорениями точек и угловыми ускорениями тел. Предположим, скорость центра масс катка 2 равна V_C (см.

рис. 5.22, *c*). Угловая скорость катка $\omega_2 = \frac{V_C}{CK_2} = \frac{V_C}{R_2}$, где CK_2 – расстояние от

центра масс катка 2 до его мгновенного центра скоростей. Продифференцировав по времени последнее равенство, получим: $\varepsilon_2 = \dot{\omega}_2 = \frac{\dot{V}_C}{R_2} = \frac{a_C}{2r}$.

Скорость точки B катка 2 $V_B = \omega_2 \cdot BK_2 = 2V_C$. Приравняв скорость точки A к скорости точки B (см. рис. 5.21), получим: $2V_C = V_B = V_A = \omega_3 r_3 = \omega_3 r$, откуда $\omega_3 = \frac{2V_C}{r}$. После дифференцирования найдём: $\varepsilon_3 = \frac{2a_C}{r}$.

Скорость груза 1 связана со скоростью центра масс катка 2 следующим образом: $V_1 = V_D = \omega_3 R_3 = \frac{2V_C}{r} 3r = 6V_C$. Тогда ускорение груза 1 $a_1 = 6a_C$.

После подстановки уравнений связи в уравнения движения с учётом равенства модулей сил $\vec{Q}'_1$ и $\vec{Q}_1$, а также $\vec{Q}_2$ и $\vec{Q}'_2$ получим систему:

$$\begin{aligned} \frac{12P}{g} a_C &= 2P - Q_1; & \frac{18P}{g} a_C &= 3Q_1 + P - Q_2, \\ \frac{2P}{g} a_C &= Q_2 - 4P - F_{\text{сц}}; & \frac{P}{g} a_C &= Q_2 + F_{\text{сц}}, \end{aligned}$$

откуда находим: $a_C = 0,09g$, $Q_1 = 0,92P$, $Q_2 = 2,14P$.

Динамические реакции $\vec{X}_3$, $\vec{Y}_3$, действующие на ось вращающегося барабана 3 (рис. 5.22, b), определяются из уравнений, которые можно получить, формально применив к барабану теорему о движении центра масс. Так как центр масс барабана 3 неподвижен, его ускорение равно нулю, $a_{O_3} = 0$. Тогда уравнения движения его центра масс в проекциях на оси x , y имеют вид:

$$m_3 a_{O_3 x} = X_3 - Q_2 \cos 30^\circ = 0;$$

$$m_3 a_{O_3 y} = Y_3 - Q_1 - P_3 - Q_2 \cos 60^\circ = 0.$$

Подставляя значения $Q_1 = 0,92P$ и $Q_2 = 2,14P$, находим составляющие реакции оси барабана 3: $X_3 = Q_2 \cos 30^\circ = 1,85P$, $Y_3 = Q_1 + P_3 + Q_2 \cos 60^\circ = 4,98P$.

Полная величина реакции оси барабана 3: $R_3 = \sqrt{X_3^2 + Y_3^2} = 5,31P$.

Задача 62. Подъёмное устройство (рис. 5.23) состоит из однородного диска 1 массой m_1 , радиусом r_1 , ступенчатого диска 2 массой $m_2 = 3m_1$, радиусом $R_2 = 4r_1$ и радиусом ступеньки $r_2 = r_1$ и груза 3 массой $m_3 = 2m_1$. Система движется из состояния покоя в вертикальной плоскости под действием сил тяжести и пары сил с моментом $M = m_1gr_1$, приложенной к диску 1. Определить ускорение груза 3 и натяжение нити груза 3, если радиус инерции ступенчатого диска относительно оси, проходящей через центр масс, перпендикулярно плоскости диска 2, $i_{2C} = 2r_1$.

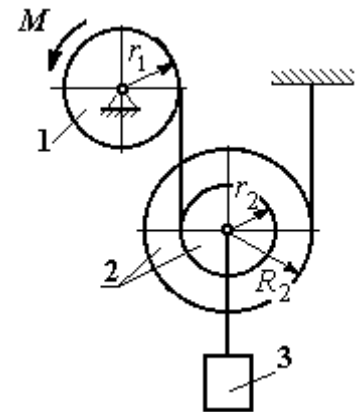


Рис. 5.23. Конструкция подъёмного устройства

Решение задачи осуществить с применением теоремы об изменении кинетической энергии системы и проверить его методом динамического расчёта, составляя уравнения движения тел, входящих в систему.

Решение

1. Для неизменяемой системы (состоящей из абсолютно твёрдых тел, соединённых нерастяжимыми нитями), движущейся из состояния покоя, теорема об изменении кинетической энергии на конечном перемещении имеет вид $T = \sum A(\vec{F}_k^e)$. Схема движения механизма в предположении, что груз 3 опускается, показана на рис. 5.24.

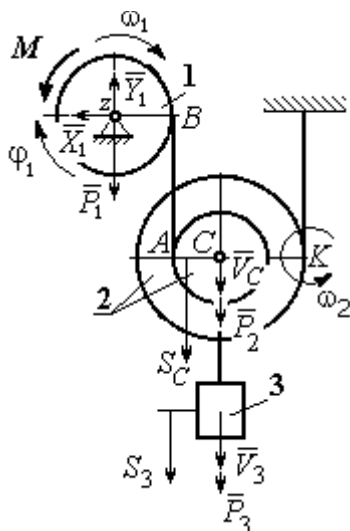


Рис. 5.24. Схема движения механизма

Диск 1 вращается вокруг неподвижной оси z . Кинетическая энергия диска 1: $T_1 = \frac{J_{1z}\omega_1^2}{2}$, где момент инерции диска $J_{1z} = \frac{m_1r_1^2}{2}$.

Диск 2 вращается вокруг неподвижной оси z . Кинетическая энергия диска 2: $T_2 = \frac{J_{2C}\omega_2^2}{2}$, где момент инерции диска $J_{2C} = \frac{m_2R_2^2}{2} + m_2i_{2C}^2$.

Кинетическая энергия груза 3: $T_3 = \frac{m_3v_3^2}{2}$.

Работа сил тяжести: $A(P_1) = 0$, $A(P_2) = -m_2g\psi_2$, $A(P_3) = m_3gs_3$.

У диска 2 плоскопараллельное движение. Кинетическая энергия диска 2:

$T_2 = \frac{m_2 V_C^2}{2} + \frac{J_{2C} \omega_2^2}{2}$, где V_C – скорость центра масс диска 2. Момент инерции диска 2 относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно движению диска, $J_{2C} = m_2 i_{2C}^2$.

Кинетическая энергия груза 3: $T_3 = \frac{m_3 V_3^2}{2}$.

Энергия механизма равна сумме энергий тел, входящих в систему:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 = \frac{J_{1z} \omega_1^2}{2} + \frac{m_2 V_C^2}{2} + \frac{J_{2C} \omega_2^2}{2} + \frac{m_3 V_3^2}{2}.$$

Выразим угловые скорости дисков 1 и 2 и скорость центра масс диска 2 через скорость груза 3.

Скорость центра масс диска 2 равна скорости груза 3, $V_C = V_3$. Угловая скорость диска 2 $\omega_2 = \frac{V_C}{CK} = \frac{V_3}{R_2}$, где CK – расстояние от центра диска 2 до его мгновенного центра скоростей.

Скорость точки B нити равна скорости точки A . Из равенства $\omega_1 r_1 = \omega_2 (R_2 + r_2)$ найдём: $\omega_1 = \frac{(r_2 + R_2)}{r_1} \omega_2 = \frac{(r_2 + R_2)}{r_1} \frac{V_3}{R_2}$.

Подставляя найденные зависимости в выражение энергии системы, получим кинетическую энергию механизма:

$$T = \frac{V_3^2}{2} \left[\frac{m_1}{2} \left(1 + \frac{r_2}{R_2} \right)^2 + m_2 \left(1 + \frac{i_{2C}^2}{R_2^2} \right) + m_3 \right] = \frac{209}{64} m_1 V_3^2.$$

Во время движения механизма работу совершают силы тяжести $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$ и пара сил с моментом M . Перемещения S_C и S_3 точек приложения сил $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$ и угол φ_1 поворота диска 1 показаны на рис. 5.24.

Сумма работ сил $\sum A(\vec{F}_k^e) = P_3 S_3 + P_2 S_C - M\varphi_1$. Работа момента отрицательная, так как заданное направление момента противоположно выбранному направлению вращения колеса 1.

Выразим перемещение центра масс диска 2 и угол поворота диска 1 через перемещение груза 3. Проинтегрировав равенство скоростей $V_3 = V_C$, получим равенство перемещений: $S_3 = S_C$. Аналогично, из равенства $\omega_1 = \frac{(r_2 + R_2)}{r_1} \frac{V_3}{R_2}$

следует соотношение $\varphi_1 = \frac{(r_2 + R_2)}{r_1} \frac{S_3}{R_2}$.

В итоге суммарная работа внешних сил в механизме:

$$\sum A(\vec{F}_k^e) = \left[P_3 + P_2 - M \frac{(r_2 + R_2)}{r_1 R_2} \right] S_3 = \frac{15}{4} m_1 g S_3.$$

Составляя уравнение теоремы об изменении кинетической энергии системы, получим равенство:

$$\frac{209}{64} m_1 V_3^2 = \frac{15}{4} m_1 g S_3 \text{ или } V_3^2 = \frac{240}{209} g S_3.$$

Продифференцируем последнее равенство. Получим: $2V_3 \frac{dV_3}{dt} = \frac{240}{209} g \frac{dS_3}{dt}$.

Так как $\frac{dS_3}{dt} = V_3$, а $\frac{dV_3}{dt} = a_3$, находим ускорение груза 3: $a_3 = \frac{120}{209} g \text{ м/с}^2$.

Для того чтобы найти натяжение нити груза 3, необходимо написать уравнение его движения. Выделим груз 3 из системы, заменив действие нити её реакцией H_3 . Выберем ось x по направлению движения груза. Применим к описанию движения груза теорему о движении центра масс, написав её проекцию на ось x : $m_3 a_3 = P_3 - H_3$, где H_3 – реакция нити. При известном ускорении a_3 находим реакцию нити $H_3 = \frac{178}{209} m_1 g$. Натяжение нити численно равно реакции, но направлено в противоположную сторону.

2. Для решения задачи вторым способом – путём составления уравнений движения тел, входящих в состав механизма, освободим тела от связей и заменим их реакциями. На рис. 5.25 изображены силы и реакции, действующие на

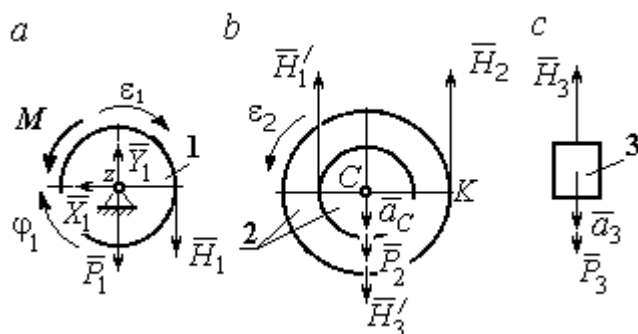


Рис. 5.25. Внешние силы и реакции связей, действующие на тела системы

каждое тело, после освобождения его от связей, а также направления угловых ускорений тел и ускорения центров масс.

Диск 1 вращается вокруг неподвижной оси z. На диск действует сила тяжести $\vec{P}_1$, реакция

подшипника $\vec{X}_1$, $\vec{Y}_1$, пара сил с моментом M и реакция нити $\vec{H}_1$. Вращение диска описывается уравнением: $J_{1z}\varepsilon_1 = \sum M_z(F_k) = H_1 r_1 - M$. Момент инерции

диска 1 относительно оси z, $J_{1z} = \frac{m_1 r_1^2}{2}$.

Диск 2 (рис. 5.25, b) совершает плоскопараллельное движение. К нему приложена сила тяжести $\vec{P}_2$ и реакции нитей $\vec{H}_1'$, $\vec{H}_2$ и $\vec{H}_3'$. Плоскопараллельное движение диска 2 описывается уравнением движения его центра масс в проекции на вертикальную ось и уравнением вращения диска вокруг оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости диска:

$$m_2 a_C = P_2 - H_1' - H_2 + H_3'; \quad J_{2C} \varepsilon_2 = H_2 R_2 - H_1' r_2.$$

Момент инерции диска 2 $J_{2C} = m_2 i_{2C}^2$. При составлении уравнения вращательного движения диска 2 момент силы считается положительным, если он создаёт поворот в сторону вращения диска.

Груз 3 совершает поступательное движение. К нему приложены сила тяжести $\vec{P}_3$ и реакция нити $\vec{H}_3$ (рис. 5.25, c). Уравнение движения груза 3 в проекции на вертикальную ось, направленную в сторону его движения, имеет вид:

$$m_3 a_3 = P_3 - H_3,$$

Выразим угловые ускорения дисков 1 и 2 и ускорение центра масс диска 2 через ускорение груза 3. Для этого нужно продифференцировать соответствующие кинематические соотношения между скоростями. Так, из найденных

ранее выражений: $V_3 = V_C$, $\omega_2 = \frac{V_3}{R_2}$, $\omega_1 = \frac{(r_2 + R_2)}{r_1} \frac{V_3}{R_2}$ следует: $a_3 = a_C$,

$$\varepsilon_2 = \frac{a_3}{R_2}, \quad \varepsilon_1 = \frac{(r_2 + R_2)}{r_1} \frac{a_3}{R_2}.$$

Подставляя кинематические соотношения между ускорениями в уравнения движения тел с учётом равенства модулей сил $\vec{H}_1$ и $\vec{H}'_1$, а также $\vec{H}_3$ и $\vec{H}'_3$, получим систему уравнений, описывающих движение звеньев механизма:

$$\frac{5}{8} m_1 a_3 = H_1 - m_1 g; \quad 3m_1 a_3 = 3m_1 g - H_1 - H_2 + H_3;$$

$$3m_1 a_3 = 4H_2 - H_1; \quad 2m_1 a_3 = 2m_1 g - H_3.$$

Решая систему, найдём $a_3 = \frac{120}{209} g$ м/с², $H_3 = \frac{178}{209} m_1 g$. Выражения ускорения a_3 груза 3 и натяжения нити H_3 совпадают с аналогичными выражениями, полученными в пункте 1 при решении данной задачи с применением теоремы об изменении кинетической энергии.

Упражнения

Упражнение 5.5. Система состоит из двух катков 1 и 2, соединённых невесомым стержнем (рис. 5.26). Каток 1 весом P , радиуса r . Каток 2 весом $2P$, радиуса $3r$ имеет цилиндрический выступ радиуса r . Невесомый стержень, параллельный плоскости качения катков, закреплён в центре катка 1 и передаёт движение катка 1 катку 2 в верхней точке вертикального диаметра цилиндрического выступа без проскальзывания. Качение катков без скольжения. К катку 1 приложена пара сил с моментом $M = 4Pr$. В центре масс катка 2 приложена сила $F = 2P$. Радиус инерции катка 2 относительно оси, проходящей через центр катка перпендикулярно плоскости движения, $i_2 = r\sqrt{2}$. Найти ускорение центра масс катка 1 и реакцию стержня.

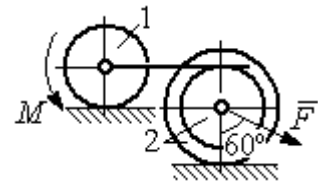


Рис. 5.26. Система катков

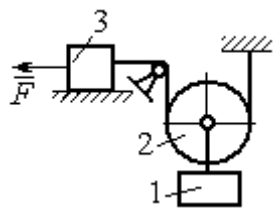


Рис. 5.27. Подъёмное устройство

Упражнение 5.6. С помощью подъёмного устройства (рис. 5.27) производится подъём груза 1. Нить, закреплённая одним концом на неподвижной поверхности, спускается, охватывает снизу блок 2 массы $m_2 = m$, радиуса r , затем поднимается и проходит параллельно горизонтальной плоскости, где к концу её привязан груз 3 массы $m_3 = m$, передвигающийся по плоскости под действием силы $F = 2,5mg$. Нити, удерживающие блок 2, вертикальны. Груз 1 массы $m_1 = 3m$ прикреп-

лён к оси блока 2. Найти ускорение груза 1 и натяжения нитей, удерживающих блок 2.

Упражнение 5.7. Груз 1 массы $m_1 = m$, спускается вниз по наклонной плоскости без трения (рис. 5.28). Нить, прикреплённая к грузу 1, другим своим концом намотана на барабан катка 2 радиуса $R = 2r$ и при движении груза заставляет барабан катиться по горизонтальной поверхности цилиндрическим выступом радиуса r . Качение происходит без проскальзывания. К центру катка привязана другая нить, посредством которой каток тащит за собой груз 3 массы $m_3 = 2m$, скользящий по горизонтальной поверхности без трения. Масса катка $m_2 = 3m$, радиус инерции катка относительно оси, проходящей через его центр масс перпендикулярно плоскости движения $i_2 = r\sqrt{3}$. По касательной к ободу катка 2 приложена сила $F = mg$ (точка приложения силы см. рис. 5.28). Определить ускорение груза 1 и натяжения нитей.

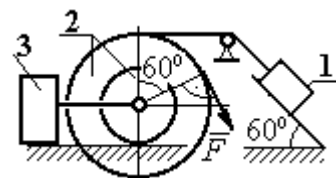


Рис. 5.28. Схема движения механической системы

6. ПРИНЦИПЫ МЕХАНИКИ

6.1. Принцип Даламбера для системы

Силой инерции материальной точки называют векторную величину, модуль которой равен произведению массы точки на модуль её ускорения. Направлен вектор силы инерции точки в сторону, противоположную ускорению $\vec{R}^{\text{и}} = -m\vec{a}$, где m – масса точки; $\vec{a}$ – вектор ускорения точки.

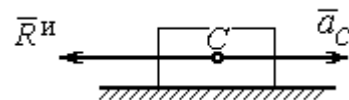


Рис. 6.1. Главный вектор сил инерции при поступательном движении твердого тела

При поступательном движении тела с ускорением центра масс $\vec{a}_C$ главный вектор сил инерции $\vec{R}^{\text{и}}$ по модулю $R^{\text{и}} = ma_C$, приложен в центре масс тела и направлен в сторону, противоположную ускорению $\vec{a}_C$ (рис. 6.1).

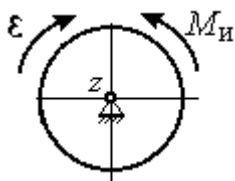


Рис. 6.2. Главный момент сил инерции при вращении тела вокруг оси, проходящей через центр масс

При вращении тела вокруг неподвижной оси z , проходящей через центр масс, главный вектор сил инерции обращается в нуль. Главный момент $\vec{M}^{\text{и}}$, сил инерции относительно оси вращения равен по величине $M^{\text{и}} = J_z \epsilon$, где J_z – момент инерции тела относительно оси z ; ϵ – угловое ускорение тела. Направлен главный момент сил инерции в сторону, противоположную угловому ускорению (рис. 6.2).

При плоскопараллельном движении тела с ускорением центра масс $\vec{a}_C$ и угловым ускорением ϵ главный вектор сил инерции $\vec{R}^{\text{и}}$ равен по модулю $R^{\text{и}} = ma_C$, приложен в центре масс тела и направлен в сторону, противоположную ускорению центра масс $\vec{a}_C$ (рис. 6.3). Главный момент сил инерции $\vec{M}^{\text{и}}$ относи-

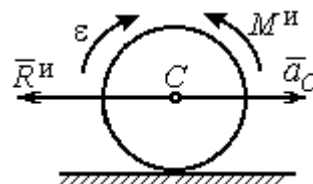


Рис. 6.3. Главный вектор и главный момент сил инерции при плоскопараллельном движении твердого тела

тельно оси, проходящей через центр масс тела перпендикулярно плоскости движения: $M^{\text{и}} = J_C \varepsilon$, где J_C – момент инерции тела относительно оси вращения, и направлен в сторону, противоположную угловому ускорению.

Если в любой момент времени к каждой из точек системы кроме действующих на нее внешних сил присоединить соответствующие силы инерции, то полученная система сил будет уравновешенной.

Принцип Даламбера даёт возможность составлять уравнения движения механической системы в виде уравнений равновесия (метод кинетостатики):

$$\sum \vec{F}_k^e + \vec{R}^{\text{и}} = 0, \quad \sum \vec{M}_O(\vec{F}_k^e) + \vec{M}_O^{\text{и}} = 0,$$

где $\vec{F}_k^e$ – внешние силы, действующие на систему; $\vec{R}^{\text{и}}$ – главный вектор сил инерции; $\vec{M}_O(\vec{F}_k^e)$, $\vec{M}_O^{\text{и}}$ – моменты внешних сил и главный момент сил инерции относительно произвольного центра O .

Примеры решения задач на применение принципа Даламбера

Задача 63. Груз 1 массы $m_1 = 10$ кг спускается вниз по наклонной грани клина, образующей угол 60° с горизонтом, и посредством нити, переброшенной

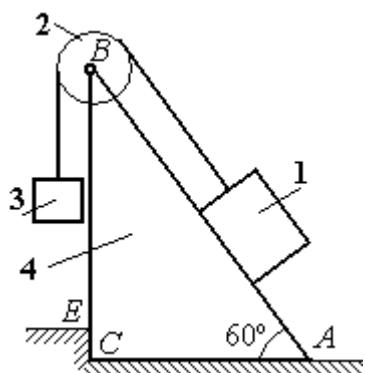


Рис. 6.4. Клин с грузами

через блок 2, укрепленный в верхней точке клина, приводит в движение груз 3 массы $m_3 = 5$ кг (рис. 6.4). Клин ABC массы $m_4 = 15$ кг стоит гранью AC на горизонтальной гладкой поверхности и упирается в выступ E .

Найти давление клина на выступ. Массой блока 2 и нити пренебречь.

Решение

Выберем систему, состоящую из клина ABC , блока 2, грузов 1 и 3 и нити, соединяющей грузы. Внешние силы, действующие на систему, – силы тяжести $\vec{P}_1$, $\vec{P}_3$ и $\vec{P}_4$ грузов 1, 3 и клина 4, горизонтальная реакция $\vec{R}_x$ упора клина в вы-

ступ и вертикальная реакция $\vec{R}_y$ опоры на горизонтальную поверхность. Реакция нити, реакция опоры груза 1 на наклонную поверхность клина и реакция шарнира B блока 2 для данной системы являются внутренними.

Допустим, груз 1 движется вниз, груз 3 – вверх. Приложим силы инерции. Направления ускорений грузов и сил инерции показаны на рис. 6.5.

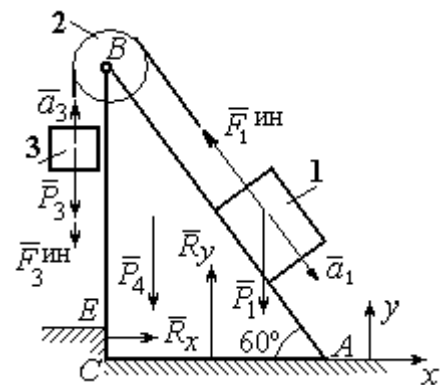


Рис. 6.5. Внешние силы и силы инерции, действующие на систему

В соответствии с принципом Даламбера, полученная система сил находится в равновесии. Условие равновесия: $\sum \vec{F}_k^e + \vec{F}_1^{\text{ин}} + \vec{F}_3^{\text{ин}} = 0$.

Выберем оси xu , как показано на рис. 6.5, и спроектируем векторное равенство на ось x . Получим: $R_x - F_1^{\text{ин}} \cos 60^\circ = 0$, где модуль силы инерции $F_1^{\text{ин}} = m_1 a_1$.

Найдём ускорение груза 1. С этой целью рассмотрим отдельно движение грузов 1 и 3 (рис. 6.6 *a, b*).

Рассматривая груз 1 как отдельную систему, изобразим внешние силы:

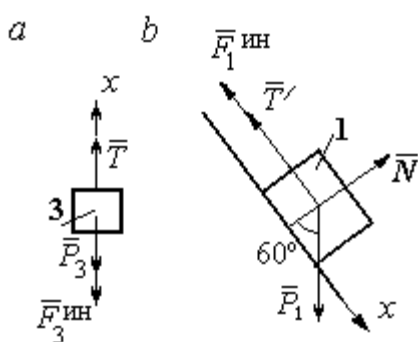


Рис. 6.6. Равновесие грузов

силу тяжести $\vec{P}_1$, реакцию нити $\vec{T}'$ и реакцию опоры $\vec{N}$ (см. рис. 6.6, *b*). Присоединим силу инерции $\vec{F}_1^{\text{ин}}$ и составим уравнение равновесия полученной системы сил в проекции на ось x , расположенную вдоль наклонной грани клина: $P_1 \sin 60^\circ - T' - F_1^{\text{ин}} = 0$, где $F_1^{\text{ин}} = m_1 a_1$.

Для груза 3 внешними силами будут сила тяжести $\vec{P}_3$ и реакция нити $\vec{T}$. Присоединим к грузу 3 силу инерции $\vec{F}_3^{\text{ин}}$ (см. рис. 6.6, *a*) и составим уравне-

ние равновесия системы сил в проекции на ось x , выбранную по направлению движения груза 3: $T - P_3 - F_3^{\text{ин}} = 0$, где модуль силы инерции $F_3^{\text{ин}} = m_3 a_3$.

Решая полученную систему с учётом, что модули реакций нити и модули ускорений грузов равны: $T = T'$ и $a_1 = a_3$, находим ускорение грузов. Получим:

$$a_1 = a_3 = \frac{(m_1 \sin 60^\circ - m_3)g}{m_1 + m_3}. \text{ Тогда давление клина на уступ:}$$

$$R_x = F_1^{\text{ин}} \cos 60^\circ = m_1 g \frac{(m_1 \sin 60^\circ - m_3)}{(m_1 + m_3)} \cos 60^\circ.$$

Подставляя данные из условия задачи, найдём $R_x = 11,97 \text{ Н}$.

Задача 64. Для подъёма грузов используется лебёдка со ступенчатым воротом, изображённая на рис. 6.7. Радиусы большой и малой ступенек барабана ворота r_1 и r_2 , радиус инерции барабана относительно оси вращения i_3 . Лебёдка уста-

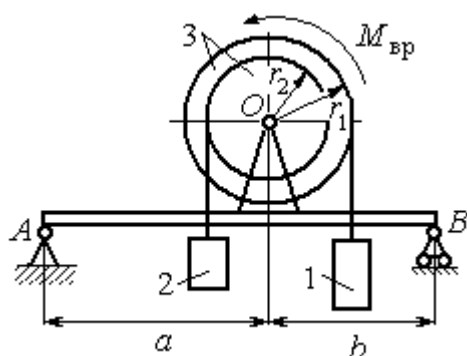


Рис. 6.7. Лебёдка на балке

новлена на горизонтальной балке AB , которая закреплена в точке A на неподвижном цилиндрическом шарнире и опирается на каток в точке B . Груз 1 поднимается на верёвке, навитой на большую ступеньку ворота. На малой

ступеньке барабана ворота закреплена другая верёвка, удерживающая противовес 2. К барабану лебёдки приложен постоянный вращающий момент $M_{\text{вр}}$.

Найти реакции опор балки во время движения груза, если радиусы ступенек барабана $r_1 = 0,8 \text{ м}$, $r_2 = 0,2 \text{ м}$, радиус инерции барабана относительно оси вращения $i_3 = 0,6 \text{ м}$, масса груза 1 $m_1 = 100 \text{ кг}$, противовеса 2 $m_2 = 30 \text{ кг}$, масса барабана $m_1 = 50 \text{ кг}$, величина вращающего момента $M_{\text{вр}} = 1050 \text{ Н}\cdot\text{м}$, расстояния от крайних точек балки A и B до линии вертикального диаметра барабана $a = 2 \text{ м}$, $b = 1 \text{ м}$.

Решение

Выберем систему, включающую только барабан 3, грузы 1 и 2 и нити, связывающие грузы с барабаном (рис. 6.8). Внешние силы, действующие на эту систему, – пара сил, создающая вращающий момент $M_{вр}$, силы тяжести $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$ грузов 1, 2 и барабана 3 и реакция $\vec{R}_O$ опоры барабана на шарнир в точке O . Натяжения нитей для данной системы являются внутренними и на рис. 6.8 не показаны.

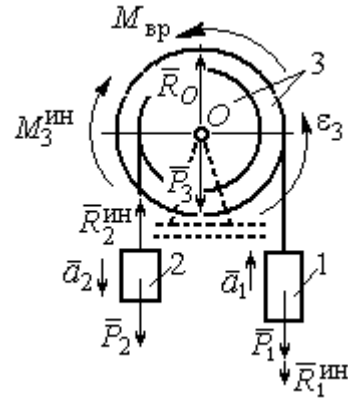


Рис. 6.8. Расчётная схема равновесия барабана

Приложим силы инерции. Направления главных векторов сил инерции $\vec{R}_1^{ин}$, $\vec{R}_2^{ин}$ и момента сил инерции $M_3^{ин}$ показаны на рис. 6.8.

Согласно принципу Даламбера, полученная система внешних сил и сил инерции является уравновешенной. Составим уравнения равновесия:

$$R_O + R_2^{ин} - P_2 - P_3 - P_1 - R_1^{ин} = 0; \quad M_{вр} - M_3^{ин} - R_2^{ин}r_2 + P_2r_2 - P_1r_1 - R_1^{ин}r_1 = 0,$$

где $R_1^{ин} = m_1a_1$, $R_2^{ин} = m_2a_2$, $M_3^{ин} = J_{3O}\epsilon_3$, $J_{3O} = m_3i_3^2$.

Из второго уравнения с учётом кинематических соотношений: $\epsilon_3 = \frac{a_1}{r_1}$ и

$$a_2 = \frac{r_2}{r_1}a_1, \text{ найдём ускорение груза 1: } a_1 = \frac{r_1(M_{вр} + P_2r_2 - P_1r_1)}{m_3i_3^2 + m_2r_2^2 + m_1r_1^2}.$$

Подставляя данные задачи, получим $a_1 = 3,49 \text{ м/с}^2$.

Вычислим модули сил инерции $R_1^{ин} = m_1a_1 = 349 \text{ Н}$; $R_2^{ин} = m_2a_2 = 26,17 \text{ Н}$.

Подставляя модули сил инерции в первое уравнение условий равновесия, найдём реакцию опоры барабана на шарнир O :

$$R_O = -R_2^{ин} + P_2 + P_3 + P_1 + R_1^{ин} = 2088,63 \text{ Н}.$$

Для определения реакций опор балки AB выберем объектом равновесия

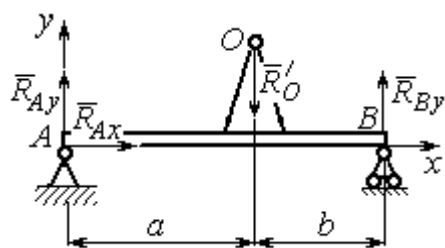


Рис. 6.9. Равновесие балки

саму балку (рис. 6.9). На балку действуют сила $\vec{R}'_O$ давления со стороны шарнира O , реакция шарнира в точке A (на рис. 6.9 разложенная на составляющие $\vec{R}_{Ax}$, $\vec{R}_{Ay}$) и реакция $\vec{R}_{By}$ опоры балки на шарнир в точке B . Составим уравне-

ния равновесия балки:

$$\sum F_x = R_{Ax} = 0, \quad \sum F_y = R_{Ay} - R'_O + R_{By} = 0,$$

$$\sum M_A(F) = R_{By}(a + b) - R'_O a = 0.$$

Решая систему с учётом того, что модули сил $\vec{R}'_O$ и $\vec{R}_O$ равны, найдём ре-

акции опор балки: $R_{By} = R_O \frac{a}{a + b} = 1392,42 \text{ Н}$; $R_{Ay} = R_O - R_{By} = 696,21 \text{ Н}$.

Для сравнения реакции опор балки при неподвижном барабане $R_{By} = 1419,18 \text{ Н}$, $R_{Ay} = 346,62 \text{ Н}$.

Упражнение

Упражнение 6.1. Груз 1 соединён с грузом 2 нерастяжимой нитью, переброшенной через неподвижный блок (рис. 6.10). Опускаясь вниз, груз 2 перемещает груз 1 по горизонтальной поверхности призмы 3 без трения. Призма стоит на горизонтальной гладкой поверхности и упирается левым краем в выступ. Определить силу давления призмы на пол, если массы грузов 1, 2 и призмы 3 одинаковы и равны m . Массой нити и блока пренебречь.

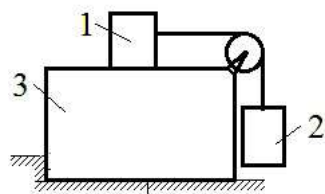


Рис. 6.10. Схема движения грузов в системе

6.2. Принцип возможных перемещений

Возможными перемещениями механической системы называют любую совокупность элементарных (бесконечно малых) перемещений точек системы из занимаемого в данный момент времени положения, которые допускаются всеми наложенными на систему связями.

Идеальными связями в механической системе называют такие связи, для которых сумма элементарных работ их реакций на любом возможном перемещении равна нулю.

Принцип возможных перемещений.

Если все приложенные к точкам системы внешние и внутренние силы разделить на **активные силы** и **реакции связей**, то для равновесия механической системы с идеальными связями необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ всех активных сил была равна нулю на любом возможном перемещении системы: $\sum \delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}}) = 0$.

Примеры решения задач на применение принципа возможных перемещений

Задача 65. В талевом механизме барабан 1 состоит из двух соосных жестко связанных валов (рис. 6.11). При поднятии груза верхний трос барабана 1 наматывается на вал большего радиуса R_1 , нижний – сматывается с вала меньшего радиуса r_1 .

Какой вращающий момент M , постоянный по величине, нужно приложить к барабану, чтобы уравновесить груз весом P , прикрепленный в центре блока 4. Массами блоков и троса пренебречь.

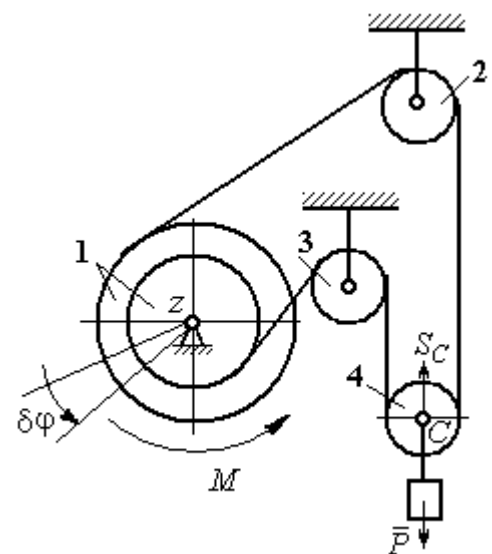


Рис. 6.11. Уравновешивание талевого механизма

Решение

Активными силами в системе являются сила тяжести груза $\vec{P}$ и уравновешивающий момент M . По принципу возможных перемещений для равновесия системы необходимо и достаточно выполнения условия:

$$\delta A(M) + \delta A(\vec{P}) = 0, \text{ или } M\delta\varphi_1 - P\delta S_C = 0.$$

где $\delta\varphi_1$ и δS_C – возможные перемещения барабана и груза.

Найдём связь между перемещениями $\delta\varphi_1$ и δS_C . Предположим, в меха-

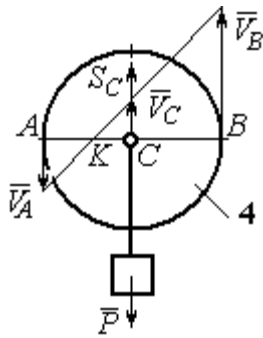


Рис. 6.12. Распределение скоростей точек блока 4

низме осуществляется подъём груза. На рис. 6.12 показано построение мгновенного центра скоростей блока 4 – точки K . Здесь скорость точки A блока 4 (рис. 6.12) равна скорости точек обода малого вала барабана 1, а скорость точки B – скорости точек обода большого вала. Составим пропорцию

$$\frac{V_B}{V_A} = \frac{BK}{AK} = \frac{r_4 + CK}{r_4 - CK}, \text{ где } r_4 - \text{радиус блока 4 (см.}$$

рис.6.12). Подставляя выражения для скоростей точек A и B $V_A = \omega_1 r_1$,

$$V_B = \omega_1 R_1, \text{ найдём расстояние: } CK = \frac{(R_1 - r_1)r_4}{R_1 + r_1}.$$

Угловая скорость блока 4 $\omega_4 = \frac{V_B}{r_4 + CK} = \frac{\omega_1(R_1 + r_1)}{2r_4}$. Скорость его цен-

тра: $V_C = \omega_4 \cdot CK = \frac{\omega_1(R_1 - r_1)}{2}$. Выразим соотношение между скоростью точки

C и угловой скоростью барабана 1 в дифференциальной форме:

$$dS_C = d\varphi_1 \frac{(R_1 - r_1)}{2}. \text{ Поскольку действительное перемещение является одним из}$$

возможных (т. е. $ds = \delta s$, $d\varphi = \delta\varphi$), получим связь между возможными переме-

$$\text{щениями барабана 1 и груза: } \delta S_C = \frac{\delta\varphi_1(R_1 - r_1)}{2}.$$

Подставляя найденное соотношение в уравнение принципа возможных

$$\text{перемещений, представим его в окончательном виде: } M\delta\varphi_1 - P\frac{\delta\varphi_1(R_1 - r_1)}{2} = 0,$$

$$\text{откуда найдём значение уравновешивающего момента: } M = \frac{P(R_1 - r_1)}{2}.$$

Задача 66. Брус 1 весом $P_1 = P$ лежит на цилиндрическом катке 2 и на блоке 3 одинаковых радиусов r , и одинакового веса $P_2 = P_3 = 2P$ (рис. 6.13). Каток 2 катится без проскальзывания по наклонной плоскости с углом наклона 30° к горизонту. Блок 3 вращается вокруг неподвижной оси z и к нему приложена пара сил с моментом $M = Pr$. Каток и блок расположены так, что брус 1 параллелен наклонной плоскости.

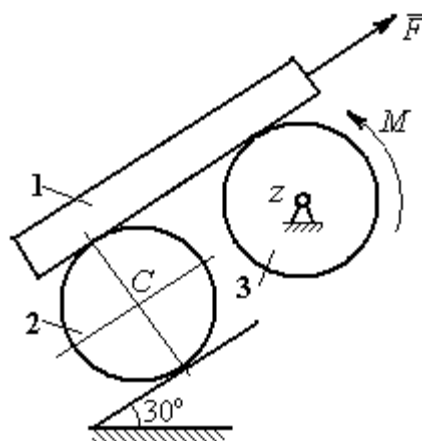


Рис. 6.13. Равновесие механической системы

Какую силу F , параллельную наклонной плоскости, нужно приложить к брусу 1, чтобы удержать его в равновесии. Скольжение между бруском и катком, бруском и блоком отсутствует.

Решение

Рассмотрим механизм, состоящий из бруса 1, катка 2 и блока 3. Активными силами, действующими на механизм, являются силы тяжести $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$ и

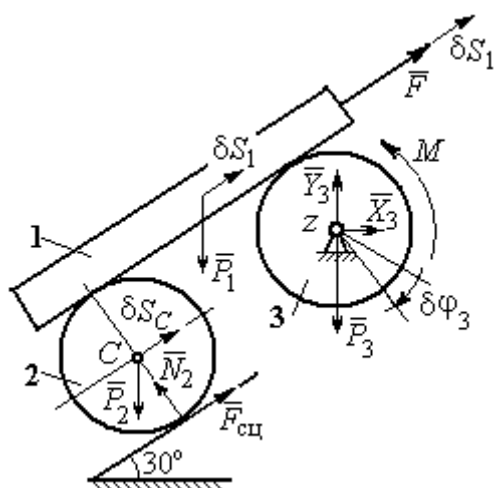


Рис. 6.14. Расчётная схема применения принципа возможных перемещений

$\vec{P}_3$ бруса, катка и блока, пара сил с моментом M , приложенная к блоку 3, и сила $\vec{F}$, приложенная к брусу. Связи в механизме идеальные, так как работа реакции $\vec{N}_2$ опоры катка 2 на плоскость, работа силы $\vec{F}_{\text{сц}}$ сцепления катка с плоскостью и работа реакции шарнира блока 3 при любом перемещении системы равны нулю. Направления векторов сил в системе показаны на рис. 6.14.

Придадим системе возможное перемещение, сдвинув брус 1 на расстояние δS_1 вдоль линии действия силы $\vec{F}$, вверх по наклонной плоскости. Тогда

центр катка 2 переместится на расстояние δS_C , а блок 3 повернётся на элементарный угол $\delta\varphi_3$ (см. рис. 6.14).

Для определения условий равновесия применим к системе принцип возможных перемещений. Получим уравнение:

$$-P_1\delta S_1\cos 60^\circ - P_2\delta S_C\cos 60^\circ - M\delta\varphi_3 + F\delta S_1 = 0.$$

Выразим все перемещения через перемещение бруса δS_1 . Допустим, скорость бруса равна V_1 . Тогда $V_C = \frac{V_1}{2}$, и, следовательно, $\delta S_C = \frac{\delta S_1}{2}$.

Угловая скорость блока 3 $\omega_3 = \frac{V_1}{r}$, отсюда $\delta\varphi_3 = \frac{\delta S_1}{r}$.

Подставляя найденные соотношения в уравнение принципа возможных перемещений с учётом данных задачи, находим $F = 2P$.

Задача 67. Уравновешивание роликового катка 3 с противовесом 1 осуществляется с помощью пары сил с моментом M , приложенных к блоку 2. Ка-

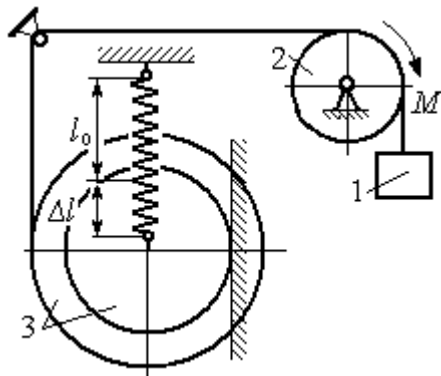


Рис. 6.15. Уравновешивание роликового катка

ток состоит из двух соосных жестко связанных дисков (рис. 6.15) радиусов r и $R = 2r$ с общей массой $3m$. Масса груза 1 равна m . При движении каток катится без скольжения по вертикальной поверхности, касаясь её диском меньшего радиуса. Вертикальная пружина с закреплённым верхним концом своим нижним концом удерживает каток за центр масс. Жесткость пружины $c = mg / r$.

Какой величины уравновешивающий момент M приложен к блоку 2, если при равновесии катка пружина растянулась относительно недеформированного состояния на величину $\Delta l = r$.

Решение

Рассмотрим механическую систему, состоящую из груза 1, блока 2 и катка 3. Активными силами, действующими на механизм, являются силы тяжести $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$ и $\vec{P}_3$ – груза, блока и катка, пара сил с моментом M , приложенная к блоку 2, и сила $\vec{F}_{\text{упр}}$ упругости пружины, приложенная к центру катка. Реакциями связей в механизме являются: сила $\vec{F}_{\text{сц}}$ сцепления катка с плоскостью и реакция $\vec{R}_2$ шарнира блока 2. Реакция $\vec{N}_2$ опоры катка 2 на вертикальную плоскость равна нулю (на рис. 6.16 не показана).

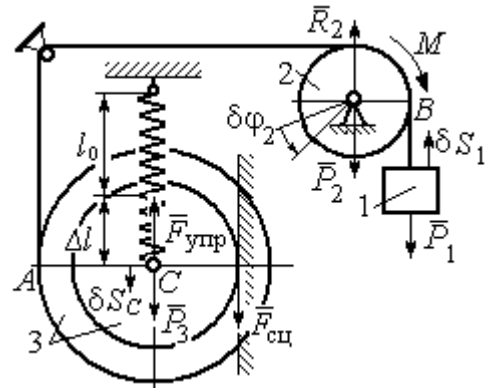


Рис. 6.16. Расчётная схема уравнивания ролика

Допустим, система находится в равновесии. Дадим центру катка возможное перемещение δS_C , направленное вертикально вниз. При этом блок 2 повернётся на угол $\delta\varphi_2$, а груз 1 получит бесконечно малое перемещение δS_1 . Направления возможных перемещений показаны на рис. 6.16.

Составим уравнение принципа возможных перемещений:

$$P_3\delta S_C - F_{\text{упр}}\delta S_C + M\delta\varphi_2 - P_1\delta S_1 = 0,$$

где сила упругости в положении равновесия системы $F_{\text{упр}} = c\Delta l$.

Выразим перемещения $\delta\varphi_2$, δS_1 блока 2 и груза 1 через перемещение центра катка δS_C . Предположим, при возможном перемещении скорость центра масс катка равна V_C . Скорость груза 1 равна скорости точки A на ободе большого диска катка: $V_1 = V_A = \frac{R+r}{r}V_C$. Здесь учтено, что точка касания катка

с вертикальной поверхностью является его мгновенным центром скоростей.

Угловая скорость блока 2 $\omega_2 = \frac{V_A}{r} = \frac{R+r}{r^2} V_C$.

Представляя кинематические соотношения в дифференциальном виде, получим необходимые связи между возможными перемещениями:

$$\delta S_1 = \frac{R+r}{r} \delta S_C = 3\delta S_C; \quad \delta \varphi_2 = \frac{R+r}{r^2} \delta S_C = \frac{3\delta S_C}{r}.$$

Окончательно уравнение принципа возможных перемещений выражается в виде: $P_3 \delta S_C - c \Delta \delta S_C + M \frac{3\delta S_C}{r} - P_1 3\delta S_C = 0$. Величина уравнивающего момента $M = \frac{1}{3} mgr$.

Упражнения

Упражнение 6.2. Штамповка деталей осуществляется при помощи рычажного пресса (рис. 6.17). Найти соотношение между силой F , приложенной к внешнему рычагу, и силой Q , сжимающей деталь A вдоль центральной оси.

Длины рычагов a, b, c, d показаны на рис. 6.17.

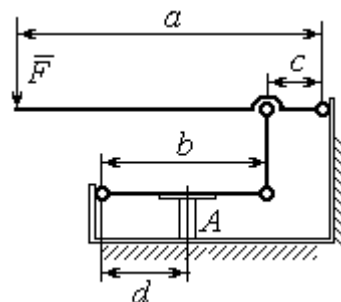


Рис. 6.17. Рычажный пресс

Упражнение 6.3. Конструкция состоит из двух валов, находящихся во внешнем зацеплении, и двух грузов, удерживающихся нитями, намотанными на валы (рис. 6.18).

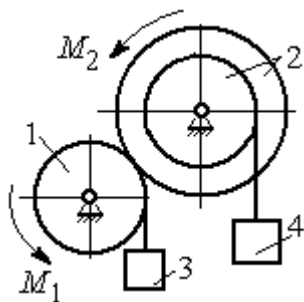


Рис. 6.18. Схема уравнивания валов

грузов, удерживающихся нитями, намотанными на валы (рис. 6.18).

Радиус вала 1 $R_1 = r$. Вал 2 состоит из двух барабанов, жестко скрепленных на одной оси. Радиусы барабанов: $R_2 = 3r$, $r_2 = r$.

Найти величину уравнивающего момента M_2 , приложенного к валу 2, если к валу 1 приложена пара сил с моментом $M_1 = 2Pr$, а грузы 3 и 4 одинакового веса P .

6.3. Общее уравнение динамики

При движении механической системы с идеальными связями в каждый момент времени сумма элементарных работ активных сил и сил инерции на любом возможном перемещении равна нулю:

$$\sum \delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}}) + \sum \delta A(\vec{R}_k^{\text{и}}) = 0,$$

где $\delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}})$, $\delta A(\vec{R}_k^{\text{и}})$ – элементарные работы активных сил и сил инерции, приложенных к точкам системы на её возможном перемещении.

При вычислении элементарных работ активных сил и сил инерции используют обычные формулы для вычисления работы сил на элементарном перемещении точек их приложения.

Примеры решения задач на применение общего уравнения динамики

Задача 68. Механическая система включает груз 1, ступенчатый диск 2 (каток), катящийся ступенькой по неподвижному рельсу, и однородный диск 3 (блок), вращающийся вокруг неподвижной оси, соединённых нерастяжимыми нитями (рис. 6.19). Качение ступенчатого диска происходит без скольжения. К грузу 1 приложена сила $\vec{F}$ под углом 30° к горизонтальному направлению движения груза. К блоку 3 приложена пара сил с моментом M . Найти закон движения центра масс катка 2 и реакцию шарнира блока 3 в момент времени $t = 1$ с, если $P_1 = 10$ Н; $P_2 = 20$ Н; $P_3 = 15$ Н; $F = 5(t+1)$ Н; $M = 3(1+2t)$ Н·м; $R_2 = 0,8$ м; $r_2 = 0,2$ м; $R_3 = 0,4$ м; момент инерции катка 2 относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения, $i_{2C} = 0,6$ м.

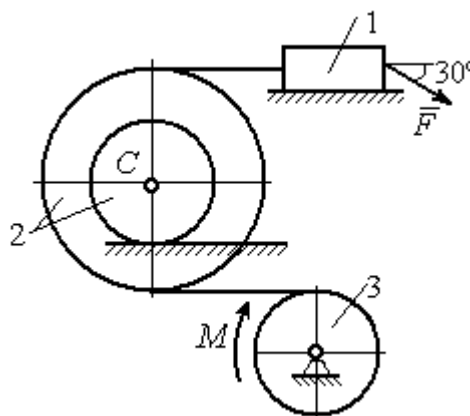


Рис. 6.19. Схема движения механической системы

Решение

В рассматриваемой механической системе активными силами являются силы тяжести $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3$, сила $\vec{F}$ и пара сил с моментом M (рис. 6.20).

Реакциями связей являются нормальные реакции опор: $\vec{N}_1, \vec{N}_2$, сила сцепления катка 2 с неподвижной поверхностью $\vec{F}_{\text{сц}}$ и реакция шарнира O

блока 3 (на рис. 6.20 реакция показана в виде разложения на составляющие $\vec{X}_3, \vec{Y}_3$). Связи идеальные, так как скольжение груза 1 происходит по гладкой поверхности, качение диска 2 без проскальзывания, а ось вращения блока 3 неподвижна.

Предположим, система движется так, что блок 3 вращается с угловой скоростью ω_3 и угловым ускорением ε_3 в направлении по-

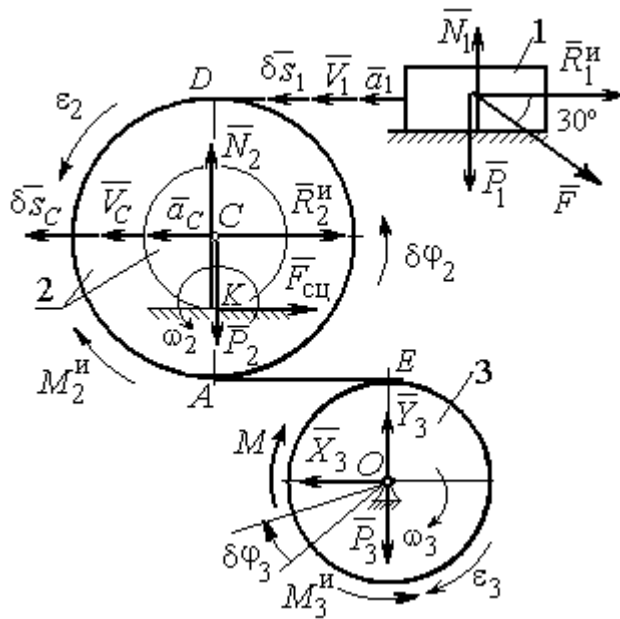


Рис. 6.20. Расчётная схема исследования движения механической системы

ворота, создаваемого моментом M . Соответствующие направления скорости $\vec{V}_C$ и ускорения $\vec{a}_C$ центра масс катка 2, его угловой скорости ω_2 и ускорения ε_2 , а также направление скорости $\vec{V}_1$ и ускорения $\vec{a}_1$ груза 1 показаны на рис. 6.20.

Присоединим к телам системы силы инерции. Главные векторы $\vec{R}_1^{\text{и}}, \vec{R}_2^{\text{и}}$ сил инерции груза 1 и катка 2 приложены в центрах масс груза и катка и направлены в сторону, противоположную ускорениям $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_C$. Главные моменты $\vec{M}_2^{\text{и}}, \vec{M}_3^{\text{и}}$ сил инерции катка 2 и блока 3 направлены в сторону, противоположную угловым ускорениям ε_2 и ε_3 .

Главные векторы и главные моменты сил инерции показаны на рис. 6.20.

Для механической системы с идеальными связями общее уравнение динамики имеет вид:

$$\sum \delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}}) + \sum \delta A(\vec{R}_k^{\text{и}}) = 0.$$

Угловая скорость катка 2 $\omega_2 = \frac{V_C}{CK} = \frac{V_C}{r_2}$. Здесь учтено, что в точке K

находится мгновенный центр скоростей катка (см. рис. 6.20). Скорость точки E блока 3 равна скорости точки A катка 2 (см. рис. 6.20):

$$V_E = V_A = \omega_2 \cdot AK = \omega_2(R_2 - r_2) = V_C \frac{R_2 - r_2}{r_2}.$$

Угловая скорость блока 3 $\omega_3 = \frac{V_E}{R_3} = V_C \frac{(R_2 - r_2)}{R_3 r_2}$.

Скорость груза 1 равна скорости точки D катка 2:

$$V_1 = V_D = \omega_2 \cdot DK = \omega_2(R_2 + r_2) = V_C \frac{(R_2 + r_2)}{r_2}.$$

Соотношения между ускорениями определяются путем дифференцирования установленных кинематических равенств:

$$a_1 = a_C \frac{(R_2 + r_2)}{r_2}, \quad \varepsilon_2 = \frac{a_C}{r_2}, \quad \varepsilon_3 = a_C \frac{(R_2 - r_2)}{R_3 r_2}.$$

Если выразить скоростные кинематические соотношения в дифференциальном виде, то, полагая действительное перемещение возможным (т. е. $ds = \delta s$, $d\varphi = \delta\varphi$), получим соотношения между перемещениями:

$$\delta s_1 = \delta s_C \frac{(R_2 + r_2)}{r_2}, \quad \delta\varphi_2 = \frac{\delta s_C}{r_2}, \quad \delta\varphi_3 = \delta s_C \frac{(R_2 - r_2)}{R_3 r_2}.$$

Найдем элементарные работы активных сил.

Работы сил тяжести груза 1 и катка 2 равны нулю, так как перемещения точек приложения сил перпендикулярны векторам сил.

Работа силы тяжести блока 3 также равна нулю, поскольку точка прило-

жения силы тяжести блока 3 не перемещается:

$$\delta A(\vec{P}_1) = P_1 \delta s_1 \cos 90^\circ = 0; \quad \delta A(\vec{P}_2) = P_2 \delta s_C \cos 90^\circ = 0; \quad \delta A(\vec{P}_3) = 0.$$

Работу совершают только пара сил с моментом M и сила $\vec{F}$:

$$\delta A(\vec{M}) = M \delta \varphi_3 = M \delta s_C \frac{(R_2 - r_2)}{R_3 r_2};$$

$$\delta A(\vec{F}) = F \delta s_1 \cos 150^\circ = -F \delta s_C \frac{(R_2 + r_2)}{r_2} \cos 30^\circ.$$

В результате сумма элементарных работ активных сил:

$$\begin{aligned} \sum \delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}}) &= \delta A(\vec{M}) + \delta A(\vec{F}) = \\ &= M \delta s_C \frac{(R_2 - r_2)}{R_3 r_2} - F \delta s_C \frac{(R_2 + r_2)}{r_2} \cos 30^\circ = (0,85 + 23,35t) \delta s_C. \end{aligned}$$

Определим модули главных векторов и главных моментов сил инерции:

$$R_1^{\text{н}} = m_1 a_1 = \frac{P_1}{g} \frac{(R_2 + r_2)}{r_2} a_C, \quad R_2^{\text{н}} = m_2 a_C = \frac{P_2 a_C}{g};$$

$$M_2^{\text{н}} = J_{2C} \varepsilon_2 = \frac{P_2}{g} i_{2C}^2 \frac{a_C}{r_2};$$

$$M_3^{\text{н}} = J_{3O} \varepsilon_3 = \frac{P_3 R_3}{2g} \frac{(R_2 - r_2)}{r_2} a_C,$$

где J_{2C} – момент инерции катка 2 относительно оси, проходящей через его центр масс перпендикулярно плоскости движения, $J_{2C} = m_2 i_{2C}^2$; i_{2C} – радиус

инерции катка; J_{3O} – осевой момент инерции блока 3, $J_{3O} = \frac{m_3 R_3^2}{2}$.

Найдем элементарные работы сил инерции:

$$\delta A(\vec{R}_1^{\text{н}}) = -R_1^{\text{н}} \delta s_1 = -\frac{P_1 (R_2 + r_2)^2 a_C}{g r_2^2} \delta s_C;$$

$$\delta A(\vec{R}_2^{\text{н}}) = -R_2^{\text{н}} \delta s_C = -\frac{P_2 a_C}{g} \delta s_C;$$

$$\delta A(\vec{M}_2^{\text{и}}) = -M_2^{\text{и}} \delta \varphi_2 = -\frac{P_2 i_2^2 a_C}{gr_2^2} \delta s_C;$$

$$\delta A(\vec{M}_3^{\text{и}}) = -M_3^{\text{и}} \delta \varphi_3 = -\frac{P_3 (R_2 - r_2)^2 a_C}{2gr_2^2} \delta s_C.$$

Сумма элементарных работ сил инерции:

$$\begin{aligned} \sum \delta A(\vec{R}_k^{\text{и}}) = & -\frac{P_1 (R_2 + r_2)^2 a_C}{gr_2^2} \delta s_C - \frac{P_2 a_C}{g} \delta s_C - \frac{P_2 i_2^2 a_C}{gr_2^2} \delta s_C - \\ & - \frac{P_3 (R_2 - r_2)^2 a_C}{2gr_2^2} \delta s_C = -52,75 a_C \delta s_C, \text{ где } g = 9,81 \text{ м/с}^2. \end{aligned}$$

С учетом проделанных вычислений общее уравнение динамики принимает вид: $\sum \delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}}) + \sum \delta A(\vec{R}_k^{\text{и}}) = (0,85 + 23,35t) \delta s_C - 52,75 a_C \delta s_C = 0$, откуда найдём ускорение центра масс катка 2 как функцию времени:

$$a_C(t) = 0,02 + 0,45t.$$

Представляя ускорение a_C в виде второй производной координаты движения центра масс $a_C = \ddot{s}_C$, получим дифференциальное уравнение $\ddot{s}_C = 0,02 + 0,45t$. Дважды проинтегрировав это уравнение с нулевыми начальными условиями, найдём закон движения центра масс:

$$s_C = 0,01t^2 + 0,075t^3.$$

Рассмотрим вращательное движение блока 3, освободив его от связей. На блок действуют сила тяжести $\vec{P}_3$, реакция подшипника, разложенная на составляющие $\vec{X}_3$, $\vec{Y}_3$, пара сил с моментом M и реакция нити $\vec{H}_3$ (рис. 6.21).

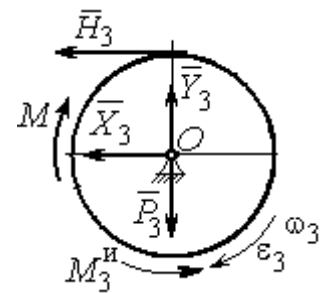


Рис. 6.21. Вращение блока 3

Присоединим к блоку 3 силы инерции. При вращательном движении блока вокруг оси, проходящей через центр масс, главный вектор сил инерции равен ну-

лю. Главный момент сил инерции $M_3^{\text{и}}$ направлен в сторону, противоположную угловому ускорению блока 3.

По принципу Даламбера система сил, приложенных к блоку 3, включая силы инерции, находится в равновесии. Составим уравнение равновесия в виде равенства нулю суммарного момента всех сил относительно оси вращения:

$$M - H_3 R_3 - M_3^{\text{и}} = 0, \text{ откуда найдём реакцию нити: } H_3 = \frac{M}{R_3} - \frac{M_3^{\text{и}}}{R_3}.$$

Подставляя в уравнение величину модуля главного момента сил инерции блока 3 $M_3^{\text{и}}(1) = 0,7 \text{ Н} \cdot \text{м}$ и значение момента, приложенного к блоку 3, в момент времени $t = 1 \text{ с}$, $M(1) = 9 \text{ Н} \cdot \text{м}$ найдём реакцию нити $H_3(1) = 20,75 \text{ Н}$.

Уравнения равновесия, составленные в виде проекций сил на вертикальную и горизонтальную оси (см. рис. 6.21), имеют вид:

$$X_3 + H_3 = 0, Y_3 - P_3 = 0.$$

Составляющие реакции шарнира блока 3 в момент времени $t = 1 \text{ с}$:

$$X_3 = -20,75 \text{ Н}, Y_3 = 15 \text{ Н}. \text{ Полная реакция шарнира } R_3 = \sqrt{X_3^2 + Y_3^2} = 25,6 \text{ Н}.$$

Задача 69. Груз 2 весом P_2 , поднимаемый лебёдкой (рис. 6.22), подвешен в центре подвижного блока 3 весом P_3 . Нерастяжимая нить одним концом при-

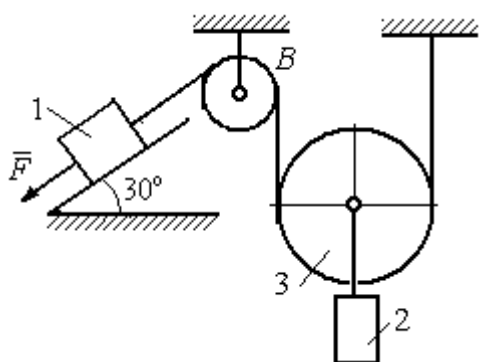


Рис. 6.22. Схема подъёмного устройства

цеплена к грузу 1 весом P_1 , лежащему на наклонной плоскости. Другой конец, переброшенный через невесомый блок В, охватывает снизу подвижный блок 3 радиуса r и закреплён в вертикальном положении. К грузу 1 приложена сила $\vec{F}$, направленная вдоль наклонной плоскости.

Найти закон движения поднимаемого груза, если $P_1 = P_3 = P$, $P_2 = 3P$, $F = 2P$ и движение началось из состояния покоя.

Решение

Применим к решению задачи общее уравнение динамики. В данной механической системе активными силами являются силы тяжести $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$ и сила $\vec{F}$ (рис. 6.23). Реакциями связей являются реакция шарнира блока B и реакция опоры груза 1 (на рис. 6.23 не показаны). Связи идеальные, так как работа реакций связей равна нулю.

Предположим, груз 1 спускается вниз по наклонной плоскости с ускорением a_1 . Приложим к телам системы силы инерции. Главные вектора сил инерции $\vec{R}_1^{\text{ин}}$ и $\vec{R}_2^{\text{ин}}$ грузов 1 и 2, движущихся поступательно, приложены в центрах масс грузов и направлены противоположно векторам ускорений тел. Главный вектор $\vec{R}_3^{\text{ин}}$ сил инерции блока 3 приложен в центре масс блока 3 и направлен противоположно вектору ускорения его центра масс. Главный момент сил инерции $M_3^{\text{ин}}$ относительно оси, проходящей через центр масс блока 3 перпендикулярно плоскости движения, направлен в сторону, противоположную направлению углового ускорения блока 3, совпадающего с направлением углового движения. Направления главных векторов и главного момента сил инерции тел показаны на рис. 6.23.

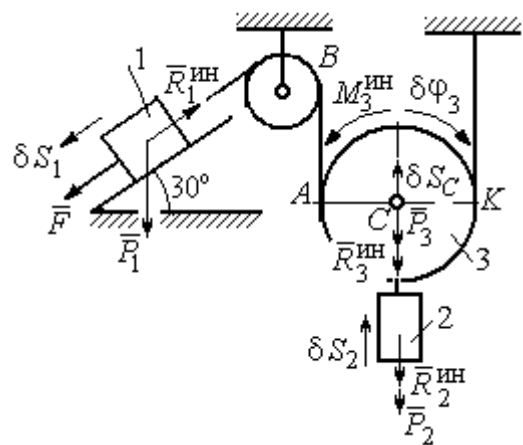


Рис.6.23. Активные силы и силы инерции, приложенные к системе

Дадим системе возможное перемещение, при котором груз 1 спустился вниз по наклонной плоскости на расстояние δS_1 . В соответствии с приложенными в системе связями центр масс подвижного блока 2 и груз 2 переместились вверх на высоту δS_C , а сам блок повернулся на угол $\delta \varphi_3$ (см. рис. 6.23).

Составим общее уравнение динамики $\sum \delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}}) + \sum \delta A(\vec{R}_k^{\text{и}}) = 0$. Получим

$$F\delta S_1 + P_1\delta S_1 \cos 60^\circ - P_2\delta S_2 - P_3\delta S_C - \\ - R_1^{\text{ин}}\delta S_1 - R_2^{\text{ин}}\delta S_C - R_3^{\text{ин}}\delta S_C - M_3^{\text{ин}}\delta\varphi_3 = 0,$$

где модули сил инерции $R_1^{\text{ин}} = m_1 a_1$, $R_2^{\text{ин}} = m_2 a_2$, $R_3^{\text{ин}} = m_3 a_C$, $M_3^{\text{ин}} = \frac{m_3 r^2}{2} \varepsilon_3$.

Выразим перемещение δS_2 и ускорение a_2 груза 2, а также поворот $\delta\varphi_3$ и угловое ускорение ε_3 подвижного блока 3 через перемещение δS_1 и ускорение a_1 груза 1.

Угловая скорость блока 3 $\omega_3 = \frac{V_A}{AK} = \frac{V_1}{2r}$. Здесь учтено, что точка K блока 3 является его мгновенным центром скоростей. Тогда, элементарный поворот блока $\delta\varphi_3 = \frac{\delta S_1}{2r}$, а его угловое ускорение $\varepsilon_3 = \frac{a_1}{2r}$.

Скорость центра масс блока 3 и скорость груза 2: $V_2 = V_C = \frac{V_1}{2}$. Из этого равенства следует, что: $\delta S_2 = \delta S_C = \frac{\delta S_1}{2}$, $a_2 = a_C = \frac{a_1}{2}$.

Подставляя найденные соотношения в общее уравнение динамики с учётом данных задачи, окончательно получим уравнение: $\frac{1}{2}P\delta S_1 = \frac{17}{8g}Pa_1\delta S_1$. От-

сюда $a_1 = \frac{4}{17}g = 0,23g$. Ускорение груза 2, $a_2 = \frac{a_1}{2} = 0,12g$.

Представим ускорение груза 2 в виде второй производной координаты его движения. Получим дифференциальное уравнение: $\ddot{S}_2 = 0,12g$. Дважды проинтегрировав его с нулевыми начальными условиями, найдём закон движения груза: $S_2 = 0,06gt^2$.

Задача 70. Грузы 1 и 2 весом $P_1 = 20$ Н и $P_2 = 30$ Н привязаны к нерастяжимой нити. Нить переброшена через неподвижные блоки B и D и охватывает снизу подвижный блок 3 весом $P_3 = 40$ Н (рис. 6.24). Определить ускорения грузов 1 и 2 и центра масс блока 3. Весом неподвижных блоков B и D пренебречь.

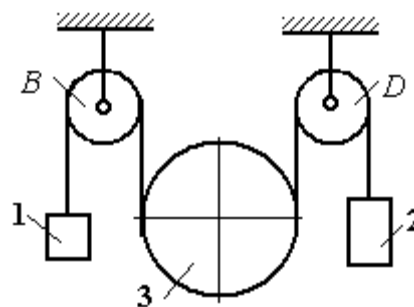


Рис. 6.24. Механическая система с двумя степенями свободы

Решение

В данной механической системе активными силами являются силы тяжести $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$,

$\vec{P}_3$ (рис. 6.25), а реакциями связей – реакции шарниров блоков B и D . Связи идеальные, так как оси вращения блоков B и D неподвижны.

Применим к решению задачи общее уравнение динамики. Система имеет две степени свободы. В этом случае общее уравнение динамики необходимо

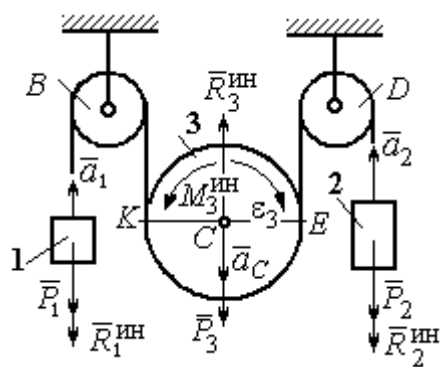


Рис. 6.25. Активные силы и силы инерции, приложенные к системе

составлять для каждого из независимых перемещений.

Предположим, система движется так, что оба груза 1 и 2 равноускоренно перемещаются вверх. Скорости грузов $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$, ускорения – $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$. Блок 3 опускается вниз с ускорением центра $\vec{a}_C$, вращается и имеет угловое ускорение ϵ_3 , направленное по ходу часовой стрелки (см. рис. 6.25).

Приложим к телам системы силы инерции (см. рис. 6.25). Модули сил инерции: $R_1^{\text{ин}} = m_1 a_1$, $R_2^{\text{ин}} = m_2 a_2$, $R_3^{\text{ин}} = m_3 a_C$. Главный момент сил инерции блока 3 $M_3^{\text{ин}} = J_{3C} \epsilon_3$, где осевой момент инерции $J_{3C} = \frac{m_3 r^2}{2}$. Направления векторов сил и моментов сил инерции показаны на рис. 6.25.

Для вычисления углового ускорения блока 3 воспользуемся векторным представлением ускорения точки при плоскопараллельном движении тела. Выберем точку K за полюс.

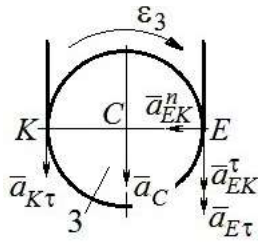


Рис. 6.26. Схема вычисления углового ускорения блока 3

Ускорение точки E определяется равенством $\vec{a}_E = \vec{a}_K + \vec{a}_{EK}^n + \vec{a}_{EK}^\tau$, где $\vec{a}_K$ – ускорение полюса K ; $\vec{a}_{EK}^n$, $\vec{a}_{EK}^\tau$ – нормальная и касательная составляющие ускорения точки E при вращении блока 3 вокруг полюса K (рис. 6.26). Спроектируем векторное равенство на вертикальную ось $E\tau$.

Получим: $a_{E\tau} = a_{K\tau} + a_{EK}^\tau$, где $a_{E\tau}$ и $a_{K\tau}$ – проекции ускорений точек E и K на вертикальную ось.

Поскольку модуль ускорения точки K нити равен модулю ускорения груза 1, то $a_{K\tau} = a_1$. Модуль ускорения точки E нити равен модулю ускорения груза 2 и $a_{E\tau} = a_2$. Так как $a_{EK}^\tau = \varepsilon_3 AK = \varepsilon_3 2r$, то $\varepsilon_3 = \frac{a_{E\tau} - a_{K\tau}}{2r} = \frac{a_2 - a_1}{2r}$.

Составляя такое же векторное уравнение для определения ускорения центра масс блока 3 (точки C) и проектируя его на вертикальную ось, найдём:

$$a_C = a_{K\tau} + a_{CK}^\tau = a_1 + \varepsilon_3 r = \frac{a_2 + a_1}{2}.$$

Выберем в качестве независимых координат s_1, s_2 – положения грузов 1 и 2, отсчитываемые от неподвижных осей вращения блоков B и D . Возможные перемещения грузов обозначим δs_1 и δs_2 .

Дадим системе возможное перемещение, при котором груз 1 поднимается вверх на расстояние δs_1 , а груз 2 – неподвижен. При таком движении нить, соединяющая груз 2 с блоком 3, неподвижна вплоть до точки E (рис. 6.27).

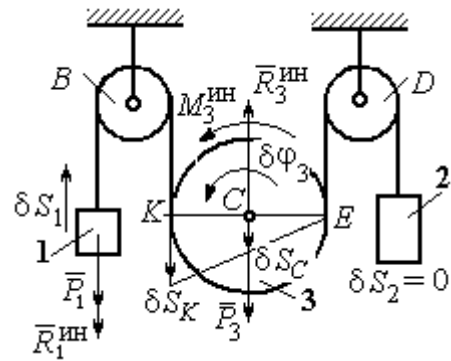


Рис. 6.27. Движение системы при перемещении груза 1.

Вращение блока 3 происходит против направления хода часовой стрелки. Точка E является мгновенным центром скоростей блока 3, и угловая скорость блока $\omega_3 = \frac{V_K}{2r} = \frac{V_1}{2r}$. Скорость центра масс блока $V_C = \frac{1}{2}V_1$. Тогда элементар-

ный поворот блока 3 $\delta\varphi_3 = \frac{\delta s_1}{2r}$ и элементарное перемещения центра масс $\delta s_C = \frac{1}{2}\delta s_1$.

На данном возможном перемещении работу совершают как активные силы – силы тяжести $\vec{P}_1$ и $\vec{P}_3$ груза 1 и блока 3, так и силы инерции – $\vec{R}_1^{\text{ин}}$, $\vec{R}_3^{\text{ин}}$ и пара сил инерции с моментом $M_3^{\text{ин}}$.

Составим общее уравнение динамики:

$$\sum \delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}}) + \sum \delta A(\vec{R}_k^{\text{ин}}) = -P_1\delta s_1 + P_3\delta s_C - R_1^{\text{ин}}\delta s_1 - R_3^{\text{ин}}\delta s_C + M_3^{\text{ин}}\delta\varphi_3 = 0.$$

Здесь работа сил инерции

$$R_1^{\text{ин}}\delta s_1 = m_1 a_1 \delta s_1, \quad R_3^{\text{ин}}\delta s_C = m_3 a_C \delta s_C = \frac{P_3}{g} \left(\frac{a_1 + a_2}{2} \right) \cdot \frac{1}{2} \delta s_1;$$

$$M_3^{\text{ин}}\delta\varphi_3 = J_{3C} \varepsilon_3 \delta\varphi_3 = \frac{P_3 r^2}{2g} \cdot \frac{a_2 - a_1}{2r} \cdot \frac{\delta s_1}{2r}.$$

В результате общее уравнение динамики представляется выражением

$$-P_1\delta s_1 + \frac{1}{2}P_3\delta s_1 - \frac{P_1}{g}a_1\delta s_1 - \frac{P_3}{g} \left(\frac{a_1 + a_2}{2} \right) \cdot \frac{1}{2}\delta s_1 + \frac{P_3 r^2}{2g} \cdot \frac{a_2 - a_1}{2r} \cdot \frac{\delta s_1}{2r} = 0,$$

которое преобразуется к виду:

$$(3P_3 + 8P_1)a_1 + P_3a_2 = (4P_3 - 8P_1)g.$$

Дадим системе другое независимое возможное перемещение, при котором груз 2 движется вверх ($\delta s_2 \neq 0$), а груз 1 неподвижен ($\delta s_1 = 0$).

При этом перемещении нить, соединяющая груз 1 и блок 3 неподвижна вплоть до точки K (рис. 6.28). Вращение блока 3 происходит по направлению хода часовой стрелки. Точка K является мгновенным центром скоростей бло-

ка 3. Тогда $\omega_3 = \frac{V_E}{2r} = \frac{V_2}{2r}$ и скорость центра масс блока $V_C = \frac{1}{2}V_2$. Элементарный поворот блока 3 $\delta\varphi_3 = \frac{\delta s_2}{2r}$ и перемещение центра масс $\delta s_C = \delta s_E = \frac{1}{2}\delta s_2$.

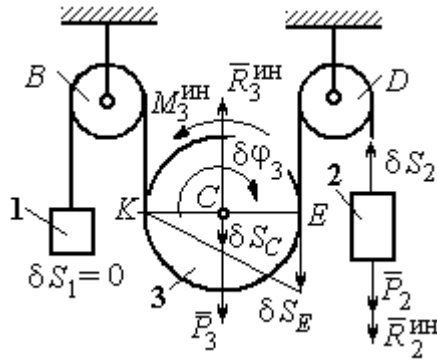


Рис. 6.28. Движение системы при перемещении груза 2

При таком движении работу совершают силы тяжести $\vec{P}_2$ и $\vec{P}_3$, силы инерции $\vec{R}_2^{\text{ин}}$, $\vec{R}_3^{\text{ин}}$ и пара сил с моментом $M_3^{\text{ин}}$.

Составим общее уравнение динамики на возможном перемещении δs_2 (см. рис. 6.28):

$$-P_2\delta s_2 - R_2^{\text{ин}}\delta s_2 + P_3\delta s_C - R_3^{\text{ин}}\delta s_C - M_3^{\text{ин}}\delta\varphi_3 = 0$$

которое преобразуется к виду

$$-P_2\delta s_2 - \frac{P_2}{g}a_2\delta s_2 + \frac{1}{2}P_3\delta s_2 - \frac{P_3}{g}\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)\frac{1}{2}\delta s_2 - \frac{P_3r^2}{2g}\left(\frac{a_2 - a_1}{2r}\right)\frac{\delta s_2}{2r} = 0$$

или к виду

$$(8P_2 + 3P_3)a_2 + P_3a_1 = (4P_3 - 8P_2)g.$$

Подставляя данные задачи в оба уравнения динамики, соответствующие независимым перемещениям δs_1 и δs_2 , получим систему уравнений:

$$7a_1 + a_2 = 0, \quad 2g + 9a_2 + a_1 = 0.$$

Решение системы: $a_1 = \frac{1}{31}g$, $a_2 = -\frac{7}{31}g$ представляет ускорения грузов 1 и 2.

Ускорение центра масс блока 3 находится по формуле $a_C = \frac{a_1 + a_2}{2} = -\frac{3}{31}g$.

Знаки ускорений определяют направления движений тел: груз 1 движется в выбранном направлении – вверх, груз 2 – вниз, центр блока 3 – вверх.

Упражнения

Упражнение 6.4. В механической системе (рис. 6.29) блок 1 радиуса r и каток 2 соединены горизонтальным невесомым стержнем. Скольжение между стержнем и катками отсутствует. Каток 2 состоит из двух шкивов радиусов r и $R = 2r$, скреплённых на одной оси. Каток катится, опираясь малым шкивом на горизонтальную поверхность, без проскальзывания. Груз 3 представляет собой поршень,двигающийся по горизонтальной поверхности без трения и прикреплённый к центру масс катка 2. К блоку 1 приложена пара сил с переменным моментом $M_{вр} = mgr \sin \omega t$.

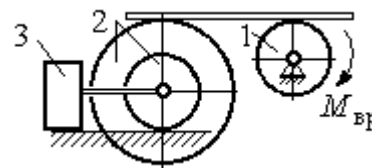


Рис. 6.29. Схема движения механической системы

Найти закон движения поршня 3, если массы грузов $m_1 = m_3 = m$, общая масса катка 2 $m_2 = 2m$, момент инерции катка 2 относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения, $i_2 = 1,5r$. Движение началось из состояния покоя.

Упражнение 6.5. Груз 1, двигаясь горизонтально, приводит в движение ступенчатый барабан 2 посредством нерастяжимой нити, намотанной на его малую ступень (рис. 6.30). К барабану на нитях, намотанных на большую и малую ступеньки, подвешены два груза 3 и 4. На груз 1 действует сила $F = P(t + 1)$. Определить закон движения груза 3, если веса грузов одинаковы и равны P , вес барабана 2 равен $2P$, радиусы ступенек барабана r и $2r$, радиус инерции барабана $i_2 = r\sqrt{2}$, и движение началось из состояния покоя.

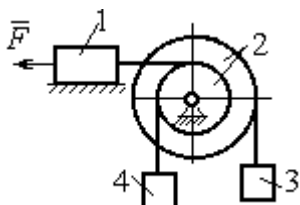


Рис. 6.30. Схема подъёмника

6.4. Уравнения Лагранжа II рода

Обобщёнными координатами называется совокупность любых s независимых параметров $q_1, q_2, \dots, q_s$, однозначно определяющих положение системы в любой момент времени.

Если системе сообщить возможное перемещение, при котором все обобщённые координаты изменятся на элементарные (бесконечно малые) величины $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_s$, называемые **вариациями обобщённых координат**, то все действующие активные силы совершат элементарную работу, которая может быть представлена в виде: $\delta A = Q_1 \cdot \delta q_1 + Q_2 \cdot \delta q_2 + \dots + Q_s \cdot \delta q_s$.

Величина Q_k , $k = 1, 2, \dots, s$, равная коэффициенту при вариации δq_k обобщенной координаты, называется **обобщенной силой**, соответствующей данной обобщенной координате. Расчет обобщенных сил осуществляется путем последовательного придания системе возможных перемещений, при которых варьируется только одна из обобщенных координат, а вариации остальных координат равны нулю.

Для материальной системы с идеальными связями дифференциальные уравнения движения в обобщенных координатах – **уравнения Лагранжа II рода** – имеют вид: $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k$, $k = 1, 2, \dots, s$, где s – число степеней свободы системы; T – кинетическая энергия системы; $q_1, q_2, \dots, q_s$ – обобщенные координаты; $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s$ – обобщенные скорости.

Примеры решения задач на составление уравнений Лагранжа

Задача 71. В механизме домкрата (рис. 6.31) движение зубчатого колеса 1 передаётся шестерне 2, к которой соосно прикреплено зубчатое колесо 3, имеющее зацепление с зубчатой рейкой 4, на которой поднимается груз 5 массы $m_5 = 50$ кг.

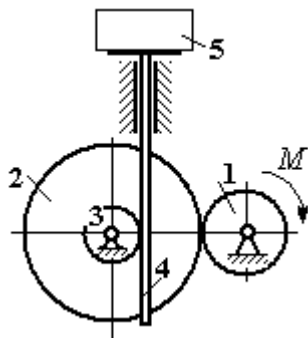


Рис. 6.31. Схема механизма домкрата

Радиусы зубчатых колёс $r_1 = 5$ см, $r_2 = 12$ см, $r_3 = 6$ см. Зубчатые колёса считать сплошными однородными дисками. Массы колёс $m_1 = 0,8$ кг, $m_2 = 1,6$ кг, $m_3 = 0,6$ кг, масса зубчатой рейки $m_4 = 1$ кг.

Какой величины постоянный вращающий момент нужно приложить к колесу 1 для того, чтобы в момент времени $t = 2$ с груз 5 имел скорость $V_5 = 1$ м/с, если движение системы начинается из состояния покоя.

Решение

Домкрат является механической системой с одной степенью свободы. Выберем в качестве обобщённой координаты координату x , отмечающую положение груза 5 (рис. 6.32).

Уравнение Лагранжа для обобщённой координаты x имеет вид:

$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x$, где T – кинетическая энергия системы; $\dot{x}$ – обобщённая скорость; Q_x – обобщённая сила.

Кинетическая энергия колеса 1: $T_1 = \frac{J_1 \omega_1^2}{2}$, где ω_1 – угловая скорость колеса 1; J_1 – момент инерции колеса, $J_1 = \frac{m_1 r_1^2}{2}$.

Кинетические энергии шестерни 2 и зубчатого колеса 3, у которых угловые скорости одинаковы, соответственно:

$T_2 = \frac{J_2 \omega_2^2}{2}$, $T_3 = \frac{J_3 \omega_2^2}{2}$, где ω_2 – угловая скорость шестерни 2; J_2 , J_3 – моменты инерции шестерни 2 и зубчатого колеса 3 относительно оси, проходящей через общий центр масс, $J_2 = \frac{m_2 r_2^2}{2}$,

$J_3 = \frac{m_3 r_3^2}{2}$. Скорость груза 5 равна скорости зубчатой линейки $V_5 = V_4$. Кинетическая энергия зубчатой линейки 4 и груза 5:

$T_4 = \frac{m_4 V_4^2}{2}$, $T_5 = \frac{m_5 V_4^2}{2}$.

Выразим угловые скорости колёс через скорость груза (зубчатой линейки).

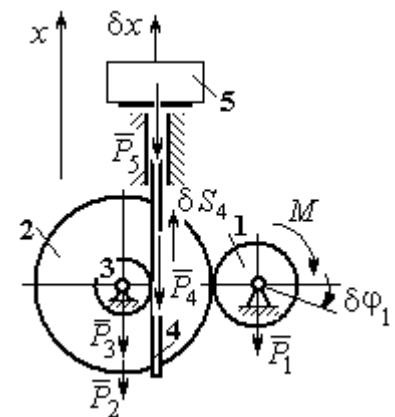


Рис. 6.32. Возможные перемещения звеньев механизма

Имеем: $\omega_2 = \omega_3 = \frac{V_4}{r_3}$ (см. рис. 6.32). Кроме того, из равенства $\omega_2 r_2 = \omega_1 r_1$

$$\text{следует } \omega_1 = \frac{\omega_2 r_2}{r_1} = \frac{V_4 r_2}{r_1 r_3}.$$

Подставляя полученные соотношения в выражения кинетических энергий тел и с учётом данных задачи, получим кинетическую энергию системы:

$$\begin{aligned} T &= T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 = \\ &= \frac{m_1 r_1^2}{4} \left(\frac{V_4 r_2}{r_1 r_3} \right)^2 + \frac{m_2 r_2^2}{4} \left(\frac{V_4}{r_3} \right)^2 + \frac{m_3 r_3^2}{4} \left(\frac{V_4}{r_3} \right)^2 + \frac{m_4 V_4^2}{2} + \frac{m_5 V_4^2}{2} = \\ &= \left[\frac{m_1 + m_2}{2} \left(\frac{r_2}{r_3} \right)^2 + \frac{m_3}{2} + m_4 + m_5 \right] \frac{V_4^2}{2} = 28,05 V_4^2 = 28,05 \dot{x}^2. \end{aligned}$$

Вычислим обобщённую силу.

Дадим возможное перемещение δx грузу 5. При этом линейка 4 переместится на расстояние δs_4 , а зубчатое колесо 1 повернётся на угол $\delta \varphi_1$. Найдём сумму работ всех сил, приложенных к системе, на этом возможном перемещении. Получим: $\delta A = -P_5 \delta x - P_4 \delta s_4 + M \delta \varphi_1$. Работа сил тяжести зубчатых колёс $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$ и $\vec{P}_3$ равна нулю, так как точки приложения этих сил неподвижны.

Из ранее полученных скоростных соотношений следуют равенства перемещений: $\delta s_4 = \delta x$, $\delta \varphi_1 = \frac{r_2}{r_1 r_3} \delta x$. В результате сумма работ сил на возможном

перемещении системы выражается в виде $\delta A = \left(-m_5 g - m_4 g + M \frac{r_2}{r_1 r_3} \right) \delta x$. От-

сюда обобщённая сила Q_x , соответствующая координате x :

$$Q_x = -(m_5 + m_4)g + M \frac{r_2}{r_1 r_3} = -500,31 + 40M.$$

Составим уравнение Лагранжа.

С учётом, что $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = 56,1 \ddot{x}$ и $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$, дифференциальное уравнение

движения имеет вид: $56,1 \ddot{x} = -500,31 + 40M$ или $\ddot{x} = -8,92 + 0,71M$.

Интегрируя это уравнение с нулевыми начальными условиями, получим закон изменения скорости груза 5: $V_5 = \dot{x} = (-8,92 + 0,71M)t$.

По условию задачи при $t = 2$ с $V_5 = 1$ м/с. Подставляя эти данные в уравнение, получим: $M = 13,27$ Н·м.

Задача 72. Механическая система состоит из ступенчатого блока 2, катка 3, соединённых невесомым брусом 1, и невесомой пружины жесткостью c . Радиусы ступеней блока r и $R = 1,5r$, радиус катка 3 равен r . Брус, лежащий на катке 3 и блоке 2, во время движения остаётся параллельным линии качения катка 3 (рис. 6.33). В центре катка 3 приложена сила $\vec{F}$, направленная вверх параллельно наклонной плоскости, а к блоку 2 – пара сил с моментом M . Качение катка

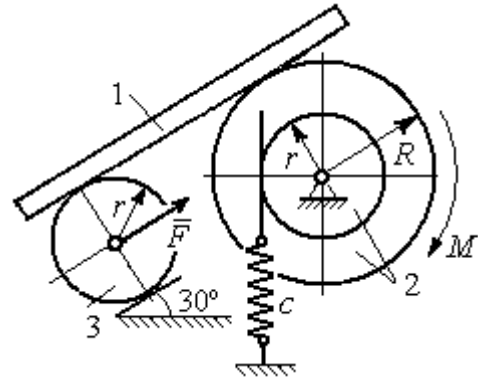


Рис. 6.33. Механическая система с одной степенью свободы

по неподвижной поверхности без скольжения. Проскальзывание между брусом 1 и дисками отсутствует. Передача движения пружины блоку 2 производится посредством невесомого жесткого вертикального стержня, прижатого к малой ступеньке блока без скольжения. Радиус инерции блока 2 относительно оси вращения $i_z = r\sqrt{2}$. Веса тел: $P_3 = P$, $P_2 = 2P$, приложенная сила $F = 2P$, момент $M = Pr$, жесткость пружины $c = P/r$.

Определить закон угловых колебаний блока 2 при $P = 10$ Н, $r = 0,2$ м, если в начальный момент пружина находилась в нерастянутом состоянии, а блоку 2 придали угловую скорость $\omega_0 = 0,5$ рад/с в сторону вращения, создаваемого заданным моментом.

Решение

Рассматриваемая механическая система (рис. 6.34) имеет одну степень свободы. В качестве обобщённой координаты q выберем перемещение x верхнего края пружины, отсчитываемого от уровня недеформируемой пружины (см. рис. 6.34). Обобщённая скорость $\dot{q} = \dot{x}$.

Уравнение Лагранжа II рода, описывающее движение системы, имеет вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x, \text{ где } T - \text{кинетическая энергия системы; } Q_x - \text{обобщенная}$$

сила, соответствующая обобщенной координате x .

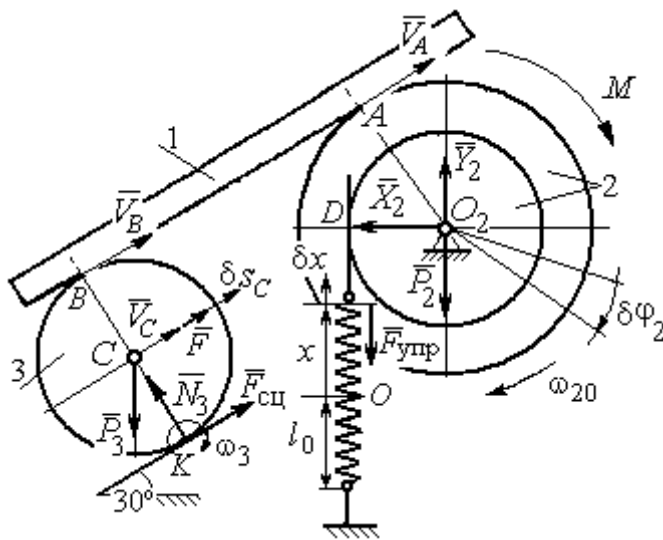


Рис. 6.34 Расчётная схема колебаний механической системы с одной степенью свободы

Вычислим кинетическую энергию системы. Энергия вращательного движения блока 2: $T_2 = \frac{1}{2} J_{2z} \omega_2^2$, где ω_2 – угловая скорость блока; J_{2z} – момент инерции блока 2 относительно оси z , $J_{2z} = m_2 i_z^2$. Каток 3 совершает плоскопараллельное движение. Его кинетическая

энергия $T_3 = \frac{1}{2} m_3 V_C^2 + \frac{1}{2} J_{zC} \omega_3^2$, где V_C , ω_3 – скорость центра масс катка 3 и его угловая скорость; J_{zC} – момент инерции катка относительно оси, проходящей через его центр масс перпендикулярно плоскости движения, $J_{zC} = \frac{1}{2} m_3 r^2$; r – радиус катка.

Выразим угловые скорости ω_2 , ω_3 , а также скорость V_C через обобщённую скорость $\dot{x}$.

Заметим, что скорость точки D блока 2 равна скорости движения верхнего края пружины: $V_D = \dot{x}$ (см. рис. 6.34). Угловая скорость блока 2: $\omega_2 = \frac{V_D}{r} = \frac{\dot{x}}{r}$. Скорость точки A блока 2: $V_A = \omega_2 R = \frac{\dot{x}R}{r}$.

Так как брус совершает поступательное движение, то скорости точек A и B равны: $V_B = V_A$. Угловая скорость катка 3 (точка K касания катка 3 с неподвижной поверхностью является его мгновенным центром скоростей): $\omega_3 = \frac{V_B}{2r} = \frac{V_A}{2r} = \frac{\dot{x}R}{2r^2}$. Скорость центра катка 3: $V_C = \frac{V_B}{2} = \frac{\dot{x}R}{2r}$.

Подставляя найденные кинематические соотношения с учётом исходных данных задачи, получим кинетическую энергию тел системы:

$$T_2 = \frac{1}{2} J_{2z} \omega_2^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2P}{g} (r\sqrt{2})^2 \left(\frac{\dot{x}}{r} \right)^2 = \frac{2P}{g} \dot{x}^2;$$

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 V_C^2 + \frac{1}{2} J_{zC} \omega_3^2 = \frac{1}{2} \frac{P}{g} \left(\frac{\dot{x}R}{2r} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{Pr^2}{2g} \left(\frac{\dot{x}R}{2r^2} \right)^2 = \frac{3P}{4g} \left(\frac{R}{2r} \right)^2 \dot{x}^2.$$

Полная кинетическая энергия системы:

$$T = T_2 + T_3 = \frac{P}{g} \left(2 + \frac{3}{4} \left(\frac{R}{2r} \right)^2 \right) \dot{x}^2.$$

Найдём обобщённую силу. Произвольное положение системы определяется обобщённой координатой x , показывающей растяжение пружины. Дадим пружине в произвольном положении возможное (бесконечно малое) перемещение δx в положительном направлении оси x (см. рис. 6.34). При этом блок 2 повернётся на угол $\delta\varphi_2 = \frac{\delta x}{r}$, центр масс катка 3 сдвинется на расстояние

$\delta s_C = \frac{R}{2r} \delta x$. На заданном перемещении системы работу совершают сила тяжести катка 3, пара сил с моментом M , сила $\vec{F}$ и сила упругости пружины.

Элементарная работа вращающего момента M : $\delta A(M) = M\delta\varphi_2 = M\frac{\delta x}{r}$.

Работа силы тяжести катка 3: $\delta A(\vec{P}_3) = P_3\delta s_C \cos 120^\circ = -P_3\frac{R}{4r}\delta x$.

Работа силы F : $\delta A(\vec{F}) = F\delta s_C = F\frac{R}{2r}\delta x$.

Модуль силы упругости пружины, растянутой из недеформированного положения на расстояние x : $F_{\text{упр}} = cx$. Сила упругости направлена в сторону, противоположную растяжению (см. рис. 6.34). Её работа при перемещении δx вычисляется по формуле $\delta A(\vec{F}_{\text{упр}}) = F_{\text{упр}}\delta x \cos 180^\circ = -cx\delta x$.

Сумма работ сил на рассматриваемом возможном перемещении системы с учётом данных задачи:

$$\delta A = M\frac{\delta x}{r} - P_3\frac{R}{4r}\delta x + F\frac{R}{2r}\delta x - cx\delta x = P\left(\frac{17}{8} - \frac{x}{r}\right)\delta x,$$

откуда обобщённая сила $Q_x = P\left(\frac{17}{8} - \frac{x}{r}\right)$.

Вычислим необходимые производные кинетической энергии:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{2P}{g}\left(2 + \frac{3}{4}\left(\frac{R}{2r}\right)^2\right)\ddot{x}, \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \text{ и, подставляя их в общий вид уравнений}$$

Лагранжа, получим дифференциальное уравнение колебаний верхнего края пружины:

$$\frac{2P}{g}\left(2 + \frac{3}{4}\left(\frac{R}{2r}\right)^2\right)\ddot{x} = P\left(\frac{17}{8} - \frac{x}{r}\right), \text{ или } \ddot{x} + 10,2x = 4,34 \text{ (здесь } g = 9,81 \text{ м/с}^2\text{)}.$$

Решение дифференциального уравнения представляется в виде суммы: $x = x_{\text{одн}} + x_{\text{частн}}$. Общее решение однородного уравнения имеет вид $x_{\text{одн}} = C_1 \sin kt + C_2 \cos kt$, где C_1, C_2 – произвольные постоянные; k – круговая частота собственных колебаний пружины, $k = \sqrt{10,2} = 3,19$ рад/с. Частное ре-

шение неоднородного уравнения ищется в виде константы $x_{\text{част}} = b$. Подставив его в уравнение колебаний, получим: $b = 0,42$. Таким образом, общее решение неоднородного уравнения имеет вид $x(t) = C_1 \sin 3,19t + C_2 \cos 3,19t + 0,42$.

Произвольные постоянные C_1, C_2 находятся из начальных условий. По условию задачи в начальный момент пружина была в нерастянутом состоянии. Тогда начальная координата пружины (её верхнего края) $x(0) = 0$. Подставляя значение начальной координаты в общее решение неоднородного уравнения при $t = 0$, получим $C_2 = -0,42$. Скорость верхнего края пружины в начальный момент времени $\dot{x}(0)$ равна начальной скорости $V_D(0)$ точки D блока 2. Поскольку в начальный момент времени блоку 2 сообщили угловую скорость $\omega_{20} = 0,5$ рад/с, то при $r = 0,2$ м $\dot{x}(0) = V_D(0) = \omega_{20}r = 0,1$ м/с.

Вычисляем скорость движения края пружины, взяв производную: $\dot{x}(t) = 3,19C_1 \cos 3,19t - 3,19C_2 \sin 3,19t$. Подставляя начальное значение скорости, получим $C_1 = 0,03$.

Окончательно уравнение движения верхнего края пружин: $x(t) = 0,03 \sin 3,19t - 0,42 \cos 3,19t + 0,42$ м. Уравнение колебательного движения

блока 2: $\varphi_2 = \frac{x}{r} = 0,15 \sin 3,19t - 2,1 \cos 3,19t + 2,1$ рад.

Задача 73. Прямоугольная призма 3 весом $2P$ лежит на катке 1 радиуса r и веса P и опирается на невесомый блок 2 (рис. 6.35). Каток 1 катится по неподвижной горизонтальной поверхности без скольжения. По наклонной поверхности призмы скатывается без скольжения каток 4 весом P и радиуса r . Угол наклона поверхности призмы к горизонту составляет

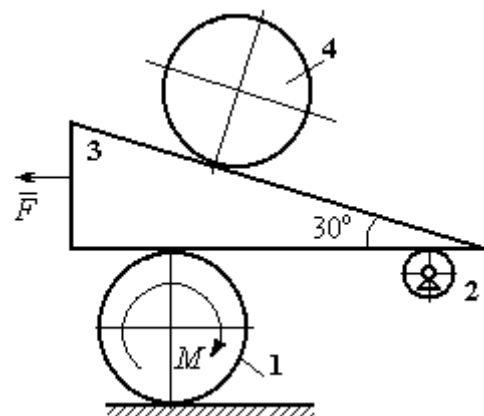


Рис. 6.35. Механическая система с двумя степенями свободы

30°. На каток 1 действует пара сил с постоянным моментом $M = 3Pr$, а на призму 3 – горизонтальная сила $\vec{F}$ с модулем $F = P$. Катки считать однородными дисками. Проскальзывание между катками 1, 4 и призмой отсутствует. В начальный момент система находилась в покое.

Определить закон движения призмы 3 и закон движения катка 4 относительно призмы.

Решение

Рассматриваемая механическая система – катки и призма имеет две степени свободы, так как перемещение катка 4 относительно призмы 3 не зависит от перемещения самой призмы и катка 1. За обобщенные координаты выберем перемещение x_4 центра масс катка 4 относительно края призмы и перемещение x_3 края призмы 3 относительно произвольной неподвижной вертикальной плоскости (рис. 6.36). Обобщенные скорости: $\dot{x}_4$, $\dot{x}_3$.

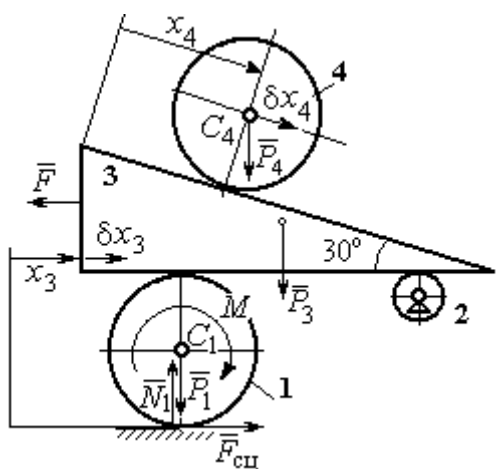


Рис. 6.36. Возможные перемещения механической системы

Уравнения Лагранжа II рода, описывающие движение системы в обобщенных координатах:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_4} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_4} = Q_{x_4};$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_3} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_3} = Q_{x_3},$$

где T – кинетическая энергия системы; Q_{x_4} , Q_{x_3} – обобщенные силы, соответствующие указанным обобщенным координатам.

Вычислим кинетическую энергию тел в системе.

Каток 1 совершает плоскопараллельное движение. Кинетическая энергия

катка $T_1 = \frac{1}{2} m_1 V_{C_1}^2 + \frac{1}{2} J_{C_1} \omega_1^2$, где V_{C_1} – скорость центра масс катка, $V_{C_1} = \frac{1}{2} \dot{x}_3$;

J_{C_1} – момент инерции катка относительно оси, проходящей через центр масс

перпендикулярно плоскости движения, $J_{C_1} = \frac{m_1 r^2}{2}$; ω_1 – угловая скорость катка 1, $\omega_1 = \frac{\dot{x}_3}{2r}$.

Призма 3 совершает поступательное движение со скоростью $V_3 = \dot{x}_3$. Её кинетическая энергия

$$T_3 = \frac{m_3 V_3^2}{2} = \frac{m_3 \dot{x}_3^2}{2}.$$

При расчёте кинетической энергии катка 4 по

формуле $T_4 = \frac{1}{2} m_4 V_4^2 + \frac{1}{2} J_{C_4} \omega_4^2$ необходимо учитывать, что каток 4 совершает сложное движение. Здесь относительное движение катка – его качение по наклонной поверхности призмы, переносное – поступательное перемещение вместе с призмой.

Вектор абсолютной скорости центра масс катка 4 $\vec{V}_4$ представляется в виде суммы $\vec{V}_4 = \vec{V}_{4e} + \vec{V}_{4r}$ (рис. 6.37), где $\vec{V}_{4e}$ – вектор переносной скорости катка, равный по модулю скорости призмы: $V_{4e} = \dot{x}_3$; $\vec{V}_{4r}$ – вектор относительной скорости центра масс катка, равный по величине $V_{4r} = \dot{x}_4$. Модуль абсолютной скорости центра масс катка 4 (по теореме косинусов):

$$V_4^2 = V_{4e}^2 + V_{4r}^2 - 2V_{4e}V_{4r}\cos 150^\circ = \dot{x}_3^2 + \dot{x}_4^2 + 2\dot{x}_3\dot{x}_4\cos 30^\circ.$$

Поскольку переносное движение катка 4 поступательное, угловая скорость катка ω_4 равна его угловой скорости в относительном движении

$$\omega_4 = \frac{V_{4r}}{r} = \frac{\dot{x}_4}{r}.$$

В результате выражение кинетической энергии системы, в обобщённых скоростях имеет вид:

$$T = \frac{1}{2} m_1 V_{C_1}^2 + \frac{1}{2} J_{C_1} \omega_1^2 + \frac{1}{2} m_3 V_3^2 + \frac{1}{2} m_4 V_4^2 + \frac{1}{2} J_{C_4} \omega_4^2 =$$

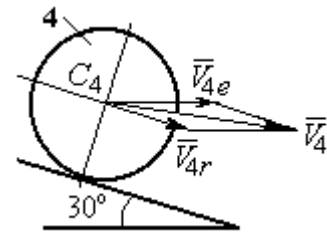


Рис. 6.37. Скорость центра масс катка 4

$$= \frac{P}{2g} \left(\frac{27}{8} \dot{x}_3^2 + \frac{3}{2} \dot{x}_4^2 + \dot{x}_3 \dot{x}_4 \sqrt{3} \right).$$

Дадим системе возможное перемещение по координате x_3 , оставляя координату x_4 без изменения: $\delta x_3 > 0, \delta x_4 = 0$. При таком движении системы каток 4 не скатывается по призме, а движется поступательно вместе с ней. В этом случае работа сил тяжести катков 1, 4 и призмы равна нулю, так как нет вертикального перемещения точек приложения этих сил. Работу на этом перемещении будет производить только сила $\vec{F}$ и пара сил с моментом M , приложенная к катку 1. Суммарная элементарная работа

$$\delta A = -F\delta x_3 + M\delta\varphi_1 = \left(-F + \frac{M}{2r} \right) \delta x_3.$$

Здесь учтено, что элементарный угол поворота катка 1 связан с перемещением призмы соотношением: $\delta\varphi_1 = \frac{\delta x_3}{2r}$. Отсюда обобщённая сила, соответствующая координате x_3 : $Q_{x_3} = -F + \frac{M}{2r} = \frac{1}{2}P$.

Дадим системе другое независимое перемещение – по координате x_4 , оставляя координату x_3 без изменения: $\delta x_4 > 0, \delta x_3 = 0$. При этом возможном перемещении вся система стоит, кроме катка 4, который скатывается по наклонной поверхности призмы. При таком движении системы работу совершает только сила тяжести катка 4. Выражая элементарную работу $\delta A = P_4 \delta x_4 \cos 60^\circ = \frac{1}{2}P \delta x_4$, найдём обобщённую силу, соответствующую координате x_4 : $Q_{x_4} = \frac{1}{2}P$.

Составим уравнения Лагранжа. С этой целью вычислим необходимые производные кинетической энергии

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_3} \right) = \frac{27P}{8g} \ddot{x}_3 + \frac{P\sqrt{3}}{2g} \ddot{x}_4; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_4} \right) = \frac{3P}{2g} \ddot{x}_4 + \frac{P\sqrt{3}}{2g} \ddot{x}_3; \quad \frac{\partial T}{\partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial x_4} = 0.$$

Подставляя результаты расчётов в общий вид уравнений Лагранжа, получим систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{27P}{8g}\ddot{x}_3 + \frac{P\sqrt{3}}{2g}\ddot{x}_4 = \frac{1}{2}P, \quad \frac{3P}{2g}\ddot{x}_4 + \frac{P\sqrt{3}}{2g}\ddot{x}_3 = \frac{1}{2}P$$

или

$$6,75\ddot{x}_3 + 1,73\ddot{x}_4 = g; \quad 3\ddot{x}_4 + 1,73\ddot{x}_3 = g.$$

Решаем данную систему как алгебраическую относительно ускорений $\ddot{x}_3$, $\ddot{x}_4$. Получим: $\ddot{x}_3 = 0,07g$, $\ddot{x}_4 = 0,29g$.

Интегрируя дважды эти уравнения с нулевыми начальными условиями, получим закон движения призмы ($x_3 = 0,035gt^2$) и центра масс катка 4 относительно призмы ($x_4 = 0,145gt^2$). Движение призмы и катка 4 относительно призмы происходит в положительном направлении осей.

Задача 74. Механическая система состоит из трёх тел – груза 1, катка 2 и блока 3 (рис. 6.38). Невесомый стержень, соединяющий каток 2 с блоком 3, параллелен горизонтальной плоскости качения катка 2. К центру катка 2 прикреплена горизонтальная пружина, другой конец которой соединён с грузом 1. Коэффициент жесткости пружины c . Груз 1 весом P_1 движется без трения по горизонтальной поверхности. Каток 2 весом P_2 катится по горизонтальной поверхности без скольжения. Радиус катка 2 равен r . Блок 3 считать однородным диском весом P_3 радиуса R . К блоку 3 приложена пара сил с моментом M . Движение катка 2 блоку 3 передаётся горизонтальным невесомым стержнем. Скольжение между стержнем и дисками отсутствует. В начальный момент система находилась в покое. При этом груз 1 находился в положении, при котором

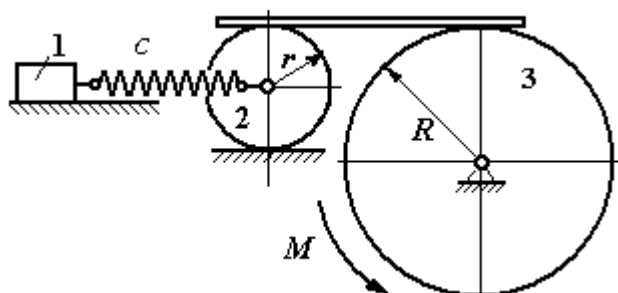


Рис. 6.38. Колебания механической системы с двумя степенями свободы

пружина была растянута относительно своего недеформированного состояния на величину Δl_0 .

Найти закон абсолютного движения груза 1, если известно $P_1 = 10 \text{ Н}$, $P_2 = 20 \text{ Н}$, $P_3 = 30 \text{ Н}$, $M = 5 \text{ Н} \cdot \text{м}$, $R = 24 \text{ см}$, $c = 207 \text{ Н/м}$, $\Delta l_0 = 5 \text{ см}$.

Решение

Рассматриваемая механическая система имеет две степени свободы. В качестве обобщенных координат выберем удлинение пружины x_1 относительно

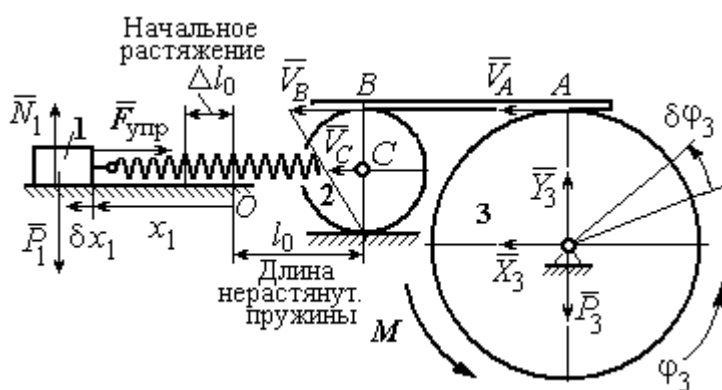


Рис. 6.39. Расчётная схема колебаний механической системы

но недеформированного состояния и угол φ_3 поворота блока 3 (рис. 6.39). При этом x_1 является относительной координатой движения груза, а φ_3 – абсолютной координатой вращения блока 3.

Рассмотрим сложное движение груза 1. Относительное движение груза – это его движение на пружине в предположении, что точка крепления пружины неподвижна. Относительная скорость $V_{1r} = \dot{x}_1$. Переносное движение – это перемещение груза вместе с фиксированной длиной пружины (иначе, заменяя пружину жестким стержнем). Переносная скорость груза 1 $V_{1e} = V_C$, где V_C – скорость центра масс катка 2.

На рис. 6.39 показано распределение скоростей точек катка 2, откуда следует: $V_C = \frac{1}{2}V_B$. Имеем: $V_B = V_A = \omega_3 R = \dot{\varphi}_3 R$ и $V_C = \frac{1}{2}\dot{\varphi}_3 R$.

Для того чтобы найти модуль абсолютной скорости груза 1, спроектируем векторное равенство теоремы сложения скоростей $\vec{V}_1 = \vec{V}_{1r} + \vec{V}_{1e}$ на горизон-

тальную ось. Полагая, что движение системы происходит в положительном направлении отсчета обобщённых координат, получим: $V_1 = \dot{x}_1 + \frac{1}{2}\dot{\phi}_3 R$.

Уравнения Лагранжа II рода, описывающие движение системы:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_1} = Q_x, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}_3}\right) - \frac{\partial T}{\partial \phi_3} = Q_\phi,$$

где T – кинетическая энергия системы; Q_x , Q_ϕ – обобщенные силы, соответствующие обобщенным координатам x_1 и ϕ_3 .

Вычислим кинетическую энергию системы и выразим её через обобщённые скорости.

Кинетическая энергия поступательного движения груза 1 определяется выражением $T_1 = \frac{1}{2}m_1 V_1^2$, где V_1 следует рассматривать как абсолютную скорость груза. Тогда $T_1 = \frac{1}{2}m_1 \left(\dot{x}_1 + \frac{1}{2}\dot{\phi}_3 R\right)^2$. Каток 2 совершает плоскопараллель-

ное движение. Кинетическая энергия катка $T_2 = \frac{3}{4}m_2 V_C^2$, причём $V_C = \frac{1}{2}\dot{\phi}_3 R$. Тогда $T_2 = \frac{3}{16}m_2 \dot{\phi}_3^2 R^2$. Кинетическая энергия вращающегося блока 3:

$T_3 = \frac{1}{2}J_{3z}\omega_3^2$, где J_{3z} – осевой момент инерции блока 3, $J_{3z} = \frac{m_3 R^2}{2}$. Оконча-

тельно $T_3 = \frac{1}{4}m_3 \dot{\phi}_3^2 R^2$.

Кинетическая энергия системы имеет вид:

$$\begin{aligned} T &= T_1 + T_2 + T_3 = \frac{1}{2}m_1 \left(\dot{x}_1 + \frac{1}{2}\dot{\phi}_3 R\right)^2 + \frac{3}{16}m_2 \dot{\phi}_3^2 R^2 + \frac{m_3 R^2}{4} \dot{\phi}_3^2 = \\ &= \frac{1}{2}m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_1 \dot{x}_1 \dot{\phi}_3 R + \left(\frac{1}{8}m_1 + \frac{3}{16}m_2 + \frac{1}{4}m_3\right) \dot{\phi}_3^2 R^2. \end{aligned}$$

Дадим системе возможное перемещение, при котором изменяется координата груза x_1 ($\delta x_1 > 0$), а другая координата – угол поворота блока 3 φ_3 остаётся постоянной ($\delta \varphi_3 = 0$). В этом случае груз 1 движется горизонтально, блок 3 и каток 2 – неподвижны. При таком движении работу будет производить только упругая сила пружины.

Модуль силы упругости пружины пропорционален её растяжению и в произвольном положении груза равен: $F_{\text{упр}} = c\Delta\ell = cx_1$. Направление силы упругости противоположно растяжению (см. рис. 6.39).

Сумма элементарных работ сил на заданном перемещении системы δx_1 : $\delta A = -F_{\text{упр}}\delta x_1 = -cx_1\delta x_1$. Отсюда обобщенная сила Q_x , соответствующая координате x_1 : $Q_x = -cx_1 = -207x_1$ Н.

Дадим системе другое возможное перемещение, при котором пружина не растягивается: $\delta x_1 = 0$, а блок 3 повернулся на угол $\delta \varphi_3$: $\delta \varphi_3 > 0$. В этом случае пружина рассматривается как жёсткий стержень, связывающий груз 1 с центром масс катка 2. В результате при повороте блока 3 груз 1 и точка С движутся одинаково в горизонтальном направлении. На этом перемещении системы работу совершает только пара сил с моментом M , приложенная к блоку 3. Имеем $\delta A = M\delta \varphi_3$, и, следовательно, обобщённая сила $Q_\varphi = M = 5$ Н·м.

Составим уравнения Лагранжа, для чего вычислим производные от кинетической энергии по обобщенным скоростям и координатам:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} = m_1 \dot{x}_1 + \frac{1}{2} m_1 R \dot{\varphi}_3; \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_3} = \frac{1}{2} m_1 R \dot{x}_1 + \left(\frac{1}{4} m_1 + \frac{3}{8} m_2 + \frac{1}{2} m_3 \right) \dot{\varphi}_3 R^2;$$

$$\frac{\partial T}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi_3} = 0.$$

Полные производные по времени:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} \right) = m_1 \ddot{x}_1 + \frac{1}{2} m_1 R \ddot{\varphi}_3; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_3} \right) = \frac{1}{2} m_1 R \ddot{x}_1 + \left(\frac{1}{4} m_1 + \frac{3}{8} m_2 + \frac{1}{2} m_3 \right) \ddot{\varphi}_3 R^2.$$

Приравнивая полные производные обобщённым силам, получим уравнения Лагранжа окончательно в виде системы алгебраических уравнений относительно ускорений $\ddot{x}_1$ и $\ddot{\phi}_3$:

$$1,02\ddot{x}_1 + 0,12\ddot{\phi}_3 = -207x_1; \quad 0,12\ddot{x}_1 + 0,15\ddot{\phi}_3 = 5.$$

Разрешая систему относительно ускорения $\ddot{x}_1$, получим уравнение относительно колебаний груза:

$$\ddot{x}_1 + 225x_1 = -4,35.$$

Решение линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами представляется в виде суммы общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного: $x_1 = x_{\text{одн}} + x_{\text{частн}}$.

Общее решение однородного уравнения $x_{\text{одн}} = C_1 \sin kt + C_2 \cos kt$, где C_1, C_2 – произвольные постоянные; k – круговая частота собственных колебаний груза 1, $k = \sqrt{225} = 15$ рад/с. Частное решение неоднородного уравнения ищется в виде константы $x_{\text{част}} = b$. Подставив его в уравнение колебаний, получим: $b = -0,02$.

Таким образом, общее решение неоднородного уравнения

$$x_1(t) = C_1 \sin 15t + C_2 \cos 15t - 0,02.$$

Начальная координата x_{01} груза 1 определяется из условия, что в начальный момент времени при $t = 0$ груз находился в положении, при котором пружина была растянута относительно своего недеформированного состояния на расстояние $\Delta l_0 = 0,05$ м. Следовательно, $x_{01} = 0,05$. Подставляя значение начальной координаты в общее решение неоднородного уравнения при $t = 0$, получим: $C_2 = 0,07$.

Относительная скорость груза 1 в любой момент времени: $\dot{x}_1(t) = C_1 15 \cos 15t - C_2 15 \sin 15t$. По условию задачи начальная скорость груза 1

$\dot{x}_1(0) = 0$. После подстановки начального условия в выражение для скорости груза 1 получим: $C_1 = 0$.

Окончательно уравнение относительного движения груза 1:

$$x_1(t) = 0,07\cos 15t - 0,02 \text{ м.}$$

Найдём уравнение вращательного движения блока 3. Для этого в дифференциальное уравнение $0,12\ddot{x}_1 + 0,15\ddot{\varphi}_3 = 5$ подставим значение второй производной решения относительных колебаний груза 1. Получим:

$\ddot{\varphi}_3 = 33,33 + 12,6\cos 15t$. Полагая $\ddot{\varphi}_3 = \frac{d\omega_3}{dt}$, получим дифференциальное урав-

нение первого порядка: $\frac{d\omega_3}{dt} = 33,33 + 12,6\cos 15t$, откуда найдём угловую скорость блока 3: $\omega_3 = 33,33t + 0,84\sin 15t + C_3$.

Аналогично, положив $\omega_3 = \frac{d\varphi_3}{dt}$, найдём закон вращательного движения

блока 3: $\varphi_3 = 16,665t^2 - 0,056\cos 15t + C_3t + C_4$.

Начальные условия движения блока: при $t = 0$, $\varphi_3(0) = 0$, $\omega_3(0) = 0$. Подставляя начальные условия в уравнения движения, получим: $C_4 = 0,056$, $C_3 = 0$.

Окончательно уравнение вращательного движения блока 3:

$$\varphi_3 = 16,665t^2 - 0,056\cos 15t + 0,056.$$

Абсолютное движение s_1 груза 1 представляется суммой относительного и переносного движений:

$$s_1 = x_1 + S_C = x_1 + \frac{1}{2}R\varphi_3 = 2t^2 - 0,06\cos 15t - 0,01.$$

Упражнения

Упражнение 6.6. Каток весом $P_1 = 2P$, радиуса r , движущийся без проскальзывания по вертикальной стене, удерживается вертикальной пружиной жесткостью $C = 4P/r$, прикрепленной одним концом к центру катка, другим – к неподвижной поверхности (рис. 6.40). К нити, намотанной на барабан катка, подвешен груз 2 весом $P_2 = P$. На груз действует сила $F = P$, к катку приложена пара сил с моментом $M = Pr$.

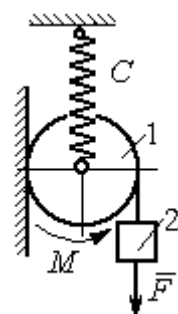


Рис. 6.40. Схема движения катка

Упражнение 6.7. Грузы 1 и 2 весом $P_1 = 20$ Н и $P_2 = 30$

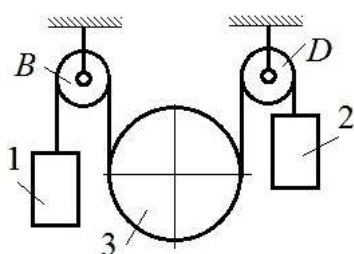


Рис. 6.41. Механическая система с двумя степенями свободы

Н привязаны к нерастяжимой нити. Нить переброшена через неподвижные блоки B и D и охватывает снизу подвижный блок 3 весом $P_3 = 40$ Н (рис. 6.41).

Определить ускорения грузов 1 и 2 и центра масс блока 3. Весом нити и неподвижных блоков B и D пренебречь.

Упражнение 6.8. Каток 1, радиуса r весом P катится по горизонтальной поверхности. К катку приложена пара сил с моментом $M = 2Pr$. Каток передает движение невесомой тележке (см. рис. 6.42). В кузове тележки находится каток 2 такого же радиуса r и веса P , который движется по горизонтальной поверхности кузова под действием силы $F = P$, приложенной в центре катка. Найти закон движения центра катка 2 относительно тележки, если движение системы началось из состояния покоя.

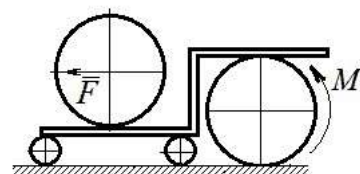


Рис. 6.42. Движение катка в кузове тележки

7. ОТВЕТЫ И КРАТКИЕ ПОЯСНЕНИЯ

7.1. Ответы к упражнениям главы 1

1.1

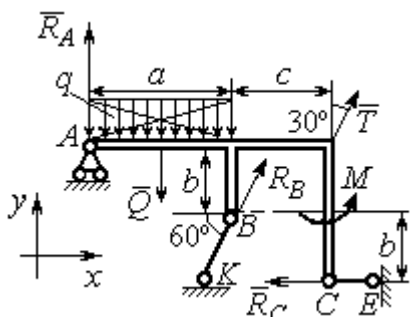


Рис. 7.1. Расчётная схема к упражнению 1.1

$$T = 15 \text{ кН}, Q = 15 \text{ кН}.$$

$$R_B \cos 60^\circ + T \cos 60^\circ - R_C = 0;$$

$$R_A - Q + R_B \cos 30^\circ + T \cos 30^\circ = 0;$$

$$-Q \cdot \frac{a}{2} + R_B \cos 30^\circ \cdot a + R_B \cos 60^\circ \cdot b + T \cos 30^\circ \cdot (a + c) + M - R_C \cdot 2b = 0.$$

$$R_B = -3,8 \text{ кН}, R_C = 5,6 \text{ кН}, R_A = 5,3 \text{ кН}.$$

1.2

$$Q = 9 \text{ кН}, T = 2 \text{ кН}.$$

$$X_A + T \cos 30^\circ + Q \cos 30^\circ = 0;$$

$$Y_A - Q \cos 60^\circ + R_B - T \cos 60^\circ - F = 0;$$

$$-Q \cdot \frac{c}{2} + R_B (b + c \cos 60^\circ) - F c \cos 60^\circ + M -$$

$$-T \cos 60^\circ (b + c \cos 60^\circ) - T \cos 30^\circ (a + c \sin 60^\circ) = 0.$$

$$R_B = 10,02 \text{ кН}, X_A = -9,53 \text{ кН}, Y_A = -0,52 \text{ кН}.$$

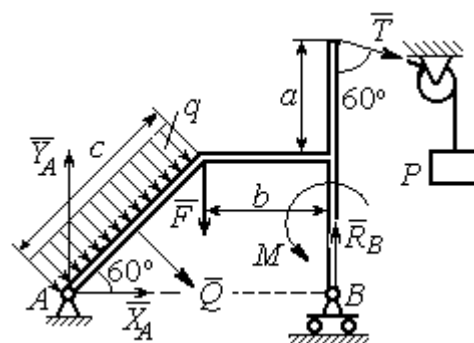


Рис. 7.2. Расчётная схема к упражнению 1.2

1.3

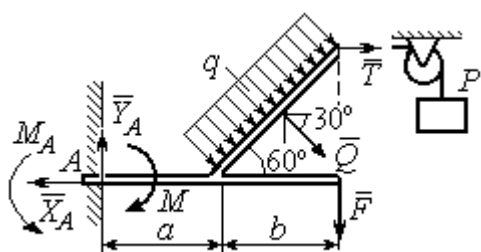


Рис. 7.3. Расчётная схема к упражнению 1.3

$$Q = 8 \text{ кН}, T = 3 \text{ кН}.$$

$$-X_A + T + Q \cos 30^\circ = 0;$$

$$Y_A - Q \cos 60^\circ - F = 0;$$

$$-T 2b \cos 30^\circ - F(a + b) + M_A - M -$$

$$-Q \cos 60^\circ \left(a + \frac{b}{2} \right) - Q \cos 30^\circ (b \cos 30^\circ) = 0.$$

$$M_A = 18,61 \text{ кН} \cdot \text{м}, X_A = 9,93 \text{ кН}, Y_A = 6 \text{ кН}.$$

1.4

$$Q = 6,93 \text{ кН}, T = 2 \text{ кН}.$$

$$-X_B - T + Q\cos 30^\circ + F\cos 60^\circ = 0;$$

$$R_A - Q\cos 60^\circ + Y_B - F\cos 30^\circ = 0;$$

$$-\frac{Qa}{2\cos 30^\circ} + Y_B\left(b + \frac{a}{2\cos 30^\circ}\right) + Ta - F\cos 60^\circ -$$

$$-F\cos 30^\circ\left(b + \frac{a}{2\cos 30^\circ}\right) + M = 0.$$

$$R_A = 0,72 \text{ кН}, X_B = -5,5 \text{ кН}, Y_B = 5,34 \text{ кН}.$$

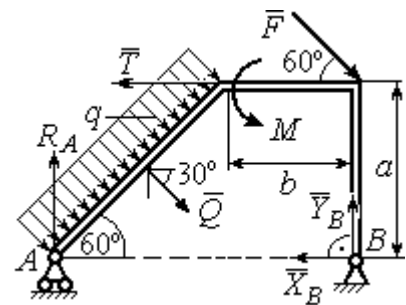


Рис.7.4. Расчётная схема к упражнению 1.4

1.5

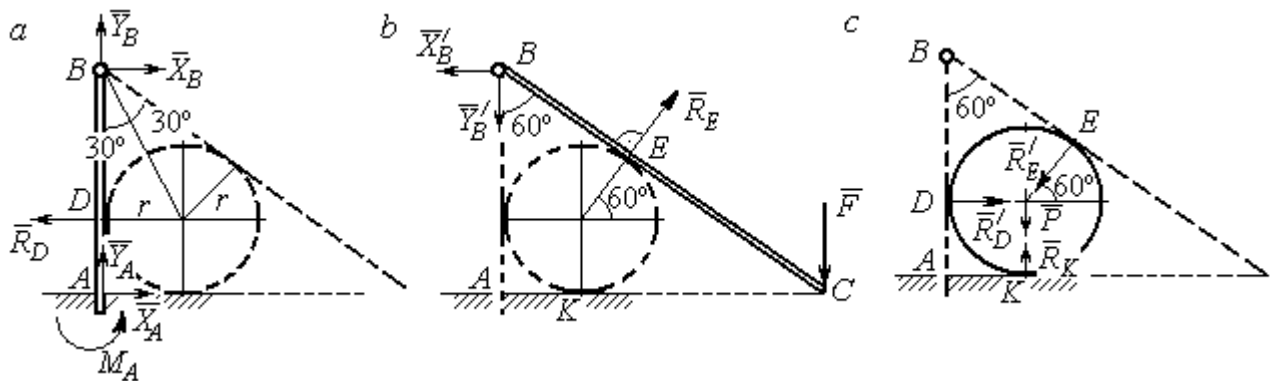


Рис. 7.5. Расчётные схемы к упражнению 1.5:
a – равновесие балки AB; b – равновесие балки BC; c – равновесие шара

$$X_B = X'_B, Y_B = Y'_B, R_D = R'_D, R_E = R'_E.$$

$$\text{Балка } AB. AB = r + BD = r + r\operatorname{ctg} 30^\circ = 2,73 \text{ м}.$$

$$X_A - R_D + X_B = 0, Y_A + Y_B = 0, M_A + R_D \cdot r - X_B \cdot AB = 0.$$

$$\text{Балка } BC. BE = BD = 1,73 \text{ м}. AC = BC\cos 30^\circ = 2AB\cos 30^\circ = 4,73 \text{ м}.$$

$$R_E\cos 60^\circ - X'_B = 0, RE\sin 60^\circ - Y'_B - F = 0, R_E \cdot BE - F \cdot AC = 0.$$

Шар.

$$R'_D - R'_E\cos 60^\circ = 0, R_K - P - R'_E\cos 30^\circ = 0.$$

$$R_E = 21,87 \text{ кН}, Y_B = 10,94 \text{ кН}, X_B = 10,94 \text{ кН}, R_D = 10,94 \text{ кН};$$

$$R_K = 20,94 \text{ кН}, X_A = 0, Y_A = -10,94 \text{ кН}, M_A = 18,93 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

1.6

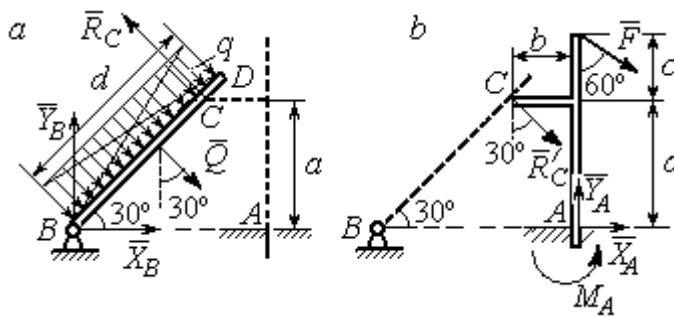


Рис. 7.6. Расчётные схемы к упражнению № 1.6:
а – равновесие балки BD ; б – равновесие балки AC

Балка BD . $Q = 15$ кН.

$$X_B + Q \cos 60^\circ - R_C \cos 30^\circ = 0;$$

$$Y_B - Q \cos 30^\circ + R_C \cos 60^\circ = 0;$$

$$-Q \frac{d}{2} + R_C 2a = 0.$$

Балка AC . $R_C = R'_C$.

$$X_A + R'_C \cos 60^\circ + F \cos 30^\circ = 0, \quad Y_A - R'_C \cos 30^\circ - F \cos 60^\circ = 0;$$

$$M_A - R'_C \cos 60^\circ \cdot a + R'_C \cos 30^\circ \cdot b - F \cos 30^\circ (a + c) = 0.$$

$$X_B = 0,61 \text{ кН}, \quad Y_B = 8,3 \text{ кН}, \quad R_C = 9,37 \text{ кН};$$

$$X_A = -8,15 \text{ кН}, \quad Y_A = 10,11 \text{ кН}, \quad M_A = 11,65 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

1.7

Балка AB . $Q_1 = 6$ кН.

$$T = P = 3 \text{ кН}.$$

$$X_A + R_B - T \cos 60^\circ + F = 0;$$

$$Y_A - Q_1 - T \cos 30^\circ = 0;$$

$$M_A - R_B(b + c) \cos 30^\circ + Q_1 \frac{a}{2} +$$

$$+ T \cos 30^\circ a + T \cos 60^\circ c \cos 30^\circ -$$

$$- F[c + (b + c) \cos 30^\circ] = 0.$$

Балка DB . $Q_2 = 3$ кН. $R'_B = R_B$.

$$X_D - R'_B - Q_2 \cos 30^\circ = 0, \quad Y_D - Q_2 \cos 60^\circ = 0, \quad M + R'_B(b + c) \cos 30^\circ + Q_2 \frac{c}{2} = 0.$$

$$X_A = -1,49 \text{ кН}, \quad Y_A = 8,6 \text{ кН}, \quad M_A = 8,86 \text{ кН} \cdot \text{м}, \quad R_B = -1,01 \text{ кН};$$

$$X_D = 1,59 \text{ кН}, \quad Y_D = 1,5 \text{ кН}.$$

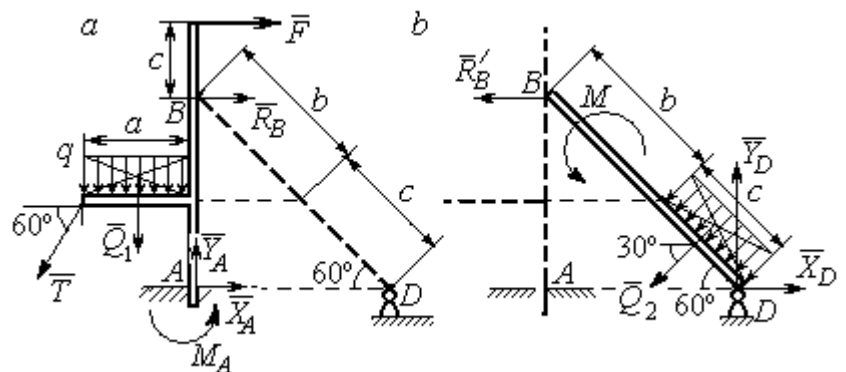


Рис. 7.7. Расчётные схемы к упражнению 1.7:
а – равновесие балки AB ; б – равновесие балки BD

1.8

Шар.

$$R_B \cos 60^\circ - R_D \cos 60^\circ = 0;$$

$$R_B \cos 30^\circ + R_D \cos 30^\circ - P = 0.$$

Балка AC. $R'_B = R_B$.

$$X_A - R'_B \cos 60^\circ = 0;$$

$$Y_A - R'_B \cos 30^\circ + F = 0;$$

$$M_A - R'_B AB + F \cdot AC \cos 30^\circ = 0.$$

$$X_A = 2,89 \text{ кН}, Y_A = 0 \text{ кН}, M_A = -11,55 \text{ кН} \cdot \text{м}, R_B = 5,77 \text{ кН}, R_D = 5,77 \text{ кН}.$$

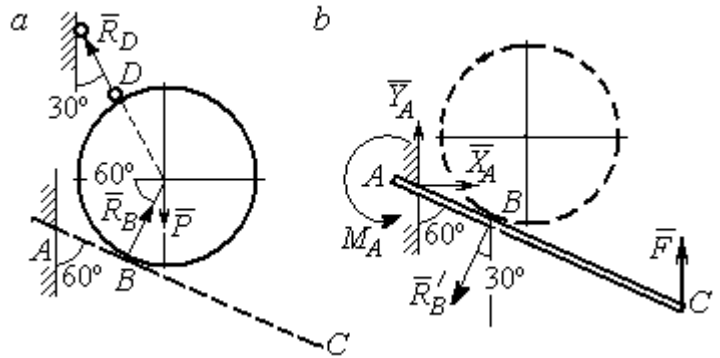


Рис. 7.8. Расчётные схемы к упражнению 1.8:
а – равновесие шара; б – равновесие балки AC

1.9

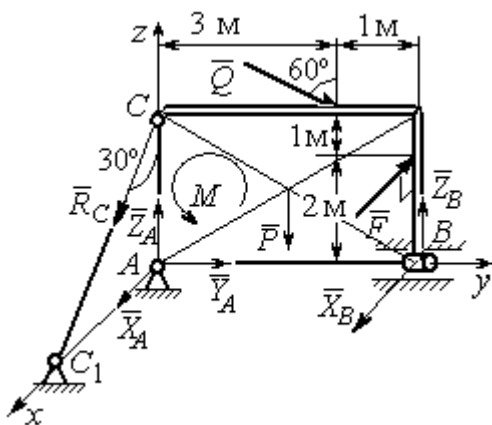


Рис. 7.9. Расчётная схема
к упражнению 1.9

$$X_A + R_C \cos 60^\circ + X_B - F = 0;$$

$$Y_A + Q \cos 30^\circ = 0;$$

$$Z_A - R_C \cos 30^\circ - Q \cos 60^\circ + Z_B - P = 0;$$

$$M - Q \cos 60^\circ \cdot 3 - Q \cos 30^\circ \cdot 3 + Z_B \cdot 4 - P \cdot 2 = 0;$$

$$R_C \cos 60^\circ \cdot 3 - F \cdot 2 = 0, -X_B \cdot 4 + F \cdot 4 = 0.$$

$$X_A = 5,34 \text{ кН}, Y_A = 2,6 \text{ кН};$$

$$Z_A = 8,92 \text{ кН}, R_C = 10,67 \text{ кН};$$

$$X_B = 8 \text{ кН}, Z_B = 3,82 \text{ кН}.$$

1.10

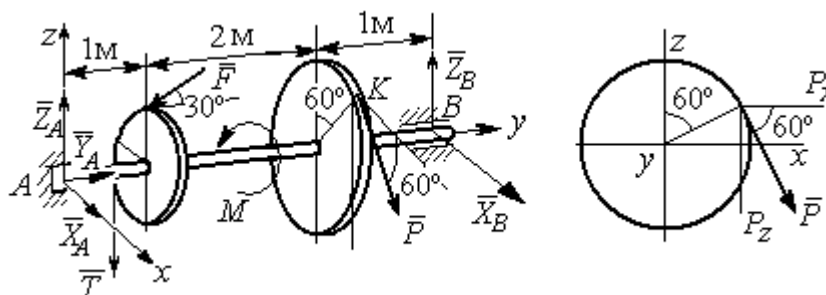


Рис. 7.10. Расчётные схемы к упражнению 1.10

$$T = Q = 3 \text{ кН.}$$

$$X_A + P\cos 60^\circ + X_B = 0, \quad Y_A - F\cos 30^\circ = 0;$$

$$Z_A - F\cos 60^\circ - P\cos 30^\circ - T + Z_B = 0.$$

$$-T \cdot 1 - F\cos 60^\circ \cdot 1 + F\cos 30^\circ \cdot r - P\cos 30^\circ \cdot 3 + Z_B \cdot 4 = 0;$$

$$-Tr + PR - M = 0, \quad -P\cos 60^\circ \cdot 3 + X_B \cdot 4 = 0.$$

$$X_A = 5,6 \text{ кН}, \quad Y_A = 3,46 \text{ кН}, \quad Z_A = 5,48 \text{ кН}, \quad P = 6,4 \text{ кН}, \quad X_B = 2,4 \text{ кН}, \quad Z_B = 5,06 \text{ кН}.$$

1.11

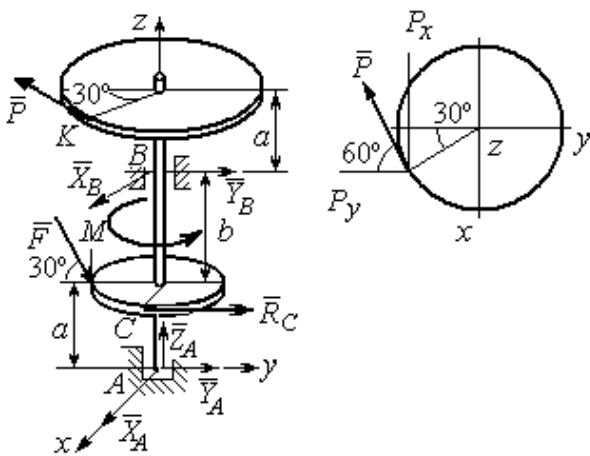


Рис. 7.11. Расчётные схемы к упражнению 1.11

$$R_C = Q = 3 \text{ кН.}$$

$$X_A + X_B - P\cos 30^\circ = 0;$$

$$Y_A + Y_B - P\cos 60^\circ + R_C + F\cos 30^\circ = 0;$$

$$Z_A - F\cos 60^\circ = 0;$$

$$-Y_B(a+b) + P\cos 60^\circ(2a+b) - R_C a -$$

$$F\cos 30^\circ \cdot a + F\cos 60^\circ \cdot r = 0;$$

$$X_B(a+b) - P\cos 30^\circ(2a+b) = 0;$$

$$-PR + R_C r + M = 0.$$

$$X_A = -1,85 \text{ кН}, \quad Y_A = -5,64 \text{ кН}, \quad Z_A = 2 \text{ кН}, \quad P = 6,4 \text{ кН}, \quad X_B = 7,39 \text{ кН}, \quad Y_B = 2,38 \text{ кН}.$$

1.12

$$T = Q = 3 \text{ кН.}$$

$$X_A + T + X_D = 0; \quad Y_A - F + P\cos 60^\circ = 0,$$

$$Z_A + Z_D + P\cos 30^\circ = 0;$$

$$F\sin 30^\circ + Z_D(b+2a) + P(2b+2a)\cos 30^\circ = 0;$$

$$T\sin 30^\circ - P\cos 30^\circ + M = 0;$$

$$-Ta - X_D(b+2a) + P\cos 60^\circ + F\cos 30^\circ = 0.$$

$$X_A = 0,8 \text{ кН}, \quad Y_A = 2,56 \text{ кН}, \quad Z_A = 1,3 \text{ кН};$$

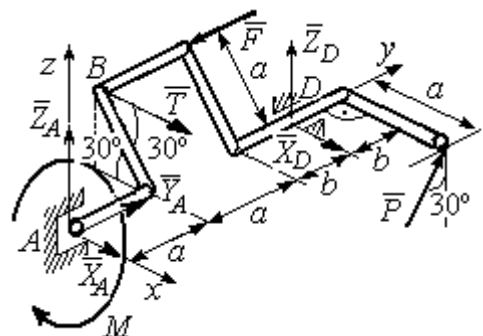


Рис. 7.12. Расчётная схема к упражнению 1.12

$$P = 2,89 \text{ кН}, \quad X_D = 0,76 \text{ кН}, \quad Z_D = -3,80 \text{ кН}.$$

1.13

Минимальный вес груза P :

$$T_{\min} + F_{\text{тр}A} - N_B = 0;$$

$$F_{\text{тр}B} + N_A - Q = 0;$$

$$F_{\text{тр}B} \cdot AB \sin 30^\circ + N_B \cdot AB \cos 30^\circ - Q \cdot AC \sin 30^\circ = 0$$

Максимальный вес груза P :

$$T_{\max} - F_{\text{тр}A} - N_B = 0;$$

$$-F_{\text{тр}B} + N_A - Q = 0;$$

$$-F_{\text{тр}B} \cdot AB \sin 30^\circ + N_B \cdot AB \cos 30^\circ - Q \cdot AC \sin 30^\circ = 0;$$

$$F_{\text{тр}A} = f N_A, \quad F_{\text{тр}B} = f N_B.$$

$$T_{\min} = 31,77 \text{ Н} < P < T_{\max} = 130,51 \text{ Н}.$$

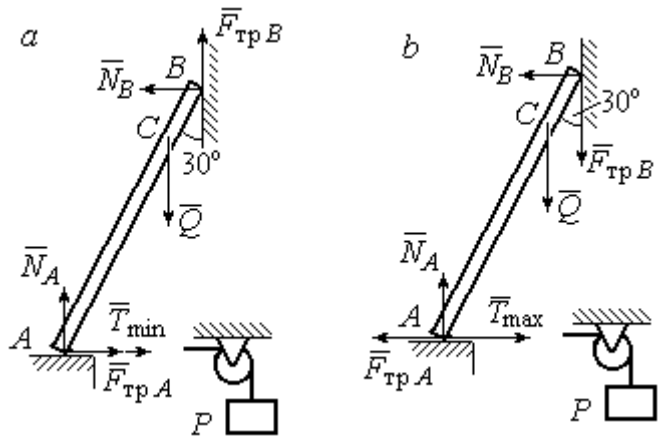


Рис. 7.13. Расчётные схемы к упражнению 1.13:
а – расчёт минимального веса груза;
б – расчёт максимального веса груза

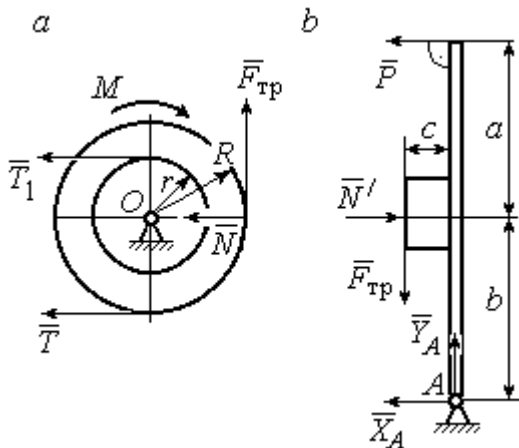


Рис. 7.14. Расчётные схемы
к упражнению 1.14:

а – равновесие шкива; б – равновесие рычага

1.14

Шкив. $T = T_1 = Q$.

$$T \cdot R - T_1 r + M - F_{\text{тр}} R = 0.$$

$$F_{\text{тр}} = 266,67 \text{ Н};$$

$$N = \frac{F_{\text{тр}}}{f} = 666,67 \text{ Н}.$$

Рычаг. $N = N'$. $F_{\text{тр}} = F'_{\text{тр}}$.

$$P(a + b) - N' \cdot b + F'_{\text{тр}} c = 0.$$

$$P = 320 \text{ Н}.$$

$$-X_A - P + N' = 0;$$

$$Y_A - F'_{\text{тр}} = 0.$$

$$X_A = 346,67 \text{ Н}, \quad Y_A = 266,67 \text{ Н}.$$

7.2. Ответы к упражнениям главы 2

2.1

$$\omega_{1z} = \dot{\phi}_1 = 3 + \pi \cos \frac{\pi t}{2}, \quad \omega_1(1) = |\omega_{1z}(1)| = 3 \text{ рад/с.}$$

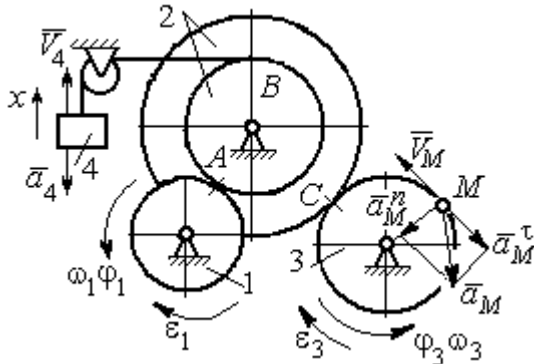


Рис. 7.15. Расчётная схема к упражнению 2.1

$$\omega_{3z} = \omega_{1z} \frac{R_1}{r_2} \frac{R_2}{R_3} = \left(3 + \pi \cos \frac{\pi t}{2} \right) \frac{4}{3};$$

$$\omega_3(1) = |\omega_{3z}(1)| = 4 \text{ рад/с.}$$

$$V_M(1) = \omega_3(1) R_3 = 40 \text{ см/с.}$$

$$\varepsilon_{3z} = \dot{\omega}_{3z} = -\frac{2\pi^2}{3} \sin \frac{\pi t}{2}, \quad \varepsilon_{3z}(1) = -\frac{2\pi^2}{3};$$

$$\varepsilon_3(1) = |\varepsilon_{3z}(1)| = \frac{2\pi^2}{3} = 6,58 \text{ рад/с}^2.$$

$$\bar{a}_M = \bar{a}_M^n + \bar{a}_M^\tau, \quad a_M^n(1) = \omega_3^2(1) R_3 = 160 \text{ см/с}^2, \quad a_M^\tau(1) = \varepsilon_3(1) R_3 = 65,8 \text{ см/с}^2.$$

$$a_M(1) = 173 \text{ см/с}^2.$$

$$V_{4x} = V_A = \omega_{1z} R_1 = \left(3 + \pi \cos \frac{\pi t}{2} \right) 8; \quad V_4(1) = |V_{4x}(1)| = 24 \text{ см/с.}$$

$$\dot{V}_{4x} = -4\pi^2 \sin \frac{\pi t}{2}, \quad \dot{V}_{4x}(1) = -4\pi^2; \quad a_4(1) = |\dot{V}_{4x}(1)| = 39,48 \text{ см/с}^2.$$

2.2

$$V_{4x} = \dot{x}_4 = 1 - \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi t}{3} - \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi t}{3};$$

$$V_{4x}(3) = 2,05 \text{ м/с}, \quad V_4 = |V_{4x}(3)|$$

$$\omega_{3z} = \frac{V_{4x}}{r_3} = \frac{1}{r_3} \left(1 - \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi t}{3} - \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi t}{3} \right);$$

$$\omega_{3z}(3) = 6,83 \text{ рад/с}; \quad \omega_3 = |\omega_{3z}(3)|.$$

$$\varepsilon_{3z} = \dot{\omega}_{3z} = \frac{1}{r_3} \left(\frac{\pi^2}{9} \sin \frac{\pi t}{3} - \frac{\pi^2}{9} \cos \frac{\pi t}{3} \right).$$

$$\varepsilon_{3z}(3) = 3,65 \text{ рад/с}^2; \quad \varepsilon_3 = |\varepsilon_{3z}(3)|.$$

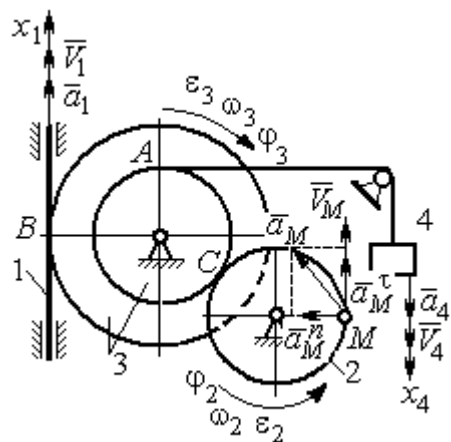


Рис. 7.16. Расчётная схема к упражнению 2.2

$$\frac{\omega_3}{\omega_2} = \frac{R_2}{r_3}; \quad \omega_2 = \omega_3 \frac{r_3}{R_2} = 10,25 \text{ рад/с}; \quad V_M = \omega_2 R_2 = 2,05 \text{ м/с}.$$

$$\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2} = \frac{R_2}{r_3}; \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_3 \frac{r_3}{R_2} = 5,47 \text{ рад/с}^2.$$

$$a_M^n = \omega_2^2 R_2 = 20,4 \text{ м/с}^2; \quad a_M^\tau = \varepsilon_2 R_2 = 1,09 \text{ м/с}^2.$$

$$a_M = \sqrt{(a_M^n)^2 + (a_M^\tau)^2} = 20,43 \text{ м/с}^2.$$

$$V_1 = \omega_3 R_3 = 2,73 \text{ м/с}; \quad a_1 = \dot{V}_1 = \dot{\omega}_3 R_3 = \varepsilon_3 R_3 = 2,19 \text{ м/с}^2.$$

2.3

$$BP_2 = BC \cos 30^\circ = 4,33 \text{ см}; \quad CP_2 = 2,5 \text{ см}.$$

$$\omega_{BC} = \frac{V_B}{BP_2} = 1,15 \text{ рад/с}; \quad V_C = \omega_{BC} CP_2 = 2,87 \text{ см/с};$$

$$\omega_1 = \frac{V_C}{CP_1} = 0,72 \text{ рад/с}; \quad EP_1 = 2R_1 \cos 30^\circ = 3,46 \text{ см};$$

$$V_E = \omega_1 EP_1 = 2,49 \text{ см/с}; \quad EP_3 = 2AE \cos 30^\circ = 10,39 \text{ см};$$

$$\omega_{AE} = \frac{V_E}{EP_3} = 0,24 \text{ рад/с}; \quad EA = AP_3;$$

$$V_A = \omega_{AE} AP_3 = 1,44 \text{ см/с}, \quad \omega_{AO} = \frac{V_A}{AO} = 0,24 \text{ рад/с}.$$

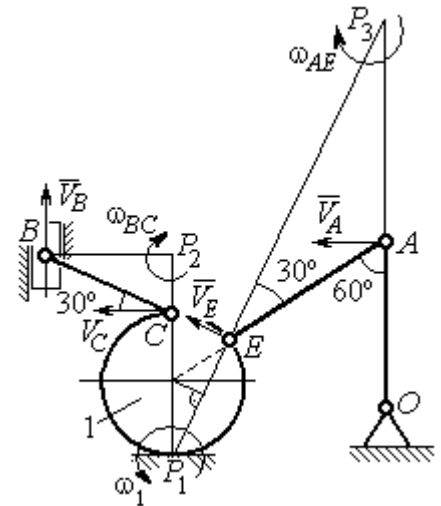


Рис. 7.17. Расчётная схема к упражнению 2.3

2.4

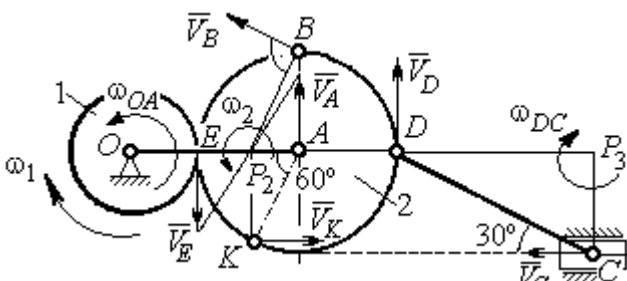


Рис. 7.18. Расчётная схема к упражнению 2.4

E – точка касания дисков.

$$V_E = \omega_1 r_1 = 18 \text{ см/с}.$$

$$V_A = \omega_{OA} (r_1 + r_2) = 18 \text{ см/с}.$$

$$EP_2 = P_2A = 3 \text{ см}, \quad \omega_2 = \frac{V_E}{EP_2} = 6 \text{ рад/с}.$$

$$V_K = \omega_2 P_2K = 31,18 \text{ см/с}.$$

$$V_B = \omega_2 P_2B = 40,25 \text{ см/с}; \quad V_D = \omega_2 P_2D = 54 \text{ см/с}.$$

$$DC = 2r_2, \omega_{DC} = \frac{V_D}{DP_3} = 5,197 \text{ рад/с}; V_C \cos 30^\circ = V_D \cos 60^\circ, V_C = 31,18 \text{ см/с}.$$

2.5

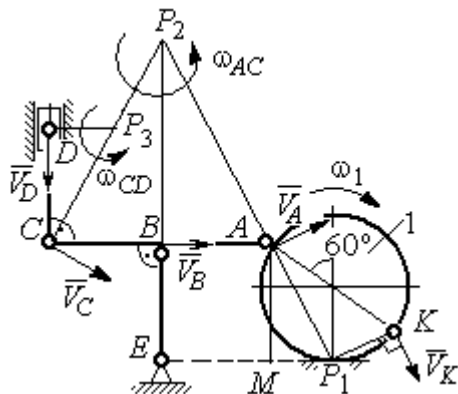


Рис. 7.19. Расчётная схема к упражнению 2.5.

$$BE = 1,5R_1; R_1 = 2,67 \text{ см}.$$

$$KP_1 = R_1; \omega_1 = \frac{V_K}{KP_1} = 0,75 \text{ рад/с}.$$

$$AP_1 = \frac{AM}{\cos 30^\circ} = 4,62 \text{ см}; V_A = \omega_1 P_1 A = 3,46 \text{ см/с}.$$

$$AP_2 = 2AB = 8 \text{ см}; \omega_{AC} = \frac{V_A}{AP_2} = 0,43 \text{ рад/с}.$$

$$V_B \cos 0^\circ = V_A \cos 30^\circ; V_B = 2,99 \text{ см/с}.$$

$$\omega_{BE} = \frac{V_B}{BE} = 0,75 \text{ рад/с}; V_C = V_A = 3,46 \text{ см/с}; CP_3 = \frac{DC}{\cos 30^\circ} = 4,62 \text{ см};$$

$$\omega_{CD} = \frac{V_C}{CP_3} = 0,75 \text{ рад/с}; V_D \cos 0^\circ = V_C \cos 60^\circ; V_D = 1,73 \text{ см/с}.$$

2.6

$$V_A = \omega_{OA} \cdot OA = 12 \text{ см/с}; \omega_{AD} = 0, V_D = V_A.$$

$$\omega_{O_1C} = \frac{V_D}{DO_1} = 3 \text{ рад/с};$$

$$V_C = \omega_{O_1C} \cdot O_1C = 48 \text{ см/с}.$$

$$CB = CP = 16 \text{ см}; \omega_{CB} = \omega_{CL} = \frac{V_C}{CP} = 3 \text{ рад/с}.$$

$$PL = \frac{CP}{\cos 30^\circ} = 18,48 \text{ см}; PB = 2BC \cos 30^\circ.$$

$$V_L = \omega_{CL} \cdot PL = 55,44 \text{ см/с};$$

$$V_B = \omega_{CB} \cdot PB = 83,13 \text{ см/с}.$$

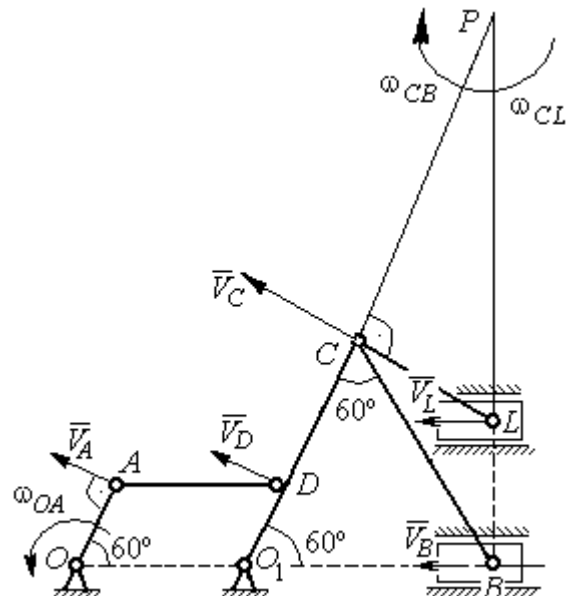


Рис. 7.20. Расчётная схема к упражнению 2.6.

2.7

$$V_D = \omega_1 R_1 = 30 \text{ cm/c}; \quad V_A = \omega_{OA} \cdot OA = 15 \text{ cm/c}.$$

$$\omega_2 = \frac{V_A}{AP_2} = 3 \text{ рад/с.}$$

$$V_B = \omega_2 \cdot P_2 B = 21,21 \text{ cm/c.}$$

$$V_C \cos 0^\circ = V_B \cos 45^\circ; V_C = 15 \text{ cm/c.}$$

$$CP_3 = CB; \omega_{BC} = \frac{V_C}{CP_3} = 1,87 \text{ рад/с.}$$

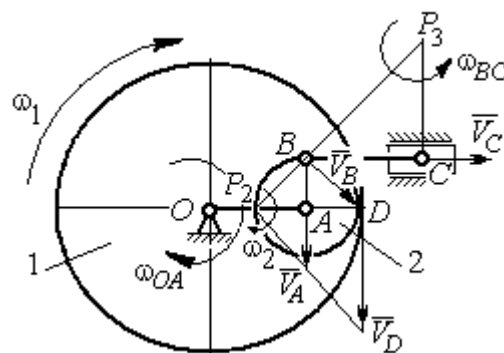


Рис. 7.21. Расчётная схема к упражнению 2.7

2.8

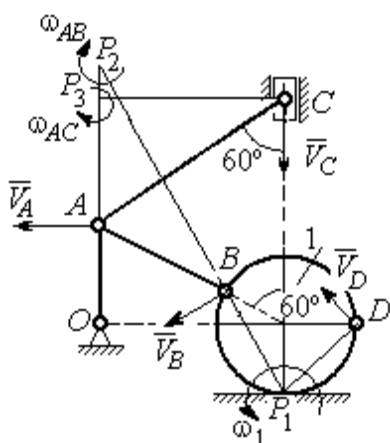


Рис. 7.22. Расчётная схема к упражнению 2.8

$$AC = AB + R_1 = 12 \text{ см}; CP_3 = AC \cos 30^\circ = 10,39 \text{ см}.$$

$$\omega_{AC} = \frac{V_C}{CP_3} = 0,48 \text{ рад/с}; V_A = \omega_{AC} \cdot AP_3 = 2,89 \text{ см/с}.$$

$$AB = AP_2; \quad \omega_{AB} = \frac{V_A}{AP_2} = 0,29 \text{ рад/с.}$$

$$BP_7 = 2AB\cos 30^\circ = 17,32 \text{ cm.}$$

$$V_B = \omega_{AB}BP_2 = 5,02 \text{ см/с.}$$

$$OA = (AB + R_1) \sin 30^\circ = 6 \text{ см}; \quad \omega_{OA} = \frac{V_A}{AO} = 0,48 \text{ рад/с}.$$

$$BP_1 = 2R_1 \cos 30^\circ = 3,46 \text{ см}; \quad \omega_1 = \frac{V_B}{BP_1} = 1,45 \text{ рад/с}.$$

$$DP_1 = R_1 \sqrt{2} = 2,82 \text{ см}; V_D = \omega_1 DP_1 = 4,09 \text{ см/с}.$$

2.9

$$V_A = \omega_{OA} OA = 12 \text{ cm/c}; \quad AP = 2AB = 2BC \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = 27,71 \text{ cm}.$$

$$\omega_{AB} = \frac{V_A}{AP} = 0,43 \text{ рад/с}; V_B \cos 0^\circ = V_A \cos 30^\circ; V_B = 10,38 \text{ см/с}.$$

$$\omega_{BC} = \frac{V_B}{BC} = 1,29 \text{ рад/с.}$$

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^\tau; \quad \bar{a}_B = \bar{a}_C + \bar{a}_{BC}^n + \bar{a}_{BC}^\tau, \quad a_C = 0.$$

$$\bar{a}_A = \bar{a}_O + \bar{a}_{AO}^n + \bar{a}_{AO}^\tau, a_O = 0.$$

$$\bar{a}_{BC}^n + \bar{a}_{BC}^\tau = \bar{a}_{AO}^n + \bar{a}_{AO}^\tau + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^\tau. \text{ Найти } a_{BC}^\tau$$

$$a_{AO}^n = \omega_{AO}^2 \cdot AO = 36 \text{ см/с}^2;$$

$$a_{AO}^\tau = \varepsilon_{AO} \cdot AO = 8 \text{ см/с}^2;$$

$$AB = BC \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = 13,86 \text{ см.}$$

$$a_{BA}^n = \omega_{AB}^2 \cdot AB = 2,56 \text{ см/с}^2; a_{AB}^\tau = \varepsilon_{AB} AB.$$

$$a_{BC}^n = \omega_{BC}^2 \cdot BC = 13,31 \text{ см/с}^2; a_{BC}^\tau = \varepsilon_{BC} BC.$$

Проекция на AB:

$$a_{BC}^\tau = -a_{AO}^n \cos 60^\circ + a_{AO}^\tau \cos 30^\circ - a_{BA}^n = 13,63 \text{ см/с}^2.$$

$$\varepsilon_{BC} = \frac{|a_{BC}^\tau|}{BC} = 1,7 \text{ рад/с}^2.$$

$$\bar{a}_D = \bar{a}_{DC}^n + \bar{a}_{DC}^\tau.$$

$$a_{DC}^n = \omega_{BC}^2 \cdot DC = 6,65 \text{ см/с}^2; a_{DC}^\tau = \varepsilon_{BC} \cdot DC = 6,8 \text{ см/с}^2.$$

$$a_D = \sqrt{(a_{DC}^n)^2 + (a_{DC}^\tau)^2} = 9,51 \text{ см/с}^2.$$

2.10

$$V_A = \omega_1 r_1 = 12 \text{ см/с}; P_2 A = \frac{1}{2} BC = 5 \text{ см.}$$

$$\omega_{AB} = \frac{V_A}{P_2 A} = 2,4 \text{ рад/с.}$$

$$V_B \cos 30^\circ = V_A \cos 60^\circ; V_B = 6,93 \text{ см/с.}$$

$$P_3 B = BC \cos 30^\circ = 8,66 \text{ см;}$$

$$\omega_{BC} = \frac{V_B}{P_3 B} = 0,8 \text{ рад/с.}$$

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^\tau. \text{ Найти } a_B.$$

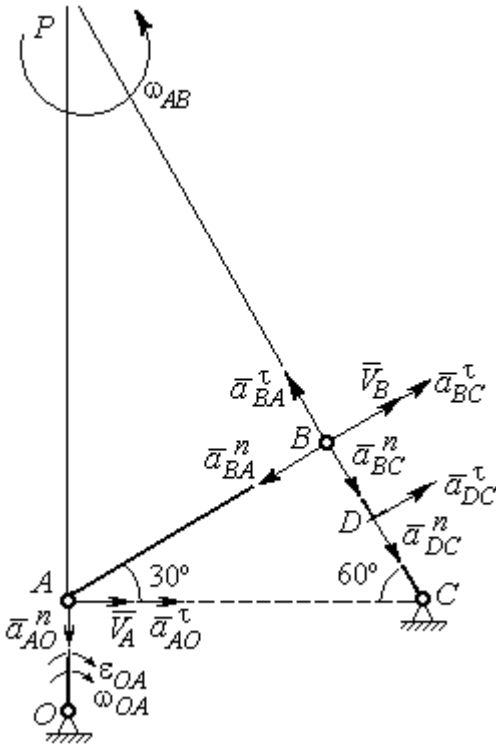


Рис. 7.23. Расчётная схема к упражнению 2.9

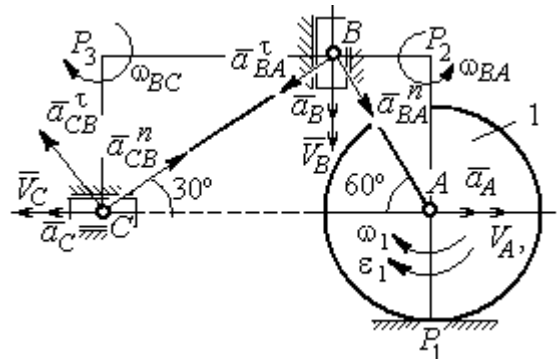


Рис. 7.24. Расчётная схема к упражнению 2.10

Проекция на BA : $a_B \cos 30^\circ = a_A \cos 60^\circ + a_{BA}^n$.

$$a_A = a_A^\tau = \varepsilon_1 r_1 = 8 \text{ cm/c}^2; AB = BC \operatorname{tg} 30^\circ = 5,77 \text{ cm.}$$

$$a_{BA}^n = \omega_{BA}^2 \cdot BA = 33,23 \text{ cm/c}^2; \quad a_B = 43,03 \text{ cm/c}^2.$$

$$\bar{a}_C = \bar{a}_B + \bar{a}_{CB}^n + \bar{a}_{CB}^\tau.$$

Проекция на BC : $a_C \cos 60^\circ = a_B \cos 60^\circ - a_{CB}^n$,

$$a_{CB}^n = \omega_{CB}^2 \cdot CB = 6,4 \text{ cm/c}^2; \quad a_C = a_B - 2a_{CB}^n = 30,23 \text{ cm/c}^2.$$

7.3. Ответы к упражнениям главы 3

3.1

$$CM_1 = S_r(1) = \frac{40}{3} \sin \frac{\pi}{3} = 11,55 \text{ cm.}$$

Так как $CM_1 \cos 30^\circ = 10 \text{ см} = R$, то точка M_1 лежит на вертикальном диаметре.

$$V_r = \dot{S}_r = \frac{40\pi}{9} \cos \frac{\pi t}{3}; \quad V_r(1) = 6,98 \text{ cm/c.}$$

$$\omega_e(1) = 0,5 \text{ рад/с}; OM_1 = R - \frac{1}{2}CM_1 = 4,23 \text{ см.}$$

$$V_\rho = \omega_\rho OM_1; \quad V_\rho(1) = 2,12 \text{ cm/c.}$$

$$\bar{V}_M = \bar{V}_e + \bar{V}_r.$$

$$V_{Mx} = V_e - V_r \cos 30^\circ = -3,93 \text{ m/c}; V_{My} = -V_r \cos 60^\circ = -3,49 \text{ m/c};$$

$$V_M = \sqrt{(V_{Mx})^2 + (V_{My})^2} = 5,26 \text{ cm/c.}$$

$$\bar{a}_M = \bar{a}_e + \bar{a}_r + \bar{a}_k.$$

$$\bar{a}_e = \bar{a}_e^n + \bar{a}_e^\tau, \quad a_e^n = \omega_e^2 OM_1; \quad a_e^n(1) = 1,06 \text{ cm/c}^2.$$

$$\dot{\omega}_e = -\frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi t}{3}, \quad \dot{\omega}_e(1) = -0,91 \text{ рад/с}^2; \quad \varepsilon_e = |\dot{\omega}_e(1)| = 0,91 \text{ рад/с}^2,$$

$$a_{\rho}^{\tau}(1)=\varepsilon_{\rho} \cdot OM_1 = 3,85 \text{ cm/c}^2.$$

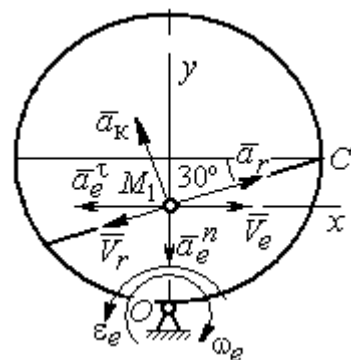


Рис. 7.25. Расчётная схема к упражнению 3.1

$$\dot{V}_r = -\frac{40\pi^2}{27} \sin \frac{\pi t}{3}, \quad \dot{V}_r(1) = -12,66; \quad a_r = |\dot{V}_r(1)| = 12,66 \text{ см/с}^2$$

$$a_k = 2|\omega_e| \cdot |V_r|; \quad a_k(1) = 6,98 \text{ см/с}^2.$$

$$\bar{a}_M = \bar{a}_e^n + \bar{a}_e^\tau + \bar{a}_r + \bar{a}_k.$$

$$a_{Mx} = -a_e^\tau + a_r \cos 30^\circ - a_k \cos 60^\circ = 3,62 \text{ см/с}^2;$$

$$a_{My} = -a_e^n + a_r \cos 60^\circ + a_k \cos 30^\circ = 11,31 \text{ см/с}^2.$$

$$a_M = \sqrt{(a_{Mx})^2 + (a_{My})^2} = 11,87 \text{ см/с}^2.$$

3.2

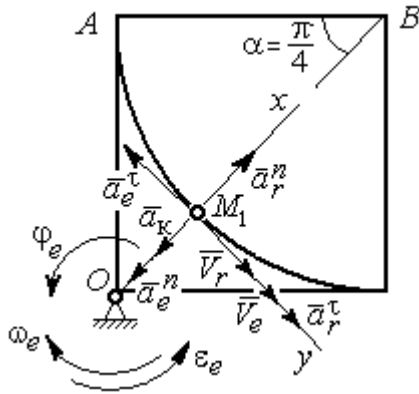


Рис. 7.26. Расчётная схема к упражнению 3.2

Положение M_1 :

$$\alpha = \frac{S_r(1)}{R} = \frac{\pi}{4}; \quad OM_1 = 8,28 \text{ см.}$$

$$\dot{S}_r = 10\pi t; \quad V_r = |\dot{S}_r(1)| = 31,42 \text{ см/с.}$$

$$\dot{\phi}_e = 2t - 5,$$

$$\dot{\phi}_e(1) = -3 \text{ рад/с}, \quad \omega_e = |\dot{\phi}_e(1)| = 3 \text{ рад/с.}$$

$$V_e = \omega_e \cdot OM_1 = 24,6 \text{ см/с.}$$

$$\bar{V}_M = \bar{V}_e + \bar{V}_r \cdot V_{Mx} = V_e + V_r = 56,02 \text{ см/с};$$

$$V_{My} = 0; \quad V_M = 56,02 \text{ см/с.}$$

$$\bar{a}_M = \bar{a}_e + \bar{a}_r + \bar{a}_k = \bar{a}_e^n + \bar{a}_e^\tau + \bar{a}_r^n + \bar{a}_r^\tau + \bar{a}_k.$$

$$\bar{a}_e = \bar{a}_e^n + \bar{a}_e^\tau \cdot a_e^n = \omega_e^2 \cdot OM_1 = 74,52 \text{ см/с}^2;$$

$$\dot{\omega}_e = 2 \text{ рад/с}^2; \quad \epsilon_e = |\dot{\omega}_e|; \quad a_e^\tau(1) = \epsilon_e OM_1 = 16,56 \text{ см/с}^2;$$

$$\bar{a}_r = \bar{a}_r^n + \bar{a}_r^\tau \cdot \dot{V}_r = 10\pi; \quad a_r^\tau = |\dot{V}_r| = 10\pi = 31,42 \text{ см/с}^2;$$

$$a_r^n(1) = \frac{V_r^2}{R} = 49,36 \text{ см/с}^2; \quad a_k = 2|\omega_e| \cdot |V_r|; \quad a_k(1) = 62,84 \text{ см/с}^2.$$

$$a_{Mx} = -a_e^n + a_r^n - a_k = -88 \text{ см/с}^2; \quad a_{My} = -a_e^\tau + a_r^\tau = 14,86 \text{ см/с}^2.$$

$$a_M = \sqrt{(a_{Mx})^2 + (a_{My})^2} = 89,24 \text{ см/с}^2.$$

7.4. Ответы к упражнениям главы 4

4.1

$$m\ddot{x} = F - P\cos 60^\circ - F_{\text{тр}}, \quad m\ddot{y} = N - P\cos 30^\circ = 0.$$

$$F_{\text{тр}} = fN = fmg\cos 30^\circ;$$

$$\ddot{x} = \frac{1}{2}kt - 3,4, \quad \dot{x} = \frac{1}{4}kt^2 - 3,4t + V_0;$$

$$x = \frac{1}{12}kt^3 - 1,7t^2 + V_0t.$$

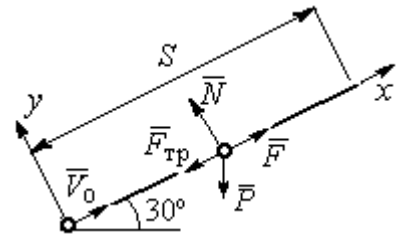


Рис. 7.27. Расчётная схема к упражнению 4.1

Конечные условия: $t = 2$ с; $x = S = 2$ м; $V = 2V_0$.

$$V_0 = k - 6,8; \quad 1 = \frac{1}{3}k - 3,4 + V_0.$$

$$k = 8,4; \quad V_0 = 1,6 \text{ м/с.}$$

4.2

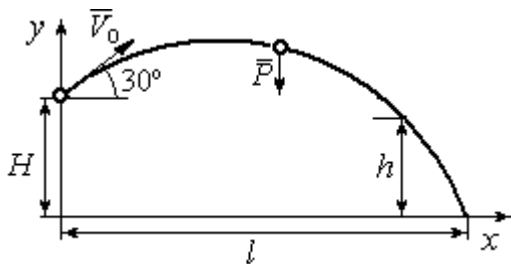


Рис. 7.28. Расчётная схема к упражнению 4.2

Уравнения движения точки:

$$m\ddot{x} = 0; \quad \dot{x} = V_0\cos 30^\circ; \quad x = V_0t\cos 30^\circ.$$

$$m\ddot{y} = -P; \quad \dot{y} = -gt + V_0\cos 60^\circ;$$

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + V_0t\cos 60^\circ + H.$$

Краевое условие пролёта высоты h :

$$t = 1 \text{ с}; \quad y = h = 7 \text{ м.}$$

Подставляя краевые условия в уравнение движения, находим: $V_0 = 3,81$ м/с.

Краевое условие падения точки:

$$t = t_{\text{пад}}; \quad x = l; \quad y = 0.$$

Подстановка в уравнения движения условия приводит к системе:

$$l = V_0t_{\text{пад}}\cos 30^\circ; \quad 0 = -\frac{1}{2}gt_{\text{пад}}^2 + V_0t_{\text{пад}}\cos 60^\circ + H.$$

$$\text{Находим: } t_{\text{пад}} = 1,64 \text{ с}; \quad l = 5,41 \text{ м.}$$

4.3

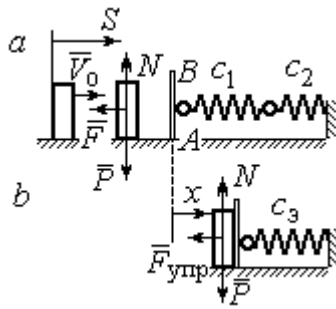


Рис. 7.29. Расчётная схема к упражнению 4.3:
а – движение груза до начала колебаний; б – колебания груза

Уравнение движения груза (рис. 7.29, а):

$$m\ddot{S} = -F = -k\dot{S}.$$

Начальные условия: $t = 0$; $S = 0$; $\dot{S} = V_0$.

$$\text{Решение: } S = \frac{mV_0}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t} \right) = 6(1 - e^{-t}) \text{ м.}$$

Скорость груза: $\dot{S} = 6e^{-t}$.

Скорость груза в момент соединения с площадкой AB: $V_1 = \dot{S}(1) = 0,21 \text{ м/с.}$

Уравнение колебаний груза на эквивалентной пружине (рис. 7.29, б):

$$m\ddot{x} = -F_{\text{упр}} = -c_3 x; \quad c_3 = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2} = 30 \text{ Н/м.}$$

Начальные условия движения: $t = 0$; $x = 0$; $\dot{x} = V_1$.

Общий вид решения: $x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$; $\omega = \sqrt{\frac{c_3}{m}} = 7,75 \text{ рад/с,}$

где константы: $C_1 = 0$; $C_2 = \frac{V_1}{\omega} = 0,28 \text{ м.}$ Закон движения груза $x = 0,28 \sin 7,75 t$.

Максимальное сжатие 0,28 м.

4.4

Жесткость эквивалентной пружины

$$c_3 = \frac{c \cdot 2c}{c + 2c} = \frac{2}{3}c.$$

Уравнение колебаний:

$$m\ddot{x} = P - F_{\text{упр}} = P - c_3(\lambda_{\text{ст}} + x) = -c_3 x.$$

Общее решение:

$$x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t; \quad \omega = \sqrt{\frac{c_3}{m}} = 10,33 \text{ рад/с.}$$

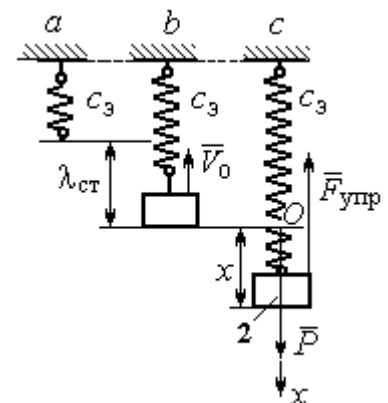


Рис. 7.30. Расчётная схема к упражнению 4.4:
а – нерастянутая пружина;
б – положение статического равновесия; в – произвольное положение груза

Начальные условия: $t = 0$; $x = 0$; $\dot{x} = -V_0$.

Находим константы интегрирования: $C_1 = 0$; $C_2 = \frac{V_0}{\omega} = 0,39$ м.

Закон движения груза: $x = 0,39 \sin 10,33 t$.

Амплитуда $A = 0,39$ м, частота $\omega = 10,33$ рад/с.

4.5

Скорость человека, находящегося в самолёте, в нижней точке траектории (точка C):

$$\frac{mV_C^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = mg[l \sin \varphi + r(1 - \cos \varphi)].$$

Откуда $V_C^2 = V_0^2 + 2g[l \sin \varphi + r(1 - \cos \varphi)]$.

Уравнение движения человека,двигающегося

вместе с самолётом, в проекции на нормаль в точке C: $\frac{mV_C^2}{r} = N - P$, где N – реакция корпуса самолёта. Сила давления человека на корпус самолёта по величине равна реакции, но направлена в противоположную сторону.

Из условия $N \leq 3P$ следует неравенство: $V_C^2 \leq 2gr$, или

$$V_0^2 + 2g[l \sin \varphi + r(1 - \cos \varphi)] \leq 2gr. \text{ Откуда } r \geq \frac{V_0^2 + 2gl \sin \varphi}{2g \cos \varphi}.$$

4.6

Из уравнения теоремы об изменении кинетической энергии шарика в точке B с учётом, что $V_A = 0$, найдём:

$$\frac{mV_B^2}{2} = \frac{ca^2}{2} + mg[R + R \cos 60^\circ - a \cos 30^\circ].$$

Составим уравнение теоремы об изменении кинетической энергии точки на участке BD:

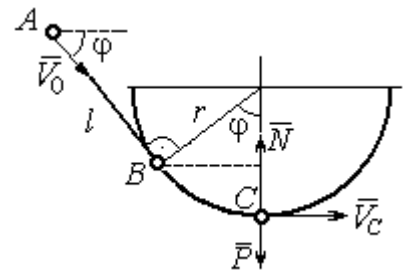


Рис. 7.31. Расчётная схема к упражнению 4.5

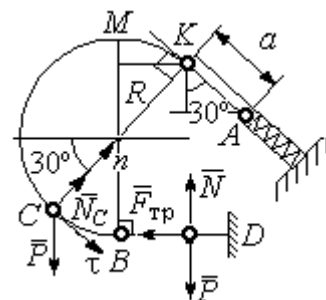


Рис. 7.32. Расчётная схема к упражнению 4.6

$-\frac{mV_B^2}{2} = -fNs$, где s – путь точки до остановки. С учётом данных задачи, получим: $s = 5,39$ м.

Уравнение движения шарика в проекции на нормальную ось в точке C

$$\frac{mV_C^2}{R} = N_C - P\cos 60^\circ.$$

Для вычисления реакции опоры шарика на трубу имеем равенство

$$N_C = \frac{mV_C^2}{R} + P\cos 60^\circ = \frac{1}{R} \left[mV_B^2 - 2mgR(1 - \cos 60^\circ) \right] + mg\cos 60^\circ, \text{ где кинетическая}$$

энергия шарика в точке B : $mV_B^2 = ca^2 + 2mgR \left[(1 + \cos 60^\circ) - \frac{a}{R} \cos 30^\circ \right]$. Получим:

$N_C = 18,71$ Н. Давление шарика на трубку равно реакции опоры и направлено в противоположную сторону.

7.5. Ответы к упражнениям главы 5

5.1

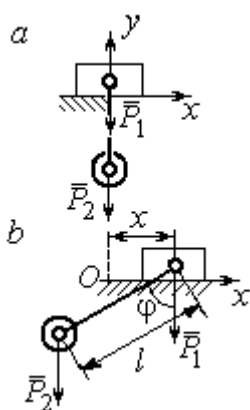


Рис. 7.33. Расчётная схема к упражнению 5.1:

a – начальное положение системы;
 b – произвольное положение

x_0 – координата центра тяжести системы в начальном положении, $x_0 = 0$ (см. рис.7.33);
 x – текущая координата центра тележки; x_1 – координата центра тяжести системы в её произвольном положении: $x_1 = \frac{m_1x - m_2(l\sin\varphi - x)}{m_1 + m_2}$.

Уравнение закона сохранения движения центра масс системы: $x_1 = x_0$, или

$$m_1x - m_2(l\sin\varphi - x) = 0.$$

Отсюда зависимость координаты движения тележки от положения гру-

за 2:
$$x = \frac{m_2l}{m_1 + m_2} \sin\varphi.$$

5.2

Теорема об изменении кинетического момента системы относительно

оси z : $\frac{dL_z}{dt} = \sum M_z(\vec{F}_k^e)$.

Кинетический момент системы:

$$L_z = L_z^{\text{бар}} + L_z^{\text{гр}} = \frac{m_2 r^2}{2} \omega + m_1 V_1 r = \left(m_1 + \frac{m_2}{2} \right) \omega r^2.$$

Суммарный момент внешних сил относительно

оси z : $\sum M_z(\vec{F}_k^e) = M_{\text{вр}} - P_1 r = kt - m_1 gr$.

Дифференциальное уравнение вращения барабана:

$$\left(m_1 + \frac{m_2}{2} \right) r^2 \frac{d\omega}{dt} = kt - m_1 gr.$$

При нулевых начальных условиях $\omega = \frac{kt^2 - 2m_1 grt}{(2m_1 + m_2)r^2}$.

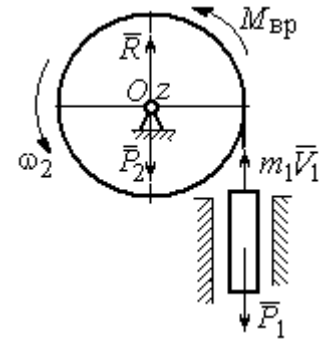


Рис. 7.34. Расчётная схема к упражнению 5.2

5.3

Уравнение теоремы об изменении кинетической энергии для неизменяемых систем на конечном перемещении: $T - T_0 = \sum A(F_k)$, $T_0 = 0$.

Кинетическая энергия груза 1: $T_1 = \frac{m_1 V_1^2}{2}$.

Энергия вращательного движения блока 2:

$T_2 = \frac{1}{2} J_O \omega_2^2$, где осевой момент инерции блока:

$J_O = \frac{m_2 r^2}{2}$, угловая скорость блока $\omega_2 = \frac{V_1}{r}$. Кинетическая энергия катка 3:

$T_3 = \frac{1}{2} m_3 V_C^2 + \frac{1}{2} J_C \omega_3^2$, где момент инерции катка относительно оси, проходя-

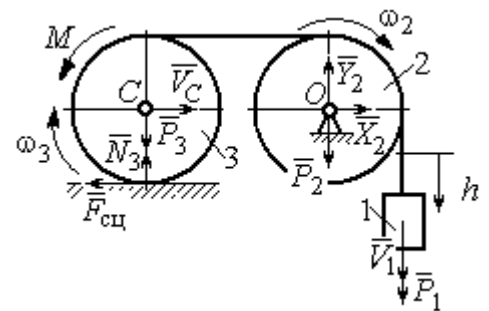


Рис. 7.35. Расчётная схема к упражнению 5.3

щей через центр масс перпендикулярно плоскости диска, $J_C = \frac{m_3 r^2}{2}$, угловая

скорость катка и скорость его центра масс $\omega_3 = \frac{V_1}{2r}$, $V_C = \frac{V_1}{2}$.

Энергия системы: $T = T_1 + T_2 + T_3 = (8m_1 + 4m_2 + 3m_3) \frac{V_1^2}{16}$.

Суммарная работа внешних сил на перемещении h : $\sum A(F_k) = P_1 h - M \frac{h}{2r}$.

Уравнение теоремы об изменении кинетической энергии:

$$(8m_1 + 4m_2 + 3m_3) \frac{V_1^2}{16} = \left(m_1 g - \frac{M}{2r} \right) h.$$

$$\text{Скорость груза на высоте } h: V_1 = 4 \sqrt{\frac{\left(m_1 g - \frac{M}{2r} \right) h}{8m_1 + 4m_2 + 3m_3}}.$$

5.4

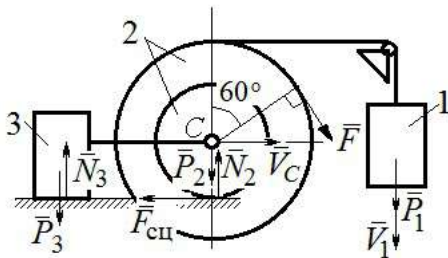


Рис. 7.36. Расчётная схема к упражнению 5.4

Для решения задачи используется теорема об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме: $\frac{dT}{dt} = \sum N(\vec{F}_k^e)$, где T – энергия системы в её текущем положении; $\sum N(\vec{F}_k^e)$ – суммарная мощность внешних сил.

Допустим, груз 1 движется вниз со скоростью V_1 . Скорость центра масс катка V_C .

Кинетическая энергия катка 2: $T_2 = \frac{1}{2} m_2 V_C^2 + \frac{1}{2} J_{zC} \omega_2^2$. Здесь $m_2 = \frac{2P}{g}$,

$J_{zC} = m_2 i_z^2$, $\omega_2 = \frac{V_C}{r}$. В результате кинетическая энергия катка $T_2 = \frac{3P}{g} V_C^2$.

Скорость груза 3 $V_3 = V_C$. Кинетическая энергия груза 3 $T_3 = \frac{P}{g} V_C^2$.

Скорость груза 1 $V_1 = \omega_2 3r = 3V_C$. Кинетическая энергия груза 1:

$$T_1 = \frac{9P}{2g} V_C^2.$$

Суммарная кинетическая энергия (энергия системы):

$$T = T_1 + T_2 + T_3 = \frac{17P}{2g} V_C^2. \text{ Производная } \frac{dT}{dt} = \frac{17P}{g} V_C \frac{dV_C}{dt} = \frac{17}{g} V_C a_C.$$

Мощности сил $\vec{P}_2, \vec{N}_2, \vec{F}_{\text{сц}}, \vec{P}_3, \vec{N}_3$ равны нулю.

Мощность силы $\vec{F}$, приложенной к колесу, определяется по формуле:

$$N(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{V}_C + \vec{M}_C(\vec{F}) \cdot \vec{\omega}_2 = FV_C \cos 60^\circ + FR\omega_2. \quad \text{Мощность силы } \vec{P}_1$$

$$N(\vec{P}_1) = P_1 V_1. \text{ Суммарная мощность внешних сил: } \sum N(F^e) = 7PV_C.$$

Составляем уравнение теоремы об изменении кинетической энергии си-

$$\text{стемы: } \frac{17P}{g} V_C a_C = 7PV_C, \text{ откуда } a_C = \frac{7}{17} g \text{ м/с}^2.$$

5.5

Рассмотрим движение катков отдельно, заменив невесомый стержень реакцией. Предположим, катки движутся направо (см. рис. 7.37). Уравнения движения катков:

$$m_1 a_O = Q - F_{\text{сц}1}, \quad J_{1O} \varepsilon_1 = F_{\text{сц}1} r - M;$$

$$m_2 a_C = -Q' - F_{\text{сц}2} + F \cos 30^\circ;$$

$$J_{2C} \varepsilon_2 = F_{\text{сц}2} 3r - Q' r.$$

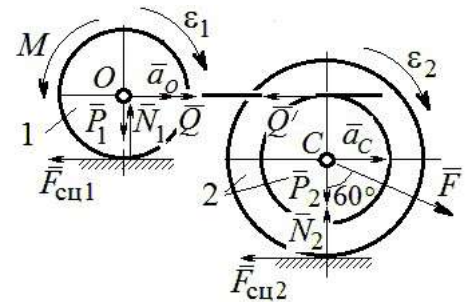


Рис. 7.37. Расчётная схема к упражнению 5.5

Здесь $\vec{Q}$ – реакция невесомого стержня, $|\vec{Q}| = |\vec{Q}'|$; $\vec{F}_{\text{сц}1}, \vec{F}_{\text{сц}2}$ – силы сцепления

катков с поверхностями качения; моменты инерции катков $J_{1O} = \frac{m_1 r^2}{2}$,

$$J_{2C} = m_2 i_2^2. \text{ Подставляя кинематические соотношения } \varepsilon_2 = \frac{a_C}{3r}; \quad a_O = \frac{4}{3} a_C;$$

$$\varepsilon_1 = \frac{4a_C}{3r}, \text{ с учётом данных задачи, получим систему уравнений:}$$

$$\frac{4P}{3g}a_C = Q - F_{\text{сц1}}; \quad \frac{2P}{3g}a_C = F_{\text{сц1}} - 4P;$$

$$\frac{2P}{g}a_C = -Q - F_{\text{сц2}} + P\sqrt{3}; \quad \frac{4P}{3g}a_C = 3F_{\text{сц2}} - Q.$$

Находим ускорение центра катка 2: $a_C = \frac{3(3\sqrt{3}-16)g}{46} \approx -0,7g$. Каток

движется в противоположную сторону. Реакция стержня $Q = 2,6P$.

5.6

Выделяем звенья механизма, заменяя действия нитей их реакциями. До-

пустим, направления движений тел в системе соответствуют подъёму груза 1.

Уравнения движения тел:

$$m_3 a_3 = F - Q_3, \quad m_2 a_C = Q'_3 + Q_2 - P_2 - Q_1;$$

$$J_{2C} \varepsilon_2 = Q'_3 r - Q_2 r, \quad m_1 a_1 = Q'_1 - P_1.$$

С учётом, что $|\vec{Q}_3| = |\vec{Q}'_3|$, $|\vec{Q}_1| = |\vec{Q}'_1|$ и

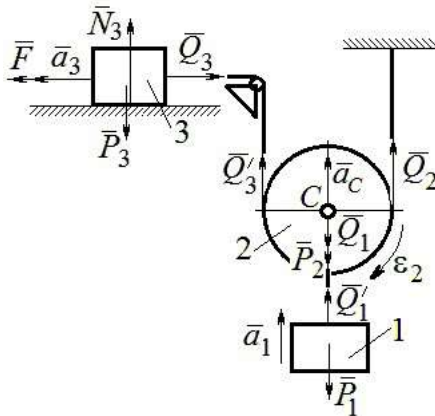


Рис. 7.38. Расчётная схема к упражнению 5.6

$$a_C = a_1, \quad a_3 = 2a_1, \quad \varepsilon_2 = \frac{a_1}{r}, \quad J_{2C} = \frac{m_2 r^2}{2}, \quad \text{под-}$$

ставляя данные задачи, получим систему уравнений:

$$2ma_1 = 2,5mg - Q_3; \quad ma_1 = Q_3 + Q_2 - mg - Q_1;$$

$$\frac{ma_1}{2} = Q_3 - Q_2; \quad m_1 a_1 = Q_1 - P_1.$$

Решая систему, находим: $a_1 = \frac{2}{17}g \approx 0,12g$; $Q_3 = 2,26mg$; $Q_2 = 2,15mg$.

5.7

Заменяем действия нитей реакциями.

Предположим, груз 1 спускается по наклонной плоскости. Уравнения движения тел:

$$m_1 a_1 = P_1 \cos 30^\circ - Q_1; \quad m_3 a_3 = Q_3;$$

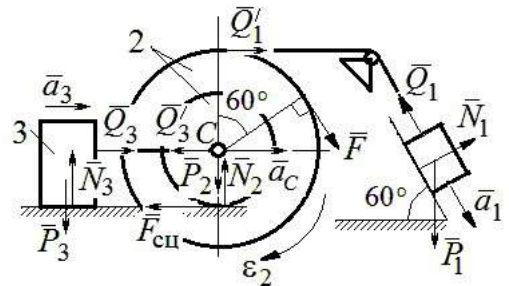


Рис. 7.39. Расчётная схема к упражнению 5.7

$$m_2 a_C = Q'_1 - Q'_3 - F_{\text{сц}} + F \cos 60^\circ; J_{2C} \varepsilon_2 = Q'_1 R + FR + F_{\text{сц}} r, J_{2C} = m_2 i_2^2.$$

Соотношения ускорений: $\varepsilon_2 = \frac{a_1}{R+r}$, $a_C = \frac{a_1 r}{R+r}$, $a_3 = a_C$. Подставляя

данные задачи, с учётом, что модули сил $Q'_1 = Q_1$ и $Q'_3 = Q_3$, получим систему уравнений:

$$ma_1 = mg \frac{\sqrt{3}}{2} - Q_1; \quad \frac{2}{3} ma_1 = Q_3;$$

$$ma_1 = Q_1 - Q_3 - F_{\text{сц}} + \frac{1}{2} mg; \quad 3ma_1 = 2Q_1 + 2mg + F_{\text{сц}}.$$

Находим $a_1 = \frac{3}{46} (5 + 3\sqrt{3})g \approx 0,44g$; $Q_1 = 0,21mg$; $Q_3 = 0,44mg$.

7.6. Ответы к упражнениям главы 6

6.1

Внешние силы, действующие на систему: силы тяжести — $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$ и реакции опор $\vec{N}_3$, $\vec{R}_3$. Приложим к телам системы, силы инерции $\vec{R}_1^{\text{ин}}$, $\vec{R}_2^{\text{ин}}$ (рис. 7.40, а). В соответствии с принципом Даламбера, полученная система сил находится в равновесии. Составляем условие равновесия системы сил в проекциях на горизонтальную и вертикальную оси:

$$R_3 - R_1^{\text{ин}} = 0, \quad N_3 - P_3 - P_1 - P_2 + R_2^{\text{ин}} = 0.$$

Для вычисления сил инерции рассмотрим отдельно грузы 1 и 2, заменяя действие соединяющей их нити реакцией (рис. 7.40, б, в). Присоединим к грузам силы инерции и, применив принцип Даламбера, составим уравнения равновесия систем сил — для груза 1 в проекции на горизонтальную ось, для груза 2 — на вертикальную:

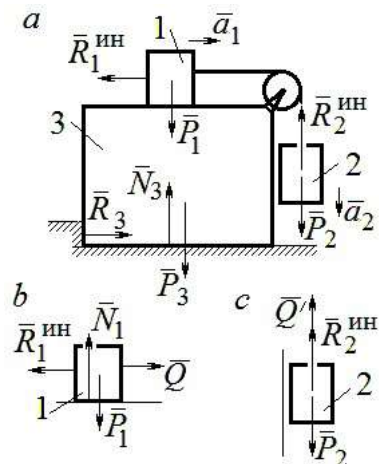


Рис. 7.40. Расчётная схема к упражнению 6.1

$$Q - R_1^{\text{ин}} = 0; P_2 - Q' - R_2^{\text{ин}} = 0,$$

где $R_1^{\text{ин}} = m_1 a_1$, $R_2^{\text{ин}} = m_2 a_2$.

Решая полученную систему с учётом равенства модулей сил $Q = Q'$ и ускорений грузов $a_1 = a_2$, находим ускорение грузов: $a_1 = a_2 = 0,5g$. Тогда давление призмы на горизонтальную поверхность: $N_3 = 2,5mg$.

6.2

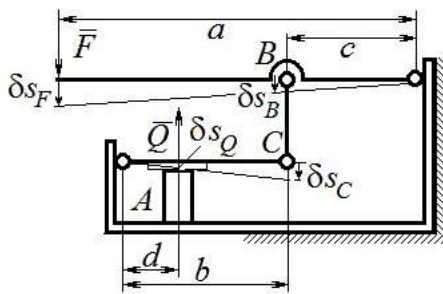


Рис. 7.41. Расчётная схема к упражнению 6.2

Активными силами в системе являются силы $\vec{F}$ и $\vec{Q}$. Для равновесия системы необходимо и достаточно выполнения условия: $\delta A(\vec{F}) + \delta A(\vec{Q}) = 0$ или $F\delta s_F - Q\delta s_Q = 0$, где δs_F и δs_Q – возможные перемещения точек приложения сил $\vec{F}$ и $\vec{Q}$.

Имеем соотношения: $\frac{\delta s_F}{\delta s_B} = \frac{a}{c}$, $\frac{\delta s_C}{\delta s_Q} = \frac{b}{d}$, где δs_B и δs_C – возможные перемещения точек B и C , причём $\delta s_B = \delta s_C$. Тогда $\delta s_Q = \frac{cd}{ab}\delta s_F$ и сила, сжимающая деталь A под прессом, равна $Q = \frac{ab}{cd}F$.

6.3

Активными силами, совершающими работу при движении системы, являются силы тяжести $\vec{P}_3$, $\vec{P}_4$ и пары сил с моментами M_1 и M_2 . Связи идеальные.

Для равновесия системы необходимо и достаточно выполнения условия:

$$\delta A(\vec{P}_3) + \delta A(\vec{P}_4) + \delta A(M_1) + \delta A(M_2) = 0 \text{ или}$$

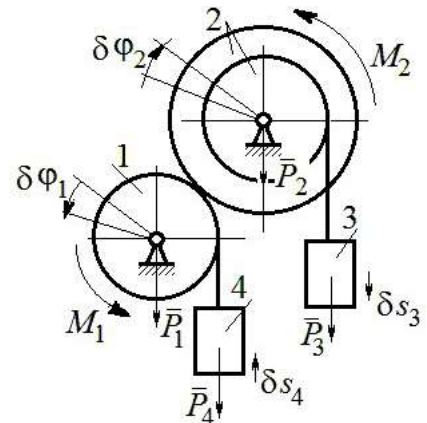


Рис. 7.42. Расчётная схема к упражнению 6.3

$$P_3 \delta s_3 - P_4 \delta s_4 + M_1 \delta \varphi_1 - M_2 \delta \varphi_2 = 0,$$

где $\delta s_3, \delta s_4$ – элементарные перемещения грузов 3, 4; $\delta \varphi_1, \delta \varphi_2$ – элементарные повороты валов 1 и 2. Выразим все перемещения через угол поворота вала 2: $\delta s_3 = \delta \varphi_2 r$, $\delta \varphi_1 = 3 \delta \varphi_2$, $\delta s_4 = 3r \delta \varphi_2$ и подставим в уравнение равновесия. Получим: $M_2 = 4Pr$.

6.4

Система с идеальными связями. Активными силами являются силы тяжести $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3$ и пара сил с моментом $M_{вр}$ (рис. 7.43).

Направления поворотов дисков и их угловые ускорения показаны на рис. 7.43 дуговыми стрелками $\delta \varphi_1, \varepsilon_1$ и $\delta \varphi_2, \varepsilon_2$. Направления движения центра масс катка 2, груза 3 и их ускорения обозначены: $\delta s_C, a_C$ и $\delta s_3, a_3$.

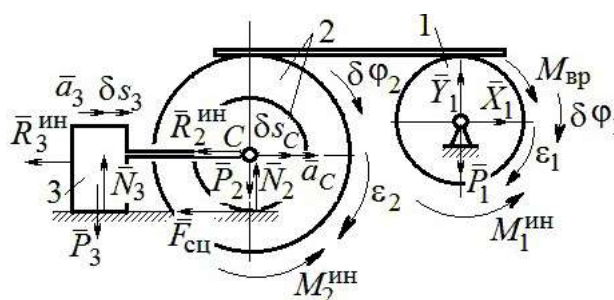


Рис. 7.43. Расчётная схема к упражнению 6.4

Кинематические соотношения между перемещениями и ускорениями:

$$\delta s_C = \delta s_3, a_C = a_3, \delta \varphi_2 = \frac{\delta s_3}{r}, \varepsilon_2 = \frac{a_3}{r}, \delta \varphi_1 = \frac{3\delta s_3}{r}, \varepsilon_1 = \frac{3a_3}{r}.$$

Присоединим к телам системы силы инерции.

Модули главных векторов сил инерции: $R_3^{ин} = m_3 a_3 = m a_3$;

$$R_2^{ин} = m_2 a_C = 2m a_3; M_2^{ин} = m_2 i_2^2 \varepsilon_2 = 4,5 m r a_3; M_1^{ин} = \frac{m_1 R_1^2}{2} \varepsilon_1 = 1,5 m r a_3.$$

Элементарные работы активных сил:

$$\sum \delta A(\vec{F}_k^{акт}) = M_{вр} \delta \varphi_1 = (m g \sin \omega t) 3 \delta s_3.$$

Элементарные работы сил инерции:

$$\begin{aligned} \sum \delta A(\vec{R}_k^{ин}) &= -R_3^{ин} \delta s_3 - R_2^{ин} \delta s_C - M_2^{ин} \delta \varphi_2 - M_1^{ин} \delta \varphi_1 = \\ &= -m a_3 \delta s_3 - 2m a_3 \delta s_3 - 4,5 m a_3 \delta s_3 - 1,5 m a_3 3 \delta s_3 = -12 m a_3 \delta s_3. \end{aligned}$$

Общее уравнение динамики имеет вид:

$$\sum \delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}}) + \sum \delta A(\vec{R}_k^{\text{ин}}) = m(3g \sin \omega t - 12a_3) \delta s_3 = 0.$$

Ускорение груза 3: $a_3 = 0,25g \sin \omega t$, или $\ddot{s}_3 = 0,25g \sin \omega t$. Интегрируя дифференциальное уравнение с нулевыми начальными условиями, получим закон движения груза:

$$s_3 = \frac{0,25g}{\omega} \left(t - \frac{1}{\omega} \sin \omega t \right).$$

6.5

Система с идеальными связями. Активные

силы и главные вектора сил инерции показаны на рис. 7.44.

Элементарные работы активных сил:

$$\sum \delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}}) = F \delta s_1 + P_3 \delta s_3 - P_4 \delta s_4 \text{ и сил инерции}$$

$$\sum \delta A(\vec{R}_k^{\text{ин}}) = -R_1^{\text{ин}} \delta s_1 - R_3^{\text{ин}} \delta s_3 - R_4^{\text{ин}} \delta s_4 - M_2^{\text{ин}} \delta \varphi_2,$$

$$\text{где модули сил инерции: } R_1^{\text{ин}} = \frac{P_1}{g} a_1, R_3^{\text{ин}} = \frac{P_3}{g} a_3,$$

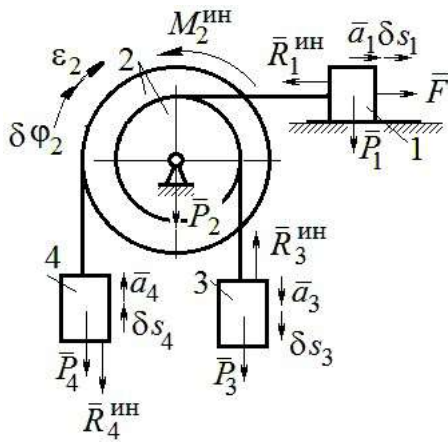


Рис. 7.44. Расчётная схема к упражнению 6.5

$$R_4^{\text{ин}} = \frac{P_1}{g} a_4, M_2^{\text{ин}} = \frac{P_2}{g} i_2^2 \varepsilon_2.$$

Кинематические соотношения: $\delta s_3 = \delta s_1$, $a_3 = a_1$, $\delta s_4 = 2\delta s_1$, $a_4 = 2a_1$,

$\delta \varphi_2 = \frac{\delta s_1}{r}$, $\varepsilon_2 = \frac{a_1}{r}$. Общее уравнение динамики:

$$\begin{aligned} \sum \delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}}) + \sum \delta A(\vec{R}_k^{\text{ин}}) &= P(t+1) \delta s_1 + P \delta s_1 - 2P \delta s_1 - \\ &- \left(\frac{P}{g} a_1 \delta s_1 + \frac{P}{g} a_1 \delta s_1 + \frac{2P}{g} 2a_1 2\delta s_1 + \frac{2P}{g} 2r^2 \frac{a_1}{r} \frac{\delta s_1}{r} \right) = P \left(t - \frac{14a_1}{g} \right) \delta s_1 = 0. \end{aligned}$$

Находим уравнение движения груза 3: $a_3 = a_1 = \frac{1}{14} g t$, или $\ddot{x}_3 = \frac{1}{14} g t$.

Проинтегрировав дифференциальное уравнение с нулевыми начальными

условиями, получим закон движения груза 3: $x_3 = \frac{1}{84} g t^3 \approx 0,012 g t^3$.

6.6

Рассматриваемая механическая система (рис. 7.45) имеет одну степень свободы. Уравнение Лагранжа: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x$, где T – кинетическая энергия системы: Q_x – обобщенная сила.

В качестве обобщённой координаты x выберем положение точки C относительно недеформированной пружины, отмеченной на рис. 7.45 величиной l_0 . Обобщённая скорость $\dot{x}$.

Кинетическая энергия катка:

$$T_1 = \frac{1}{2}m_1V_C^2 + \frac{1}{2}J_{zC}\omega_1^2, \text{ где } \omega_1, V_C - \text{угловая}$$

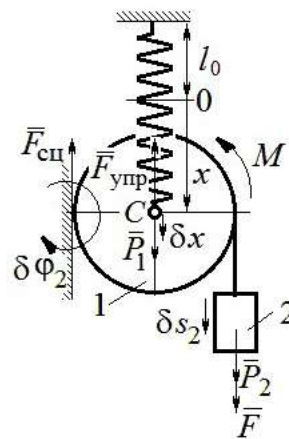


Рис. 7.45. Расчётная схема к упражнению 6.6

скорость катка и скорость его центра масс, $V_C = \dot{x}$, $\omega_1 = \frac{V_C}{r} = \frac{\dot{x}}{r}$; момент инерции $J_{zC} = \frac{1}{2}m_1r^2$. Кинетическая энергия груза 2: $T_2 = \frac{1}{2}m_2V_2^2$, где V_2 – скорость груза 2, $V_2 = 2V_C = 2\dot{x}$. Кинетическая энергия системы, выраженная через обобщённую скорость: $T = T_1 + T_2 = \frac{7P}{2g}\dot{x}^2$.

В произвольном положении системы, определяемом координатой x , дадим центру масс катка возможное перемещение δx (см. рис. 7.45). Элементарная работа активных сил $\sum \delta A(F_k) = P_1\delta x - F_{\text{упр}}\delta x + (P_2 + F)\delta s_2 - M\delta\phi_1$. Полагая перемещения $\delta s_2 = 2\delta x$, $\delta\phi_1 = \frac{\delta x}{r}$, модуль силы упругости $F_{\text{упр}} = cx$ и с учётом данных задачи, получим $\sum \delta A(F_k) = (3P - cx)\delta x$. Обобщённая сила $Q_x = 3P - cx$.

$$\text{Уравнение Лагранжа } \frac{7P}{g}\ddot{x} = 3P - cx, \text{ или } \ddot{x} + \frac{4g}{7r}x = \frac{3g}{7}.$$

Решение уравнения (с нулевыми начальными условиями):

$$x = \frac{3}{4}r(1 - \cos\omega t). \text{ Закон движения груза: } s_2 = 2x = \frac{3}{2}r(1 - \cos\omega t).$$

6.7

Рассматриваемая система имеет две степени свободы. Обобщённые координаты – расстояния x_1 , x_2 соответственно до грузов 1 и 2, отсчитываемые

от неподвижных центров блоков B и D (рис.

7.46, a). Обобщённые скорости $\dot{x}_1$, $\dot{x}_2$. Кинетическая энергия грузов и блока 3:

$$T_1 = \frac{P_1 \dot{x}_1^2}{2g}, \quad T_2 = \frac{P_2 \dot{x}_2^2}{2g};$$

$$T_3 = \frac{P_3}{2g} \left(\frac{\dot{x}_1 + \dot{x}_2}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{P_3 r^2}{2g} \left(\frac{\dot{x}_2 - \dot{x}_1}{2r} \right)^2.$$

Здесь учтено (см. рис. 7.46, a): что

$$V_C = \frac{V_N + V_M}{2} = \frac{\dot{x}_2 + \dot{x}_1}{2};$$

$$\omega_2 = \frac{V_N - V_M}{2r} = \frac{\dot{x}_2 - \dot{x}_1}{2r}.$$

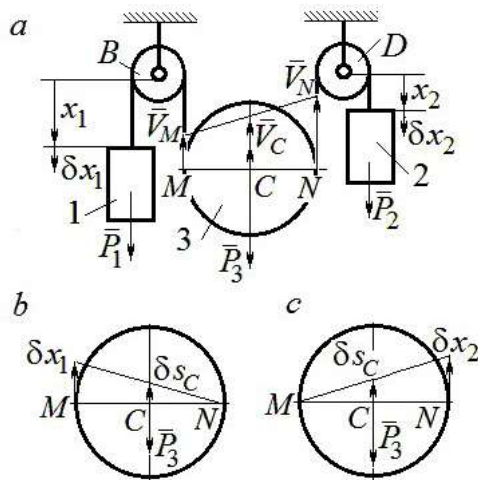


Рис. 7.46. Расчётная схема к упражнению 6.7:

a – кинематика механизма;

b, c – возможные перемещения блока 3 при вычислении обобщённых сил

Дадим системе возможное перемещение по координате x_1 , оставляя координату x_2 постоянной: $\delta x_1 \neq 0$, $\delta x_2 = 0$. На этом перемещении сумма элементарных работ внешних сил (см. рис. 7.46, a, b):

$$\sum \delta A(F_k) = P_1 \delta x_1 - P_3 \delta s_C = \left(P_1 - \frac{1}{2} P_3 \right) \delta x_1.$$

$$\text{Обобщённая сила } Q_{x_1} = P_1 - \frac{1}{2} P_3.$$

Дадим системе другое независимое возможное перемещение – по координате x_2 , так, что $\delta x_1 = 0$, $\delta x_2 \neq 0$. При этом перемещении сумма элементарных работ внешних сил (см. рис. 7.46, a, c):

$$\sum \delta A(F_k) = P_2 \delta x_2 - P_3 \delta s_C = \left(P_2 - \frac{1}{2} P_3 \right) \delta x_2.$$

Обобщённая сила $Q_{x_2} = P_2 - \frac{1}{2} P_3$.

Уравнения Лагранжа

$$\left(P_1 + \frac{3}{8} P_3 \right) \frac{\ddot{x}_1}{g} + \frac{1}{8} P_3 \frac{\ddot{x}_2}{g} = P_1 - \frac{1}{2} P_3, \quad \frac{1}{8} P_3 \frac{\ddot{x}_1}{g} + \left(P_2 + \frac{3}{8} P_3 \right) \frac{\ddot{x}_2}{g} = P_2 - \frac{1}{2} P_3 \quad \text{или}$$

$$7\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 = 0, \quad \ddot{x}_1 + 9\ddot{x}_2 = 2g.$$

Ускорения грузов: $\ddot{x}_1 = -\frac{1}{31}g$, $\ddot{x}_2 = \frac{7}{31}g$. Ускорение центра масс блока

$\ddot{x}_C = \frac{\ddot{x}_2 + \ddot{x}_1}{2} = \frac{6}{31}g$. Груз 1 и центр блока 3 движутся вверх, груз 2 – вниз. (Сравнить с задачей 70.)

6.8

Система с двумя степенями свободы.

Обобщённые координаты: x_1 – положение центра масс катка 1 (точки C_1) относительно неподвижной вертикальной стены; x_2 – положение центра масс катка 2 (точки C_2) относительно подвижного края платформы.

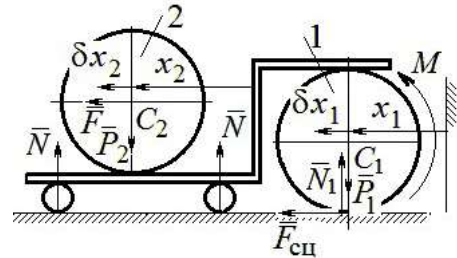


Рис. 7.47. Расчётная схема к упражнению 6.8

Кинетическая энергия системы

$$T = \frac{3}{4} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} \left[m_2 (\dot{x}_2 + 2\dot{x}_1)^2 + \frac{m_2 r^2}{2} \left(\frac{\dot{x}_2}{r} \right)^2 \right] = \frac{P}{g} \left(\frac{11}{4} \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + 2\dot{x}_1 \dot{x}_2 \right).$$

Дадим системе возможное перемещение по координате x_1 ($\delta x_1 \neq 0$), оставляя другую координату x_2 неизменной ($\delta x_2 = 0$). Работу совершают момент M и сила $\bar{F}$. Суммарная работа

$$\sum \delta A(F_k) = M \delta \varphi_1 + F \delta s_{C_2} = M \frac{\delta x_1}{r} + F 2 \delta x_1 = 4P \delta x_1.$$

Обобщённая сила $Q_{x_1} = 4P$.

При другом независимом возможном перемещении $\delta x_1 = 0$, $\delta x_2 \neq 0$ суммарная работа внешних сил $\sum \delta A(F_k) = F\delta x_2$ и обобщённая сила, соответствующая координате x_2 , равна $Q_{x_2} = P$.

Уравнения Лагранжа

$$\frac{P}{g} \left(\frac{11}{2} \ddot{x}_1 + 2\ddot{x}_2 \right) = 4P, \quad \frac{P}{g} (2\ddot{x}_2 + 2\ddot{x}_1) = P, \text{ или}$$
$$11\ddot{x}_1 + 4\ddot{x}_2 = 8g, \quad 2\ddot{x}_2 + 2\ddot{x}_1 = g$$

Ускорение центра катка 1 $\ddot{x}_1 = \frac{6}{7}g$. Тележка катится в направлении оси

x_1 . Ускорение центра катка 2 относительно тележки $\ddot{x}_2 = -\frac{5}{14}g$. Закон относительного движения центра катка 2 при нулевых начальных условиях: $x_2 = -\frac{5}{28}gt^2$. Каток катится к правому борту тележки.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Бать М. И., Джанелидзе Г. Ю., Кельзон А. С. Теоретическая механика в примерах и задачах: Т. 1–2. – СПб.: Лань, 2010.

Бутенин Н. В., Луиц Я. Л., Меркин Д. Р. Курс теоретической механики: В 2-х томах. – М.: Наука, 2009.

Вебер Г. Э., Ляицев, С. А. Лекции по теоретической механике. – Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2008.

Тарг С. М. Краткий курс теоретической механики: учебник для втузов. – М.: Высшая школа, 2010.

Учебное издание

Валерий Григорьевич Брагин
Евгений Борисович Волков
Юрий Михайлович Казаков

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Учебное пособие

Редактор *Л.В. Устьянцева*

Компьютерная версия

Подписано в печать 26.10.2018 г.

Бумага писчая. Формат бумаги 60×84 1/16.

Гарнитура Times New Roman. Печать на ризографе.

Печ. л. 15,625. Уч. изд. л. 10,5. Тираж экз. Заказ №

Издательство УГГУ

620144, г. Екатеринбург, ул. Куйбышева, 30

Уральский государственный горный университет

Отпечатано с оригинал-макета

в лаборатории множительной техники УГГУ



Министерство образования и науки РФ
ФГБОУ ВО
«Уральский государственный
горный университет»

Е. Б. Волков, Ю. М. Казаков

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

*Учебно-методическое пособие
для самостоятельной работы студентов*

**Екатеринбург
2017**

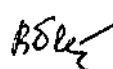


Министерство образования и науки РФ
ФГБОУ ВО
«Уральский государственный горный университет»

ОДОБРЕНО

Методической комиссией
горно-механического факультета
«15» декабря 2017 г.

Председатель комиссии

 проф. В. П. Барановский

Е. Б. Волков, Ю. М. Казаков

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

*Учебно-методическое пособие
для самостоятельной работы студентов*

Рецензент: *Н. М. Суслов*, д-р техн. наук, заведующий кафедрой ГМК
Уральского государственного горного университета

Учебно-методическое пособие рассмотрено на заседании кафедры технической механики от 19.12.2016 г. (протокол № 2) и рекомендовано для издания в УГГУ.

Печатается по решению Редакционно-издательского совета Уральского государственного горного университета.

Волков Е. Б., Казаков Ю. М.

В67 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА: Учебно-методическое пособие для самостоятельной работы студентов. / Е. Б. Волков, Ю. М. Казаков, Уральский государственный горный университет. Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2017. 156 с.

Учебно-методическое пособие для самостоятельной работы студентов содержит краткие методические указания, контрольные задания и примеры выполнения заданий по темам: «Статика твердого тела. Равновесие произвольной плоской и пространственной систем сил», «Кинематика вращательного и плоскопараллельного движений твердого тела. Определение скоростей и ускорений точек твёрдого тела», «Сложное движение точки», «Динамика точки. Дифференциальные уравнения движения точки. Гармонические и вынужденные колебания точки. Применение теоремы об изменении кинетической энергии при исследовании движения точки», «Применение общих теорем динамики к исследованию движения механической системы», «Принципы механики. Применение общего уравнения динамики к исследованию движения механической системы», «Уравнения Лагранжа II рода».

Учебно-методическое пособие для студентов всех специальностей очной формы обучения.

© Волков Е. Б., Казаков Ю. М., 2017

© Уральский государственный горный
университет, 2017

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. СТАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА.....	4
1.1. Основные виды связей и их реакции.....	4
1.2. Моменты силы относительно центра и относительно оси. Пара сил. Момент пары.....	5
1.3. Условия равновесия систем сил.....	7
1.4. Задание С1. Равновесие произвольной плоской системы сил. Равновесие системы тел.....	8
1.5. Задание С2. Равновесие пространственной системы сил.....	17
2. КИНЕМАТИКА ТОЧКИ И ТВЕРДОГО ТЕЛА.....	26
2.1. Кинематика точки. Основные параметры движения точки.....	26
2.2. Вращение тела вокруг неподвижной оси.....	28
2.3. Плоскопараллельное движение твёрдого тела.....	29
2.4. Задание К1. Определение скоростей и ускорений точек твердого тела при поступательном и вращательном движениях.....	32
2.5. Задание К2. Определение скоростей точек твёрдого тела при плоскопараллельном движении.....	38
2.6. Задание К3. Определение ускорений точек твёрдого тела при плоскопараллельном движении.....	46
3. СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ.....	57
3.1. Основные понятия сложного движения точки.....	57
3.2. Задание К4. Определение скорости и ускорения точки при сложном движении.....	60
4. ДИНАМИКА ТОЧКИ.....	73
4.1. Дифференциальные уравнения движения точки.....	73
4.2. Задание Д1. Интегрирование дифференциальных уравнений движения точки ...	73
4.3. Колебания материальной точки.....	80
4.4. Задание Д2. Исследование колебаний точки.....	84
4.5. Теорема об изменении кинетической энергии точки.	95
4.6. Задание Д3. Исследование движения точки с применением теоремы об изменении кинетической энергии.....	96
5. ДИНАМИКА МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ.....	103
5.1. Описание движений твёрдых тел на основе общих теорем динамики системы.....	103
5.2. Задание Д4. Динамический расчет механической системы.....	104
5.3. Теорема об изменении кинетической энергии системы.....	112
5.4. Задание Д5. Исследование движения механической системы с применением теоремы об изменении кинетической энергии.....	114
6. АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА.....	124
6.1. Принципы механики. Общее уравнение динамики.....	124
6.2. Задание Д6. Исследование механической системы с применением общего уравнения динамики.....	126
6.3. Уравнения Лагранжа II рода.....	136
6.4. Задание Д7. Исследование механической системы с одной степенью свободы с применением уравнений Лагранжа.....	137
6.5. Задание Д8. Исследование механической системы с двумя степенями свободы.....	145
СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ.....	155

1. СТАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

Статика представляет раздел теоретической механики, в котором изучаются условия равновесия твердых тел под действием системы сил.

1.1. Основные виды связей и их реакции

Опора тела на гладкую плоскость (поверхность) без трения. Реакция приложена в точке касания и направлена перпендикулярно к общей касательной соприкасающихся поверхностей. При опоре углом, или на угол (рис. 1.1, *a*), реакция направлена по нормали к одной из поверхностей.

Гибкая связь. Если на тело наложена связь в виде гибкой нерастяжимой нити (каната, троса), то реакция связи $\vec{T}$, равная натяжению нити, приложена к телу и направлена вдоль нити (рис. 1.1, *b*).

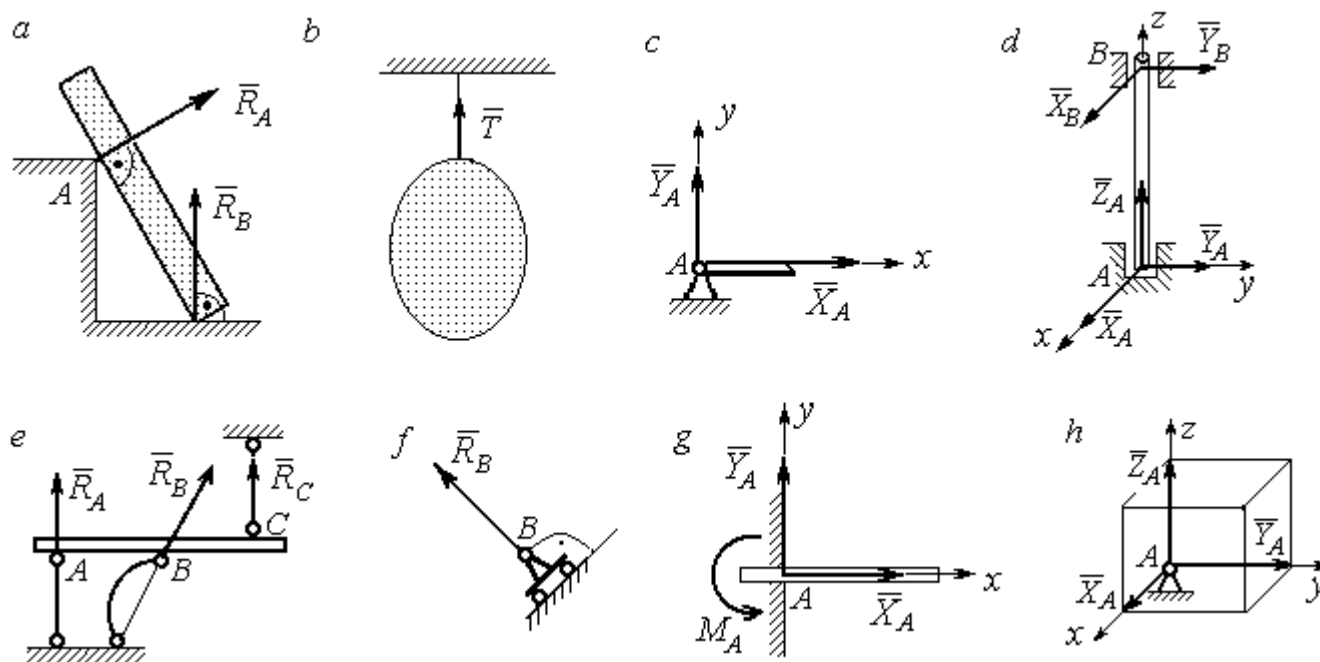


Рис. 1.1. Виды связей и их реакции:

- a* – реакция опоры тела на гладкую поверхность без трения; *b* – реакция связи гибкой нерастяжимой нити; *c* – реакция цилиндрического шарнира; *d* – реакция подшипника и подпятника; *e* – реакция невесомого стержня; *f* – реакция подвижной опоры; *g* – реакция жесткой заделки; *h* – реакция пространственного шарнира

Цилиндрический шарнир (подшипник) создает соединение, при котором одно тело может вращаться по отношению к другому. Реакция цилиндрического шарнира лежит в плоскости, перпендикулярной оси шарнира. При решении задач реакцию цилиндрического шарнира $\vec{R}_A$ изображают ее составляющими $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$, взятыми по направлениям координатных осей (рис. 1.1, с). Реакция подшипника $\vec{R}_B$ (рис. 1.1, d) также изображается своими составляющими $\vec{X}_B$ и $\vec{Y}_B$, взятыми по направлениям координатных осей в плоскости, перпендикулярной оси вращения подшипника. Величина реакции определяется по формуле: $R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2}$. **Реакция прямолинейного невесомого стержня с шарнирными соединениями на краях** направлена вдоль самого стержня, а криволинейного – вдоль линии, соединяющей точки крепления стержня (рис. 1.1, e). **Реакция подвижной опоры** $\vec{R}_B$ (рис. 1.1, f) направлена по нормали к поверхности, на которую опираются катки опоры. **Жесткая заделка** (рис. 1.1, g) препятствует не только линейным перемещениям тела, но и повороту. Реакция заделки состоит из силы реакции $\vec{R}_A$ и пары сил с моментом M_A . При решении задач силу реакции жесткой заделки $\vec{R}_A$ изображают ее составляющими $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$, взятыми по направлениям координатных осей. Модуль реакции определяется по формуле $R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2}$. Виды связей и их реакции показаны на рис. 1.1.

1.2. Моменты силы относительно центра и относительно оси. Пара сил. Момент пары

Алгебраическим моментом силы F относительно центра O $M_O(\vec{F})$, или просто **моментом силы** $\vec{F}$ относительно центра O , называют взятое с соответствующим знаком произведение модуля силы $\vec{F}$ на кратчайшее расстояние h от центра O до линии действия силы: $M_O(\vec{F}) = \pm Fh$ (рис. 1.2, a).

Величину h называют **плечом силы**. Момент силы относительно центра считается положительным, если сила стремится повернуть тело вокруг центра против хода часовой стрелки, и отрицательным – в обратном случае.

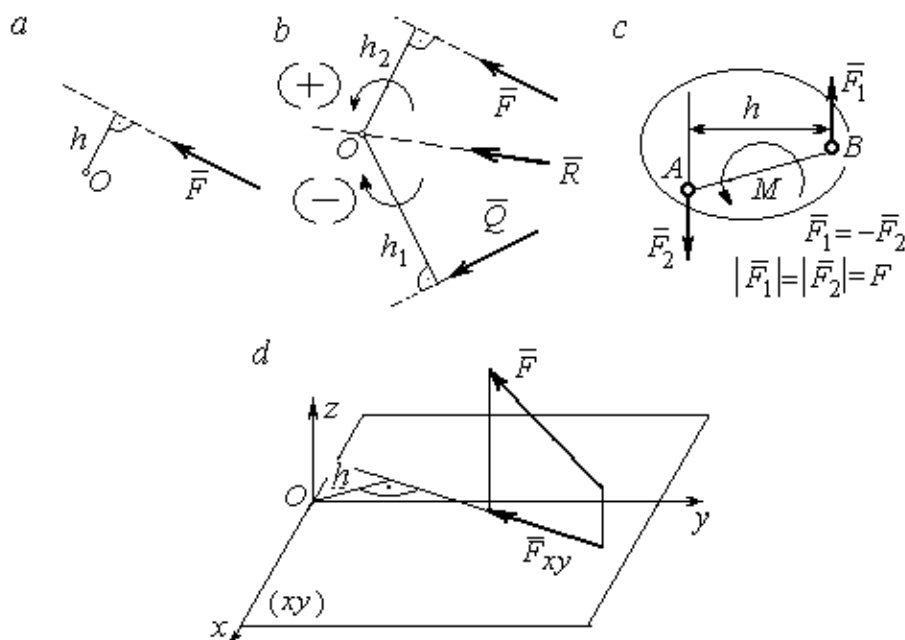


Рис. 1.2. Схемы для вычисления моментов сил:
 a, b – момент силы относительно центра; c – момент пары сил;
 d – момент силы относительно оси

На рис. 1.2, b показано, что момент силы $\vec{F}$ относительно центра O положительный, а момент силы $\vec{Q}$ относительно того же центра – отрицательный. Момент силы $\vec{R}$ относительно центра O равен нулю, так как линия действия этой силы проходит через центр O и плечо силы равно нулю.

Парой сил, или просто парой (рис.1.2, c), называют систему двух равных по модулю сил, параллельных, направленных в противоположные стороны и не лежащих на одной прямой. Алгебраическим моментом пары сил, или **моментом пары**, называют взятое со знаком плюс или минус произведение модуля одной из сил пары на плечо пары – кратчайшее расстояние между линиями действия ее сил. Правило знаков такое же, как и для момента силы. На рисунках пару часто изображают дуговой стрелкой, показывающей направление поворота твердого тела под действием пары (см. M на рис. 1.2, c).

Моментом силы относительно оси называют момент проекции этой силы на плоскость, перпендикулярную оси, относительно точки пересечения оси с этой плоскостью. На рис. 1.2, *d* показано вычисление момента силы F относительно оси z : $M_z(\vec{F}) = F_{xy}h$, где F_{xy} – проекция силы $\vec{F}$ на плоскость $xу$, перпендикулярную оси z , h – плечо проекции F_{xy} относительно центра O – точки пересечения оси z и плоскости xOy .

1.3. Условия равновесия систем сил

Плоской системой сил называется система сил, расположенных в одной плоскости.

Основная форма условий равновесия плоской системы сил. Для равновесия плоской системы сил, приложенных к твердому телу, необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на каждую из двух осей прямоугольной системы координат, расположенной в плоскости действия сил, были равны нулю и сумма моментов сил относительно любого центра, находящегося в плоскости действия сил, также была равна нулю:

$$\sum F_{kx} = 0, \quad \sum F_{ky} = 0, \quad \sum M_A(\vec{F}_k) = 0,$$

где F_{kx}, F_{ky} – проекции всех сил на координатные оси; $M_A(\vec{F}_k)$ – моменты всех сил относительно произвольно выбранного центра A .

Пространственной системой сил называется система сил, расположенных произвольно в пространстве.

Для равновесия пространственной системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на оси прямоугольной системы координат были равны нулю и суммы моментов всех сил относительно тех же осей также были равны нулю:

$$\sum F_{kx} = 0, \quad \sum F_{ky} = 0, \quad \sum F_{kz} = 0,$$

$$\sum M_x(\vec{F}_k)=0, \sum M_y(\vec{F}_k)=0, \sum M_z(\vec{F}_k)=0,$$

где F_{kx}, F_{ky}, F_{kz} – проекции всех сил на координатные оси x, y, z ; $M_x(\vec{F}_k), M_y(\vec{F}_k), M_z(\vec{F}_k)$ – моменты всех сил относительно выбранных осей.

Равновесие систем тел

Связи, соединяющие части конструкции, называют **внутренними**, в отличие от **внешних** связей, скрепляющих конструкцию с внешними телами, не входящими в данную конструкцию. Одним из способов решения задач на равновесие сил, действующих на сочленённую конструкцию с внутренними связями, является **разбиение конструкции на отдельные тела** и составление уравнений равновесия для каждого из тел, входящих в конструкцию. При этом в уравнения равновесия должны входить только силы, непосредственно приложенные к тому телу, равновесие которого рассматривается.

1.4. Задание С1. Равновесие произвольной плоской системы сил. Равновесие системы тел

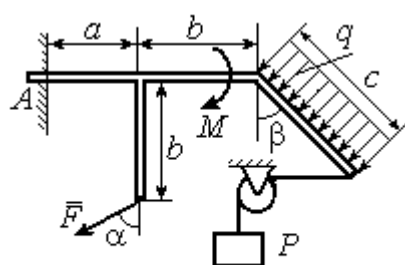
Каждый вариант задания включает две задачи по темам: «Равновесие произвольной плоской системы сил» и «Равновесие системы тел».

В задачах требуется определить реакции связей конструкции исходя из условия равновесия произвольной плоской системы сил. Весом стержневых подпорок, поддерживающих балочные конструкции, и блоков, через которые перекинуты невесомые нити, пренебречь.

Варианты заданий даны на рис. 1.3 – 1.6. Исходные данные приведены в табл. 1.1. Из таблицы исходных данных выбираются значения тех параметров, которые указаны на схемах.

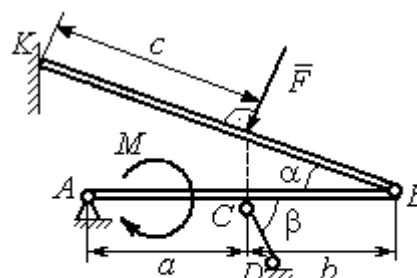
Варианты № 1, 11, 21

Задача 1



Найти реакцию жесткой заделки в точке A

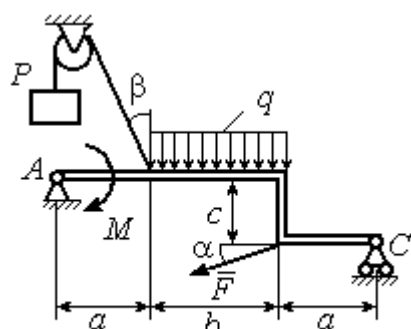
Задача 2



Найти реакции шарниров A, B , реакцию стержня CD и реакцию опоры в точке K

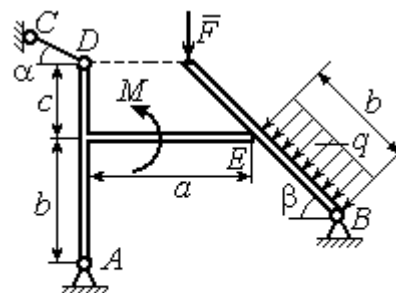
Варианты № 2, 12, 22

Задача 1



Найти реакции шарниров A и C

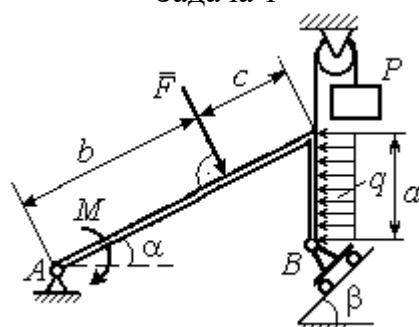
Задача 2



Найти реакции шарниров A, B , реакцию опоры в точке E и реакцию стержня CD

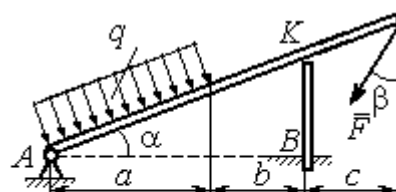
Варианты № 3, 13, 23

Задача 1



Найти реакции шарниров A и B

Задача 2

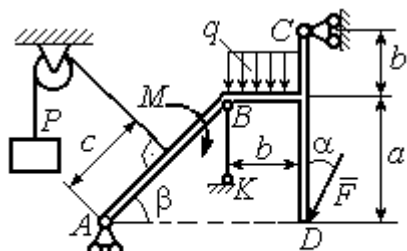


Найти реакцию шарнира A , реакцию опоры в точке K и реакцию жесткой заделки в точке B

Рис. 1.3. Задание С1. Равновесие произвольной плоской системы сил.
Равновесие системы тел. Номера вариантов задания 1 – 3, 11 – 13, 21 – 23

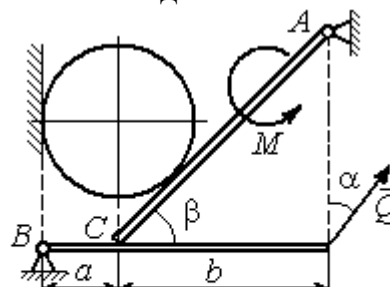
Варианты № 4, 14, 24

Задача 1



Найти усилие в стержне BK и реакцию шарниров A, C

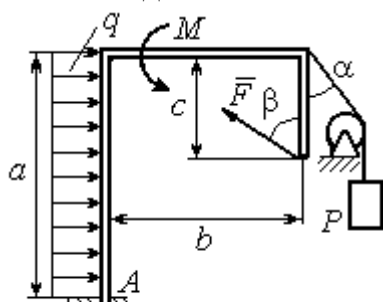
Задача 2



Вес шара P . Найти реакцию шарниров A, B , давление шара на балку и стенку, реакцию опоры балки в точке C и уравнивающую силу Q

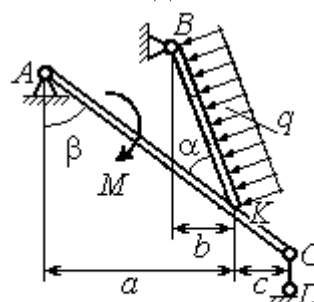
Варианты № 5, 15, 25

Задача 1



Найти реакцию жесткой заделки в точке A

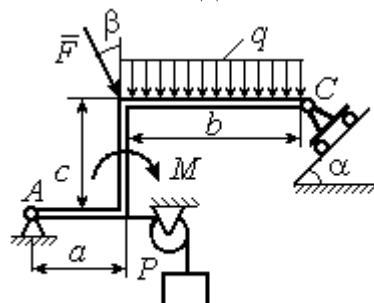
Задача 2



Найти реакцию шарниров A, B , реакцию стержня CD и реакцию опоры в точке K

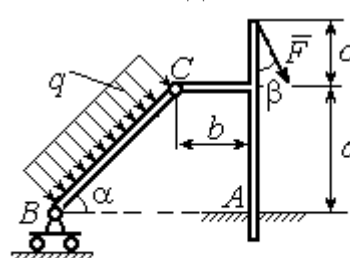
Варианты № 6, 16, 26

Задача 1



Найти реакции шарниров A и C

Задача 2

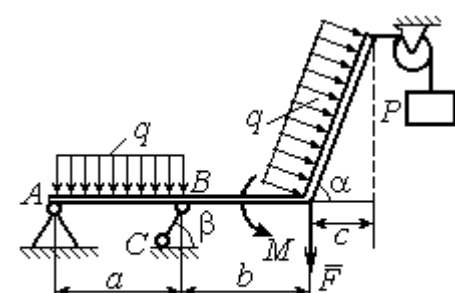


Найти реакцию жесткой заделки в точке A и реакции шарниров B и C

Рис. 1.4. Задание С1. Равновесие произвольной плоской системы сил. Равновесие системы тел. Номера вариантов задания 4 – 6, 14 – 16, 24 – 26

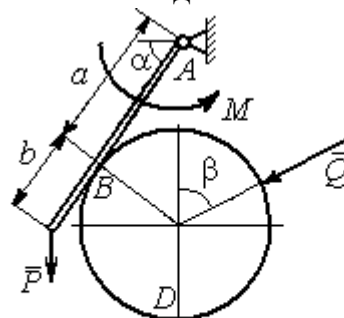
Варианты № 7, 17, 27

Задача 1



Найти реакцию стержня BC и реакцию шарнира A

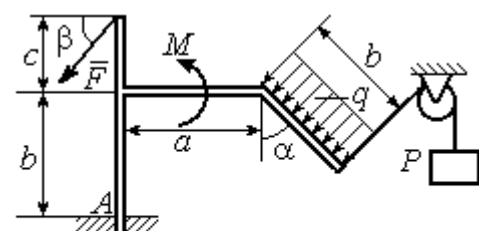
Задача 2



Найти реакцию шарнира A , давление балки на шар, реакцию опоры шара в точке D и уравновешивающую силу Q

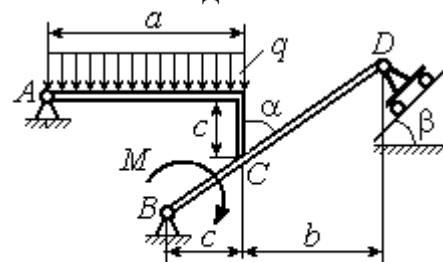
Варианты № 8, 18, 28

Задача 1



Найти реакцию жесткой заделки в точке A

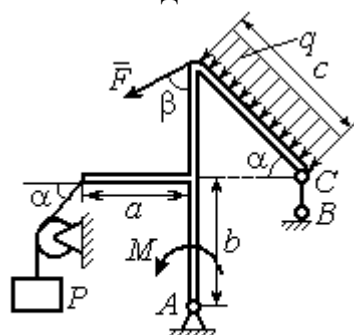
Задача 2



Найти реакцию шарниров A, B и D и реакцию опоры в точке C

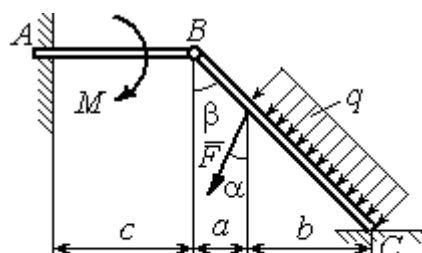
Варианты № 9, 19, 29

Задача 1



Найти реакцию стержня BC и реакцию шарнира A

Задача 2



Найти реакцию жесткой заделки в точке A , реакцию шарнира B и реакцию опоры в точке C

Рис. 1.5. Задание С1. Равновесие произвольной плоской системы сил. Равновесие системы тел. Номера вариантов задания 7 – 9, 17 – 19, 27 – 29

Варианты № 10, 20, 30	
Задача 1 Найти реакцию жесткой заделки в точке А	Задача 2 Найти реакцию шарниров А, В, реакцию опоры в точке С и уравновешивающую силу $\bar{Q}$

Рис. 1.6. Задание С1. Равновесие произвольной плоской системы сил.
Равновесие системы тел. Номера вариантов задания 10, 20, 30

Таблица 1.1

**Исходные данные задания С1. Равновесие произвольной плоской системы сил.
Равновесие системы тел.**

Номер варианта задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
P , кН	6	5	6	12	6	6	10	3	8	5	10	4	8	10	8
F , кН	12	6	10	5	12	8	6	5	6	2	12	8	12	6	10
q , кН/м	5	4	2	3	6	3	5	2	2	4	6	2	3	4	5
M , кН·м	12	8	6	8	12	5	12	8	4	6	8	12	10	6	10
α , град	45	60	30	60	30	30	45	60	30	30	45	30	60	45	60
β , град	60	30	45	30	60	90	60	60	30	45	30	45	30	60	30
a , м	3	4	3	4	3	4	3	4	1	2	2	3	2	3	4
b , м	3	3	4	3	2	4	3	3	2	3	3	3	4	3	2
c , м	4	2	2	2	3	2	2	1	5	4	4	2	1	2	2

Номер варианта задания	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
P , кН	10	8	10	6	4	6	12	10	5	6	8	6	8	4	6
F , кН	6	12	12	8	3	14	10	8	15	10	12	8	10	10	2
q , кН/м	5	3	4	3	2	3	2	5	4	2	3	4	5	2	4
M , кН·м	10	6	8	6	5	12	4	6	8	10	12	10	6	4	8
α , град	60	60	30	45	60	30	60	45	30	60	45	30	30	30	45
β , град	45	30	30	60	60	45	30	60	30	45	90	30	60	45	30
a , м	3	4	3	1	2	2	4	1	4	3	4	3	2	1	2
b , м	2	4	3	3	4	1	4	3	2	2	2	2	2	2	2
c , м	3	2	2	4	5	4	2	2	1	1	1	2	1	3	5

Пример выполнения задания С1. Равновесие произвольной плоской системы сил. Равновесие системы тел.

Задача 1. Рама ACE (рис. 1.7) в точке A закреплена на цилиндрической шарнирной опоре, а в точке B поддерживается вертикальным невесомым стержнем BK . На раму действуют: пара с моментом $M = 8$ Нм, сила $F = 10$ Н, приложенная в точке D под углом 60° к раме, и равномерно распределенная нагрузка интенсивностью $q = 2$ Н/м, приложенная на отрезке AB . В точке E под прямым углом к участку балки CE прикреплен трос, несущий груз $P = 20$ Н. Пренебрегая весом балки, определить реакцию шарнира A и реакцию стержневой опоры BK , если $a = 2$ м.

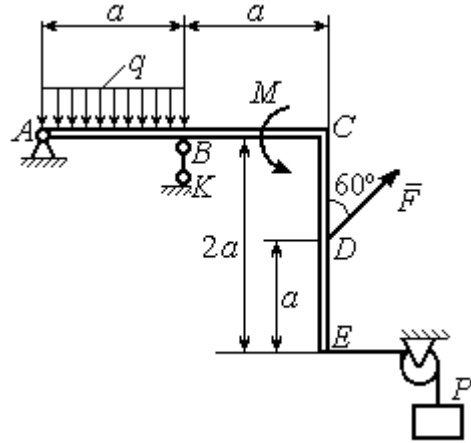


Рис. 1.7. Конструкция рамы

Решение

Выбираем систему координат xAy , например, как показано на рис. 1.8. Заменяем действие связей их реакциями. Изображаем реакцию шарнира A двумя

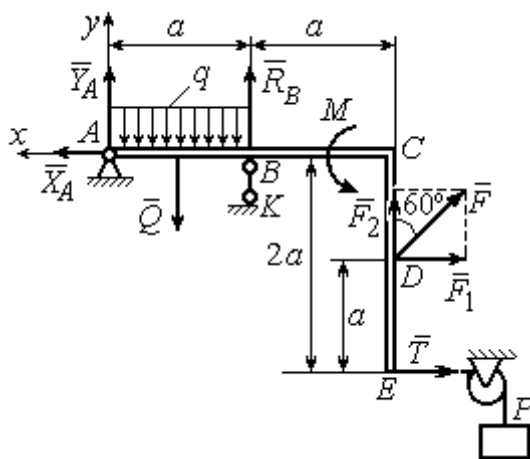


Рис. 1.8. Силы и реакции связей, действующие на раму при её равновесии

её составляющими $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$, направленными вдоль горизонтальной и вертикальной осей (см. рис. 1.8). Реакция $\vec{R}_B$ невесомой стержневой опоры BK приложена в точке B и направлена вдоль стержня BK . Заменяем распределенную нагрузку её равнодействующей $\vec{Q}$. Сила $\vec{Q}$ приложена в середине отрезка AB и по модулю равна $Q = qa = 4$ Н. Действие груза P на раму изображается реакцией $\vec{T}$, равной по величине весу груза.

При равновесии рамы действующие на неё силы составляют уравновешенную произвольную плоскую систему. Условия равновесия системы сил имеют вид: $\sum F_{kx} = 0$, $\sum F_{ky} = 0$, $\sum M_A(\vec{F}_k) = 0$. Вычисляя проекции сил на оси x , y , и моменты сил относительно центра A , уравнения равновесия получим в виде:

$$\sum F_{kx} = X_A - F \cos 30^\circ - T = 0, \quad \sum F_{ky} = Y_A - Q + R_B + F \cos 60^\circ = 0.$$

$$\sum M_A(\vec{F}_k) = -Q \frac{a}{2} + R_B a + M + F \cos 60^\circ \cdot 2a + F \cos 30^\circ \cdot a + T 2a = 0.$$

Здесь для вычисления момента силы $\vec{F}$ относительно центра A использована теорема Вариньона: $M_A(\vec{F}) = M_A(\vec{F}_1) + M_A(\vec{F}_2) = F_1 \cdot a + F_2 \cdot 2a$, где $F_1 = F \cos 30^\circ$, $F_2 = F \cos 60^\circ$ (см. рис. 1.8).

Подставляя в уравнения равновесия исходные данные задачи, получим систему уравнений относительно неизвестных X_A, Y_A, R_B :

$$X_A - 28,66 = 0, \quad Y_A + R_B + 1 = 0, \quad R_B \cdot 2 + 121,32 = 0.$$

Решая систему, найдем $X_A = 28,66$ Н, $Y_A = 59,66$ Н, $R_B = -60,66$ Н.

Отрицательное значение величины R_B означает, что фактическое направление реакции R_B стержневой опоры BK противоположно направлению, показанному на рис. 1.8. Численное значение реакции шарнира

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = \sqrt{28,66^2 + 59,66^2} = 66,18 \text{ Н}.$$

Задача 2. Балка $ABLC$ с вертикальной частью AB и горизонтальной переключиной LC закреплена в точке A с помощью жесткой заделки (рис. 1.9). Наклонная балка EC с углом наклона к горизонту 60° в точке C шарнирно прикреплена к горизонтальной переключине CL , а в точке E закреплена на шарнирно-подвижной опоре, установленной на горизонтальной поверхности. На конструкцию действуют равномерно распределенная на отрезках BL и DE нагрузка с одинаковой интенсивностью $q = 2$ кН/м, сила $\vec{F}$, приложенная в точке D перпендикулярно балке EC и равная по величине $F = 10$ кН, и пара сил

с моментом $M = 5 \text{ кН}\cdot\text{м}$. Определить реакцию жесткой заделки A и реакции шарниров C и E , если $a = 2 \text{ м}$.

Решение

Разделяем систему на две части по шарниру C и рассмотрим равновесие балок $ABLC$ и EC отдельно. Изобразим обе балки и расставим внешние силы и реакции связей (рис. 1.10). Рассмотрим балку $ABLC$ (рис. 1.10, a). Заменим распределенную нагрузку эквивалентной силой $\bar{Q}_1$, приложенной в середине отрезка BL , направленной в сторону действия нагрузки и равной $Q_1 = q \cdot a = 4$

кН. Кроме силы $\bar{Q}_1$ и пары сил с моментом M на балку действуют реакция

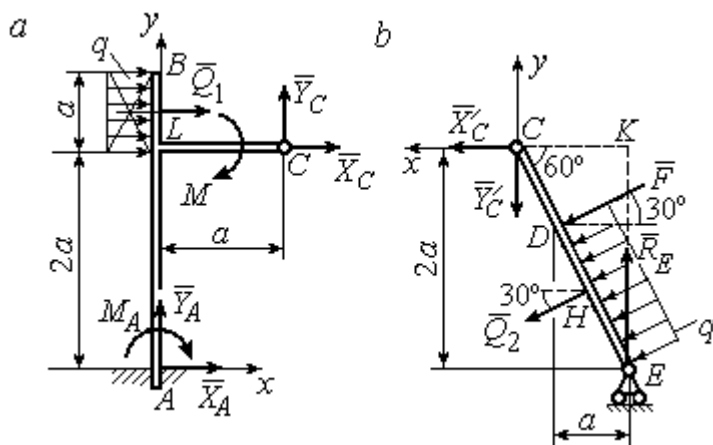


Рис. 1.10. Равновесие частей конструкции:
 a - силы и реакции связей, действующие на балку $ABLC$;
 b - силы и реакции связей, действующие на балку CE

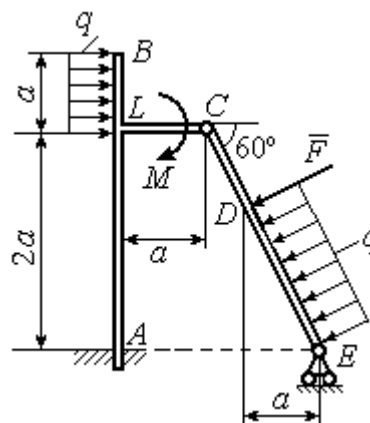


Рис. 1.9. Равновесие конструкции двух балок, соединённых шарниром

жёсткой заделки в точке A , имеющая своими составляющими силы $\bar{X}_A$, $\bar{Y}_A$ и пару сил с моментом M_A , а также реакция шарнира C , разложенная на составляющие $\bar{X}_C$, $\bar{Y}_C$ (см. рис. 1.10, a). Действующие на раму силы составляют уравновешенную плоскую систему сил. Выберем систему координат xAy , как показано на рис. 1.10, a , и составим уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx} = X_A + Q_1 + X_C = 0, \quad \sum F_{ky} = Y_A + Y_C = 0,$$

$$\sum M_A(\vec{F}_k) = -M_A - Q_1 \cdot \left(2a + \frac{a}{2}\right) - M + Y_C a - X_C 2a = 0.$$

Рассмотрим равновесие балки EC . Заменим равномерную нагрузку эквивалентной силой $\vec{Q}_2$, приложенной в середине отрезка ED , направленной в сторону действия нагрузки и равной по модулю $Q_2 = q \cdot 2a = 8 \text{ кН}$. На балку кроме сил $\vec{Q}_2$, $\vec{F}$ действуют реакции связей: $\vec{R}_E$ – реакция шарнирно-подвижной опоры в точке E и $\vec{X}'_C$, $\vec{Y}'_C$ – составляющие реакции шарнира C . Силы $\vec{X}'_C$, $\vec{Y}'_C$ направлены противоположно силам $\vec{X}_C$, $\vec{Y}_C$ и равны им по модулю $X_C = X'_C$, $Y_C = Y'_C$ (см. рис. 1.10, a , b). Действующие на балку EC силы образуют плоскую уравновешенную систему сил. Выберем систему координат xCy , как показано на рис. 1.10, b , и составим уравнения равновесия. При этом центром, относительно которого будем считать моменты сил, выберем точку C . Получим:

$$\sum F_{kx} = Q_2 \sin 60^\circ + F \cos 30^\circ + \vec{X}'_C = 0, \quad \sum F_{ky} = R_E - Q_2 \cos 60^\circ - F \sin 30^\circ - Y'_C = 0, \\ \sum M_C(\vec{F}_k) = -F \cdot CD - Q_2 \cdot CH + R_E \cdot CK = 0.$$

Здесь плечи сил: $CD = \frac{2a}{\cos 30^\circ} - 2a$, $CH = \frac{2a}{\cos 30^\circ} - a$, $CK = 2a \tan 30^\circ$. Заменяя в уравнениях величины X'_C на X_C , а Y'_C на Y_C и подставляя исходные данные, получим систему уравнений:

$$X_A + X_C + 4 = 0, \quad Y_A + Y_C = 0, \quad -M_A - 4X_C + 2Y_C - 25 = 0, \\ X_C + 15,59 = 0, \quad -Y_C + R_E - 9 = 0, \quad 2,31R_E - 27,14 = 0,$$

откуда найдём величины реакции жесткой заделки и реакции шарниров:

$$X_A = 11,59 \text{ кН}, \quad Y_A = -2,76 \text{ кН}, \quad M_A = 42,87 \text{ кН} \cdot \text{м}, \\ X_C = -15,59 \text{ кН}, \quad Y_C = 2,76 \text{ кН}, \quad R_E = 11,76 \text{ кН}.$$

Модули реакций жесткой заделки A и шарнира C :

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = 11,91 \text{ кН}, \quad R_C = \sqrt{X_C^2 + Y_C^2} = 15,83 \text{ кН}.$$

1.5. Задание С2. Равновесие пространственной системы сил

В заданиях рассматривается равновесие однородной плиты или вала (прямого или с «ломаной» осью) с насаженным на него шкивом.

Вал закреплен подпятником и подшипником и удерживается в равновесии. На вал действуют сила $\vec{F}$, пара сил с моментом M и сила $\vec{P}$. На шкив вала намотана нить, к свободному концу которой, перекинутому через невесомый блок, подвешен груз весом Q . Для вала определить реакции подшипника и подпятника и величину уравнивающей силы Q (или момента M).

Плита весом P закреплена пространственным шарниром, подшипником и удерживается в заданном положении невесомым стержнем. На плиту действуют силы $\vec{F}$, $\vec{Q}$ и пара сил с моментом M . Для плиты найти реакции сферического и цилиндрического шарниров и реакцию стержня.

Варианты задания даны на рис. 1.11 – 1.13. Исходные данные для выполнения задания приведены в табл. 1.2.

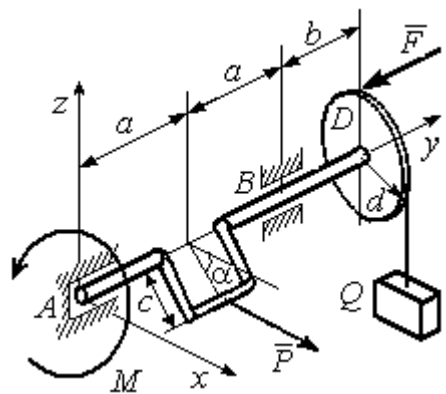
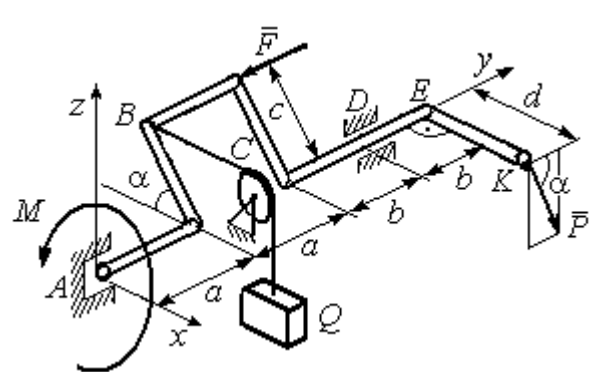
Варианты № 1, 11, 21	Варианты № 2, 12, 22
 Сила $\vec{F}$ параллельна оси Ay; сила $\vec{P}$ параллельна оси Ax; нить, удерживающая груз, сходит со шкива вертикально. Найти реакции подпятника и подшипника в точках A и B и величину уравнивающего груза Q	 Сила $\vec{F}$ параллельна оси Ay; сила $\vec{P}$ лежит в плоскости, параллельной zAy; отрезок нити BC параллелен оси Ax; рукоять вала EK параллельна оси Ax. Найти реакции подпятника и подшипника в точках A и D и величину уравнивающего момента M

Рис. 1.11. Задание С2. Равновесие пространственной системы сил.

Номера вариантов задания 1 – 2, 11 – 12, 21 – 22

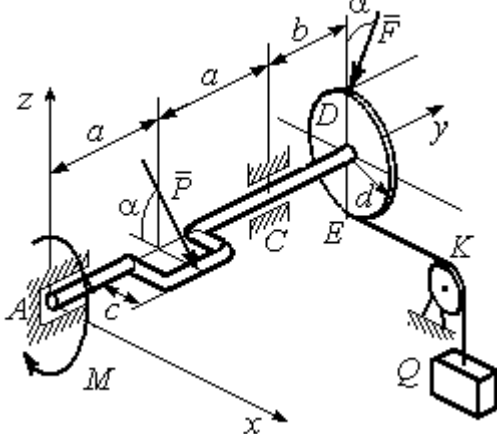
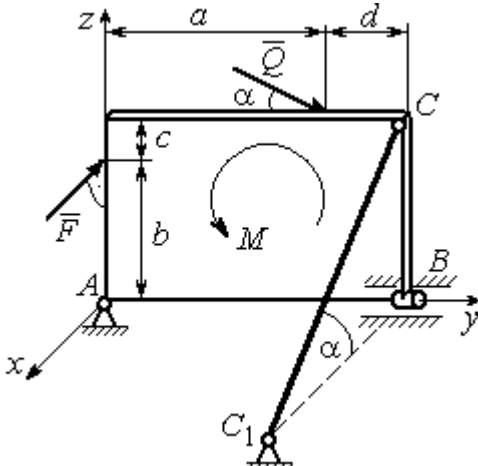
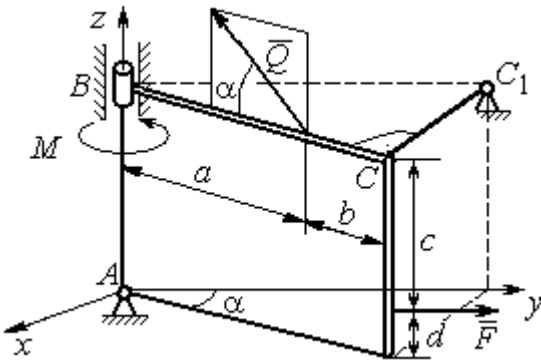
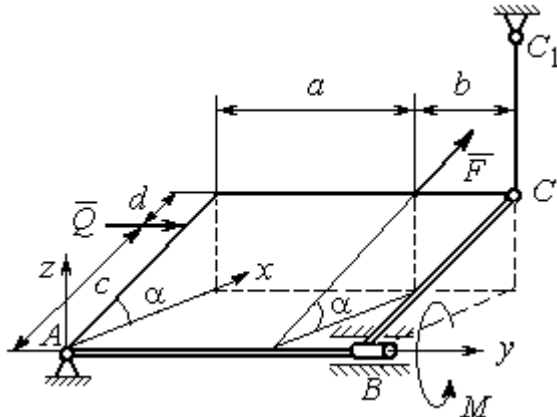
Варианты № 3, 13, 23	Варианты № 4, 14, 24
 Сила $\vec{F}$, лежит в плоскости zAy; сила $\vec{P}$ лежит в плоскости, параллельной zAx, отрезок нити EK параллелен оси Ax. Найти реакции подпятника и подшипника в точках A и C, а также величину уравновешивающего груза Q	 Плита весом P расположена в плоскости zAy; пара сил с моментом M действует в плоскости плиты; стержень CC_1 расположен в плоскости, параллельной zAx; сила $\vec{Q}$ действует в плоскости плиты; сила $\vec{F}$ перпендикулярна плоскости плиты. Найти реакции сферического и цилиндрического шарниров в точках A и B и реакцию стержня CC_1
Варианты № 5, 15, 25	Варианты № 6, 16, 26
 Плита весом P отклонена на угол α от вертикальной плоскости zAy; сила $\vec{Q}$ лежит в плоскости плиты; сила $\vec{F}$ параллельна оси Ay; стержень CC_1 перпендикулярен плоскости плиты. Найти реакции сферического и цилиндрического шарниров в точках A и B и реакцию стержня CC_1	 Плита весом P отклонена на угол α от горизонтальной плоскости xAy; сила $\vec{Q}$ перпендикулярна боковой стенке плиты и параллельна оси Ay; сила $\vec{F}$ расположена в плоскости плиты и параллельна её боковым стенкам; стержень CC_1 параллелен оси Az. Найти реакции сферического и цилиндрического шарниров в точках A и B и реакцию стержня CC_1

Рис. 1.12. Задание С2. Равновесие пространственной системы сил.

Номера вариантов задания 3 – 6, 13 – 16, 23 – 26

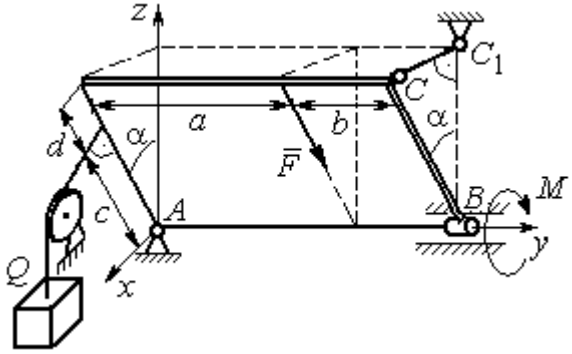
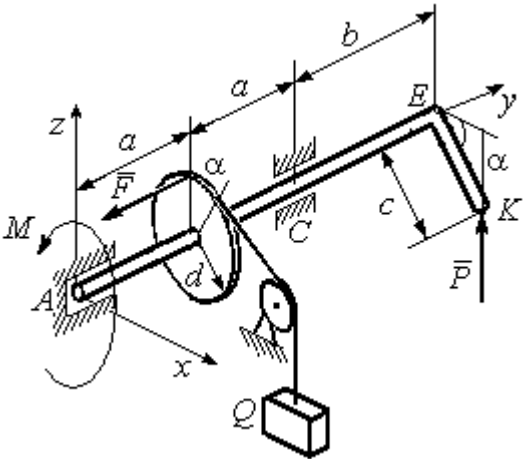
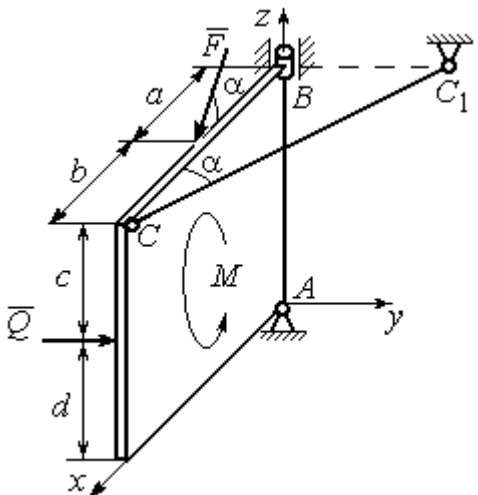
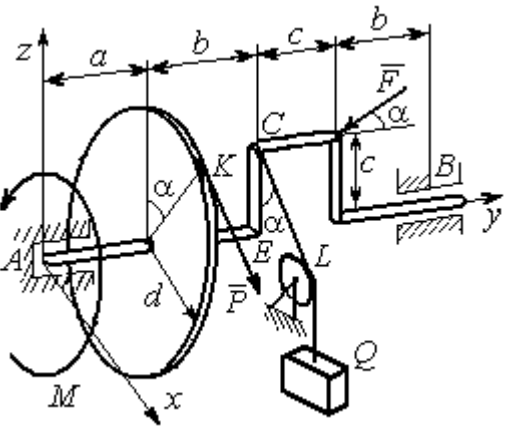
Варианты № 7, 17, 27	Варианты № 8, 18, 28
 Плита весом P отклонена на угол α от вертикальной плоскости zAy; нить, удерживающая груз Q, находится в плоскости zAx, прикреплена к боковой стенке плиты и перпендикулярна ей; сила $\vec{F}$ параллельна боковым стенкам плиты; стержень CC_1 перпендикулярен плоскости zAy. Найти реакции сферического и цилиндрического шарниров в точках A и B и реакцию стержня CC_1	 Рукоять EK перпендикулярна оси вала и наклонена под углом α к горизонтальной плоскости xAy; сила $\vec{P}$ параллельна оси Az; сила $\vec{F}$ параллельна оси Ay; нить, удерживающая груз Q, сходит со шкива по касательной. Найти реакции подпятника A, подшипника C, и величину уравнивающего груза Q
Варианты № 9, 19, 29	Варианты № 10, 20, 30
 Плита весом P находится в вертикальной плоскости zAx; стержень CC_1 расположен в плоскости, параллельной xAy; пара сил с моментом M действует в плоскости плиты; сила $\vec{Q}$ перпендикулярна плоскости плиты; сила $\vec{F}$ лежит в плоскости плиты. Найти реакции сферического и цилиндрического шарниров в точках A и B и реакцию стержня CC_1	 Сила $\vec{F}$ находится в плоскости zAy; стойка CE находится в плоскости zAy; отрезок CL нити, удерживающей груз, находится в плоскости параллельной xAz; сила $\vec{P}$ находится в плоскости шкива и направлена по касательной к ободу в точке K. Найти реакции подпятника A, подшипника B и величину уравнивающего момента M

Рис. 1.13. Задание С2. Равновесие пространственной системы сил.

Номера вариантов задания 7 – 10, 17 – 20, 27 – 30

**Исходные данные для задания С2.
Равновесие пространственной системы сил**

Номер варианта задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P , кН	5	4	6	10	16	15	12	10	15	14
F , кН	8	6	12	6	10	10	8	12	12	10
Q , кН	—	12	—	12	8	12	10	—	10	12
M , кН·м	12	—	10	8	12	6	8	6	8	—
α , град	60	30	30	30	60	60	60	30	30	60
a , м	1,2	0,8	1,4	0,6	1,2	0,9	1,4	0,4	0,8	0,8
b , м	1,0	0,6	1,1	0,4	0,8	0,4	0,6	1,2	0,2	0,6
c , м	0,8	0,5	0,8	0,3	1,4	0,8	1,2	0,8	0,4	0,4
d , м	0,4	0,4	0,6	0,2	0,4	0,2	0,4	0,6	0,6	0,6

Номер варианта задания	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
P , кН	8	10	10	15	14	10	16	9	10	12
F , кН	6	12	16	8	12	14	10	15	8	10
Q , кН	—	14	—	10	10	12	14	—	12	14
M , кН·м	10	—	12	12	12	8	10	10	10	—
α , град	30	60	60	60	30	30	30	60	60	30
a , м	0,8	1,3	0,9	0,5	1,3	1,2	1,6	0,6	0,9	1,2
b , м	0,6	1,1	0,6	0,4	0,9	0,6	0,8	1,2	0,3	0,8
c , м	0,4	0,8	0,5	0,2	1,5	0,9	1,2	0,4	0,6	0,6
d , м	0,2	0,4	0,4	0,1	0,5	0,4	0,6	0,2	0,2	0,8

Номер варианта задания	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
P , кН	10	12	5	8	10	14	18	12	14	10
F , кН	12	8	15	10	12	8	10	15	9	8
Q , кН	—	10	—	12	14	10	16	—	12	6
M , кН·м	12	—	16	14	8	10	8	12	10	—
α , град	90	30	60	30	45	30	30	60	60	30
a , м	0,6	0,8	1,1	1,2	1,5	0,8	1,0	0,8	1,2	0,9
b , м	0,8	0,6	0,9	1,0	0,9	0,6	0,8	1,4	0,6	0,4
c , м	0,4	1,2	0,8	0,6	1,5	0,9	1,1	0,5	0,8	0,6
d , м	0,4	1,5	0,5	0,2	0,4	0,3	0,3	0,4	0,6	0,5

Примеры решения задания С2. Равновесие пространственной системы сил

Задача 1. Горизонтальный вал (рис. 1.14) закреплен в подпятнике C и подшипнике K . Вал имеет шкив I радиуса R и шкив II радиуса r , перпендикулярные оси вала. Рукоять AE параллельна оси Cx . Нить, удерживающая груз Q , сходит со шкива I по касательной вертикально вниз. На вал действуют силы $\vec{F}$, $\vec{P}$ и пара сил с моментом M , закручивающая вал

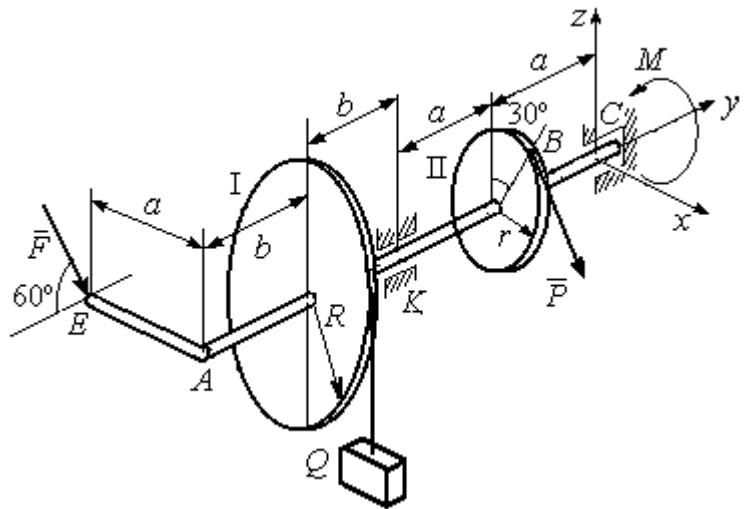


Рис. 1.14. Схема вала и его нагрузка

вокруг оси Cy . Сила $\vec{F}$ находится в плоскости, параллельной zCy , и составляет угол 60° с направлением оси Cy . Сила $\vec{P}$ приложена в точке B шкива II, определяемой центральным углом 30° , и направлена по касательной. Определить величину уравнивающего момента M и реакции подшипника и подпятника, если $P = 4$ кН, $F = 2$ кН, $Q = 3$ кН, $R = 0,6$ м, $r = 0,3$ м, $a = 0,8$ м, $b = 0,4$ м.

Решение

Рассмотрим равновесие вала. На вал действуют внешние силы $\vec{F}$, $\vec{P}$, па-

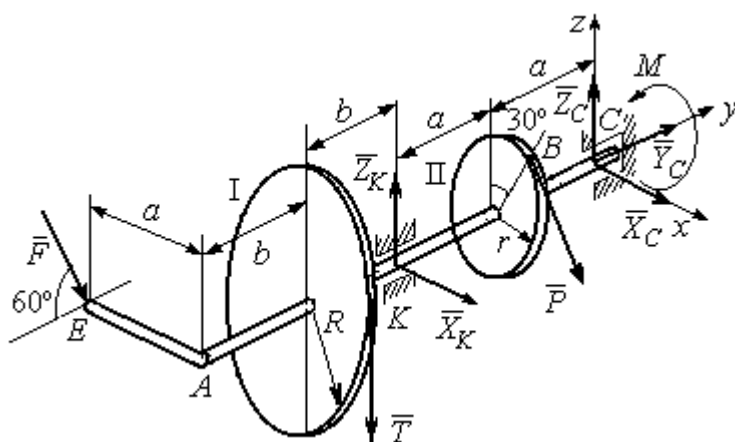


Рис. 1.15. Внешние силы и реакции связей вала

ра сил с моментом M и реакции связей. Связями являются нить, натянутая грузом Q , подпятник C и подшипник K . Освобождаем вал от связей, заменяя их действие реакциями. Реакцию подпятника C раскладываем на три со-

ставляющие: $\vec{X}_C$, $\vec{Y}_C$, $\vec{Z}_C$, направленные вдоль координатных осей. Реакция подшипника K лежит в плоскости, перпендикулярной оси вала, и ее составляющими будут вектора $\vec{X}_K$, $\vec{Z}_K$, направленные вдоль координатных осей x , z . Реакция нити $\vec{T}$ направлена вдоль нити от точки K и по модулю равна весу груза. Действие на вал внешних сил и реакций связи показано на рис. 1.15.

Внешние силы, действующие на вал, и реакции связей составляют произвольную пространственную систему сил, эквивалентную нулю $(\vec{P}, \vec{F}, \vec{X}_K, \vec{Z}_K, \vec{T}, \vec{X}_C, \vec{Y}_C, \vec{Z}_C, M) \propto 0$, для которой уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx} = 0, \sum F_{ky} = 0, \sum F_{kz} = 0,$$

$$\sum M_x(\vec{F}_k) = 0, \sum M_y(\vec{F}_k) = 0, \sum M_z(\vec{F}_k) = 0.$$

Для удобства при составлении уравнений равновесия изобразим вал вместе с действующими на него силами в проекциях на координатные плоскости (рис. 1.16)

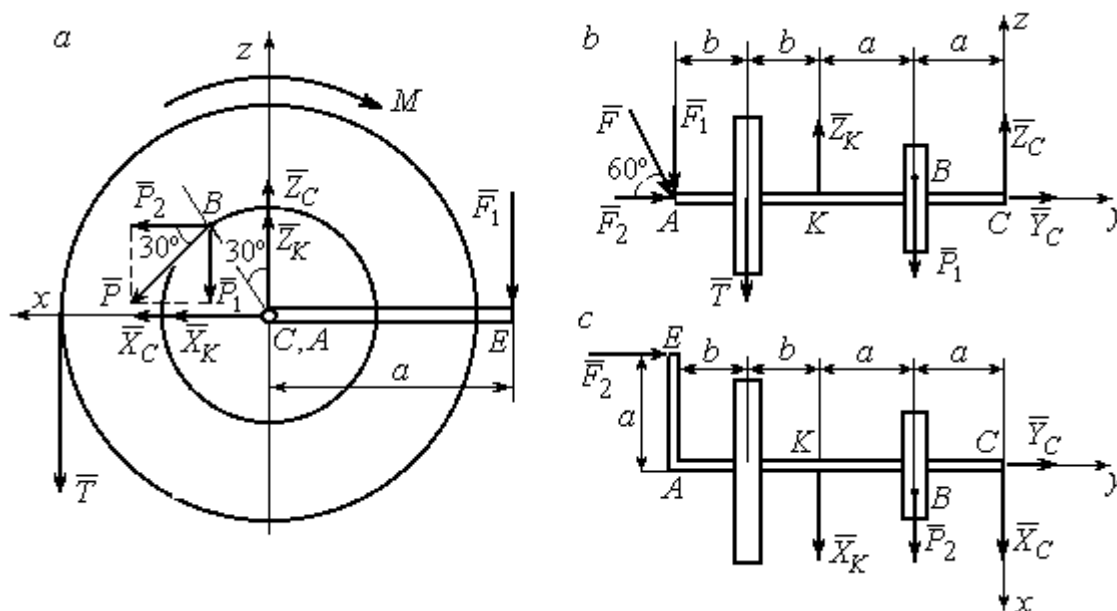


Рис. 1.16. Вал и действующие на него силы в проекциях на координатные плоскости:

- a – вид вала в проекции на плоскость zCx с положительного конца оси y ;
- b – вид вала в проекции на плоскость zCy с положительного конца оси x ;
- c – вид вала в проекции на плоскость xCy с положительного конца оси z .

На рис. 1.16, *a* показаны проекции всех сил на плоскость zCx . Вычисляя моменты проекций этих сил относительно точки C , получим значения моментов исходных сил относительно оси y .

Для вычисления моментов сил относительно оси x достаточно найти моменты проекций сил на плоскость zCy относительно точки C (см. рис. 1.16, *b*), а вычисляя моменты проекций сил на плоскость xCy относительно точки C , получим значения моментов сил относительно оси z .

Составляем уравнения равновесия:

$$\begin{aligned}\sum F_{kx} &= P_2 + X_K + X_C = 0, \quad \sum F_{ky} = F_2 + Y_C = 0, \\ \sum F_{kz} &= -P_1 + Z_K - T + Z_C - F_1 = 0, \\ \sum M_x(\vec{F}_k) &= P_1 a - Z_K 2a - T(2a + b) + F_1(2a + 2b) = 0, \\ \sum M_y(\vec{F}_k) &= -F_1 a + TR + Pr - M = 0, \\ \sum M_z(\vec{F}_k) &= P_2 a + X_K 2a - F_2 a = 0.\end{aligned}$$

Подставляя исходные данные задачи, с учётом того, что

$$P_1 = P \cos 60^\circ = 0,5P, \quad P_2 = P \cos 30^\circ = 0,87P,$$

$$F_1 = F \cos 30^\circ = 0,87F, \quad F_2 = F \cos 60^\circ = 0,5F \quad (\text{см. рис. 1.16 } a, b),$$

получим систему уравнений:

$$\begin{aligned}0,87 \cdot 4 + X_K + X_C &= 0, \quad 2 \cdot 0,5 + Y_C = 0, \quad -4 \cdot 0,5 + Z_K - 3 + Z_C - 2 \cdot 0,87 = 0, \\ 0,5 \cdot 4 \cdot 0,8 - 1,6Z_K - 3 \cdot 0,87(2 \cdot 0,8 + 0,4) + 2 \cdot 0,87(2 \cdot 0,8 + 2 \cdot 0,4) &= 0, \\ -0,87 \cdot 0,8 + 3 \cdot 0,6 + 4 \cdot 0,3 - M &= 0, \quad 0,87 \cdot 4 \cdot 0,8 + 1,6 \cdot X_K - 2 \cdot 0,5 \cdot 0,8 = 0.\end{aligned}$$

Решая систему, найдём: $X_C = -2,24$ кН, $Y_C = -1$ кН, $Z_C = 6,39$ кН, $X_K = -1,24$ кН, $Z_K = 0,35$ кН, $M = 2,3$ кН·м.

Окончательно, реакция подпятника $R_C = \sqrt{X_C^2 + Y_C^2 + Z_C^2} = 6,84$ кН,

реакция подшипника $R_K = \sqrt{X_K^2 + Z_K^2} = 1,29$ кН.

Задача 2. Плита весом P расположена в вертикальной плоскости zAy . В точке A плита закреплена пространственным шарниром, а в точке B на оси y

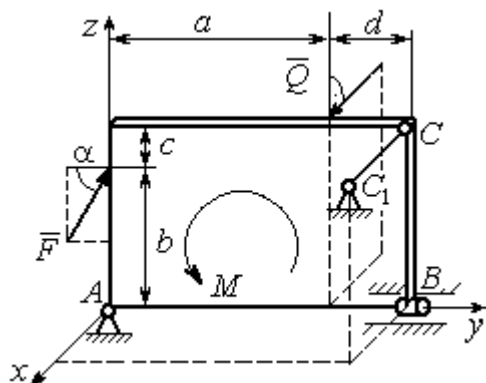


Рис. 1.17. Равновесие плиты

опирается на цилиндрический шарнир (подшипник). Плита удерживается в равновесии при помощи невесомого стержня CC_1 , прикрепленного шарниром к плите в её верхнем углу, в точке C перпендикулярно плоскости плиты (рис. 1.17).

На плиту действует сила $\bar{Q}$, приложенная на краю плиты перпендикулярно

её плоскости, и сила $\bar{F}$, лежащая в плоскости плиты и направленная под углом α к горизонту (см. рис. 1.17). Кроме того, в плоскости плиты на неё действует пара сил с моментом M . Найти реакции шарниров A и B и усилие в стержневой подпорке CC_1 при равновесии плиты, если параметры нагрузки: $P = 1$ кН, $Q = 500$ Н, $F = 400$ Н, $M = 300$ Н·м, $\alpha = 35^\circ$, $a = 2$ м, $b = 1,5$ м, $c = 0,2$ м, $d = 0,4$ м.

Решение

Заменим связи плиты их реакциями. Реакция шарнира A раскладывается на три составляющие: $\bar{X}_A$, $\bar{Y}_A$, $\bar{Z}_A$ по направлениям координатных осей. Направления координатных осей показаны на рис. 1.17. Реакция подшипника B лежит в плоскости, перпендикулярной оси подшипника, и ее составляющими будут вектора $\bar{X}_B$, $\bar{Z}_B$, направленные вдоль координатных осей x , z . Реакция стержня $\bar{T}$ направлена вдоль стержня. Действие сил и реакций показано на рис.1.18.

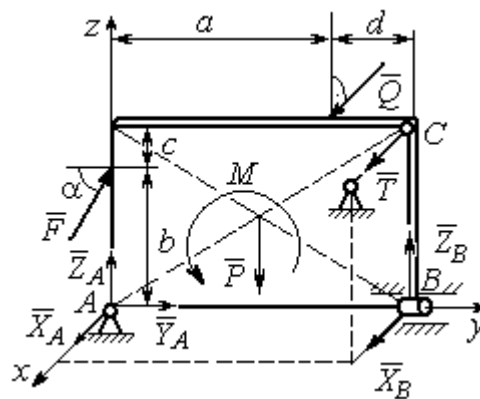


Рис. 1.18. Действие сил и реакций при равновесии плиты

Пространственная система сил, действующих на плиту, является уравновешенной: $(\vec{P}, \vec{F}, \vec{X}_B, \vec{Z}_B, \vec{T}, \vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Z}_A, M) \infty 0$. Уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx} = 0, \sum F_{ky} = 0, \sum F_{kz} = 0,$$

$$\sum M_x(\vec{F}_k) = 0, \sum M_y(\vec{F}_k) = 0, \sum M_z(\vec{F}_k) = 0.$$

В вычислениях моментов сил относительно осей будем считать момент положительным, если при взгляде со стороны положительного направления оси, сила вращает тело (плиту) против хода часовой стрелки. Получим:

$$\sum F_{kx} = 0, X_A + Q + X_B + T = 0,$$

$$\sum F_{ky} = 0, Y_A + F \cos \alpha = 0,$$

$$\sum F_{kz} = 0, Z_A + F \sin \alpha - P + Z_B = 0$$

$$\sum M_x(\vec{F}_k) = 0, -F \cos \alpha \cdot b - P \cdot 0,5(a + d) + Z_B(a + d) + M = 0,$$

$$\sum M_y(\vec{F}_k) = 0, Q \cdot (b + c) + T \cdot (b + c) = 0,$$

$$\sum M_z(\vec{F}_k) = 0, -Q \cdot a - T \cdot (a + d) - X_B \cdot (a + d) = 0.$$

Подставив исходные данные задачи, получим систему уравнений:

$$X_A + 500 + X_B + T = 0, Y_A + 400 \cdot 0,82 = 0, Z_A + 400 \cdot 0,57 - 1000 + Z_B = 0,$$

$$-400 \cdot 0,82 \cdot 1,5 - 1000 \cdot 0,5 \cdot 2,4 + Z_B \cdot 2,4 + 300 = 0,$$

$$500 \cdot 1,7 + T \cdot 1,7 = 0, -500 \cdot 2 - T \cdot 2,4 - X_B \cdot 2,4 = 0,$$

откуда находим значения составляющих реакций:

$$T = -500 \text{ Н}, X_B = 83,33 \text{ Н}, Z_B = 580 \text{ Н},$$

$$X_A = -83,33 \text{ Н}, Y_A = -328 \text{ Н}, Z_A = 192 \text{ Н}.$$

Полные реакции пространственного шарнира A:

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2 + Z_A^2} = 389,09 \text{ Н},$$

цилиндрического шарнира B: $R_B = \sqrt{X_B^2 + Z_B^2} = 585,95 \text{ Н}.$

2. КИНЕМАТИКА ТОЧКИ И ТВЕРДОГО ТЕЛА

Кинематикой называется раздел механики, в котором изучаются свойства движения материальных тел без учета их масс и действующих на них сил.

2.1. Кинематика точки. Основные параметры движения точки

Кривая, которую описывает движущаяся точка, называется **траекторией** точки. Движение точки может быть задано **векторным**, **координатным** или **естественным** способами.

Векторный способ основан на определении положения точки ее радиусом-вектором в виде векторного уравнения $\vec{r} = \vec{r}(t)$. При **координатном способе** задания движения точки положение точки определяется ее координатами, заданными для каждого момента времени: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$. **Естественный способ** задания движения используется, если заранее известна траектория движения точки. Тогда положение точки однозначно определяется длиной дуги $OM = S(t)$, отсчитываемой от некоторой фиксированной точки O , принятой за начало отсчета.

Мгновенная скорость, или скорость точки в данный момент времени, является векторной величиной и определяется как производная по времени от радиуса-вектора точки: $\vec{V} = \dot{\vec{r}}$. Вектор скорости точки $\vec{V}$ всегда направлен по касательной к траектории в сторону движения точки.

При координатном способе задания движения величины проекций вектора скорости $\vec{V}$ на координатные оси определяются как производные по времени от соответствующих координат: $V_x = \dot{x}$, $V_y = \dot{y}$, $V_z = \dot{z}$. Модуль вектора скорости: $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$. При естественном способе задания движения вектор скорости точки определяется равенством: $\vec{V} = \dot{S}\vec{\tau}$, где $S = S(t)$ – закон измене-

ния длины дуги, $\vec{\tau}$ – единичный вектор касательной к траектории движения, направленный в сторону возрастающих расстояний.

Величина $V = |\dot{S}|$ называется алгебраической скоростью точки. При $\dot{S} > 0$ вектор скорости $\vec{V}$ направлен по единичному вектору $\vec{\tau}$ – в сторону возрастающих расстояний. При $\dot{S} < 0$ он имеет направление, противоположное единичному вектору $\vec{\tau}$, т. е. в сторону убывающих расстояний.

Мгновенное ускорение, или ускорение точки в данный момент времени, является векторной величиной и определяется как производная по времени от вектора скорости точки или как вторая производная от радиус-вектора точки:

$\vec{a} = \dot{\vec{V}} = \ddot{\vec{r}}$. При координатном способе проекции вектора ускорения $\vec{a}$ на координатные оси – величины a_x, a_y, a_z – определяются равенствами: $a_x = \dot{V}_x = \ddot{x}$, $a_y = \dot{V}_y = \ddot{y}$, $a_z = \dot{V}_z = \ddot{z}$. Модуль вектора ускорения равен: $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

При естественном способе задания движения вектор ускорения точки $\vec{a}$ раскладывается на две взаимно перпендикулярные составляющие $\vec{a}_n$ и $\vec{a}_\tau$, параллельные осям n и τ естественной системы координат, и представляется в виде равенства $\vec{a} = a_\tau \vec{\tau} + a_n \vec{n}$, или $\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$, где $\vec{\tau}$ – единичный направляющий вектор оси, касательной к траектории (касательная ось); $\vec{n}$ – единичный направляющий вектор главной нормали траектории. Величина a_n называется

нормальным ускорением точки и вычисляется по формуле: $a_n = \frac{V^2}{\rho}$, где ρ –

радиус кривизны траектории. (У окружности радиус кривизны равен её радиусу, у прямой линии – бесконечности.) Вектор $\vec{a}_n$ нормальной составляющей ускорения всегда направлен к центру кривизны траектории. При движении по окружности радиус кривизны траектории равен радиусу окружности, а центр кривизны траектории совпадает с центром окружности. Величина a_τ называется **касательным ускорением** и равна модулю второй производной от заданно-

го закона изменения длины дуги: $a_\tau = |\ddot{S}|$, где $S = S(t)$ – закон изменения длины дуги. Направление вектора касательного ускорения $\vec{a}_\tau$ зависит от знака второй производной $\ddot{S}$. При $\ddot{S} > 0$ вектор $\vec{a}_\tau$ направлен в сторону возрастающих расстояний, по направлению единичного вектора $\vec{\tau}$, при $\ddot{S} < 0$ – в сторону убывающих расстояний (противоположно единичному вектору $\vec{\tau}$). Вектор полного ускорения $\vec{a}$ направлен по диагонали прямоугольника, построенного на векторах $\vec{a}_n$ и $\vec{a}_\tau$. Модуль вектора ускорения: $a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}$.

2.2. Вращение тела вокруг неподвижной оси

Движение тела, при котором все точки некоторой его прямой остаются неподвижными, называется **вращательным**, а указанная прямая называется осью вращения. Вращение тела задается углом поворота $\varphi = \varphi(t)$ подвижной плоскости, связанной с телом, относительно некоторого ее начального положения. Направление вращения с возрастанием угла поворота считается положительным.

Величина **угловой скорости** вращения тела равна модулю производной от угла поворота тела по времени: $\omega = |\dot{\varphi}|$. Направление угловой скорости вращения тела зависит от знака производной $\dot{\varphi}$. При $\dot{\varphi} > 0$ вращение происходит в положительном направлении, в сторону возрастания угла поворота, при $\dot{\varphi} < 0$ – в отрицательном. Направление угловой скорости обычно показывают дуговой стрелкой вокруг оси вращения. Вектор угловой скорости $\vec{\omega}$ направлен вдоль оси вращения в сторону, откуда вращение тела видно против хода часовой стрелки.

Величина **углового ускорения** при вращении тела равна модулю второй производной от угла поворота тела по времени: $\varepsilon = |\ddot{\varphi}|$. Если $\ddot{\varphi}$ одного знака с

$\dot{\varphi}$, то угловое ускорение ускоряет вращение тела, если разных знаков, то угловое ускорение замедляет вращение.

При вращательном движении тела все его точки движутся по окружностям, радиусы которых равны расстояниям от выбранной точки до неподвижной оси. **Скорость точки вращающегося твердого тела** (в отличие от угловой скорости тела) называют **линейной**, или **окружной скоростью** точки. Величина скорости рассчитывается по формуле: $V = \omega h$, где ω – величина угловой скорости тела; h – расстояние от точки до оси вращения. Вектор скорости точки лежит в плоскости описываемой точкой окружности и направлен по касательной к ней в сторону вращения тела. Отношение скоростей двух точек вращающегося тела равно отношению расстояний от этих точек до оси: $\frac{V_{M1}}{V_{M2}} = \frac{h_1}{h_2}$.

Ускорение точки вращающегося твердого тела рассчитывается как ускорение точки при естественном способе задания движения в виде суммы векторов касательного и нормального ускорений: $\vec{a}_M = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$. Величины касательного, нормального и полного ускорений точки вращающегося тела, соответственно: $a_\tau = \varepsilon h$, $a_n = \omega^2 h$, $a_M = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$, где ω , ε – угловая скорость и угловое ускорение тела; h – расстояние от точки до оси вращения.

2.3. Плоскопараллельное движение твёрдого тела

Плоскопараллельным, или плоским движением твердого тела, называется такое движение, при котором все точки тела движутся параллельно некоторой неподвижной плоскости. Плоское движение представляется в виде суммы мгновенного поступательного движения, при котором все точки плоской фигуры движутся со скоростью выбранной точки-полюса, и мгновенного вращательного движения вокруг этого полюса.

Скорость любой точки M плоской фигуры равна векторной сумме вектора скорости точки-полюса и вектора скорости точки M при вращении тела вокруг этого полюса: $\vec{V}_M = \vec{V}_A + \vec{V}_{MA}$, где $\vec{V}_M$ – скорость точки M ; $\vec{V}_A$ – скорость полюса A ; $\vec{V}_{MA}$ – вектор скорости точки M при вращении тела вокруг полюса A , модуль скорости $V_{MA} = \omega \cdot MA$, где ω – угловая скорость мгновенного вращательного движения тела вокруг полюса; MA – расстояние между полюсом A и точкой M .

Мгновенным центром скоростей называется такая точка P плоской фигуры, скорость которой в данный момент времени равна нулю. Выбрав в качестве полюса мгновенный центр скоростей, скорость любой точки плоской фигуры находят так, как если бы мгновенное движение фигуры было вращательным вокруг мгновенного центра скоростей.

Способы построения мгновенного центра скоростей

1. Если известны направления скоростей $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$ каких-нибудь двух точек A и B плоской фигуры, то мгновенный центр скоростей находится в точке пересечения перпендикуляров, восстановленных из этих точек к векторам скоростей (рис. 2.1, a).

2. Если скорости $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$ двух точек A и B плоской фигуры известны и параллельны друг другу, а линия AB перпендикулярна $\vec{V}_A$ (и, конечно, $\vec{V}_B$), то мгновенный центр скоростей определяется как точка пересечения линий, проведенных через основания и вершины векторов скоростей (построение показано на рис. 2.1, b, c).

3. Если скорости $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$ двух точек A и B параллельны друг другу, но линия AB , соединяющая эти точки, не перпендикулярна векторам скоростей (рис. 2.1, d), то мгновенная угловая скорость тела равна нулю и движение тела

в данный момент времени является мгновенным поступательным. В этом случае скорости всех точек равны по величине и направлению.

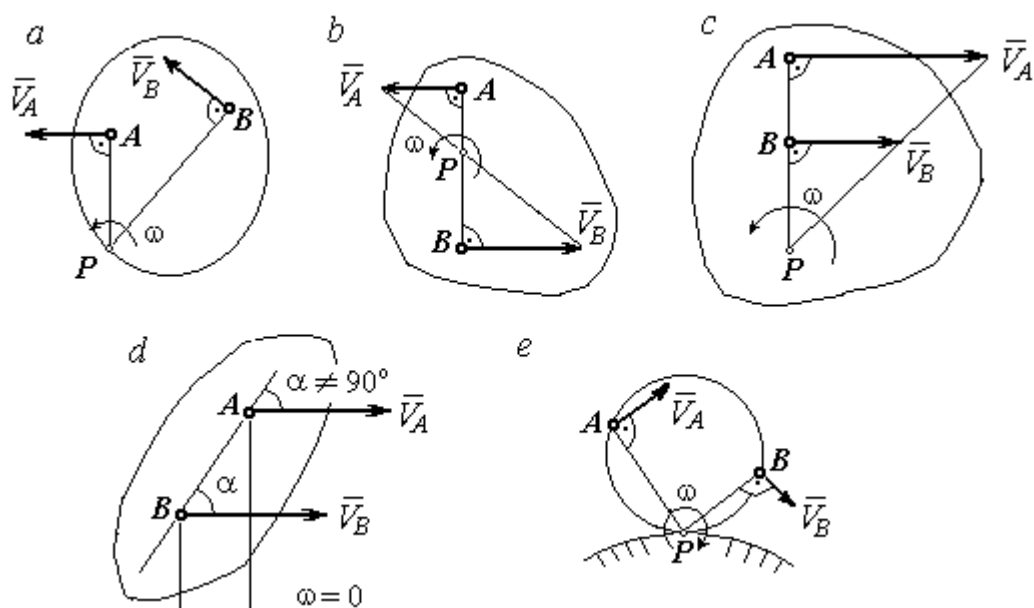


Рис. 2.1. Способы построения мгновенного центра скоростей

4. Если плоскопараллельное движение осуществляется путем качения без скольжения одного тела по неподвижной поверхности другого, то мгновенный центр скоростей расположен в точке касания катящегося тела с неподвижной поверхностью (рис. 2.1, e).

Ускорение любой точки M плоской фигуры при плоскопараллельном движении твердого тела представляется как сумма векторов – ускорения полюса и ускорения точки M при вращении фигуры вокруг полюса. Учитывая, что ускорение точки вращающегося тела представляется как сумма нормального и касательного ускорений, получим:

$$\vec{a}_M = \vec{a}_A + \vec{a}_{MA}^{\tau} + \vec{a}_{MA}^n,$$

где $\vec{a}_A$ – ускорение полюса A ; $\vec{a}_{MA}^{\tau}$, $\vec{a}_{MA}^n$ – касательная и нормальная составляющие ускорения точки M при вращении фигуры вокруг полюса A .

Вектор нормального ускорения $\vec{a}_{MA}^n$ всегда направлен от точки M к полюсу A . Вектор касательного ускорения $\vec{a}_{MA}^\tau$ направлен перпендикулярно отрезку AM в сторону вращения, если оно ускоренное (рис. 2.2, a), и против вращения, если оно замедленное (рис. 2.2, b). Численно величины касательного и

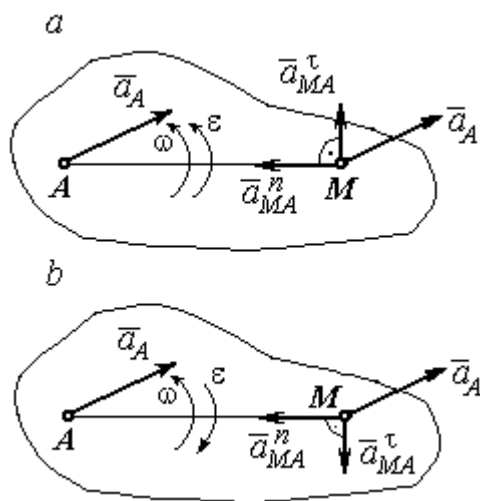


Рис. 2.2. Ускорение точки плоской фигуры:

a – ускоренное движение;
 b – замедленное движение

нормального составляющих ускорения точки M определяются по формулам:

$$a_{MA}^\tau = \varepsilon \cdot AM, \quad a_{MA}^n = \omega^2 \cdot AM,$$

где ω , ε – угловая скорость и угловое ускорение тела (плоской фигуры); AM – расстояние от точки M до полюса A (см. рис. 2.2).

Если при движении плоской фигуры известны траектории движения полюса A и точки M , то для определения ускорения точки M используется векторное равенство

$$\vec{a}_M^\tau + \vec{a}_M^n = \vec{a}_A^\tau + \vec{a}_A^n + \vec{a}_{MA}^\tau + \vec{a}_{MA}^n,$$

где $\vec{a}_M^\tau$, $\vec{a}_M^n$, $\vec{a}_A^\tau$, $\vec{a}_A^n$ – касательная и нормальная составляющие ускорения точки M и полюса A при движении их по заданным траекториям.

2.4. Задание К1. Определение скоростей и ускорений точек твердого тела при поступательном и вращательном движениях

По заданному движению одного из звеньев механизма $x_1 = x_1(t)$ (варианты 1, 3, 5, 7, 9) или $\varphi_1 = \varphi_1(t)$ (варианты 2, 4, 6, 8, 10) найти в момент времени t_1 скорость, касательное, нормальное и полное ускорения точки M звена механизма, совершающего вращательное движение, а также скорость и ускорение звена 4, совершающего поступательное движение.

Варианты заданий даны на рис. 2.3, 2.4. Исходные данные представлены в табл. 2.1.

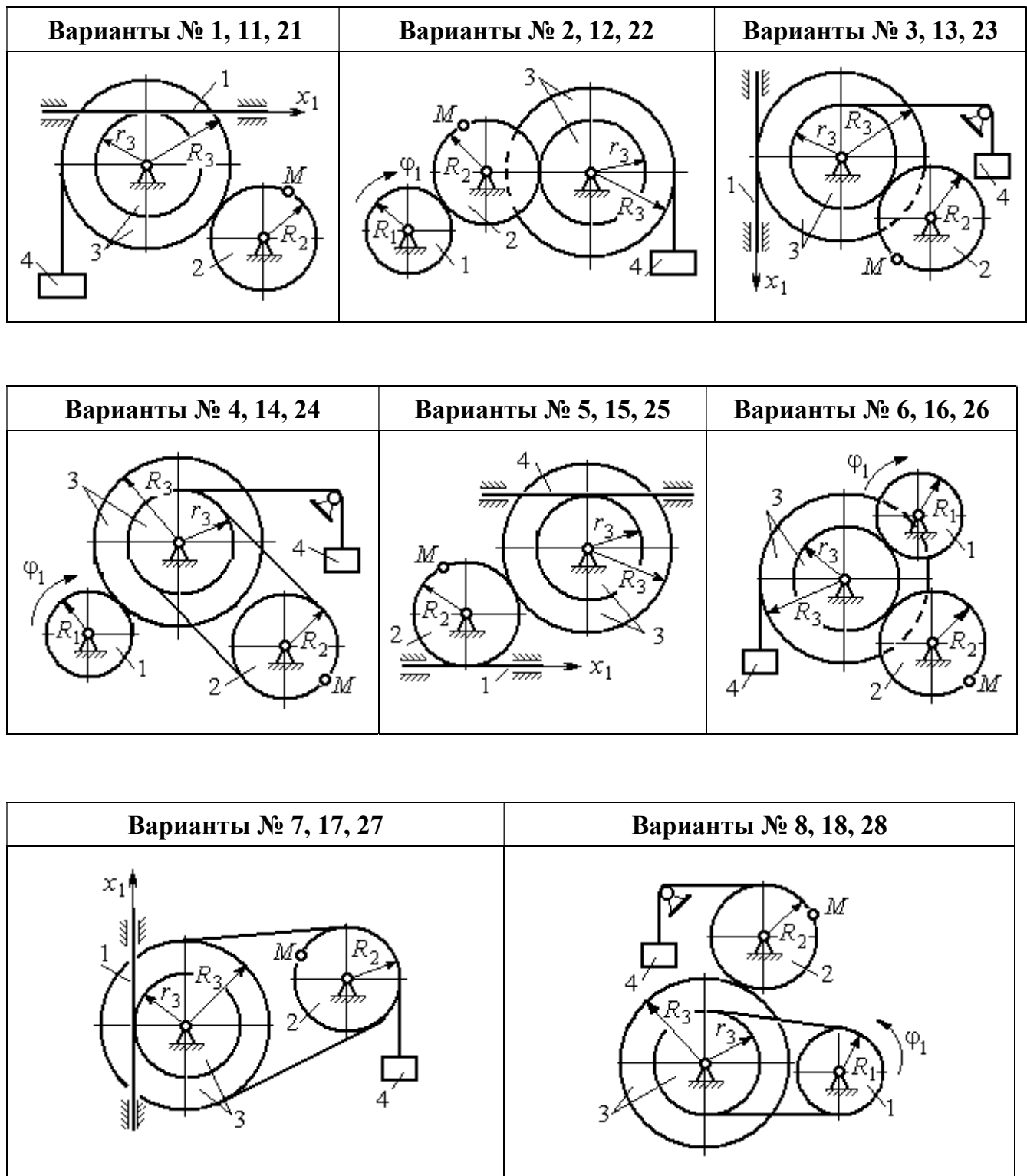


Рис. 2.3. Задание К1. Определение скоростей и ускорений точек при поступательном и вращательном движениях твёрдого тела.

Номера вариантов задания 1 – 8, 11 – 18, 21 – 28

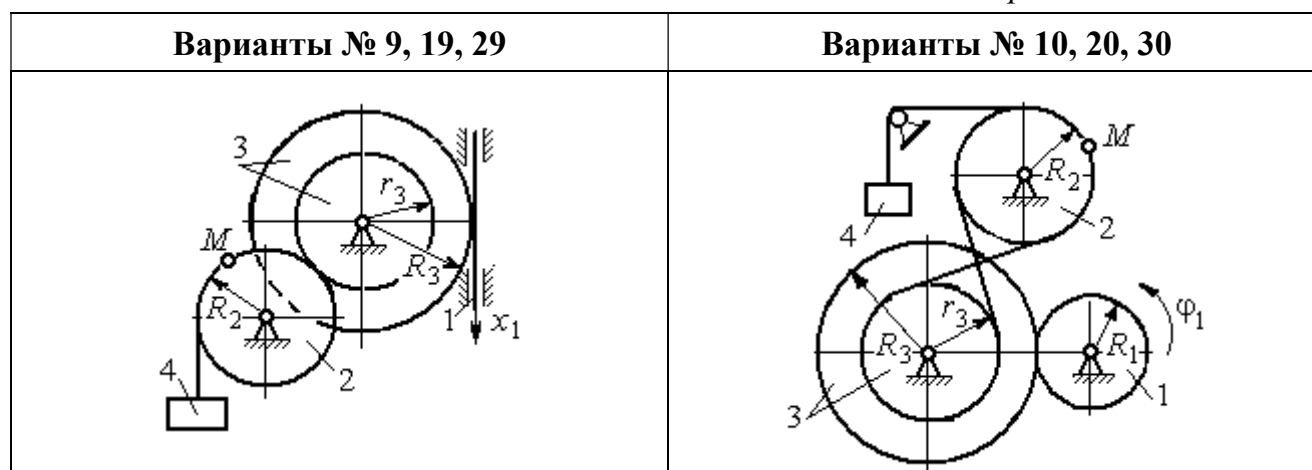


Рис. 2.4. Задание К1. Определение скоростей и ускорений точек при поступательном и вращательном движениях твёрдого тела.
Номера вариантов задания 9 – 10, 19 – 20, 29 – 30

Таблица 2.1

Исходные данные вариантов задания К1. Определение скоростей и ускорений точек при поступательном и вращательном движениях твёрдого тела

Номер варианта задания	R_1 , см	R_2 , см	R_3 , см	r_3 , см	$x_1(t)$, см $\varphi_1(t)$, рад	t_1 , с
1	—	40	45	35	$x_1(t) = (3t - 1)^2$	2
2	10	20	38	18	$\varphi_1(t) = t^2 + 6\cos(\pi t/6)$	3
3	—	30	42	18	$x_1(t) = 5t^2 - 2\cos(\pi t/2)$	1
4	15	30	45	20	$\varphi_1(t) = 5t^2 + \cos(\pi t/2)$	2
5	—	30	40	20	$x_1(t) = 6t - \cos(\pi t/3)$	3
6	10	20	30	10	$\varphi_1(t) = t^3 - \cos(\pi t/2)$	1
7	—	30	40	30	$x_1(t) = 2\sin(\pi t/2) + \cos(\pi t/2)$	2
8	8	10	30	25	$\varphi_1(t) = 5t + \cos(\pi t/2)$	2
9	—	18	30	18	$x_1(t) = 5t + \cos(\pi t/3)$	3
10	15	30	50	20	$\varphi_1(t) = 2t^2 + \sin(\pi t/4)$	2
11	—	30	40	25	$x_1(t) = (t^2 - 3t)$	2
12	12	20	40	28	$\varphi_1(t) = 3t^2 + 6\sin(\pi t/6)$	3
13	—	25	60	42	$x_1(t) = 2t^2 + \cos(\pi t/2)$	1
14	10	30	45	30	$\varphi_1(t) = 3t^2 + 2\cos(\pi t/2)$	2

Номер варианта задания	R_1 , см	R_2 , см	R_3 , см	r_3 , см	$x_1(t)$, см $\varphi_1(t)$, рад	t_1 , с
15	—	20	30	20	$x_1(t) = 3t^2 - \cos(\pi t/3)$	3
16	12	18	40	20	$\varphi_1(t) = 2t^3 + \cos(\pi t/2)$	1
17	—	20	35	15	$x_1(t) = 2 \sin(\pi t/2) - \cos(\pi t/2)$	2
18	15	18	40	25	$\varphi_1(t) = 5t + \cos(\pi t/2)$	1
19	—	22	50	18	$x_1(t) = t^2 + \cos(\pi t/3)$	3
20	10	20	45	10	$\varphi_1(t) = 2t^2 + \sin(\pi t/4)$	4
21	—	20	40	20	$x_1(t) = t + (3t - 4)^2$	2
22	8	18	42	18	$\varphi_1(t) = 2t^2 + 12 \cos(\pi t/6)$	3
23	—	45	60	40	$x_1(t) = 4t^2 + \sin(\pi t/2)$	1
24	5	15	30	20	$\varphi_1(t) = 2t^2 + 4 \cos(\pi t/2)$	2
25	—	15	35	25	$x_1(t) = 2t^2 + \cos(\pi t/3)$	3
26	18	20	35	20	$\varphi_1(t) = 2t^3 + \sin(\pi t/2)$	1
27	—	15	35	15	$x_1(t) = 2 \sin(\pi t/2) - \cos(\pi t/2)$	1
28	10	12	40	25	$\varphi_1(t) = 2t^2 + \cos(\pi t/2)$	1
29	—	35	50	10	$x_1(t) = t^3 - \cos(\pi t/2)$	1
30	10	20	40	10	$\varphi_1(t) = 2t^2 + \cos(\pi t/4)$	4

Пример выполнения задания К1. Определение скоростей и ускорений точек при поступательном и вращательном движениях твёрдого тела

По заданному уравнению движения звена 1 механизма (рис. 2.5, а) определить скорость, нормальное, касательное и полное ускорения точки M на момент времени t_1 , а также скорость и ускорение звена 4, если значения радиусов колес механизма и закон движения звена 1: $R_2 = 20$ см, $r_2 = 5$ см, $R_3 = 8$ см, $r_3 = 4$ см, $x_1 = 2t^2 - 5t$ см, $t_1 = 1$ с.

Решение

Отметим на схеме положительные направления отсчета углов поворота дисков 2 и 3, соответствующие заданному положительному направлению движения звена 1.

Направления показаны на рис 2.5, *b* дуговыми стрелками φ_2 , φ_3 , а положительное направление движения звена 4 – направлением оси x_4 .

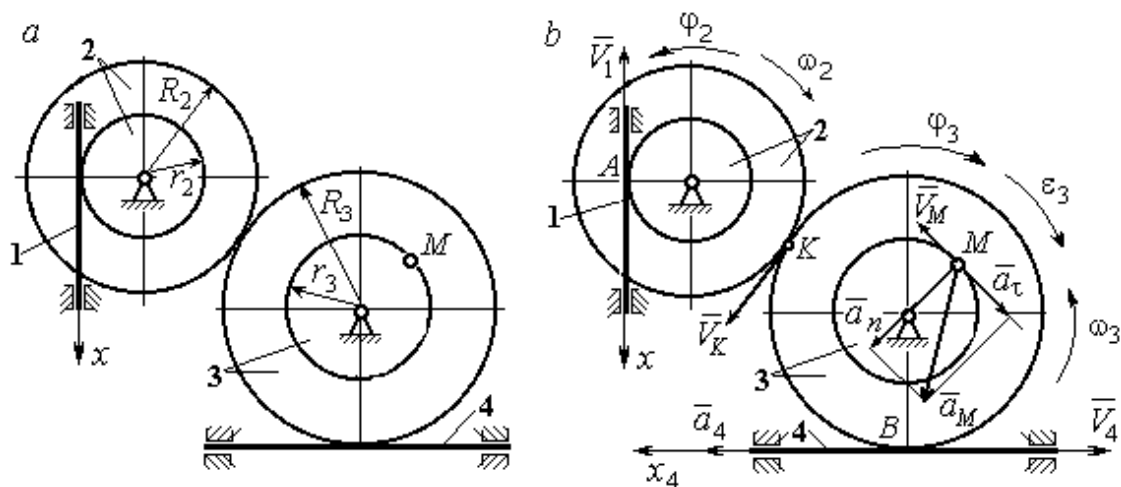


Рис. 2.5. Кинематика вращательного движения твердого тела:
a – схема механизма; *b* – расчетная схема для определения скоростей и ускорений точек механизма

Звено 1 движется поступательно. Движение задано координатным способом в виде закона изменения координаты x . Дифференцируем по времени уравнение движения: $\dot{x} = 4t - 5$ см/с. В момент времени $t_1 = 1$ с значение производной: $\dot{x}(1) = -1$ см/с. Отрицательное значение производной $\dot{x}$ показывает, что в данный момент времени звено 1 движется в отрицательном направлении оси x . Скорость звена 1 равна модулю производной: $V_1 = |\dot{x}|$. На рис. 2.5, *b* направление движения звена 1 в момент времени $t_1 = 1$ с показано вектором скорости $\vec{V}_1$, направленным в сторону, противоположную положительному направлению оси x . Эту же скорость будет иметь точка A – точка контакта звена 1 с диском 2, лежащая на расстоянии r_2 от оси вращения диска. Следовательно, $V_1 = V_A = \omega_2 r_2$, где ω_2 – угловая скорость диска 2. Отсюда угловая скорость диска: $\omega_2 = \frac{V_A}{r_2} = \frac{|4t - 5|}{5} = |\dot{\varphi}_2|$ рад/с. При $t_1 = 1$ с значение производной отрицательно: $\dot{\varphi}_2(1) = -0,2$ рад/с. Это означает, что в заданный момент времени вращение диска 2 с угловой скоростью $\omega_2(1) = |\dot{\varphi}_2(1)| = 0,2$ рад/с происходит

в отрицательном для диска 2 направлении. На рис. 2.5, *b* направление вращения диска 2 показано дуговой стрелкой ω_2 в сторону, противоположную положительному направлению отсчета угла φ_2 . При передаче вращения диска 2 диску 3 величины угловых скоростей дисков обратно пропорциональны радиусам дисков, которым принадлежит точка контакта: $\frac{\omega_2}{\omega_3} = \frac{R_3}{R_2}$. Тогда, угловая скорость диска 3 $\omega_3 = \omega_2 \frac{R_2}{R_3} = |2t - 2,5| = |\dot{\varphi}_3|$ рад/с.

В момент времени $t_1 = 1$ с значение производной $\dot{\varphi}_3$ отрицательно: $\dot{\varphi}_3(1) = -0,5$ рад/с, и, следовательно, вращение диска 3 в данный момент времени с угловой скоростью $\omega_3(1) = |\dot{\varphi}_3(1)| = 0,5$ рад/с происходит в сторону, противоположную положительному направлению отсчета угла φ_3 , как показано на рис. 2.5, *b*. Величина (модуль) скорости точки M рассчитывается по формуле: $V_M = \omega_3 r_3$. В момент времени $t_1 = 1$ с модуль скорости $V_M(1) = 2$ см/с. Вектор скорости $\vec{V}_M$ расположен по касательной к траектории движения точки M (окружности) и направлен в сторону вращения диска 3 (см. рис. 2.5, *b*).

Звено 4 движется поступательно. Скорость звена 4 равна скорости точки касания его с диском 3: $V_4 = V_B = \omega_3 R_3 = |2t - 2,5| \cdot 8 = |\dot{x}_4|$. В момент времени $t_1 = 1$ с значение производной от координаты движения звена 4 отрицательно: $\dot{x}_4(1) = -4$ см/с. В результате, вектор скорости $\vec{V}_4(1)$, равный по модулю $V_4(1) = 4$ см/с, направлен вдоль оси x_4 в сторону, противоположную ее положительному направлению (см. рис. 2.5, *b*).

Угловое ускорение диска 3: $\varepsilon_3(t) = |\dot{\omega}_3| = |\ddot{\varphi}_3| = 2$ рад/с². Из того, что угловая скорость ω_3 и угловое ускорение $\dot{\omega}_3$ диска 3 имеют разные знаки, следует, что вращение диска 3 замедленное. Угловое ускорение диска направлено в сторону положительного направления отсчета угла поворота φ_3 , диска 3 (см. рис. 2.5, *b*).

Касательное ускорение a_τ точки M рассчитывается по формуле $a_\tau = \varepsilon_3 r_3$ и в момент времени $t_1 = 1$ с: $a_\tau = 8$ см/с². Так как вращение диска 3 замедленное, вектор касательного ускорения точки M $\vec{a}_\tau(t)$ направлен в сторону, противоположную вектору скорости $\vec{V}_M(1)$ (см. рис. 2.5, b). Нормальное ускорение a_n точки M рассчитывается как $a_n = \omega_3^2 r_3$. В момент времени $t_1 = 1$ с величина нормального ускорения: $a_n(1) = 1$ см/с². Вектор нормального ускорения $\vec{a}_n(1)$ направлен по радиусу к центру диска 3 (см. рис. 2.5, b). Полное ускорение точки M в заданный момент времени: $a_M(1) = \sqrt{a_\tau^2(1) + a_n^2(1)} = 8,06$ см/с². Вектор полного ускорения $\vec{a}_M$ направлен по диагонали прямоугольника, построенного на векторах $\vec{a}_n$ и $\vec{a}_\tau$.

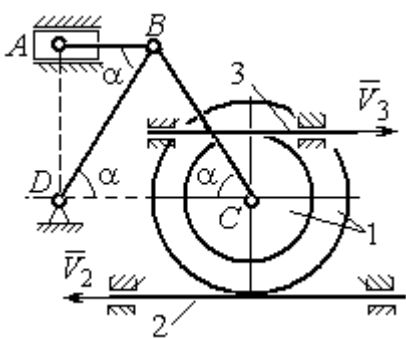
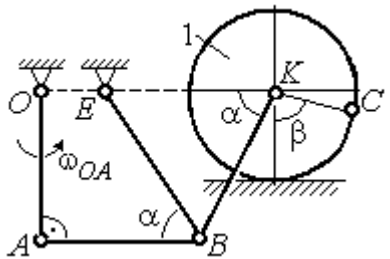
Ускорение a_4 звена 4 находится из условия, что звено 4 движется поступательно и прямолинейно. При прямолинейном движении нормальная составляющая ускорения равна нулю. Тогда $a_4 = a_{4\tau} = \dot{V}_4 = \dot{V}_B = |\dot{\omega}_3| R_3 = \varepsilon_3 R_3$.

Так как угловое ускорение диска 3 является постоянной величиной, ускорение a_4 не зависит от времени: $a_4 = 16$ см/с². Вектор ускорения $\vec{a}_4$ направлен вдоль оси x_4 в сторону положительных значений.

2.5. Задание К2. Определение скоростей точек твёрдого тела при плоскопараллельном движении

Для заданного положения плоского механизма определить скорости точек и угловые скорости звеньев механизма.

Варианты заданий показаны на рис. 2.6 – 2.8. Исходные данные вариантов заданий выбираются из таблиц, приведённых на рисунках схем механизмов.

Варианты № 1, 11, 21							Варианты № 2, 12, 22						
 Найти: $V_A, V_B, V_C, \omega_{AB}, \omega_{BC}, \omega_1, \omega_{BD}$							 Найти: $V_A, V_B, V_K, \omega_1, \omega_{AB}, \omega_{OA}, \omega_{BE}, \omega_{BK}$						
Номер варианта задания	R_1 , см	r_1 , см	AD , см	α , град	V_2 , см/с	V_3 , см/с	Номер варианта задания	R_1 , см	OA , см	OE , см	α , град	β , град	V_C , см/с
1	10	5	20	30	8	10	2	3	5	4	30	60	10
11	12	8	25	45	10	4	12	4	8	6	45	90	8
21	10	6	15	60	5	5	22	5	12	2	60	120	12

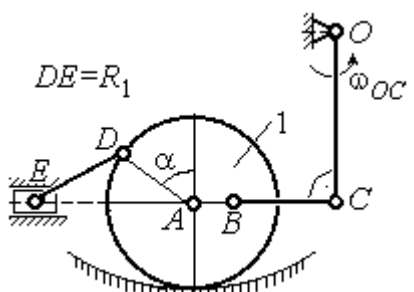
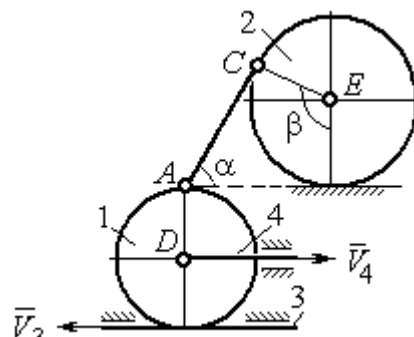
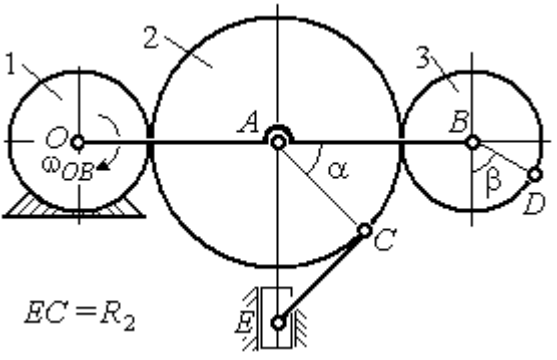
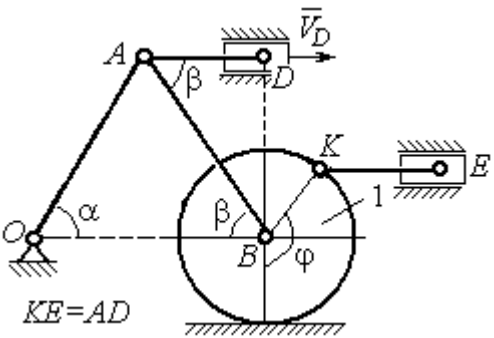
Варианты № 3, 13, 23							Варианты № 4, 14, 24						
 Найти: $V_A, V_B, V_C, V_D, V_E, \omega_{BC}, \omega_1, \omega_{DE}$							 Найти: $V_A, V_C, V_E, \omega_1, \omega_2, \omega_{AC}$						
Номер варианта задания	R_1 , см	OC , см	AB , см	BC , см	α , град	ω_{OC} , рад/с	Номер варианта задания	R_1 , см	R_2 , см	α , град	β , град	V_3 , см/с	V_4 , см/с
3	12	18	10	35	60	4	4	10	15	30	60	8	4
13	10	15	10	25	90	8	14	6	10	45	90	4	6
23	15	20	5	20	120	6	24	10	12	60	120	3	3

Рис. 2.6. Задание К2. Определение скоростей точек тела при плоскопараллельном движении. Номера вариантов задания 1 – 4, 11 – 14, 21 – 24

Варианты № 5, 15, 25							Варианты № 6, 16, 26						
 Найти: $V_A, V_B, V_C, V_D, V_E, \omega_2, \omega_3, \omega_{EC}$							 Найти: $V_A, V_B, V_K, V_E, \omega_1, \omega_{OA}, \omega_{AB}, \omega_{AD}, \omega_{KE}$						
Номер варианта задания	R_1 , см	R_2 , см	R_3 , см	α , град	β , град	ω_{OB} , рад/с	Номер варианта задания	R_1 , см	OA , см	α , град	β , град	φ , град	V_D , см/с
5	10	20	12	60	0	6	6	10	20	30	60	60	12
15	6	18	10	90	90	8	16	12	26	30	30	90	8
25	20	25	15	120	180	4	26	15	30	60	60	120	15

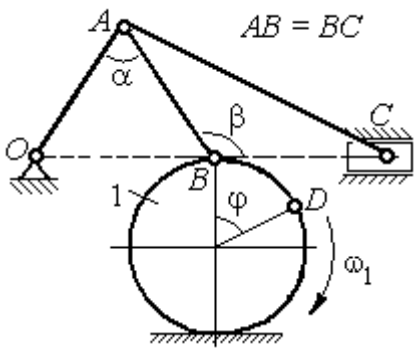
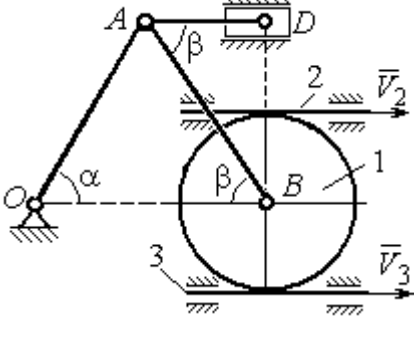
Варианты № 7, 17, 27							Варианты № 8, 18, 29						
 Найти: $V_A, V_B, V_C, \omega_1, \omega_{OA}, \omega_{AB}, \omega_{AC}$							 Найти: $V_A, V_B, V_D, \omega_1, \omega_{OA}, \omega_{AB}, \omega_{AD}$						
Номер варианта задания	R_1 , см	AB , см	α , град	β , град	φ , град	V_D , см/с	Номер варианта задания	R_1 , см	OA , см	α , град	β , град	V_2 , см/с	V_3 , см/с
7	10	20	30	60	60	12	8	10	20	30	60	12	4
17	12	25	60	120	90	16	18	12	26	30	30	8	2
27	8	16	30	60	120	10	28	15	30	60	60	6	3

Рис. 2.7. Задание K2. Определение скоростей точек тела при плоскопараллельном движении. Номера вариантов задания 5 – 8, 15 – 18, 25 – 28

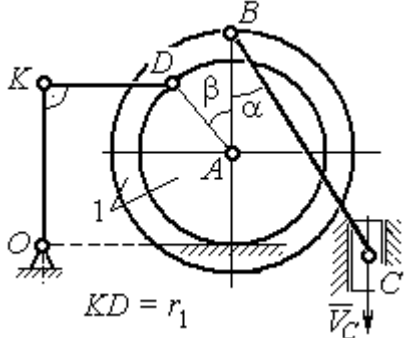
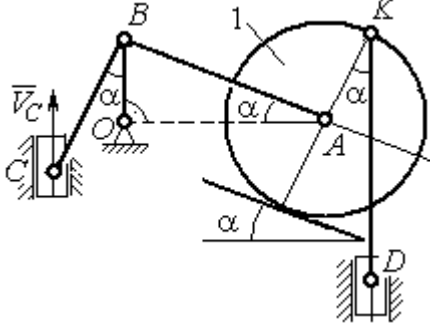
Варианты № 9, 19, 29							Варианты № 10, 20, 30						
 Найти: ω_{OK}, ω_{KD}, ω_{BC}, ω_1, V_A, V_B, V_K, V_D							 Найти: V_A, V_B, V_D, V_K, ω_{CB}, ω_1, ω_{OB}, ω_{AB}, ω_{KD}						
Номер варианта задания	R_1 , см	r_1 , см	α , град	β , град	BC , см	V_C , см/с	Номер варианта задания	R_1 , см	CB , см	OB , см	KD , см	α , град	V_C , см/с
9	20	12	45	60	60	8	10	10	20	30	60	30	4
19	24	16	60	90	50	4	20	12	26	30	50	45	2
29	16	10	30	120	40	6	30	15	30	60	60	60	3

Рис. 2.8. Задание К2. Определение скоростей точек тела при плоскопараллельном движении. Номера вариантов задания 9 – 10, 19 – 20, 29 – 30

Пример выполнения задания К2. Определение скоростей точек твёрдого тела при плоскопараллельном движении

Задача 1. Плоский механизм (рис. 2.9) состоит из стержня OC и подвижных дисков 2 и 3 радиусами r_2 , r_3 , шарнирно закрепленными на стержне, соответственно, в точках A и C . Стержень OC вращается вокруг неподвижного центра O с угловой скоростью ω_{OC} . Диск 2, увлекаемый стержнем OC , катится без проскальзывания по неподвижной поверхности диска 1 радиусом r_1 . Диск 3, также увлекаемый стержнем OC , катится без проскальзыва-

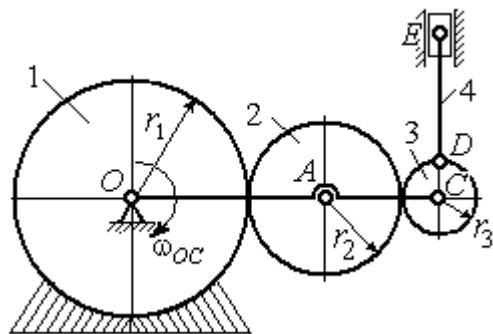


Рис. 2.9. Схема плоского механизма

ния по подвижному диску 2. В точке D , расположенной на краю диска 3, шарнирно прикреплен стержень 4, к которому в точке E шарнирно прикреплен поршень E , способный совершать только вертикальное перемещение. Для заданного положения механизма (см. рис. 2.9), когда стержень OC горизонтален, стержень DE направлен по линии вертикального диаметра диска 3, найти скорости точек A , C , D , E , угловые скорости дисков 2, 3 и стержня 4, если: $r_1 = 6$ см, $r_2 = 4$ см, $r_3 = 2$ см, $DE = 10$ см, $\omega_{OC} = 1$ рад/с.

Решение

Определим скорость точки A , общей для стержня OC и диска 2: $V_A = \omega_{OC}(r_1 + r_2) = 10$ см/с. Вектор скорости $\vec{V}_A$ перпендикулярен стержню OC

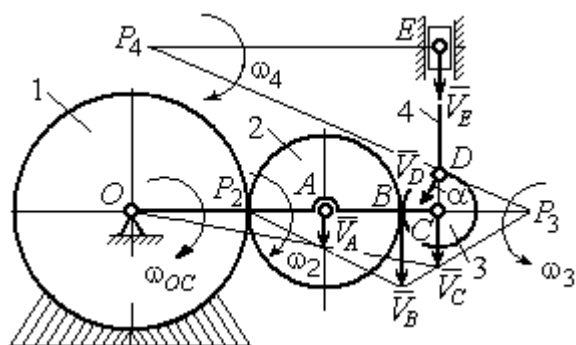


Рис. 2.10. Расчетная схема для определения скоростей точек механизма и угловых скоростей его звеньев

и направлен в сторону его вращения (рис. 2.10).

Диск 2 катится по неподвижной поверхности диска 1. Точка касания диска 2 с неподвижным диском 1 является мгновенным центром скоростей диска 2. На рис. 2.10 центр скоростей диска 2 обозначен точкой P_2 . В этом случае скорость точки A может быть

определена через угловую скорость диска ω_2 следующим образом:

$V_A = \omega_2 \cdot AP_2 = 4\omega_2$. Так как $V_A = 10$ см/с, получим $\omega_2 = 2,5$ рад/с.

Для того чтобы найти угловую скорость диска 3, необходимо определить положение его мгновенного центра скоростей. С этой целью вычислим скорости точек B и C . Скорость точки B может быть найдена через угловую скорость диска 2: $V_B = \omega_2 \cdot BP_2 = 20$ см/с. Вектор скорости $\vec{V}_B$ перпендикулярен отрезку BP_2 и направлен в сторону мгновенного вращения диска 2 вокруг своего центра скоростей P_2 .

Скорость точки C определяется через угловую скорость стержня OC : $V_C = \omega_{OC}(r_1 + 2r_2 + r_3) = 16$ см/с. Вектор скорости $\vec{V}_C$ перпендикулярен стержню OC и направлен в сторону его вращения (см. рис. 2.10).

Построение мгновенного центра скоростей P_3 диска 3 по известным скоростям $\vec{V}_B$ и $\vec{V}_C$ показано на рис. 2.10. Его положение определяется из условия, что отношение скоростей двух точек тела, совершающего плоскопараллельное движение, равно отношению расстояний от этих точек до мгновенного центра скоростей: $\frac{V_B}{V_C} = \frac{r_3 + CP_3}{CP_3}$. Разрешая пропорцию относительно неизвестной величины CP_3 , получим: $CP_3 = 8$ см. Скорость точки C выражается через угловую скорость диска 3 $V_C = \omega_3 \cdot CP_3$. Отсюда величина угловой скорости диска 3: $\omega_3 = \frac{V_C}{CP_3} = 2$ рад/с. Направление мгновенного вращения диска 3 вокруг своего центра скоростей определяется известными направлениями скоростей точек C и B , принадлежащих диску 3 (см. рис. 2.10). Скорость точки D $V_D = \omega_3 \cdot DP_3 = 2 \cdot \sqrt{2^2 + 8^2} = 16,5$ см/с. Вектор скорости $\vec{V}_D$ перпендикулярен отрезку DP_3 и направлен в сторону мгновенного вращения диска 3 вокруг центра P_3 .

Для определения скорости поршня E воспользуемся теоремой о проекциях скоростей точек плоской фигуры, согласно которой проекции скоростей двух точек плоской фигуры на ось, проходящую через эти точки, равны между собой. Проведем ось через точки D и E . По построению, угол α между вектором $\vec{V}_D$ и осью DE равен углу $\angle DP_3C$ (см. рис. 2.10). Тогда, $\cos \alpha = \frac{CP_3}{DP_3} = \frac{8}{\sqrt{2^2 + 8^2}} = 0,97$, откуда $\alpha = 14^\circ$. На основании теоремы о проекциях скоростей точек плоской фигуры имеем равенство: $V_D \cos \alpha = V_E \cos 0$, откуда скорость точки E : $V_E = 16$ см/с.

Мгновенный центр скоростей стержня 4 – точка P_4 – определяется как точка пересечения перпендикуляров к векторам скоростей $\vec{V}_D$ и $\vec{V}_E$, восстановленных, соответственно, из точек D и E (см. рис. 2.10). Угловая скорость стержня 4, совершающего мгновенный поворот вокруг своего центра скоростей, равна: $\omega_4 = \frac{V_E}{EP_4}$, где EP_4 – расстояние от точки E до мгновенного центра скоростей звена 4, $EP_4 = DE \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 40$ см. В результате, $\omega_4 = 0,4$ рад/с. Направление мгновенного вращения звена 4 вокруг своего центра скоростей определяется направлением скорости точки D .

Задача 2. В плоском стержневом механизме (рис. 2.11) кривошипы OA и ED вращаются вокруг неподвижных центров O и E . В крайней точке D кривошипа ED к нему прикреплен шатун DB , второй конец которого в точке B прикреплен к кривошипу OA . Шатун AC прикреплен в точке A к кривошипу AO , а другим своим концом – к ползуну C , способному совершать только вертикальное движение. Все соединения шарнирные. В заданном положении механизма кривошип OA вертикален, шатун DB расположен горизонтально, кривошип ED наклонен под углом 60° к горизонтали, а шатун AC отклонен на угол 30° от вертикального положения кривошипа AO . Найти скорости всех отмеченных на схеме точек и угловые скорости всех звеньев, если линейные размеры звеньев механизма $AC = 6$ см, $AB = 2$ см, $BO = 8$ см, $DB = 10$ см и скорость ползуна в данный момент $V_C = 4$ см/с.

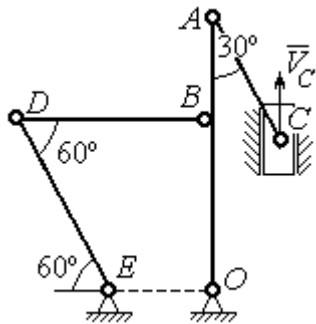


Рис. 2.11. Стержневой механизм

Решение

Кривошипы OA и ED совершают вращательные движения вокруг неподвижных центров. Скорости $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$ точек A и B перпендикулярны кривоши-

пу OA , а скорость $\vec{V}_D$ точки D перпендикулярна кривошипу ED . Направления векторов скоростей точек показаны на рис. 2.12.

Шатун AC совершает плоскопараллельное движение. Его мгновенный центр скоростей P_1 находится как точка пересечения перпендикуляров к скоростям $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_C$. Угловая скорость звена AC равна

$$\omega_{AC} = \frac{V_C}{P_1C} = \frac{V_C}{AC \cdot \sin 30^\circ} = \frac{4}{3} \text{ рад/с.}$$

Далее, полагая, что точка A принадлежит шатуну AC , найдем её скорость:

$$V_A = \omega_{AC} \cdot P_1A = \frac{4}{3} AC \cdot \cos 30^\circ = 4\sqrt{3} \text{ см/с.}$$

Теперь, исходя из того, что точка A принадлежит как шатуну AC , так и кривошипу OA , найдём его угловую скорость: $\omega_{AO} = \frac{V_A}{AO} = 0,4\sqrt{3} \text{ рад/с.}$ Скорость точки B кривошипа $V_B = \omega_{AO} \cdot OB = 3,2\sqrt{3} \text{ см/с.}$

Шатун DB совершает плоскопараллельное движение. Зная направления скоростей точек B и D , построим мгновенный центр скоростей P_2 звена DB как точку пересечения перпендикуляров к скоростям $\vec{V}_B$ и $\vec{V}_D$ (см. рис. 2.12). Тогда, угловая скорость шатуна DB

$$\omega_{DB} = \frac{V_B}{P_2B} = \frac{3,2\sqrt{3}}{DB \cdot \tan 60^\circ} = 0,32 \text{ рад/с.}$$

Скорость точки D

$$V_D = \omega_{DB} \cdot P_2D = 0,32 \frac{DB}{\sin 30^\circ} = 6,4 \text{ см/с.}$$

Угловая скорость кривошипа

$$\omega_{DE} = \frac{V_D}{DE} = \frac{6,4}{(OB / \sin 60^\circ)} = 0,69 \text{ рад/с.}$$

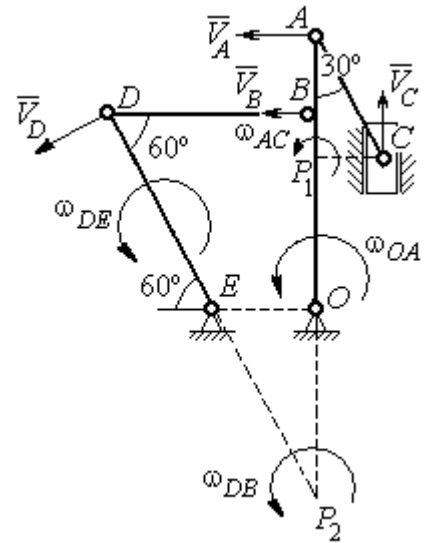
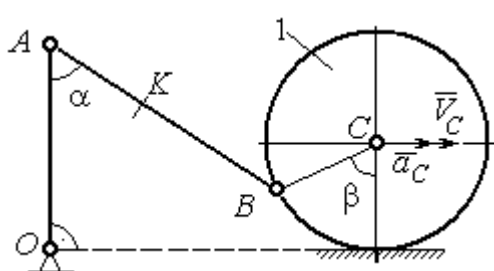
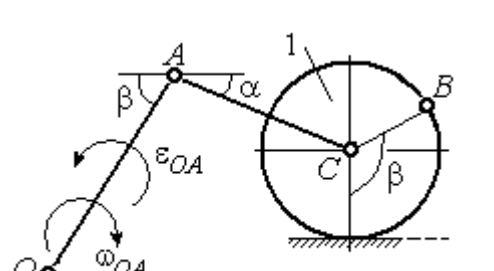


Рис. 2.12. Расчётная схема определения скоростей точек механизма и угловых скоростей его звеньев

2.6. Задание К3. Определение ускорений точек твёрдого тела при плоскопараллельном движении

Для заданного положения плоского механизма определить ускорения точек звеньев механизма и угловые ускорения звеньев. Варианты заданий и исходные данные приведены на рис. 2.13 – 2.15.

Варианты № 1, 11, 21								Варианты № 2, 12, 22							
 Найти: $a_A, a_K, \varepsilon_{AB}$								 Найти: $a_C, a_B, \varepsilon_{AC}$							
Номер вари- анта задания	AB, см	AK, см	α , град	β , град	R_1 , см	V_C , см/с	a_C , см/с ²	Номер вари- анта задания	R_1 , см	OA, см	AC, см	α , град	β , град	ω_{OA} , рад/с	ε_{OA} , рад/с ²
1	16	10	60	120	10	12	6	2	5	10	12	30	60	2	4
11	20	16	30	60	8	10	8	12	8	24	20	30	120	1	2
21	18	10	60	180	6	8	4	22	6	12	15	60	90	2	3

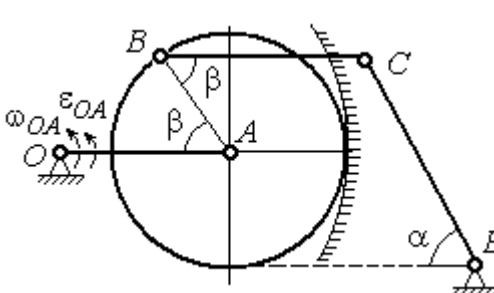
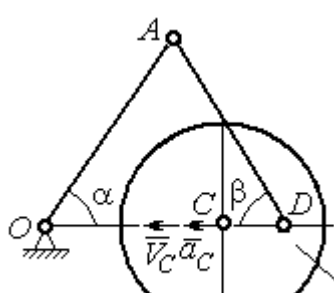
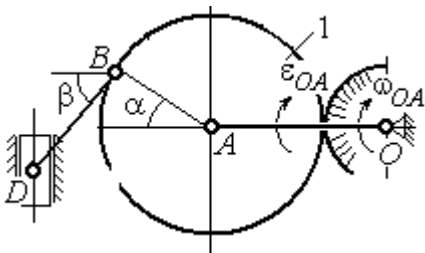
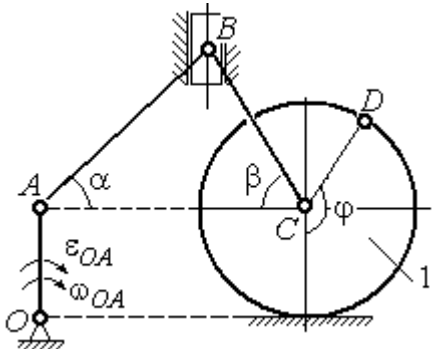
Варианты № 3, 13, 23								Варианты № 4, 14, 24							
 Найти: $a_C, a_B, \varepsilon_{BC}$								 Найти: $a_A, a_D, \varepsilon_{DA}$							
Номер вари- анта задания	BC, см	AO, см	α , град	β , град	R_1 , см	ω_{OA} , рад/с	ε_{OA} , рад/с ²	Номер вари- анта задания	R_1 , см	OA, см	DC, см	α , град	β , град	V_C , см/с	a_C , см/с ²
3	16	15	60	90	10	2	3	4	10	28	5,78	60	30	10	2
13	18	12	90	60	8	3	2	14	8	24	4,62	30	90	8	3
23	14	12	30	120	10	2	4	24	6	20	6	45	45	12	2

Рис. 2.13. Задание К3. Определение ускорений точек тела при плоскопараллельном движении. Номера вариантов задания 1 – 4, 11 – 14, 21 – 24

Варианты № 5, 15, 25								Варианты № 6, 16, 26							
 Найти: a_D, a_B, ϵ_{BD}								 Найти: a_B, a_D, ϵ_{BC}							
Номер вари- анта задания	OA , см	BD , см	α , град	β , град	R_1 , см	ω_{OA} , рад/с	ϵ_{OA} , рад/с ²	Номер вари- анта задания	R_1 , см	AB , см	φ , град	α , град	β , град	ω_{OA} , рад/с	ϵ_{OA} , рад/с ²
5	16	10	60	30	10	4	3	6	6	18	60	30	30	2	3
15	18	8	90	45	12	2	4	16	8	20	90	60	30	2	4
25	14	12	30	60	8	3	2	26	5	16	120	30	60	3	4

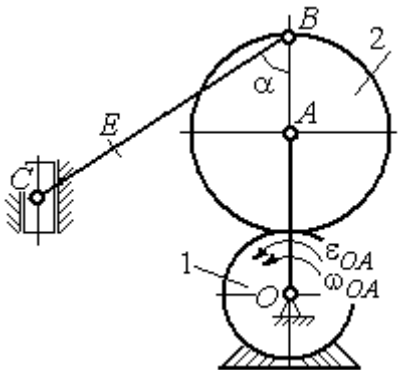
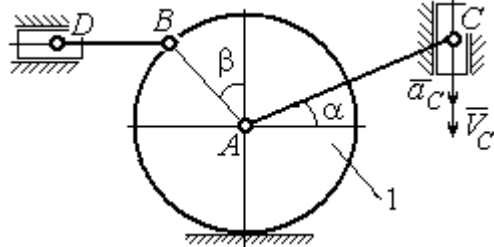
Варианты № 7, 17, 27								Варианты № 8, 18, 28							
 Найти: a_E, a_C, ϵ_{BC}								 Найти: a_D, a_B, ϵ_{BD}							
Номер вари- анта задания	BC , см	BE , см	α , град	R_1 , см	R_2 , см	ω_{OA} , рад/с	ϵ_{OA} , рад/с ²	Номер вари- анта задания	R_1 , см	BD , см	AC , см	α , град	β , град	V_C , см/с	a_C , см/с ²
7	22	10	60	2	10	2	3	8	4	5	12	60	60	12	5
17	28	15	30	3	6	3	4	18	6	10	16	45	90	10	8
27	20	8	45	4	8	2	2	28	8	8	16	30	120	8	6

Рис. 2.14. Задание КЗ. Определение ускорений точек тела при плоскопараллельном движении. Номера вариантов задания 5 – 8, 15 – 18, 25 – 28

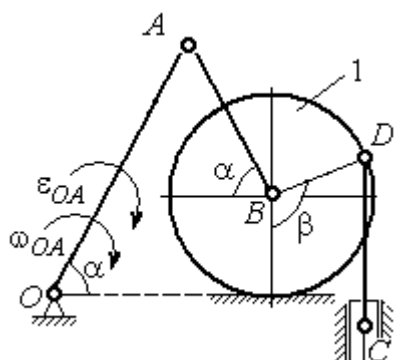
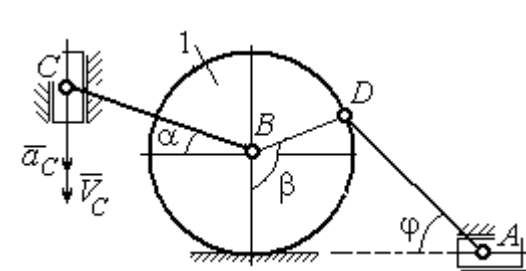
Варианты № 9, 19, 29								Варианты № 10, 20, 30							
 Найти: a_C, a_B, ϵ_{AB}								 Найти: a_A, a_B, ϵ_{CB}							
Номер вари- анта задания	OA , см	DC , см	α , град	β , град	R_1 , см	ω_{OA} , рад/с	ϵ_{OA} , рад/с ²	Номер вари- анта задания	R_1 , см	BC , см	ϕ , град	α , град	β , град	V_C , см/с	a_C , см/с ²
9	18	10	30	120	4	2	3	10	6	14	60	30	120	15	3
19	20	12	60	60	6	3	4	20	5	18	45	60	90	10	5
29	18	8	60	90	4	2	3	30	4	16	30	45	60	12	4

Рис. 2.15. Задание К3. Определение ускорений точек тела при плоскопараллельном движении. Номера вариантов задания 9 – 10, 19 – 20, 29 – 30

Примеры решения задания К3. Определение ускорений точек тела при плоскопараллельном движении

Задача 1. Ступенчатый барабан 1 с радиусами ступенек $R = 0,5$ м и $r = 0,3$ м катится окружностью малой ступеньки по горизонтальной поверхности без скольжения (рис. 2.16). Барабан приводится в движение шатуном AC , один конец которого соединён с центром барабана в точке A , а другой – с ползуном C , перемещающимся вертикально.

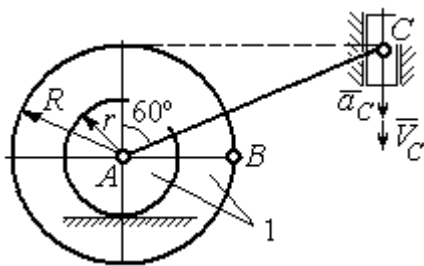


Рис. 2.16. Схема движения плоского механизма

В положении механизма, когда шатун AC отклонён от вертикали на угол 60° , найти ускорение точки B барабана, лежащей на его горизонтальном диаметре, если заданы скорость и ускорение ползуна C : $V_C = 9$ м/с, $a_C = 4$ м/с².

В положении механизма, когда шатун AC отклонён от вертикали на угол 60° , найти ускорение точки B барабана, лежащей на его горизонтальном диаметре, если заданы скорость и ускорение ползуна C : $V_C = 9$ м/с, $a_C = 4$ м/с².

Решение

Найдём угловые скорости ω_{AC} , ω_1 шатуна AC и барабана 1. Шатун совершает плоское движение. Его мгновенный центр скоростей P_2 находится на пересечении перпендикуляров к скоростям $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_C$ (рис. 2.17). По условию, скорость точки C направлена вертикально вниз. Точка A принадлежит как шатуну AC , так и барабану 1. При качении барабана по горизонтальной поверхности скорость его центра – точки A параллельна поверхности качения барабана.

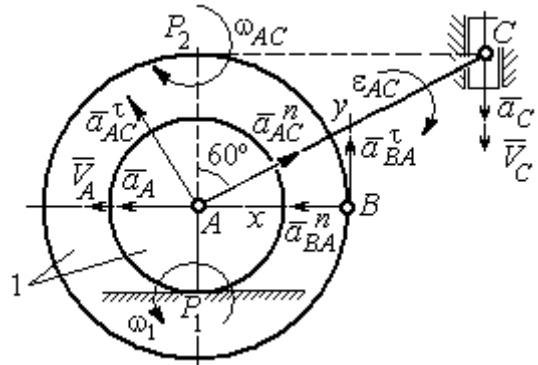


Рис. 2.17. Расчётная схема определения скоростей и ускорений точек механизма

Угловая скорость шатуна

$$\omega_{AC} = \frac{V_C}{CP_2} = \frac{9}{R \operatorname{tg} 60^\circ} = 6\sqrt{3} \text{ рад/с.}$$

Скорость точки A шатуна

$$V_A = \omega_{AC} \cdot AP_2 = 3\sqrt{3} \text{ м/с. Угловая скорость барабана 1 } \omega_1 = \frac{V_A}{AP_1} = 10\sqrt{3} \text{ рад/с.}$$

При расчёте угловой скорости барабана учтено, что качение барабана по неподвижной поверхности представляет собой плоское движение, при котором мгновенный центр скоростей находится в точке касания с поверхностью (в точке P_1 на рис. 2.17).

Выразим ускорение $\vec{a}_A$ точки A через полюс C на основании векторного равенства: $\vec{a}_A = \vec{a}_C + \vec{a}_{AC}^{\tau} + \vec{a}_{AC}^n$, где $\vec{a}_C$ – ускорение точки C , выбранной в качестве полюса; $\vec{a}_{AC}^{\tau}$, $\vec{a}_{AC}^n$ – касательная и нормальная составляющие ускорения точки A при вращении шатуна AC вокруг полюса C . Вектор нормального ускорения $\vec{a}_{AC}^n$ направлен вдоль шатуна AC от точки A к полюсу C и равен по величине $a_{AC}^n = \omega_{AC}^2 \cdot AC = (6\sqrt{3})^2 \cdot 2R = 108 \text{ м/с}^2$. Вектор касательного ускорения

$\vec{a}_{AC}^{\tau}$, модуль которого вычисляется по формуле $a_{AC}^{\tau} = \varepsilon_{AC} \cdot AC$, направлен перпендикулярно отрезку AC .

На данном этапе величина вектора касательного ускорения не может быть вычислена, поскольку угловое ускорение шатуна AC ε_{AC} неизвестно. На рис. 2.17 направление вектора касательного ускорения $\vec{a}_{AC}^{\tau}$ выбрано из предположения, что вращение шатуна ускоренное и направление углового ускорения совпадает с направлением его угловой скорости.

Направление вектора $\vec{a}_A$ ускорения точки A определяется из того, что центр барабана движется по прямой, параллельной горизонтальной поверхности качения. На рис. 2.17 направление вектора ускорения $\vec{a}_A$ выбрано из предположения, что качение барабана ускоренное.

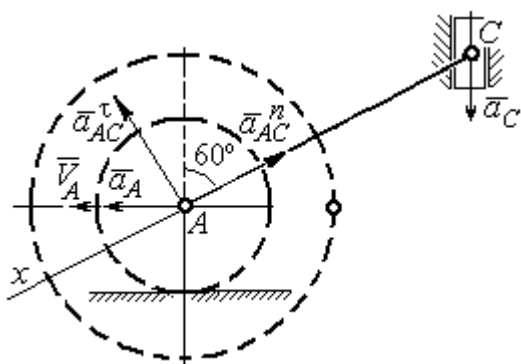


Рис. 2.18. Схема для определения ускорения центра барабана

Выберем ось x вдоль линии AC (рис. 2.18) и спроектируем векторное равенство $\vec{a}_A = \vec{a}_C + \vec{a}_{AC}^{\tau} + \vec{a}_{AC}^n$ на эту ось. При таком выборе оси проекция неизвестного ускорения $\vec{a}_{AC}^{\tau}$ обращается в нуль. Получим $a_A \cos 30^\circ = a_C \cos 60^\circ - a_{AC}^n$. Отсюда найдём ускорение центра барабана

$$a_A = \frac{1}{\cos 30^\circ} (a_C \cos 60^\circ - a_{AC}^n) = -122,4 \text{ м/с}^2.$$
 Отрицательное значение ускорения точки A означает, что на рис. 2.17, 2.18 вектор ускорения $\vec{a}_A$ должен иметь противоположное направление. Таким образом, вектор ускорения $\vec{a}_A$ направлен в сторону, противоположную вектору скорости $\vec{V}_A$, и движение барабана замедленное.

Для того чтобы найти ускорение точки B , выразим его через полюс A на основании векторного равенства $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^{\tau} + \vec{a}_{BA}^n$, где $\vec{a}_A$ — ускорение

точки A , выбранной в качестве полюса; $\vec{a}_{BA}^\tau$, $\vec{a}_{BA}^n$ – касательная и нормальная составляющие ускорения точки B при вращении барабана вокруг полюса A .

Модуль вектора нормального ускорения $\vec{a}_{BA}^n$ равен по величине $a_{BA}^n = \omega_1^2 \cdot BA = (10\sqrt{3})^2 \cdot R = 150 \text{ м/с}^2$. Вектор направлен вдоль радиуса барабана от точки B к полюсу A (см. рис. 2.17).

Модуль вектора касательного ускорения $\vec{a}_{BA}^\tau$ вычисляется по формуле $a_{BA}^\tau = \varepsilon_1 \cdot BA$, где ε_1 – угловое ускорение барабана. Значение углового ускорения катящегося барабана (в отличие от углового ускорения ε_{AC} шатуна AC) может быть найдено. Расчёт основан на том, что при движении барабана расстояние AP_1 от точки A до центра скоростей барабана P_1 остаётся постоянным, равным r . Тогда выражение $V_A = \omega_1 \cdot AP_1 = \omega_1 \cdot r$ для расчёта скорости точки A можно продифференцировать. Получим $\frac{dV_A}{dt} = \frac{d\omega_1}{dt} \cdot r$. Так как точка A движется по прямой, производная от скорости точки равна её полному ускорению, а производная от угловой скорости барабана равна его угловому ускорению. Тогда имеем: $a_A = \varepsilon_1 \cdot r$, откуда находим угловое ускорение $\varepsilon_1 = \frac{a_A}{r} = 40,8 \text{ рад/с}^2$, а затем и модуль вектора касательного ускорения $a_{BA}^\tau = \varepsilon_1 \cdot BA = 20,4 \text{ м/с}^2$.

Заметим, что для вычисления углового ускорения ε_{AC} шатуна AC подобные рассуждения неприменимы. Формулу $V_A = \omega_{AC} \cdot AP_2$ невозможно продифференцировать, так как при движении механизма расстояние AP_2 от точки A до центра скоростей P_2 шатуна AC является неизвестной функцией времени.

Выберем систему координат xBy как показано на рис. 2.17, и спроецируем на эти оси векторное равенство $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^\tau + \vec{a}_{BA}^n$. Полагая, что движение барабана ускоренное (т. е. вектора ускорений $\vec{a}_A$ и $\vec{a}_{BA}^\tau$ направлены, как показано на рис. 2.17), получим значения составляющих ускорения точки B :

$a_{Bx} = a_A + a_{BA}^n$, $a_{By} = a_{BA}^\tau$. Подставляя значения ускорений, найдём $a_{By} = 20,4 \text{ м/с}^2$, $a_{Bx} = -122,4 + 150 = 27,6 \text{ м/с}^2$. Вектор полного ускорения точки B направлен по диагонали прямоугольника, построенного на векторах $\vec{a}_{Bx}$, $\vec{a}_{By}$. Величина ускорения точки B : $a_B = \sqrt{a_{Bx}^2 + a_{By}^2} = 34,32 \text{ м/с}^2$.

Задача 2. В плоском механизме (рис. 2.19) кривошип OA вращается вокруг оси O с угловой скоростью ω_{OA} и угловым ускорением ε_{OA} . Диск 2, шарнирно присоединённый к кривошипу в точке A , катится без проскальзывания по неподвижному диску 1. Радиусы дисков R_1 и R_2 . На краю диска 2 в точке B шарнирно прикреплен стержень BC , соединенный с центром C диска 3. Радиус диска 3 равен радиусу диска 2:

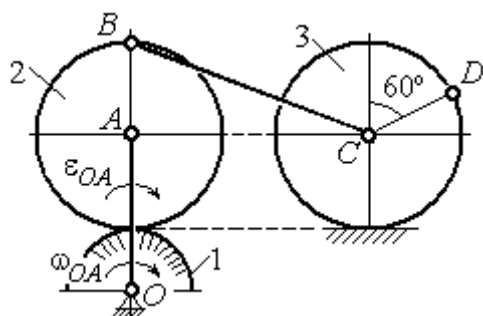


Рис. 2.19. Схема движения плоского механизма

Радиус диска 3 равен радиусу диска 2: $R_3 = R_2$. Диск 3 катится без скольжения по горизонтальной поверхности, по прямой. Для положения механизма, изображенного на рис. 2.19, определить ускорение точки D и угловое ускорение стержня BC , если $\omega_{OA} = 4 \text{ рад/с}$, $\varepsilon_{OA} = 2 \text{ рад/с}^2$, $R_1 = 4 \text{ см}$, $R_2 = 8 \text{ см}$. Длина стержня $BC = 20 \text{ см}$.

Решение

Определение угловых скоростей звеньев механизма.

Рассмотрим вращательное движение кривошипа OA . Скорость точки A : $V_A = \omega_{OA} \cdot OA = 48 \text{ см/с}$. Вектор скорости $\vec{V}_A$ направлен перпендикулярно кривошипу OA в сторону движения кривошипа (рис. 2.20).

При движении диска 2 точка P_2 соприкосновения второго диска с неподвижным первым является мгновенным центром скоростей диска 2. Угловая скорость диска 2: $\omega_2 = \frac{V_A}{AP_2} = \frac{48}{8} = 6 \text{ рад/с}$.

Скорость точки B диска 2: $V_B = \omega_2 BP_2 = 6 \cdot 16 = 96 \text{ см/с}$.

Для определения угловой скорости стержня BC заметим, что скорости двух точек стержня $\vec{V}_B$ и $\vec{V}_C$ параллельны, но точки B и C не лежат на общем перпендикуляре к скоростям. В этом случае мгновенный центр скоростей стержня BC отсутствует (бесконечно удалён), угловая скорость стержня равна нулю: $\omega_{BC} = 0$, а стержень совершает мгновенное поступательное движение. В результате имеем: $V_C = V_B = 96 \text{ см/с}$.

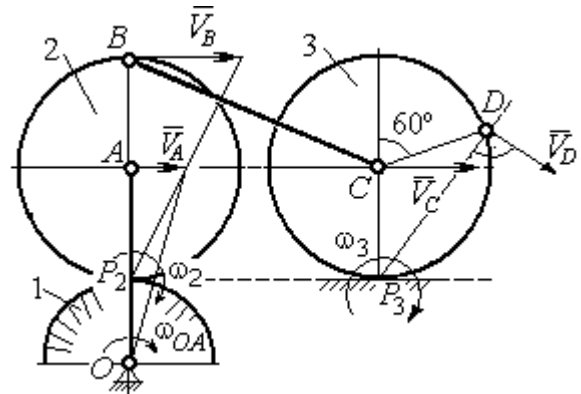


Рис. 2.20. Расчетная схема для определения угловых скоростей звеньев механизма

При качении диска 3 по неподвижной поверхности без проскальзывания точка P_3 касания его с поверхностью является мгновенным центром скоростей.

Тогда угловая скорость диска 3: $\omega_3 = \frac{V_C}{CP_3} = 12 \text{ рад/с}$. Скорость точки D диска 3:

$V_D = \omega_3 \cdot DP_3$. Величину DP_3 находим из треугольника P_3DC . В результате $DP_3 = 2R_3 \cos 30^\circ = 13,8 \text{ см}$ и $V_D = 165,6 \text{ см/с}$. Вектор скорости $\vec{V}_D$ направлен в сторону движения диска 3 перпендикулярно линии DP_3 и (см. рис. 2.20).

Определение ускорений точек механизма.

Представим ускорение $\vec{a}_C$ точки C векторной суммой $\vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{a}_{CB}^n + \vec{a}_{CB}^\tau$, где $\vec{a}_B$ – ускорение точки B , выбранной в качестве полюса; $\vec{a}_{CB}^n$, $\vec{a}_{CB}^\tau$ – нормальная и касательная составляющие ускорения точки C при вращении стержня BC вокруг полюса B , $a_{CB}^n = \omega_{CB}^2 \cdot CB$, $a_{CB}^\tau = \varepsilon_{CB} \cdot CB$.

Нормальная составляющая ускорения точки C $a_{CB}^n = 0$, так как стержень CB совершает мгновенное поступательное движение и $\omega_{BC} = 0$.

Направление касательной составляющей $\vec{a}_{CB}^\tau$ неизвестно, так как неизвестно направление углового ускорения стержня ε_{CB} . Для определённости выберем направление углового ускорения стержня BC в сторону против хода часовой стрелки. На рис. 2.21 это направление показано дуговой стрелкой ε_{CB} .

В соответствии с выбранным направлением углового ускорения вектор $\vec{a}_{CB}^\tau$ строится перпендикулярно линии стержня BC в сторону углового ускорения ε_{CB} (см. рис. 2.21).

Выразим ускорение точки B через полюс A : $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^\tau$, где

$\vec{a}_A$ – ускорение полюса A ; $\vec{a}_{BA}^n$, $\vec{a}_{BA}^\tau$ – нормальная и касательная составляющие ускорения точки B при вращении диска 2 вокруг полюса A . Величина нормальной составляющей ускорения точки B $a_{BA}^n = \omega_2^2 \cdot BA = 288 \text{ см/с}^2$. Вектор $\vec{a}_{BA}^n$ направлен вдоль радиуса BA от точки B к полюсу A (см. рис. 2.21). Касательное ускорение точки B при вращении диска 2 вокруг полюса A вычисляется по формуле $a_{BA}^\tau = \varepsilon_2 \cdot BA$. Для определения углового ускорения ε_2 диска 2 заметим, что во время движения диска 2 расстояние AP_2 остается постоянным, равным R_2 . Дифференцируя равенство $V_A = \omega_2 \cdot AP_2 = \omega_2 R_2$, получим:

$$\frac{dV_A}{dt} = \frac{d\omega_2}{dt} R_2, \text{ или } a_A^\tau = \varepsilon_2 R_2, \text{ откуда } \varepsilon_2 = \frac{a_A^\tau}{R_2}.$$

Для того чтобы найти величину a_A^τ , рассмотрим вращательное движение кривошипа OA вокруг неподвижной оси O . Ускорение точки A представляется в виде векторного равенства $\vec{a}_A = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^\tau$, где $\vec{a}_A^n$ и $\vec{a}_A^\tau$ – известные

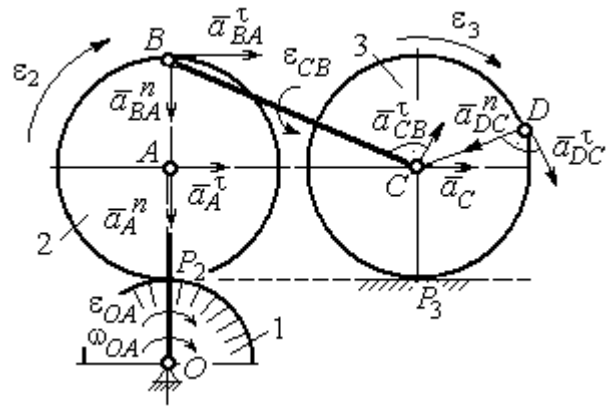


Рис. 2.21. Расчетная схема для определения ускорений точек механизма и угловых ускорений его звеньев

нормальная и касательная составляющие ускорения точки A кривошипа OA :
 $a_A^n = \omega_{OA}^2 \cdot OA = 192 \text{ см/с}^2$, $a_A^\tau = \varepsilon_{OA} \cdot OA = 24 \text{ см/с}^2$. Направления векторов нормального ускорения $\vec{a}_A^n$ и касательного ускорения $\vec{a}_A^\tau$ показаны на рис. 2.21.

Теперь найдём величину углового ускорения диска 2 и модуль касательного ускорения a_{BA}^τ точки B при вращении диска 2 вокруг полюса A : $\varepsilon_2 = \frac{a_A^\tau}{R_2} = 3 \text{ рад/с}^2$, $a_{BA}^\tau = \varepsilon_2 \cdot BA = 24 \text{ см/с}^2$.

Для определения ускорения точки C имеем векторное равенство $\vec{a}_C = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^\tau + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^\tau + \vec{a}_{CB}^\tau$. Выберем оси Cx , Cy , как показано на рис. 2.22, – вдоль отрезка BC и перпендикулярно ему и спроецируем на них имеющееся векторное равенство. Получим:

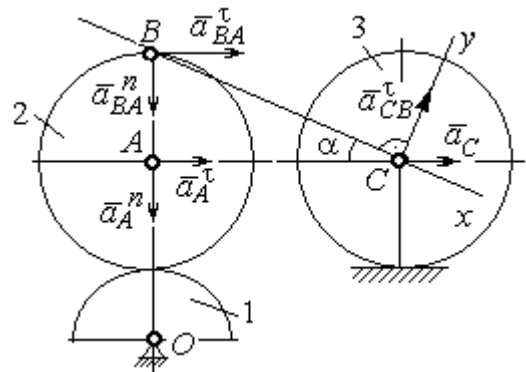


Рис. 2.22. Расчетная схема для вычисления ускорения точки C

$$a_C \cos \alpha = a_A^n \sin \alpha + a_A^\tau \cos \alpha + a_{BA}^n \sin \alpha + a_{BA}^\tau \cos \alpha;$$

$$a_C \sin \alpha = a_A^n \cos \alpha + a_A^\tau \sin \alpha + a_{BA}^n \cos \alpha + a_{BA}^\tau \sin \alpha + a_{CB}^\tau,$$

где α – угол между стержнем BC и линией центров AC ; $\sin \alpha = \frac{AB}{BC} = 0,4$;

$\cos \alpha = 0,92$. Решая систему, найдём: $a_C = 256,7 \text{ см/с}^2$, $a_{CB}^\tau = -358,12 \text{ см/с}^2$.

Модуль углового ускорения стержня BC : $\varepsilon_{CB} = \frac{|a_{CB}^\tau|}{BC} = 17,9 \text{ рад/с}^2$.

Знак «минус» величины a_{CB}^τ означает, что вектор касательного ускорения $\vec{a}_{CB}^\tau$ на рис. 2.21 – 2.22 следует направить в противоположную сторону. Направление углового ускорения стержня BC , показанное на рис. 2.21 дуговой стрелкой ε_{CB} , также следует заменить на противоположное.

Выразим ускорение точки D через полюс C : $\vec{a}_D = \vec{a}_C + \vec{a}_{DC}^n + \vec{a}_{DC}^\tau$, где $\vec{a}_C$ – известное ускорение точки C ; $\vec{a}_{DC}^n$, $\vec{a}_{DC}^\tau$ – нормальное и касательное составляющие ускорения точки D при вращении диска 3 вокруг полюса C . Величина нормального ускорения точки D : $a_{DC}^n = \omega_3^2 \cdot DC = 1152 \text{ см/с}^2$. Вектор ускорения $\vec{a}_{DC}^n$ направлен по радиусу от точки D к полюсу C (рис. 2.23).

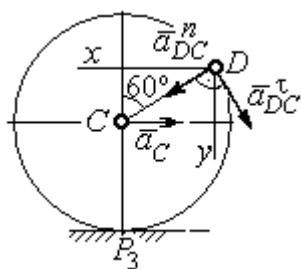


Рис.2.23. Расчетная схема для определения ускорения точки D

Для расчёта касательной составляющей a_{DC}^τ ускорения точки D найдём угловое ускорение диска 3. Продифференцируем по времени равенство

$$V_C = \omega_3 \cdot CP_3 = \omega_3 R_3. \quad \text{Получим:}$$

$$\frac{dV_C}{dt} = \frac{d\omega_3}{dt} R_3, \text{ или } a_C = \varepsilon_3 R_3. \text{ Угловое ускорение}$$

$$\text{диска 3: } \varepsilon_3 = \frac{a_C}{R_3} = 32,09 \text{ рад/с}^2. \text{ Тогда величина}$$

касательной составляющей ускорения точки D : $a_{DC}^\tau = \varepsilon_3 \cdot DC = 256,7 \text{ см/с}^2$.

Направление вектора $\vec{a}_{DC}^\tau$ соответствует ускоренному движению диска 3.

Проведём оси Dx и Dy , как показано на рис. 2.23, и спроецируем векторное равенство ускорения точки D на оси:

$$a_{Dx} = -a_C + a_{DC}^n \cos 30^\circ - a_{DC}^\tau \cos 60^\circ, \quad a_{Dy} = a_{DC}^n \cos 60^\circ + a_{DC}^\tau \cos 30^\circ.$$

Решая систему, находим значения проекций модуля ускорения $a_{Dx} = 612,5 \text{ см/с}^2$, $a_{Dy} = 798,3 \text{ см/с}^2$. Величина ускорения точки D :

$$a_D = \sqrt{a_{Dx}^2 + a_{Dy}^2} = 1006,2 \text{ см/с}^2.$$

3. СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

3.1. Основные понятия сложного движения точки

В неподвижной системе координат рассматривается подвижное твердое тело и точка, перемещающаяся относительно тела.

Траектория точки в её движении относительно тела называется **относительной траекторией**. Скорость точки в этом движении называют **относительной скоростью**, ускорение – **относительным ускорением**.

Траектория точки, перемещающейся вместе с телом, называется переносной траекторией точки, скорость точки при таком её движении – **переносной скоростью**, а ускорение – **переносным ускорением**.

Суммарное движение точки вместе с телом и относительно тела называется **сложным движением**. Траектория точки относительно неподвижной системы координат называется **абсолютной траекторией точки**, скорость и ускорение – **абсолютной скоростью и абсолютным ускорением**.

При вычислении абсолютной скорости используется теорема о сложении скоростей: **при сложном движении абсолютная скорость точки равна геометрической сумме относительной и переносной скоростей**: $\vec{V} = \vec{V}_e + \vec{V}_r$, где $\vec{V}$, $\vec{V}_e$, $\vec{V}_r$ – вектора абсолютной, переносной и относительной скоростей точки.

В случае, когда относительное движение точки задается естественным способом в виде закона изменения пути $S = S(t)$, величина относительной скорости точки равна модулю производной: $V_r = |\dot{S}_r|$. Если переносное движение точки есть вращение тела вокруг неподвижной оси, скорость точки в переносном движении будет: $V_e = \omega_e h_e$, где ω_e – величина угловой скорости вращения тела; h_e – кратчайшее расстояние от места положения точки на теле до оси вращения тела.

При вычислении абсолютного ускорения используется теорема Кориолиса о сложении ускорений: **при сложном движении абсолютное ускорение точки равно геометрической сумме трех ускорений – относительного, переносного и ускорения Кориолиса**

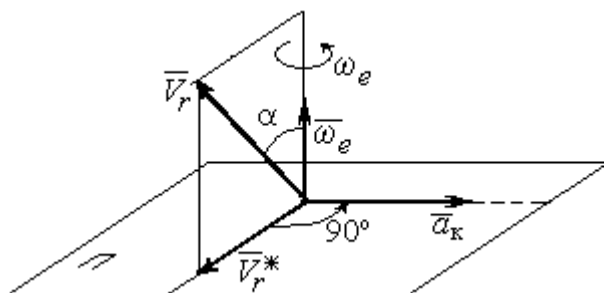


Рис. 3.1. Определение направления ускорения Кориолиса по правилу Жуковского

реносного и ускорения Кориолиса

$\vec{a} = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_k$, где $\vec{a}$ – вектор абсолютного ускорения точки; $\vec{a}_e, \vec{a}_r$ – вектора соответственно переносного и относительного ускорений точки; $\vec{a}_k$ – вектор ускорения Кориолиса.

(Иногда его называют поворотным ускорением.)

Вектор ускорения Кориолиса определяется векторным произведением $\vec{a}_k = 2(\vec{\omega}_e \times \vec{V}_r)$, где $\vec{\omega}_e$ – вектор угловой скорости переносного движения; $\vec{V}_r$ – вектор относительной скорости точки. Модуль ускорения Кориолиса: $|\vec{a}_k| = 2|\vec{\omega}_e| \cdot |\vec{V}_r| \sin \alpha$, где α – угол между вектором угловой скорости переносного движения и вектором относительной скорости точки (см. рис. 3.1). Направление вектора ускорения Кориолиса может быть получено по правилу построения вектора векторного произведения.

На рис. 3.1 показана последовательность выбора направления вектора ускорения Кориолиса по правилу Н. Е. Жуковского. Правило состоит в следующем: пусть имеется точка, движущаяся с относительной скоростью $\vec{V}_r$. Построим плоскость Π , перпендикулярную вектору переносной угловой скорости $\vec{\omega}_e$, и спроецируем вектор $\vec{V}_r$ на эту плоскость. Проекцию обозначим $\vec{V}_r^*$ (см. рис. 3.1). Чтобы получить направление ускорения Кориолиса, следует вектор проекции относительной скорости $\vec{V}_r^*$ повернуть на 90° в плоскости Π вокруг оси переносного вращения в направлении этого вращения.

Если сложное движение точки происходит в плоскости, перпендикулярной оси переносного вращения, направление ускорения Кориолиса можно получить простым поворотом вектора относительной скорости на угол 90° вокруг оси переносного вращения в направлении этого вращения.

Относительное ускорение $\vec{a}_r$ представляется как сумма векторов относительного касательного $\vec{a}_r^\tau$ и относительного нормального $\vec{a}_r^n$ ускорений: $\vec{a}_r = \vec{a}_r^\tau + \vec{a}_r^n$. Переносное ускорение точки $\vec{a}_e$ тела имеет своими составляющими переносное касательное $\vec{a}_e^\tau$ и переносное нормальное $\vec{a}_e^n$ ускорения так, что $\vec{a}_e = \vec{a}_e^\tau + \vec{a}_e^n$.

Таким образом, абсолютное ускорение точки в сложном движении можно представить в виде векторного равенства

$$\vec{a} = \vec{a}_r^\tau + \vec{a}_r^n + \vec{a}_e^\tau + \vec{a}_e^n + \vec{a}_k.$$

Модули относительного касательного и относительного нормального ускорений при естественном способе задания относительного движения точки

равны: $a_r^\tau = |\dot{V}_r|$, $a_r^n = \frac{V_r^2}{\rho}$, где ρ – радиус кривизны относительной траектории.

При движении точки по окружности радиус кривизны равен радиусу окружности, при движении по прямой – бесконечности, и в этом случае $a_r^n = 0$.

При вращательном переносном движении точки значения переносного касательного и нормального ускорений вычисляются по формулам: $a_e^\tau = \varepsilon_e h_e$, $a_e^n = \omega_e^2 h_e$, где ε_e – угловое ускорение вращательного переносного движения, $\varepsilon_e = |\dot{\omega}_e|$; h_e – расстояние от точки до оси вращения тела; ω_e – величина угловой скорости вращения тела.

Вектора ускорений строятся по общим правилам построения векторов нормального и касательного ускорений.

При поступательном переносном движении ускорение Кориолиса и переносное нормальное ускорение равны нулю: $a_k = 0$, $a_e^n = 0$. Абсолютное ускорение точки при поступательном переносном движении можно представить в виде векторного равенства $\vec{a} = \vec{a}_r^\tau + \vec{a}_r^n + \vec{a}_e^\tau$.

3.2. Задание К4. Определение скорости и ускорения точки при сложном движении

Задание включает две задачи с вращательным и поступательным видами переносного движения точки.

Задача 1. Вращение тела относительно неподвижной оси задается законом изменения угла поворота: $\varphi_e = \varphi_e(t)$ или законом изменения его угловой скорости: $\omega_e = \omega_e(t)$. Движение точки относительно тела отсчитывается от её начального положения в точке C и задается законом изменения длины дуги окружности или отрезка прямой линии: $CM = S_r = S_r(t)$.

Определить абсолютные скорость и ускорение точки в заданный момент времени t_1 .

Задача 2. Поступательное движение тела, несущего точку, задается законом изменения координаты $x_e = x_e(t)$. Движение точки относительно тела отсчитывается от её начального положения в точке C и задается законом изменения длины дуги окружности или отрезка прямой линии: $CM = y_r = y_r(t)$.

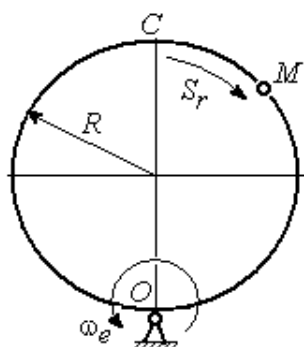
Определить абсолютные скорость и ускорение точки в момент времени t_2 , который либо задаётся в исходных данных задачи, либо на схеме описаны условия, из которых он находится.

Номера вариантов заданий даны на рис. 3.2 – 3.5.

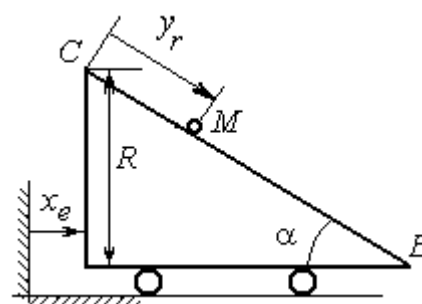
Варианты исходных данных приведены в табл. 3.1.

Варианты № 1, 11, 21

Задача 1



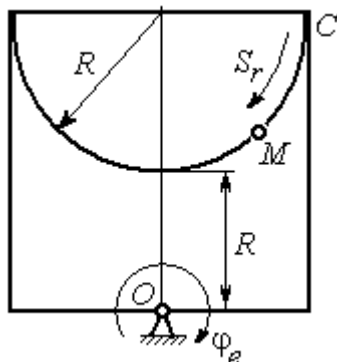
Задача 2



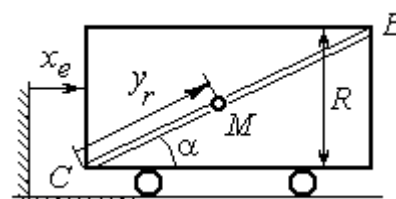
В момент $t = t_2$ точка M прошла половину пути CB

Варианты № 2, 12, 22

Задача 1



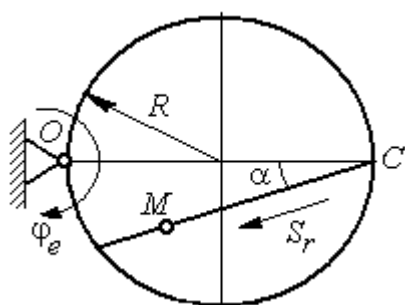
Задача 2



В момент $t = t_2$ точка M прошла $2/3$ пути CB

Варианты № 3, 13, 23

Задача 1



Задача 2

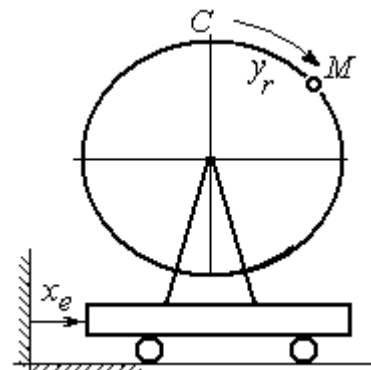


Рис. 3.2. Задание К4. Сложное движение точки.
Номера вариантов задания 1 – 3, 11 – 13, 21 – 23

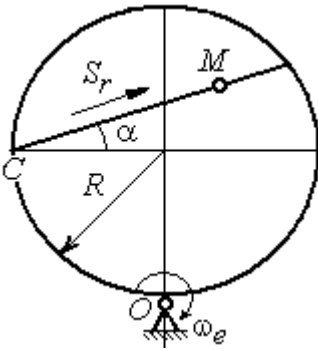
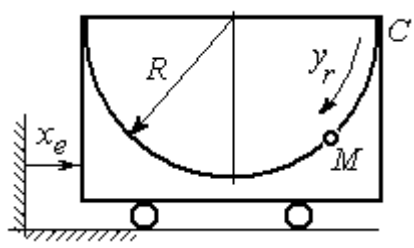
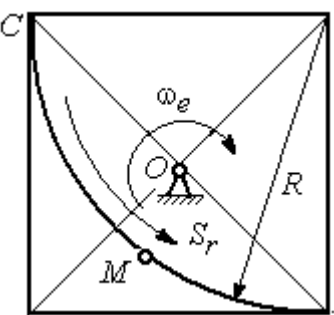
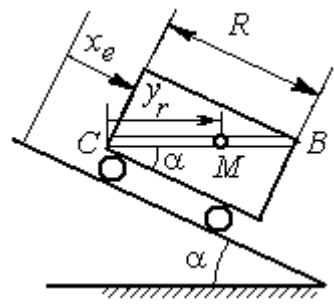
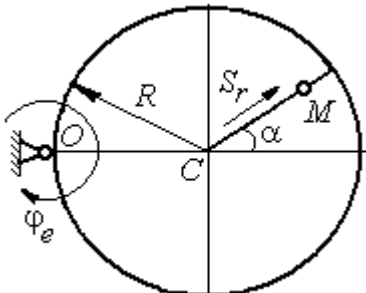
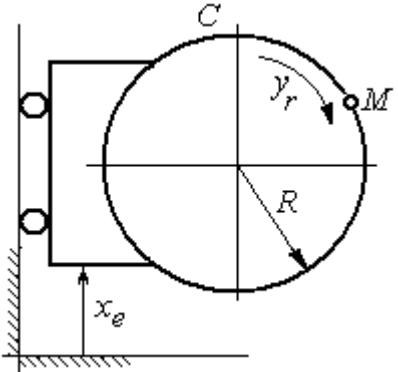
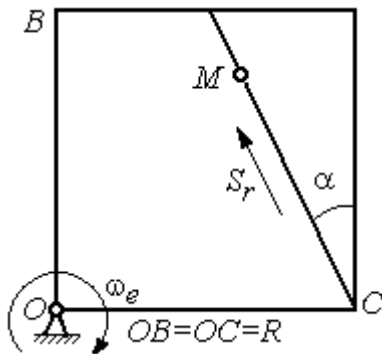
Варианты № 4, 14, 24	
Задача 1 	Задача 2 
Варианты № 5, 15, 25	
Задача 1 	Задача 2  В момент $t = t_2$ точка M прошла путь CB
Варианты № 6, 16, 26	
Задача 1 	Задача 2 

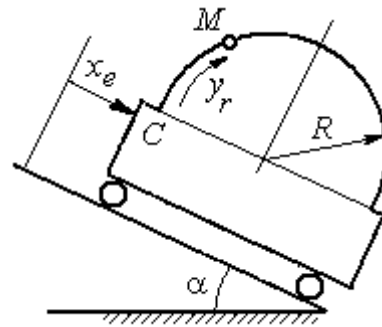
Рис. 3.3. Задание K4. Сложное движение точки.
Номера вариантов задания 4 – 6, 14 – 16, 24 – 26

Варианты № 7, 17, 27

Задача 1

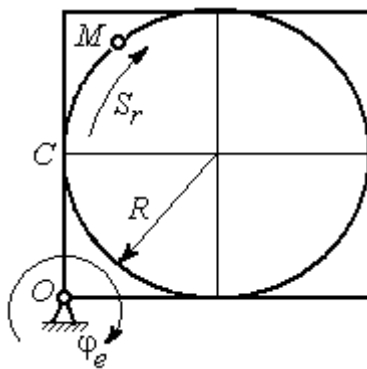


Задача 2

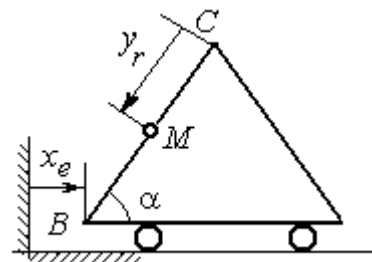


Варианты № 8, 18, 28

Задача 1



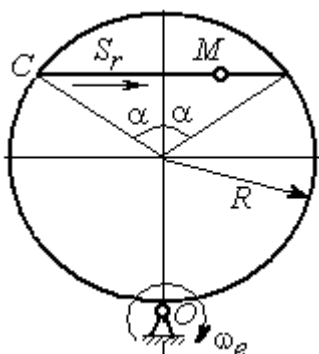
Задача 2



В момент $t = t_2$ точка M прошла половину пути $CB = R$

Варианты № 9, 19, 29

Задача 1



Задача 2

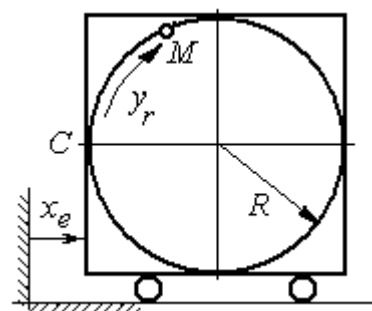


Рис. 3.4. Задание К4. Сложное движение точки.
Номера вариантов задания 7 – 9, 17 – 19, 27 – 29

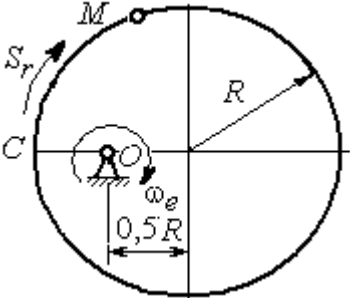
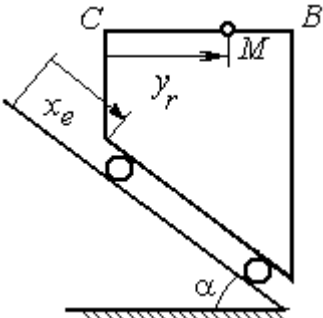
Варианты № 10, 20, 30	
Задача 1 	Задача 2  В момент $t = t_2$ точка M прошла половину пути $CB = R$

Рис. 3.5. Задание К4. Сложное движение точки.
Номера вариантов задания 10, 20, 30

Таблица 3.1

Исходные данные для заданий по сложному движению точки

Номер варианта задания	Номер задачи	R , см	α , град	$\vec{CM} = S_r(t)$, см $\vec{CM} = y_r(t)$, см	$\varphi_e(t)$, рад; $\omega_e(t)$, рад/с $x_e(t)$, см	t_1 , с t_2 , с
1	1	3	—	$S_r = 2\pi \sin(\pi t/6)$	$\omega_e = 4t^2$	1
	2	4	30	$y_r = 4t^2$	$x_e = 2\cos(\pi t/6)$	—
2	1	2	—	$S_r = 4\pi \sin^2(\pi t/6)$	$\varphi_e = 6\cos(\pi t/3)$	1
	2	3	60	$y_r = t^2 + t$	$x_e = 1 + \cos(\pi t)$	—
3	1	4	30	$S_r = 2\sqrt{3}[t + \sin(\pi t/2)]$	$\varphi_e = 4t - t^2$	1
	2	6	—	$y_r = \pi[2t + \sin \pi t]$	$x_e = 5t - t^2$	1
4	1	4	60	$S_r = 2(t^3 + t)$	$\omega_e = 6\cos(\pi t/6)$	1
	2	3	—	$y_r = \pi[2t + \cos(\pi t/2)]$	$x_e = t^3 - 4t$	1
5	1	6	—	$S_r = 4\pi \sin^2(\pi t/6)$	$\omega_e = 6\cos(\pi t/3)$	1
	2	2	30	$y_r = t^2 + 2t$	$x_e = t^2 - 4t$	—
6	1	6	60	$S_r = t + 10\sin(\pi t/6)$	$\varphi_e = 2t^2 - 5t$	1
	2	3	—	$y_r = 4\pi \sin(\pi t/6)$	$x_e = [1 - \cos(\pi t/4)]$	1
7	1	8	30	$S_r = 2(t^3 + 3t)$	$\omega_e = 6\cos(\pi t/6)$	1
	2	4	30	$y_r = 2\pi t^2$	$x_e = t^3 - 5t$	1

Продолжение табл. 3.1

Номер варианта задания	Номер задачи	R , см	α , град	$\bar{CM} = S_r(t)$, см $\bar{CM} = y_r(t)$, см	$\varphi_e(t)$, рад; $\omega_e(t)$, рад/с $x_e(t)$, см	t_1 , с t_2 , с
8	1	8	—	$S_r = 2\pi[t^2 + \sin\pi t]$	$\varphi_e = t^2 - 5t$	2
	2	6	30	$y_r = t(t+1)$	$x_e = \cos\pi t$	—
9	1	8	30	$S_r = 2t^2$	$\omega_e = \cos(\pi t/8)$	2
	2	3	—	$y_r = 4\pi\sin^2(\pi t/4)$	$x_e = (3-2t)^2$	1
10	1	6	—	$S_r = \pi(2t^3 + \sin\pi t)$	$\omega_e = 5t - 2t^3$	1
	2	4	30	$y_r = t^2 + 2t$	$x_e = 1 + \cos\pi t$	—
11	1	6	—	$S_r = 8\pi\sin(\pi t/12)$	$\omega_e = 2 + \cos(\pi t/4)$	2
	2	6	60	$y_r = 4\sin\pi t$	$x_e = t^2 - 2t$	—
12	1	18	—	$S_r = \pi(2t^2 + 2t)$	$\varphi_e(t) = 3t - t^2$	2
	2	6	30	$y_r = 2t^2 + t$	$x_e = 1 + \cos(\pi t)$	—
13	1	10	60	$S_r = t^3 + t$	$\varphi_e = 6\cos(\pi t/6)$	2
	2	6	—	$y_r = 6\pi\cos(\pi t/3)$	$x_e = t(t+1)$	1
14	1	4	30	$S_r = 8\sqrt{3}\sin(\pi t/12)$	$\omega_e = (3-2t)^2$	2
	2	3	—	$y_r = 2\pi\sin(\pi t/6)$	$x_e = 2t^2 - 5t$	1
15	1	8	—	$S_r = 4\pi\sin^2(\pi t/4)$	$\omega_e = 2 + \cos(\pi t/4)$	1
	2	5	60	$y_r = 5t + t^2$	$x_e = \cos(\pi t/6)$	—
16	1	12	90	$S_r = 3[t + \sin(\pi t/2)]$	$\varphi_e = 2t - 3t^2$	1
	2	15	—	$y_r = \pi(4t + t^2)$	$x_e = 6\sin(\pi t/3)$	1
17	1	6	45	$S_r = 3\sqrt{2}[t^2 + 2\sin\pi t]$	$\omega_e(t) = 4t^2 - 6$	1
	2	6	60	$y_r = 8\pi\sin(\pi t/12)$	$x_e = \sqrt{2}\sin(\pi t/8)$	2
18	1	8	—	$S_r = 4\pi\sqrt{2}\sin(\pi t/8)$	$\varphi_e = 18t - 4t^2$	2
	2	8	60	$y_r = 3t + 2t^2$	$x_e = \sin\pi t$	—
19	1	8	60	$S_r = 2\sqrt{3}[t + \sin(\pi t/2)]$	$\omega_e = 5t - t^2$	1
	2	9	—	$y_r = 6\pi\cos(\pi t/3)$	$x_e = \cos(\pi t/6)$	1
20	1	4	—	$S_r = 4\pi\sin(\pi t/6)$	$\omega_e = 3t - 5$	1
	2	6	60	$y_r = 3t + 2t^2$	$x_e = \pi\sin\pi t$	—
21	1	3	—	$S_r = 4\pi\sqrt{2}\sin(\pi t/8)$	$\omega_e = 6t - 14$	2
	2	8	45	$y_r = (t^2 + 3t)$	$x_e = t + 2\sin\pi t$	—

Номер варианта задания	Номер задачи	R , см	α , град	$\vec{CM} = S_r(t)$, см $\vec{CM} = y_r(t)$, см	$\varphi_e(t)$, рад; $\omega_e(t)$, рад/с $x_e(t)$, см	t_1 , с t_2 , с
22	1	4	—	$S_r = 2\pi(t^2 + 2t)$	$\varphi_e = 6\cos(\pi t/6)$	1
	2	9	60	$y_r = 8\sin\pi t$	$x_e = 5t - t^2$	—
23	1	6	45	$S_r = 12\sin(\pi t/8)$	$\varphi_e = t^2 + \cos(\pi t/4)$	2
	2	6	—	$y_r = 6\pi[t + \sin(\pi t/6)]$	$x_e = 5t - t^2$	1
24	1	6	45	$S_r = 12\sin(\pi t/8)$	$\omega_e = t + 4\cos(\pi t/4)$	2
	2	6	—	$y_r = \pi(t^2 + 2t)$	$x_e = 6\cos(\pi t/6)$	1
25	1	6	—	$S_r = 2\pi t^2$	$\omega_e = 3\sin(\pi t/3)$	1
	2	4	45	$y_r = 2t(t + 3t)$	$x_e = 2(t^3 - 3t)$	—
26	1	6	120	$S_r = t^2 + t$	$\varphi_e = 12\cos(\pi t/12)$	2
	2	9	—	$y_r = \pi\sqrt{3}\sin(\pi t/3)$	$x_e = 2(t^2 - 3t)$	1
27	1	10	60	$S_r = \sqrt{3}(t^2 + t)$	$\omega_e = 6\cos(\pi t/6)$	2
	2	9	30	$y_r = \sqrt{3}\pi\sin(\pi t/3)$	$x_e = t + 4\cos(\pi t/4)$	1
28	1	2	—	$S_r = 6\pi\sin(\pi t/6)$	$\varphi_e = 2t + \cos(\pi t/2)$	1
	2	6		$y_r = 2t + 3t^2$	$x_e = t + \sin\pi t$	—
29	1	8	30	$S_r = (t^2 + 2t)$	$\omega_e = 6\sin(\pi t/12)$	2
	2	3	—	$y_r = 2\pi\sqrt{3}\sin(\pi t/3)$	$x_e = 5t - t^2$	1
30	1	2	—	$\pi(t^2 + 2t)$	$\omega_e(t) = 6\cos(\pi t/6)$	1
	2	3	60	$y_r = t + t^2$	$x_e = t + \sin\pi t$	—

Пример выполнения задания К4. Сложное движение точки

Задача 1. Фигура, состоящая из половины диска и равнобедренного тре-

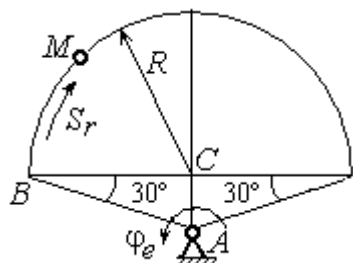


Рис. 3.6. Схема сложного движения точки

угольника (рис. 3.6), вращается вокруг оси, перпендикулярной плоскости фигуры и проходящей через вершину A треугольника. Вращательное движение задается законом изменения угла поворота фигуры $\varphi_e = 5t - 2t^2$ рад.

расстояние от точки M_1 до оси вращения фигуры $h_e = AM_1 = \frac{R}{\cos 30^\circ} = 6\sqrt{3}$ см.

Тогда $V_e(1) = 6\sqrt{3}$ см/с.

Вектор скорости переносного движения точки $\vec{V}_e$ перпендикулярен линии AM_1 и направлен в сторону вращения фигуры (см. рис. 3.7).

Относительное движение точки задано естественным способом, как закон изменения длины дуги BM . В этом случае **скорость относительного движения** точки $V_r = |\dot{S}_r| = |18\pi t|$. При $t_1 = 1$ с $V_r(1) = |\dot{S}_r(1)| = 18\pi = 56,5$ см/с. Положительное значение производной $\dot{S}_r(1)$ указывает, что относительное движение точки в положении M_1 происходит в положительном направлении, указанном на рис. 3.7 дуговой стрелкой S_r . Вектор $\vec{V}_r$ относительной скорости точки в положении M_1 направлен по касательной к траектории относительного движения в сторону положительного направления движения (см. рис. 3.7).

Абсолютную скорость точки находим по теореме сложения скоростей $\vec{V} = \vec{V}_e + \vec{V}_r$. Направление вектора абсолютной скорости, полученное по правилу сложения векторов, показано на рис. 3.5. Для определения величины абсолютной скорости выбираем прямоугольные оси координат $M_1|x y$ (см. рис. 3.7) и проецируем обе части векторного равенства теоремы сложения скоростей на эти оси. Получим:

$$V_x = V_e \cos 60^\circ = 3\sqrt{3} = 5,2 \text{ см/с};$$

$$V_y = -V_e \cos 30^\circ + V_r = -6\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 56,5 = 29,5 \text{ см/с}.$$

Модуль абсолютной скорости: $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{5,2^2 + 29,5^2} = 29,95 \text{ см/с}.$

Абсолютное ускорение точки определяем по теореме Кориолиса, которая при вращательном переносном движении имеет вид:

$$\vec{a} = \vec{a}_r^\tau + \vec{a}_r^n + \vec{a}_e^\tau + \vec{a}_e^n + \vec{a}_k.$$

Относительное касательное ускорение a_r^τ вычисляется по формуле: $a_r^\tau = |\ddot{S}_r|$. По условию задачи вторая производная $\ddot{S}_r = 18\pi = 56,5 \text{ см/с}^2$ – постоянная величина. Так как значение второй производной $\ddot{S}_r$ положительно, вектор ускорения $\vec{a}_r^\tau$ направлен по касательной к траектории относительного движения в точке M_1 в сторону положительного направления относительного движения, отмеченного дуговой стрелкой S_r .

Относительное нормальное ускорение точки вычисляется по формуле

$$a_r^n = \frac{V_r^2}{R} \text{ и в момент } t_1 = 1 \text{ с равно:}$$

$$a_r^n(1) = \frac{V_r^2(1)}{R} = \frac{(18\pi)^2}{9} = 355,3 \text{ см/с}^2. \text{ Вектор}$$

ускорения $\vec{a}_r^n$ направлен по радиусу диска к центру C (см. рис. 3.8).

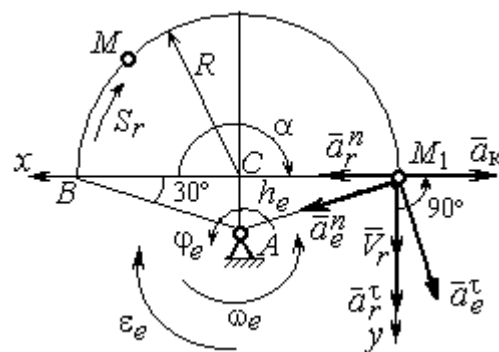


Рис. 3.8. Расчетная схема для определения абсолютного ускорения точки

Переносное касательное ускорение вычисляется по формуле: $a_e^\tau = \varepsilon_e h_e$, где угловое ускорение $\varepsilon_e = |\ddot{\phi}_e|$. Вычислим производную $\ddot{\phi}_e = -4 \text{ рад/с}^2$. Угловое ускорение $\varepsilon_e = |\ddot{\phi}_e| = 4 \text{ рад/с}^2$ постоянно и не зависит от времени.

Отрицательное значение производной $\ddot{\phi}_e < 0$ при условии, что расчетная величина угловой скорости положительна: $\dot{\phi}_e > 0$, означает, что вращательное движение замедленное и переносное угловое ускорение ε_e направлено в сторону, противоположную направлению вращения.

Вектор $\vec{a}_e^\tau$ переносного касательного ускорения точки в её положении M_1 перпендикулярен линии AM_1 и направлен противоположно вектору переносной скорости $\vec{V}_e$ (см. рис. 3.8). Модуль переносного касательного ускорения: $a_e^\tau = a_e^\tau = \varepsilon_e h_e = 24\sqrt{3} = 41,6 \text{ см/с}^2$.

Переносное нормальное ускорение a_e^n рассчитывается по формуле:

$a_e^n = \omega_e^2 h_e$ и в момент времени $t_1 = 1$ с $a_e^n(1) = \omega_e^2(1) h_e = 6\sqrt{3} = 10,4$ см/с². Вектор переносного нормального ускорения $\vec{a}_e^n$ направлен по линии AM_1 к оси вращения (см. рис. 3.8).

По условию задачи вектор скорости относительного движения точки $\vec{V}_r$ лежит в плоскости, перпендикулярной оси переносного вращения, то есть перпендикулярен вектору угловой скорости переносного движения $\vec{\omega}_e$. Тогда модуль **ускорения Кориолиса** при $t_1 = 1$ с $a_k = 2\omega_e V_r = 2 \cdot 1 \cdot 18\pi = 113,1$ см/с².

Так как вектор относительной скорости точки $\vec{V}_r \perp \vec{\omega}_e$, то по правилу Жуковского для определения направления ускорения Кориолиса достаточно повернуть вектор относительной скорости точки $\vec{V}_r$ на 90° в сторону переносного движения вокруг оси, параллельной оси вращения и проходящей через точку M_1 (см. рис. 3.8). Для определения абсолютного ускорения спроецируем на прямоугольные оси xM_1y (см. рис. 3.8) векторное равенство $\vec{a} = \vec{a}_r^\tau + \vec{a}_r^n + \vec{a}_e^\tau + \vec{a}_e^n + \vec{a}_k$. Получим: $a_y = a_e^\tau \cos 30^\circ + a_e^n \cos 60^\circ + a_r^\tau = 97,9$ см/с², $a_x = -a_e^\tau \cos 60^\circ + a_e^n \cos 30^\circ + a_r^n - a_k = 228,4$ см/с². Модуль абсолютного ускоре-

ния: $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 248,5$ см/с².

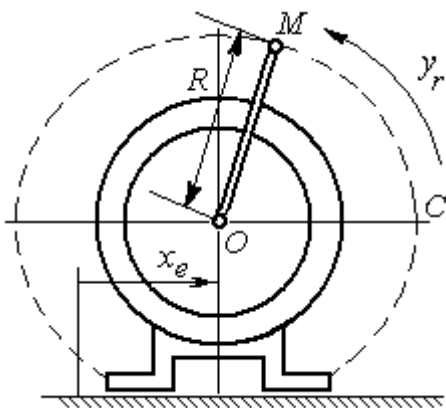


Рис. 3.9. Схема движения точки стержня, укрепленного на электромоторе

Задача 2. К вращающемуся валу электромотора прикреплён стержень OM длины $R = 6$ см. Во время работы электромотора точка M стержня из начального положения C перемещается по дуге окружности согласно уравнению $CM = y_r = \pi t^2$ см. При этом электромотор, установленный без креплений, совершает горизонтальные гармонические колебания на фундаменте по закону

$x_e = 5\sin(\pi t / 3)$ см. Определить абсолютное ускорение точки M в момент времени $t_1 = 1$ с.

Решение

Точка M совершает сложное движение – относительно электромотора и вместе с ним. Относительным движением точки будет её движение по дуге окружности радиуса R , переносным – поступательное горизонтальное, прямолинейное движение электромотора.

Найдём положение точки относительно электродвигателя в заданный момент времени. Угол α , отсчитываемый стержнем OM от начального положения OC , в момент времени $t_1 = 1$ с составляет $\alpha = \frac{y_r(t_1)}{R} = \frac{\pi}{6} = 30^\circ$. Положение точки в момент времени $t_1 = 1$ с отмечено на рис. 3.10 буквой M_1 .

Относительное движение точки задано естественным способом, как закон изменения длины дуги. Относительная скорость $V_r = \dot{y}_r = 2\pi t$. В момент времени $t_1 = 1$ с $V_r = 6,28$ см/с. Вектор $\vec{V}_r$ относительной скорости направлен перпендикулярно стержню OM_1 .

Скорость точки в переносном движении – это скорость горизонтального движения электродвигателя:

$$V_e = \dot{x}_e = \frac{5\pi}{3} \cos(\pi t / 3).$$

В момент времени $t_1 = 1$ с $V_e = \frac{5\pi}{3} \cos 60^\circ = 2,62$ см/с. Вектор $\vec{V}_e$ пе-

реносной скорости точки M направлен параллельно линии движения электродвигателя (см. рис. 3.10).

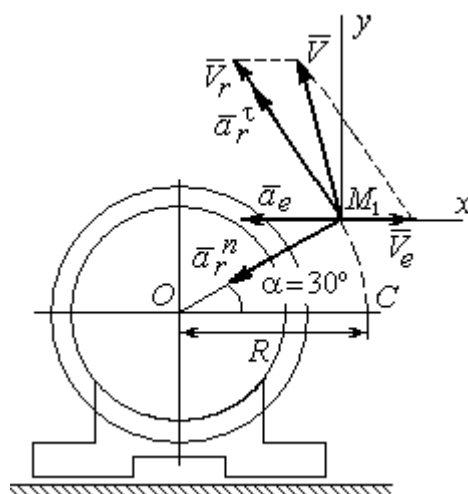


Рис. 3.10. Расчётная схема вычисления абсолютной скорости и абсолютного ускорения точки

Абсолютная скорость точки определяется на основании теоремы сложения скоростей при сложном движении: $\vec{V}_M = \vec{V}_e + \vec{V}_r$. Для того чтобы найти величину абсолютной скорости, выберем оси xM_1y , как показано на рис. 3.10, и спроецируем векторное равенство сложения скоростей на эти оси. Получим: $V_{Mx} = V_e - V_r \cos 60^\circ = -0,52$ см/с (проекция направлена в отрицательную сторону оси x), $V_{My} = V_r \cos 30^\circ = 5,44$ см/с. Модуль абсолютной скорости $V_M = \sqrt{V_{Mx}^2 + V_{My}^2} = 5,46$ см/с. Вектор абсолютной скорости направлен по диагонали параллелограмма, построенного на векторах $\vec{V}_e$ и $\vec{V}_r$.

При поступательном переносном движении точки $\omega_e = 0$ и потому $a_k = 0$. Относительное ускорение точки при движении по окружности раскладывается на две составляющие $\vec{a}_r = \vec{a}_r^\tau + \vec{a}_r^n$, направленные вдоль стержня OM и перпендикулярно ему. Кроме того, при прямолинейном относительном движении $a_e^n = 0$. В результате, теорема о сложении ускорений принимает вид $\vec{a}_M = \vec{a}_r^\tau + \vec{a}_r^n + \vec{a}_e$, где модули векторов вычисляются по формулам $a_r^\tau = \dot{V}_r$, $a_r^n = \frac{V_r^2}{R}$, $a_e = a_e^\tau = \dot{V}_e = -\frac{5\pi^2}{9} \sin(\pi t/3)$ и в момент времени $t_1 = 1$ с равны $a_r^\tau = 6,28$ см/с², $a_r^n = 6,57$ см/с², $a_e = -4,75$ см/с². Направления векторов ускорений показаны на рис. 3.10. Для вычисления модуля абсолютного ускорения точки спроецируем векторное равенство сложения ускорений на оси выбранной ранее системы координат xM_1y . Получим:

$$a_{Mx} = -a_r^\tau \cos 60^\circ - a_r^n \cos 30^\circ - a_e = -4,08 \text{ см/с}^2;$$

$$a_{My} = a_r^\tau \cos 30^\circ - a_r^n \cos 60^\circ = 2,15 \text{ см/с}^2.$$

$$\text{Величина абсолютного ускорения } a_M = \sqrt{a_{Mx}^2 + a_{My}^2} = 4,61 \text{ см/с}^2.$$



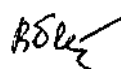
Министерство науки и высшего образования РФ
ФГБОУ ВО
«Уральский государственный горный университет»

ОДОБРЕНО

Методической комиссией
горно-механического факультета

«__» _____ 2018 г.

Председатель комиссии

 проф. В. П. Барановский

Брагин В. Г., Волков Е. Б., Казаков Ю. М.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Учебное пособие

УДК 531
Б 87

Рецензент: *Н. М. Суслов*, д-р техн. наук, заведующий кафедрой ГМК
Уральского государственного горного университета.

Учебное пособие рассмотрено на заседании кафедры технической механики от
«07» июня 2018 г. (протокол № 7) и рекомендовано для издания в УГГУ.

Печатается по решению Учебно-методического совета Уральского государственного горного университета.

Брагин В. Г., Волков Е. Б., Казаков Ю. М.

Б 87 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА: Учебное пособие / Ю. М. Казаков, В. Г. Брагин, Е. Б. Волков. – Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2018. – 250 с.
ISBN 978-5-8019-0460-3

Учебное пособие содержит краткие методические указания, примеры решений задач и упражнения для самостоятельной работы по основным темам курса теоретической механики: статика, кинематика точки и простейшие движения твёрдых тел, сложное движение точки, динамика точки и механической системы. Учебное пособие для студентов всех специальностей очной и заочной форм обучения.

ISBN 978-5-8019-0460-3

©Брагин В. Г., Волков Е. Б.,
Казаков Ю. М., 2018

©Уральский государственный горный
университет, 2018

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. СТАТИКА.....	4
1.1. Основные понятия статики	4
1.2. Система сходящихся сил. Условия равновесия	9
1.3. Произвольная плоская система сил.....	16
1.4. Равновесие систем тел	26
1.5. Произвольная пространственная система сил	34
1.6. Равновесие тел при наличии сил трения.....	44
2. КИНЕМАТИКА ТОЧКИ И ТВЁРДОГО ТЕЛА.....	55
2.1. Криволинейное движение точки	55
2.2. Поступательное движение и вращение твердого тела	62
вокруг неподвижной оси	62
2.3. Скорости точек при плоскопараллельном движении твёрдого тела	73
2.4. Ускорения точек при плоскопараллельном движении твёрдого тела	84
3. СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ	100
3.1. Основные понятия и определения сложного движения точки.....	100
4. ДИНАМИКА ТОЧКИ	114
4.1. Дифференциальные уравнения движения точки	114
4.2. Колебания материальной точки.....	124
4.3. Теорема об изменении кинетической энергии точки	134
5. ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ СИСТЕМЫ.....	146
5.1. Теорема о движении центра масс системы	146
5.2. Теорема об изменении кинетического момента системы	
относительно оси.....	148
5.3. Теорема об изменении кинетической энергии системы	153
5.4. Применение общих теорем динамики системы к описанию	
движений твёрдого тела	162
6. ПРИНЦИПЫ МЕХАНИКИ	177
6.1. Принцип Даламбера для системы	177
6.2. Принцип возможных перемещений	182
6.3. Общее уравнение динамики.....	189
6.4. Уравнения Лагранжа II рода	201
7. ОТВЕТЫ И КРАТКИЕ ПОЯСНЕНИЯ.....	220
7.1. Ответы к упражнениям главы 1	220
7.2. Ответы к упражнениям главы 2	226
7.3. Ответы к упражнениям главы 3	231
7.4. Ответы к упражнениям главы 4	233
7.5. Ответы к упражнениям главы 5	236
7.6. Ответы к упражнениям главы 6	241
СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ	249

1. СТАТИКА

1.1. Основные понятия статики

Статика представляет раздел теоретической механики, в котором освещаются условия равновесия тел под действием систем сил.

Материальной точкой называют простейшую модель материального тела, размерами которого можно пренебречь и которое можно принять за геометрическую точку, имеющую массу, равную массе тела. Совокупность материальных точек называется **системой материальных точек**. Если система материальных точек такова, что движение каждой точки зависит от положения и движения остальных точек системы, то система называется **механической системой материальных точек**. Любое материальное тело представляет собой механическую систему материальных точек. Если точки системы связаны между собой так, что расстояния между любыми двумя точками не изменяются, то система называется **неизменяемой системой**, а тело – **абсолютно твердым телом**.

Силой в механике называют меру механического действия одного материального объекта (например, твердого тела) на другой. Единицей измерения силы в системе СИ является ньютон (Н). Совокупность сил, действующих на механическую систему (в частности, на твёрдое тело), называют **системой сил**.

Если система сил, приложенная к твердому телу, оставляет его в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения, то такая система сил называется **уравновешенной**, или **системой сил, эквивалентной нулю**.

Если одну систему сил, действующих на твердое тело или материальную точку, можно заменить другой системой, не изменяя при этом состояния покоя или движения, в котором находится тело или материальная точка, то такие две системы сил называются **эквивалентными**. Если система сил эквивалентна одной силе, то эта сила называется **равнодействующей** данной системы сил.

Основные виды связей и их реакции

Всякое твердое тело, которое может занимать произвольное положение в пространстве, называется свободным. Если на тело наложены внешние связи, стесняющие (ограничивающие) свободу его перемещений, то тело является несвободным. Сила, с которой данная связь действует на тело, препятствуя его перемещениям, называется **реакцией связи**. Всякое несвободное твердое тело можно рассматривать как свободное, если освободить тело от связей и заменить действие связей их реакциями. **Реакция связи направлена в сторону, противоположную тому направлению, вдоль которого связь препятствует перемещению тела.**

Опора тела на гладкую плоскость (поверхность) без трения. Реакция $\vec{R}$ абсолютно гладкой поверхности приложена в точке касания и направлена перпендикулярно к общей касательной соприкасающихся поверхностей (рис. 1.1, *a*). Такая реакция называется **нормальной реакцией**.

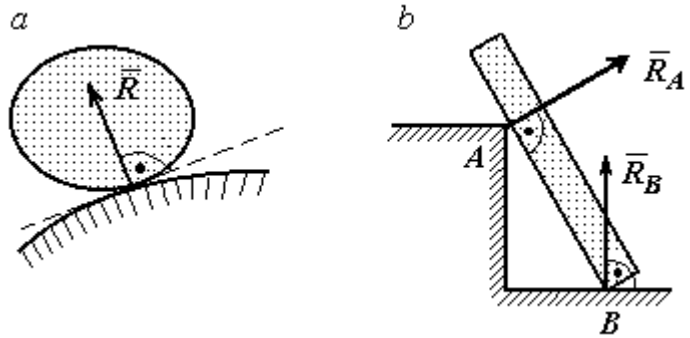


Рис. 1.1. Реакция опоры:

Брус с гладкой поверхностью (рис. 1.1, *b*), опирающийся в точке *B* на гладкий пол и в точке *A* на ребро (точечную опору), имеет реакциями опор $\vec{R}_B$ – реакцию пола и $\vec{R}_A$ – реакцию ребра (точечной опоры). Реакции приложены к брусу и направлены по нормальям к поверхности пола и поверхности бруса.

Цилиндрический шарнир и подвижная опора (каток). Цилиндрический шарнир (на рис. 1.2, *a* обозначен буквой *A*) представляет собой устройство, которое допускает поворот тела в плоскости, перпендикулярной оси шарнира (например, цилиндрическая втулка, надетая на неподвижный цилиндр).

Реакция цилиндрического шарнира $\vec{R}_A$ лежит в плоскости, перпендикулярной оси шарнира. При решении задач неизвестную по величине и направлению реакцию цилиндрического шарнира представляют в виде составляющих, $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, направленных вдоль координатных осей (см. рис. 1.2, *a*). Величина реакции $\vec{R}_A$ определяется по формуле: $R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2}$, где $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$ – составляющие реакции.

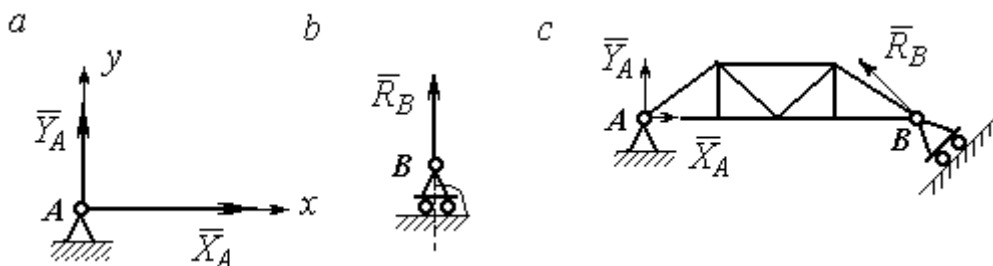


Рис. 1.2. Реакции шарнирных опор:
a – цилиндрический шарнир; *b* – каток; *c* – мостовая конструкция с цилиндрической шарнирной опорой и опорой на каток

Реакция $\vec{R}_B$ опоры на каток (подвижной опоры) (рис. 1.2, *b*) перпендикулярна опорной поверхности.

На рис. 1.2, *c* показаны реакции связей мостовой конструкции с цилиндрической шарнирной опорой и подвижной опорой (катком). Реакция цилиндрического шарнира в точке *A* изображена в виде разложения на взаимно перпендикулярные составляющие $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, реакция $\vec{R}_B$ катка в точке *B* перпендикулярна наклонной плоскости, на которой стоит каток.

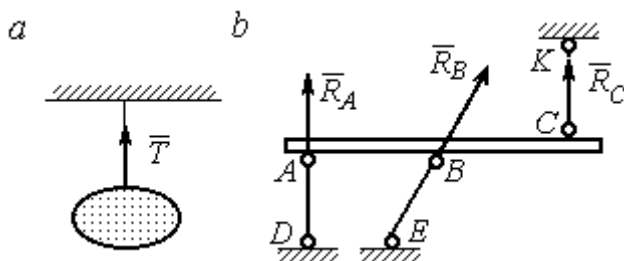


Рис. 1.3. Реакция гибкой нити и невесомого стержня

Гибкая связь и жесткий невесомый стержень. Связь в виде гибкой нерастяжимой нити (каната, троса) препятствует удалению тела от точки подвеса. (рис. 1.3, *a*). Реакция связи $\vec{T}$,

равная натяжению нити, приложена к телу и направлена вдоль нити в сторону противоположную направлению, вдоль которого нить препятствует перемещению тела

Если опорой тела служит невесомый стержень с шарнирами на концах, то реакция прямолинейного стержня приложена к телу и направлена вдоль стержня. Направление реакции стержня противоположно направлению, по которому стержень препятствует перемещению тела.

Реакции невесомых стержней, удерживающих балку, изображённую на рис. 1.3, *b*, направлены исходя из предположения, что балка может перемещаться вниз. При этом стержни *AD* и *BE* сжаты, а стержень *CK* растянут.

Сферический шарнир. Связь в виде сферического шарнира не позволяет перемещать тело в пространстве, но допускает поворот в пространстве вокруг неподвижной точки. Реакция сферического шарнира может иметь любое направление в пространстве. При решении задач реакцию изображают ее составляющими. На рис. 1.4 реакция $\vec{R}_A$ сферического шарнира *A* разложена на составляющие $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Z}_A$ по направлениям координатных осей. Величина реакции сферического шарнира определяется по формуле: $R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2 + Z_A^2}$.

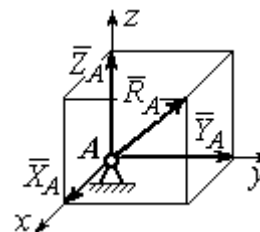


Рис. 1.4. Реакция сферического шарнира

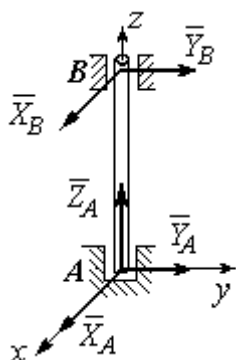


Рис. 1.5. Реакции подшипника и подпятника

Подшипник и подпятник. Подшипник представляет собой цилиндрический шарнир (рис. 1.5, подшипник *B*). Его реакция может иметь любое направление в плоскости, перпендикулярной оси шарнира. При решении задач реакция подшипника раскладывается на две составляющие. Например, на рис. 1.5 реакция $\vec{R}_B$ подшип-

ника B разложена на составляющие $\vec{X}_B, \vec{Y}_B$, параллельные координатным осям.

Величина реакции подшипника определяется по формуле: $R_B = \sqrt{X_B^2 + Y_B^2}$.

Подпятник является цилиндрическим шарниром с упором. В задачах реакция подпятника обычно изображается векторами $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Z}_A$, представляющими разложение силы реакции подпятника по заданным направлениям координатных осей (см. рис. 1.5, подпятник A). Величина реакции подпятника определяется по формуле: $R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2 + Z_A^2}$.

Проекция силы на ось и на плоскость

Проекция силы на ось есть алгебраическая величина, равная произведению модуля силы на косинус угла между силой и положительным направлением оси. Если этот угол острый, проекция положительна, если тупой – отрицательна. Если сила перпендикулярна оси, её проекция на ось равна нулю.

Проекции сил $\vec{F}$, $\vec{Q}$, $\vec{P}$, изображённых на рис. 1.6, a , на ось x :
 $F_x = F \cos \alpha$, $Q_x = Q \cos \alpha_1 = -Q \cos \varphi$, $P_x = P \cos 90^\circ = 0$.

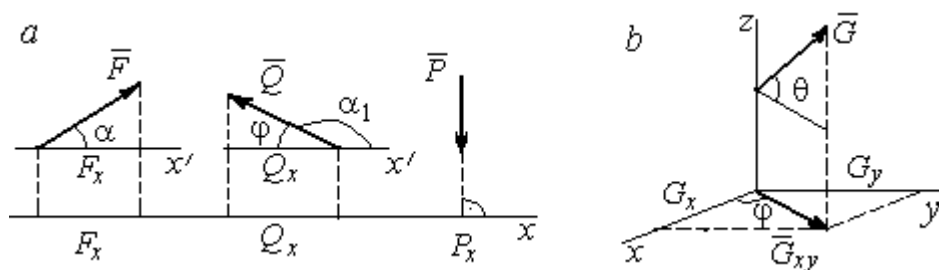


Рис. 1.6. Проекция силы на ось и на плоскость:
 a – проекция силы на ось; b – проекция силы на плоскость

Проекцией силы на плоскость называется вектор, заключённый между проекциями начала и конца силы $\vec{G}$ на эту плоскость.

На рис. 1.6, b вектор $\vec{G}_{xy}$ является проекцией силы $\vec{G}$ на плоскость xy . По величине $G_{xy} = G \cos \theta$, где θ – угол между направлением силы $\vec{G}$ и её проек-

ции $\vec{G}_{xy}$. Проекции силы $\vec{G}$ на оси xyz : $G_x = G_{xy} \cos \varphi = G \cos \theta \cos \varphi$, $G_y = G_{xy} \sin \varphi = G \cos \theta \sin \varphi$, $G_z = G \sin \theta$.

1.2. Система сходящихся сил. Условия равновесия

Для равновесия **пространственной системы сходящихся сил** необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на каждую из трёх осей прямоугольной системы координат были равны нулю:

$$\sum F_{kx} = 0, \sum F_{ky} = 0, \sum F_{kz} = 0,$$

где F_{kx}, F_{ky}, F_{kz} – проекции всех сил на координатные оси.

Для равновесия **плоской системы сходящихся сил** необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на каждую из двух осей прямоугольной системы координат, расположенной в плоскости действия сил, были равны нулю: $\sum F_{kx} = 0, \sum F_{ky} = 0$, где F_{kx}, F_{ky} – проекции всех сил на координатные оси.

Примеры решения задач на равновесие сходящейся системы сил

Задача 1. Каток весом 20 кН удерживается на гладкой наклонной плоскости тросом, который одним концом закреплён на поверхности шара, а другим – на вертикальной стене (рис. 1.7). Угол наклона троса к вертикальной стене $\beta = 120^\circ$. Угол наклона плоскости к горизонту $\alpha = 45^\circ$. Определить силу давления катка на плоскость и натяжение троса.

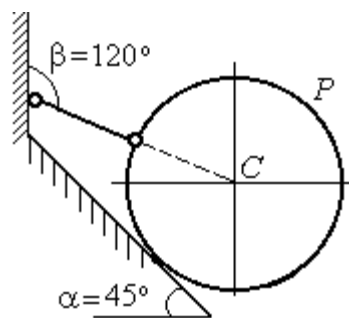


Рис. 1.7. Равновесие шара

Решение

При равновесии на каток действуют сила тяжести $\vec{P}$, реакция троса $\vec{N}$ и реакция опоры $\vec{R}$. Линии действия всех сил находятся в одной плоскости и пересекаются в центре шара. Направления реакций показаны на рис. 1.8.

Условия равновесия плоской сходящейся системы сил:

$$\sum F_{kx} = 0, \sum F_{ky} = 0.$$

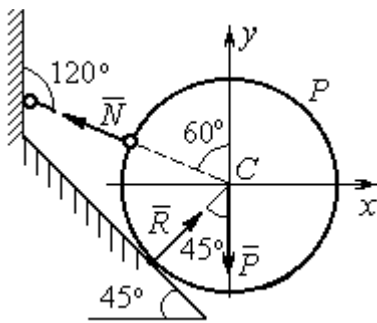


Рис. 1.8. Силы, действующие на каток, при его равновесии

Проведя оси координат, как показано на рис. 1.8, выразим условия равновесия в виде системы уравнений:

$$\sum F_{kx} = -N \cos 30^\circ + R \cos 45^\circ = 0;$$

$$\sum F_{ky} = N \cos 60^\circ + R \cos 45^\circ - P = 0.$$

Подставляя в уравнения исходные данные задачи, найдем: $N = 14,64 \text{ кН}$, $R = 17,93 \text{ кН}$.

Натяжение троса равно модулю его реакции. Сила давления катка на плоскость равна реакции опоры гладкой плоскости, но направлена в противоположную сторону.

Задача 2. Кронштейн состоит из невесомых стержней AC и BC , скрепленных друг с другом и с вертикальной стеной шарнирами, как показано на рис. 1.9. Стержень BC горизонтален, стержень AC составляет с горизонталью угол $\beta = 60^\circ$. К шарниру C прикреплены два троса, удерживающие грузы 1 и 2 весом $G_1 = 10 \text{ кН}$ и $G_2 = 12 \text{ кН}$. Трос, удерживающий груз 1, вертикален, а другой перекинут через блок D так, что угол наклона участка троса CD к вертикали $\alpha = 60^\circ$. Определить реакции стержней BC и AC .

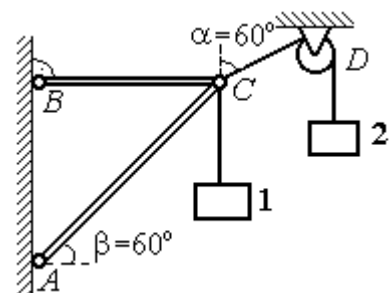


Рис. 1.9. Равновесие кронштейна

Решение

Рассмотрим равновесие узла C , в котором закреплены стержни и тросы. На узел C действуют реакции $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$ тросов, натянутых грузами 1 и 2, и реакции $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$ стержней BC и AC (рис. 1.10). Модули реакций тросов $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$ равны весу грузов: $T_1 = G_1$, $T_2 = G_2$.

Плоская система сил $(\vec{T}_1, \vec{T}_2, \vec{N}_1, \vec{N}_2)$ является сходящейся. Условия равновесия: $\sum F_{kx} = 0, \sum F_{ky} = 0$. Проведя оси координат xOy , как показано на рис. 1.10, и определяя проекции сил на оси, получим систему уравнений:

$$N_1 + N_2 \cos 60^\circ - T_2 \cos 30^\circ = 0;$$

$$N_2 \cos 30^\circ + T_1 - T_2 \sin 60^\circ = 0.$$

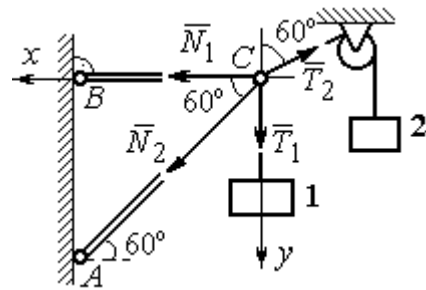


Рис. 1.10. Силы, действующие на узел C при его равновесии

Подставим в уравнения исходные данные задачи. С учётом того, что $T_1 = G_1 = 10$ кН, $T_2 = G_2 = 12$ кН, найдём значения реакций: $N_1 = 12,7$ кН, $N_2 = -4,62$ кН. Отрицательная величина N_2 означает, что вектор $\vec{N}_2$ реакции стержня AC направлен в противоположную сторону.

Задача 3. Груз весом $P = 20$ кН поднимается стержневым краном ABC

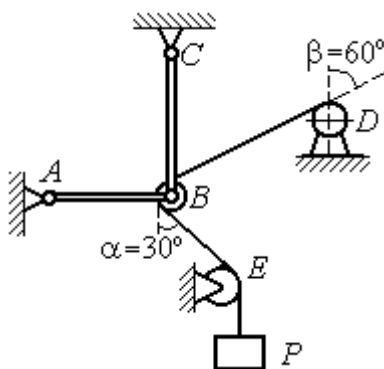


Рис. 1.11. Равновесие стержневой конструкции

посредством каната, перекинутого через блоки B и D (рис. 1.11). Блок B установлен в месте шарнирного соединения невесомых стержней AB и BC , блок D укреплен так, что участок троса DB составляет с вертикалью угол $\beta = 60^\circ$. Стержни AB и BC соединены со стенками шарнирами. Конец троса, несущий груз P , переброшен через блок E и на отрезке BE составляет с вертикалью угол $\alpha = 30^\circ$. Пренебрегая трением в блоке и размерами блока B , определить усилия в стержнях AB и BC при равновесии груза.

Решение

Рассмотрим равновесие блока B вместе с отрезками нити BE и BD . Освободим блок B от связей и заменим их реакциями.

Рассматривая блок и отрезок нити как одно целое, можно не учитывать

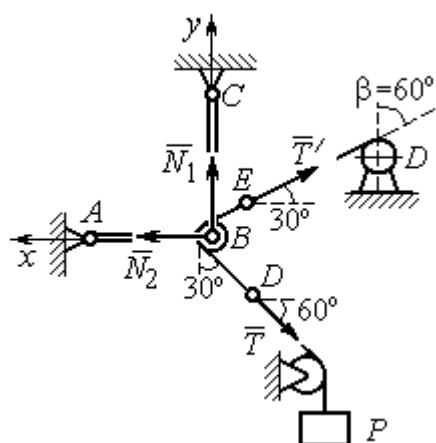


Рис. 1.12. Силы, действующие на блок B , при его равновесии

силы взаимного давления нити и блока. На блок действует реакция $\vec{T}$ нити BD , приложенная в точке D , численно равная весу груза P , реакция $\vec{T}'$ нити BE , приложенная в точке E и также численно равная весу груза P и реакции стержней $\vec{N}_1$, $\vec{N}_2$ (см. рис. 1.12).

Пренебрегая размерами блока, можно считать систему сил сходящейся. Проведём координатные оси, как показано на рис. 1.12, и

выразим условия равновесия плоской сходящейся системы сил в виде системы уравнений:

$$\sum F_{kx} = N_2 - T' \cos 30^\circ - T \cos 60^\circ = 0; \quad \sum F_{ky} = N_1 + T' \cos 60^\circ - T \cos 30^\circ = 0.$$

Решая полученную систему уравнений с учётом, что $T' = T = P = 20$ кН, получим: $N_1 = 7,32$ кН, $N_2 = 27,32$ кН.

Задача 4. Шахта ориентируется в вертикальной плоскости с помощью несвободного проволочного отвеса $CBDP$, натянутого грузом весом $P = 50$ Н (рис. 1.13).

Определить натяжения частей отвеса CB , BD , DP и натяжения оттяжек BA и DE , если угол отклонения оттяжки BC от горизонтали $\alpha = 60^\circ$, а отклонение средней части отвеса BD от вертикали $\beta = 4^\circ$. Весом проволоки отвеса пренебречь.

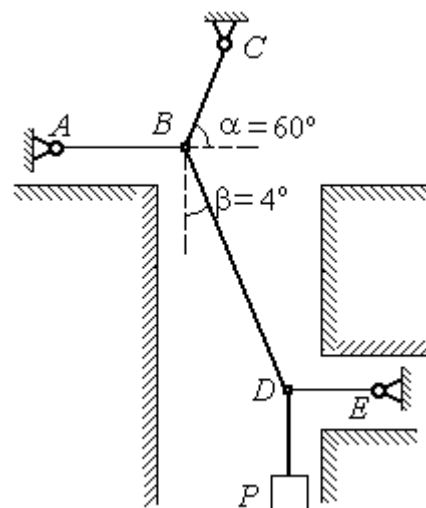


Рис. 1.13. Схема отвеса

Решение

Рассмотрим равновесие узла D , в котором сходятся три силы – реакция $\vec{S}$ средней части отвеса, реакция $\vec{T}_E$ оттяжки DE и реакция $\vec{T}_P$ отвеса на участке

DP , равная весу груза $T_P = P$ (рис. 1.14). Выберем оси координат xDu , как показано на рис. 1.14, и составим уравнения равновесия узла D :

$$\sum F_{kx} = S \cos 86^\circ - T_E = 0; \quad \sum F_{ky} = S \cos 4^\circ - T_P = 0.$$

Из второго уравнения с учётом, что натяжение отвеса на участке DP $T_P = P = 50$ Н, находим натяжение S на сред-

нем участке отвеса: $S = \frac{T_P}{\cos 4^\circ} = 50,12$ Н. Из

первого уравнения находим натяжение $T_E = S \cos 86^\circ = 3,49$ Н.

Теперь рассмотрим равновесие узла B , на который действуют реакция $\vec{T}_A$ оттяжки BA , реакция $\vec{T}_C$ верхней части отвеса BC и реакция $\vec{S}'$ средней части отвеса. Вектор силы $\vec{S}'$ противоположен направлению вектора $\vec{S}$: $\vec{S}' = -\vec{S}$,

а численно (по принципу равенства действия и противодействия) они равны $S' = S$ (см. рис. 1.14). Выберем оси координат xBy , как показано на рис. 1.14, и составим уравнения равновесия узла B :

$$\sum F_{kx} = T_C \cos 60^\circ + S' \cos 86^\circ - T_A = 0; \quad \sum F_{ky} = T_C \cos 30^\circ - S' \cos 4^\circ = 0.$$

Находим натяжение отвеса на верхнем участке BC и натяжение T_A оттяжки BA : $T_C = \frac{S' \cos 4^\circ}{\cos 30^\circ} = 57,73$ Н; $T_A = T_C \cos 60^\circ + S' \cos 86^\circ = 32,36$ Н.

Задача 5. Груз $P = 20$ кН удерживается двумя стержнями AC , AD одинаковой длины и цепью AB , скреплённых в точке A , так, что плоскость треугольника ADC горизонтальна (рис. 1.15). Цепь BA отклонена от вертикальной стены на угол $\beta = 60^\circ$ и расстояние $CE = ED$. Трос закреплён одним концом в точке A , а другой его конец, несущий груз, переброшен через блок K так, что отрезок

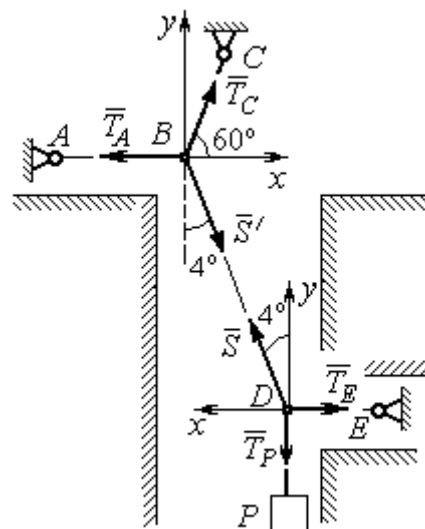


Рис.1.14. Силы, действующие в узлах B и D при равновесии отвеса

троса AK находится в плоскости, параллельной плоскости стены, и составляет с

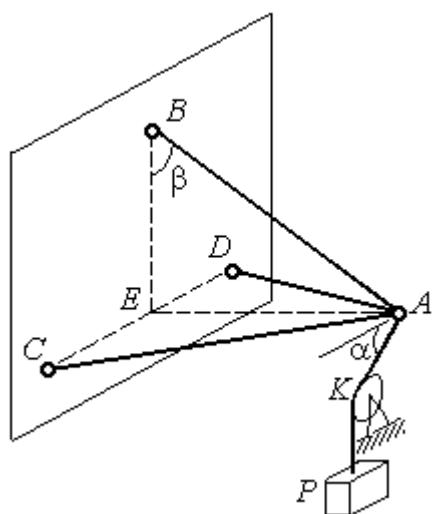


Рис. 1.15. Конструкция пространственного кронштейна

горизонтом угол $\alpha = 30^\circ$. Крепления стержней шарнирные. Углы у оснований стержней $\angle DCA = \angle CDA = 60^\circ$. Определить реакции стержней и натяжение цепи. Весами стержней пренебречь.

Решение

Рассмотрим равновесие узла A . Освобождаем узел от связей, заменяя действие связей реакциями. Реакции стержней $\vec{S}_D$ и $\vec{S}_C$ направлены по стержням,

реакция цепи $\vec{S}_B$ направлена вдоль линии натянутой цепи (рис. 1.16). Реакция троса $\vec{T}$ направлена вдоль троса по линии AK и численно равна весу груза: $T = P$. Направления реакций выбраны в предположении, что стержни и цепь растянуты.

Выберем систему координат, как показано на рис. 1.16. На узел A действует пространственная сходящаяся система сил.

Условия равновесия пространственной сходящейся системы сил $\sum F_{kx} = 0$, $\sum F_{ky} = 0$, $\sum F_{kz} = 0$, где F_{kx} , F_{ky} , F_{kz} — проекции всех сил на координатные оси. Составляем уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx} = S_C \cos 60^\circ - S_D \cos 60^\circ + T \cos 30^\circ = 0;$$

$$\sum F_{ky} = S_C \cos 30^\circ + S_D \cos 30^\circ + S_B \cos 30^\circ = 0; \quad \sum F_{kz} = S_B \cos 60^\circ - T \cos 60^\circ = 0.$$

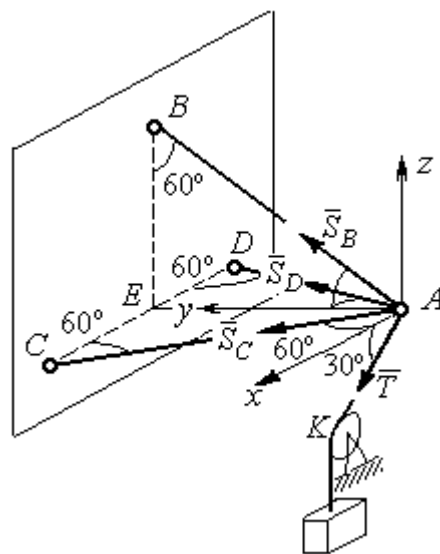


Рис. 1.16. Силы, действующие на узел A , при его равновесии

Решая эту систему, находим $S_B = T = P = 20$ кН; $S_C = -27,32$ кН; $S_D = 7,32$ кН. Знак минус величины S_C показывает, что реакция стержня AC имеет обратное направление. Натяжение цепи равно модулю реакции $\vec{S}_B$.

Задача 6. Подъёмное устройство (рис. 1.17) состоит из двух стержневых опор DB и DA и растяжки DC , соединённых в точке D . В точке D к устройству прикреплена вертикальная нить, удерживающая груз весом $P = 50$ кН.

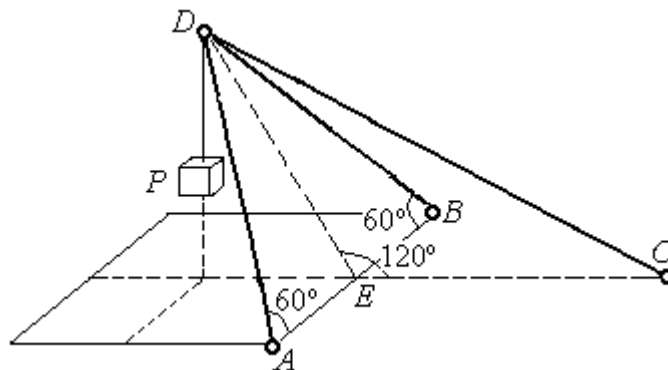


Рис. 1.17. Конструкция подъёмного устройства

Определить реакцию стержневых опор и усилие в растяжке подъёмного устройства, если крепления стержней шарнирные, угол $\angle DEC = 120^\circ$, $AE = EB$, $DE = EC$, а углы в основании опор $\angle DAB = \angle DBA = 60^\circ$.

Решение

Рассматриваем равновесие узла D . Освобождаем узел от связей, заменяя действие связей реакциями. Реакции стержней $\vec{S}_A$, $\vec{S}_B$, $\vec{S}_C$ направлены по стержням, реакция нити $\vec{T}$, численно равная весу тела, направлена вдоль нити (рис. 1.18). Направление реакций выбрано в предположении, что все стержни растянуты.

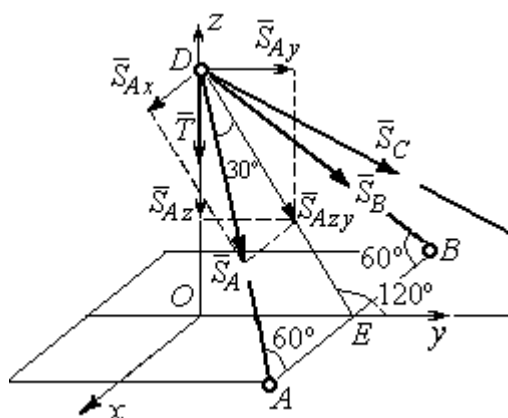


Рис. 1.18. Силы, действующие на узел D , при его равновесии

На узел D действует пространственная сходящаяся система сил. Выберем систему координат $Oxyz$, как показано на рис. 1.18, и составим уравнения равновесия. Заметим, что при определении проекции си-

составим уравнения равновесия. Заметим, что при определении проекции си-

лы $\vec{S}_A$ на оси координат следует вначале получить её проекции $\vec{S}_{Ax}$ на ось Ox и $\vec{S}_{Azy}$ – на плоскость Oyz , а затем найти проекции силы $\vec{S}_{Azy}$ на оси Oy и Oz . На рис. 1.18 показана последовательность вычисления проекций силы $\vec{S}_A$ на оси координат: $S_{Ax} = S_A \cos 60^\circ$, $S_{Ay} = S_{Azy} \cos 60^\circ = S_A \cos 30^\circ \cos 60^\circ$, $S_{Az} = -S_{Azy} \cos 30^\circ = -S_A \cos^2 30^\circ$. Определение проекций силы $\vec{S}_B$ производится аналогично. Сила $\vec{S}_C$ расположена в плоскости Oyz и имеет своими проекциями $S_{Cy} = S_C \cos 30^\circ$, $S_{Cz} = -S_C \cos 60^\circ$. В результате уравнения равновесия узла D принимают вид

$$\sum F_{ky} = S_A \cos 30^\circ \cos 60^\circ + S_B \cos 30^\circ \cos 60^\circ + S_C \cos 30^\circ = 0;$$

$$\sum F_{kx} = S_A \cos 60^\circ - S_B \cos 60^\circ = 0;$$

$$\sum F_{kz} = -S_A \cos^2 30^\circ - S_B \cos^2 30^\circ - S_C \cos 60^\circ - T = 0.$$

Решая систему, получим: $S_A = S_B = -50$ кН, $S_C = 50$ кН.

Отрицательные значения S_A и S_B означают, что реакций стержней AD и DB направлены в противоположную сторону. В результате стержни AD и DB сжаты, а стержень DC растянут.

1.3. Произвольная плоская система сил

Система сил, расположенных в одной плоскости, называется **плоской системой сил**.

Алгебраическим моментом $M_O(\vec{F})$ силы $\vec{F}$ относительно центра O , или просто **моментом силы** $\vec{F}$ относительно центра, называют взятое с соответствующим знаком произведение модуля силы $\vec{F}$ и кратчайшего расстояния h от центра до линии действия силы (рис. 1.19, а): $M_O(\vec{F}) = \pm Fh$. Величину h называют **плечом силы**. Единица измерения момента – Н·м. Момент считается положительным, если сила $\vec{F}$ стремится повернуть тело вокруг центра в

направлении против хода часовой стрелки, и отрицательным – в обратном случае.

На рис. 1.19, *b* показаны знаки моментов сил $\vec{F}$ и $\vec{Q}$ относительно центра O : $M_O(\vec{F}) = +Fh_2$, $M_O(\vec{Q}) = -Qh_1$. Момент силы $\vec{R}$ относительно центра O равен нулю: $M_O(\vec{R}) = 0$, так как плечо силы равно нулю.

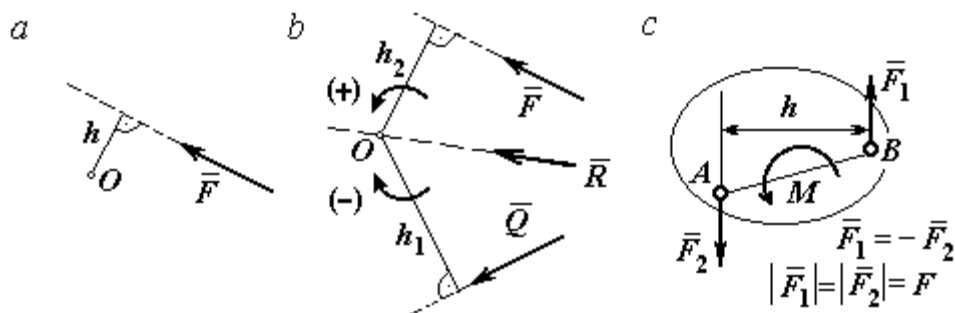


Рис. 1.19. Схемы к вычислению момента силы:
a, b – момент силы относительно центра; *c* – момент пары сил

Парой сил, или просто парой (рис.1.19, *c*), называют систему двух равных по модулю сил, параллельных, направленных в противоположные стороны и не лежащих на одной прямой. **Плечом пары** называют кратчайшее расстояние между линиями действия ее сил. Алгебраическим моментом пары сил, или **моментом пары**, называют взятое со знаком плюс или минус произведение модуля одной из сил пары и плеча пары. Правило знаков такое же, как и для момента силы. Пара сил, показанная на рис. 1.19, *c*, имеет плечо h и момент M : $M = F_1h = F_2h$. Поскольку пара сил характеризуется только ее моментом, на схемах пару часто изображают дуговой стрелкой, показывающей направление поворота твердого тела под действием пары (см. M на рис. 1.19, *c*).

Жесткая заделка. Такая связь (рис. 1.20) препятствует не только линейным перемещениям тела, но и повороту. Реакция жесткой заделки состоит из силы

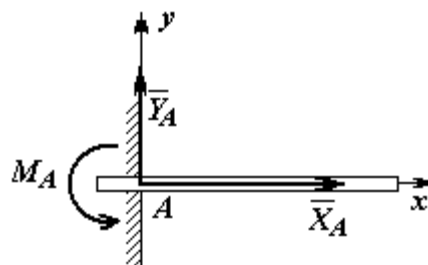


Рис. 1.20. Реакция жесткой заделки

реакции $\vec{R}_A$ и пары сил с моментом M_A . Силу реакции жесткой заделки $\vec{R}_A$ изображают ее составляющими $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$, направленными вдоль координатных осей (см. рис. 1.20). Величина силы реакции $\vec{R}_A$ определяется по формуле: $R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2}$.

При вычислении моментов сил часто применяют **теорему Вариньона** о том, что момент равнодействующей системы сил относительно любого центра равен сумме моментов всех сил этой системы относительно того же центра. На

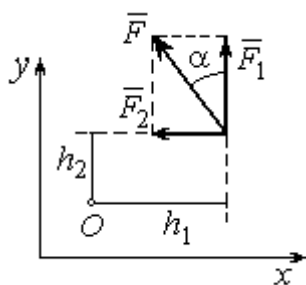


Рис.1.21. Применение теоремы Вариньона

рис. 1.21 показана схема применения теоремы Вариньона. Силу $\vec{F}$ раскладываем на составляющие $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, направленные вдоль координатных осей так, что имеет место равенство $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$. Численно составляющие $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ равны проекциям силы $\vec{F}$ на координатные оси: $F_1 = F \cos \alpha$, $F_2 = F \sin \alpha$. Для каждой из составляющих находим плечи h_1 и h_2 относительно

центра O . Тогда (с учётом знаков) момент силы $\vec{F}$ относительно центра O : $M_O(\vec{F}) = M_O(\vec{F}_1) + M_O(\vec{F}_2) = F_1 h_1 + F_2 h_2$.

Распределённая нагрузка. Силы, приложенные непрерывно вдоль некоторой поверхности, называются **распределёнными**. Распределённая нагрузка характеризуется интенсивностью q . Интенсивность нагрузки, равномерно распределённой вдоль прямой, измеряется в Н/м. На рис. 1.22 приведена плоская система сил, равномерно распределённых вдоль прямой. Равнодействующая $\vec{Q}$ сил, равномерно распределённых вдоль прямой, приложена в середине отрезка действия распределённой нагрузки и по модулю равна про-

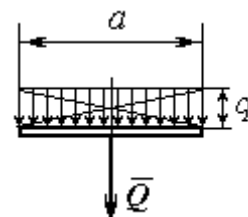


Рис. 1.22. Нагрузка, равномерно распределённая по прямой

нодействующая $\vec{Q}$ сил, равномерно распределённых вдоль прямой, приложена в середине отрезка действия распределённой нагрузки и по модулю равна про-

изведению интенсивности нагрузки на длину её действия: $Q = qa$, где a – длина отрезка действия распределённой нагрузки.

Основная форма условий равновесия плоской системы сил. Для равновесия плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на каждую из двух осей прямоугольной системы координат, расположенной в плоскости действия сил, были равны нулю и сумма моментов сил относительно любого центра, находящегося в плоскости действия сил, была равна нулю:

$$\sum F_{kx} = 0, \quad \sum F_{ky} = 0, \quad \sum M_A(\vec{F}_k) = 0,$$

где F_{kx}, F_{ky} – проекции всех сил на координатные оси; $M_A(\vec{F}_k)$ – моменты всех сил относительно произвольно выбранного центра A .

Примеры решения задач на равновесие произвольной плоской системы сил

Задача 7. Однородная балка AB весом $P = 100$ кН прикреплена к стене шарниром A (рис.1.23). Балка удерживается под углом 60° к вертикали при помощи троса, прикреплённого к балке в точке B , перекинутого через блок D и несущего груз Q . Участок троса DB образует с вертикалью угол 30° . В точке C к балке подвешен груз G весом $G = 200$ кН. Определить вес груза Q , удерживающий балку в равновесии, и реакцию шарнира A , пренебрегая трением в блоке, если расстояние $BC = 0,25BA$.

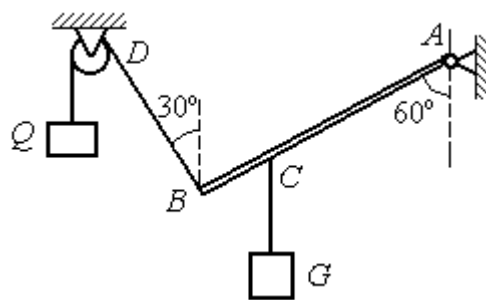


Рис. 1.23. Равновесие балки

Решение

Объектом равновесия является балка AB . На балку действуют сила тяжести $\vec{P}$, приложенная в середине отрезка AB , реакция шарнира A , представлен-

ная в виде двух составляющих $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$, направленных вдоль координатных осей, реакция $\vec{T}_1$ нити, удерживающей груз Q , и реакция $\vec{T}_2$ нити, удерживающей груз G . Направления сил и реакций связей показаны на рис. 1.24.

Силы – $\vec{T}_1$, $\vec{T}_2$, $\vec{P}$, $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, действующие на балку, составляют произвольную плоскую систему. Условия равновесия произвольной плоской системы сил:

$$\sum F_{kx} = 0; \sum F_{ky} = 0; \sum M_A(\vec{F}_k) = 0.$$

Выберем систему координат xAy , как показано на рис. 1.24.

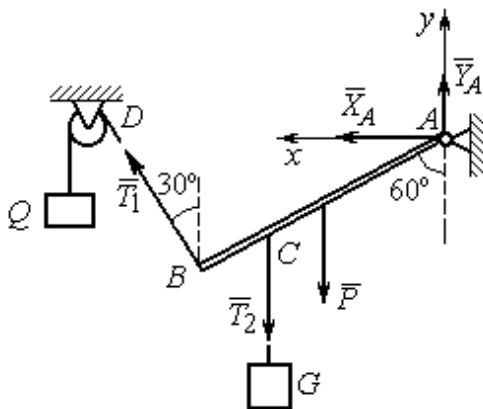


Рис. 1.24. Внешние силы и реакции связей при равновесии балки

Первые два уравнения равновесия имеют вид

$$\sum F_{kx} = X_A + T_1 \cos 60^\circ = 0;$$

$$\sum F_{ky} = Y_A + T_1 \cos 30^\circ - T_2 - P = 0.$$

Выберем центром точку A и будем вычислять моменты сил относительно этого центра. Обозначим (для удобства записи) длину $AB = \ell$. Условие равновесия балки в форме равенства нулю суммы моментов сил относительно центра A имеет вид

$$\sum M_A(\vec{F}_k) = -T_1 \ell + T_2 \frac{3}{4} \ell \cos 30^\circ + P \frac{1}{2} \ell \cos 30^\circ = 0.$$

Подставим данные из условия задачи, с учётом, что реакция нити, удерживающей груз Q , по модулю равна весу этого груза: $T_1 = Q$, а реакция нити, удерживающей груз G , численно равна весу груза G : $T_2 = G$.

Получим систему уравнений:

$$X_A + Q \cdot 0,5 = 0, \quad Y_A + Q \cdot 0,866 - 300 = 0, \quad -Q + 173,2 = 0.$$

Решая систему, найдём $Q = 173,2$ кН, $X_A = -86,6$ кН, $Y_A = 150,01$ кН.

Задача 8. Рама ACE (рис. 1.25, a) в точке A закреплена на цилиндрической шарнирной опоре, а в точке B поддерживается вертикальным невесомым стержнем BK . На раму действуют: пара сил с моментом $M = 8 \text{ кН}\cdot\text{м}$, сила $\vec{F}$, равная по модулю $F = 10 \text{ кН}$, приложенная в точке D под углом 60° к раме, и равномерно распределенная на отрезке AB нагрузка интенсивностью $q = 2 \text{ кН/м}$. В точке E под прямым углом к отрезку CE рамы прикреплен трос, переброшенный через блок и несущий груз $P = 20 \text{ кН}$.

Пренебрегая весом балки, определить реакцию шарнира A и реакцию стержневой опоры BK , если $a = 2 \text{ м}$.

Решение

Рассмотрим равновесие рамы ACE . Выбираем систему координат xAy , например, как показано на рис. 1.25, b .

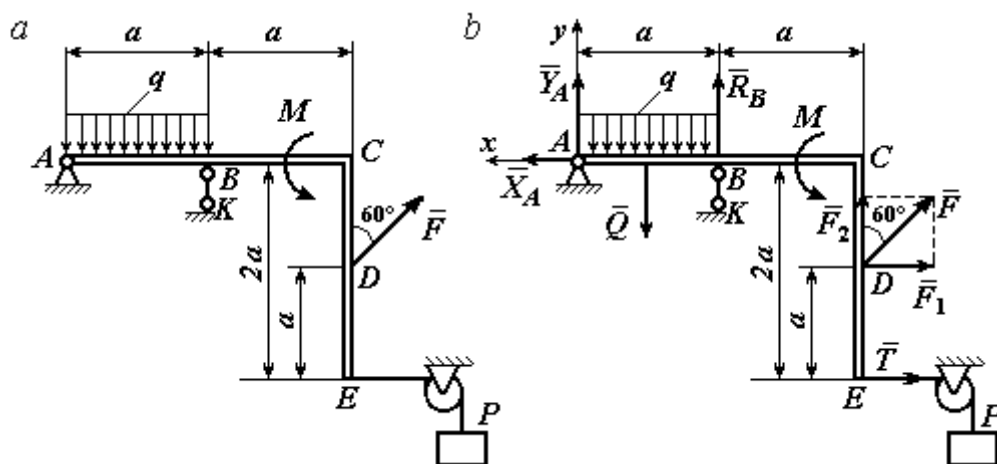


Рис. 1.25. Равновесие рамы:
 a – конструкция и нагрузка рамы; b – внешние силы и реакции связей при равновесии рамы

Заменяем действие связей их реакциями. Изображаем реакцию $\vec{R}_A$ шарнира A двумя ее составляющими $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$, направленными, соответственно, вдоль горизонтальной оси Ax и вертикальной Ay . Реакция $\vec{R}_B$ невесомой стержневой опоры BK приложена в точке B и направлена вдоль стержня BK . Действие груза P на раму изображается реакцией троса $\vec{T}$, модуль которой ра-

вен весу груза $T = P$. Заменяем распределенную нагрузку её равнодействующей $\vec{Q}$. Сила $\vec{Q}$ приложена в середине отрезка AB и численно равна: $Q = qa = 2 \cdot 2 = 4$ кН. На рис. 1.25, b показано направление внешних сил и реакций при равновесии рамы. Направление реакции стержневой опоры BK выбрано в предположении, что стержень сжимается.

При равновесии рамы ACE действующие на неё силы составляют уравновешенную произвольную плоскую систему сил $(\vec{Q}, \vec{F}, \vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{R}_B, \vec{T}, M) \sim 0$. Условия равновесия имеют вид $\sum F_{kx} = 0$; $\sum F_{ky} = 0$; $\sum M_A(\vec{F}_k) = 0$. Вычисляя проекции сил на оси Ax, Ay , первые два уравнения из условий равновесия получим в виде:

$$\sum F_{kx} = X_A - F \cos 30^\circ - T = 0; \quad \sum F_{ky} = Y_A - Q + R_B + F \cos 60^\circ = 0. \quad (1.1)$$

При составлении третьего уравнения моменты сил будем вычислять относительно центра A . В этом случае линии действия сил $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$, составляющих реакцию шарнира A , проходят через центр A , плечи сил равны нулю, и, следовательно, моменты этих сил относительно данного центра равны нулю: $M_A(\vec{X}_A) = 0$, $M_A(\vec{Y}_A) = 0$.

При определении момента силы $\vec{F}$ удобнее воспользоваться теоремой Вариньона. С этой целью представим вектор силы $\vec{F}$ как равнодействующую двух сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, параллельных осям Ax и Ay : $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ (см. рис. 1.25, b). Величины сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ определяются как проекции силы F на оси координат: $F_1 = F \cos 30^\circ$, $F_2 = F \cos 60^\circ$. По теореме Вариньона момент силы $\vec{F}$ относительно центра A равен сумме моментов сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ относительно того же центра A : $M_A(\vec{F}) = M_A(\vec{F}_1) + M_A(\vec{F}_2) = F_1 \cdot a + F_2 \cdot 2a$.

В результате уравнение равновесия в форме моментов имеет вид

$$\sum M_A(\vec{F}_k) = -Q \cdot 0,5a + R_B a + M + F \cos 60^\circ \cdot 2a + F \cos 30^\circ \cdot a + T 2a = 0. \quad (1.2)$$

Подставляя в уравнения равновесия (1.1), (1.2) численные значения из условий задачи, получим систему уравнений относительно неизвестных X_A, Y_A, R_B . Решая эту систему, найдем: $X_A = 28,66$ кН; $Y_A = 59,66$ кН; $R_B = -60,66$ кН.

Отрицательное значение величины R_B означает, что фактическое направление реакции $\vec{R}_B$ стержневой опоры BK противоположно направлению, показанному на рис. 1.25, *b*, т. е. стержень BK растягивается. Реакция шарнирной опоры A – сила $\vec{R}_A$ – находится как геометрическая (векторная) сумма сил $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$. Величина реакции $R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = \sqrt{28,66^2 + 59,66^2} = 66,18$ кН.

Задача 9. Прямоугольная рама $ABCED$

(рис. 1.26) в точке A закреплена жёсткой заделкой. В точке E к раме прикреплена нить, составляющая угол 60° к горизонту. Другой конец нити, переброшенный через невесомый блок, несёт груз весом $P = 15$ кН. На раму

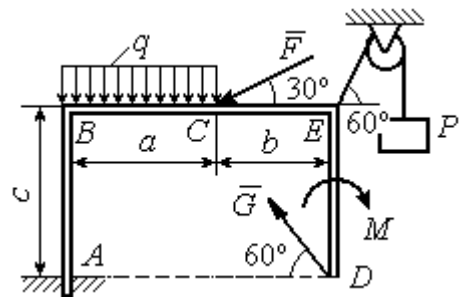


Рис. 1.26. Конструкция рамы

действуют: пара сил с моментом $M = 12$ кН·м, сила $\vec{F}$, равная по модулю $F = 10$ кН, приложенная в точке C под углом 30° к горизонтальному участку рамы BE , и равномерно распределенная на отрезке BC нагрузка интенсивностью $q = 2$ кН/м. В точке D под углом 60° к горизонту на раму действует сила $\vec{G}$, численно равная 20 кН.

Пренебрегая весом рамы, определить реакцию жесткой заделки в точке A , если размеры рамы: $a = 2$ м, $b = 1$ м, $c = 5$ м.

Решение

Объектом равновесия является рама $ABCED$. Связями в данной конструкции являются жесткая заделка рамы в точке A и нить, натянутая грузом P . Заменяем действие связей их реакциями. Изображаем реакцию жесткой заделки в точке A в виде силы, которую представим двумя ее составляющими – $\vec{X}_A$ и

$\vec{Y}_A$, и парой сил с моментом M_A (рис. 1.27). Реакция нити $\vec{T}$, приложенная к раме в точке E , направлена вдоль нити и численно равна весу груза $T = P$. За-

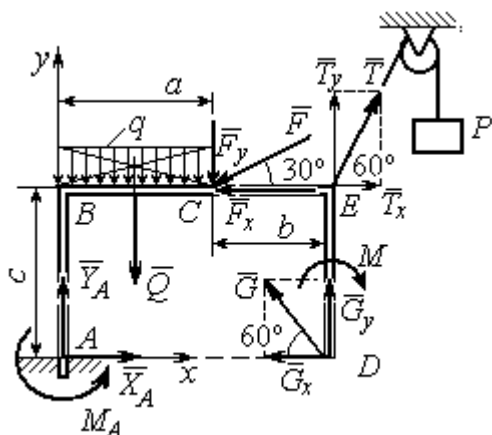


Рис. 1.27. Внешние силы и реакции связей при равновесии рамы

меняем распределенную нагрузку её равнодействующей $\vec{Q}$. Сила $\vec{Q}$ приложена в середине отрезка AB и численно равна: $Q = qa = 4$ кН.

Действующие на раму силы составляют уравновешенную произвольную плоскую систему сил: $(\vec{Q}, \vec{F}, \vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{G}, \vec{T}, M) \sim 0$.

Условия равновесия для такой системы

сил: $\sum F_{kx} = 0$; $\sum F_{ky} = 0$; $\sum M_A(\vec{F}_k) = 0$.

Выбираем систему координат xAy , например, как показано на рис. 1.27, и составляем уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx} = X_A - F \cos 30^\circ + T \cos 60^\circ - G \cos 60^\circ = 0; \quad (3)$$

$$\sum F_{ky} = Y_A - Q - F \cos 60^\circ + T \cos 30^\circ + G \cos 30^\circ = 0. \quad (4)$$

Моменты сил будем вычислять относительно центра A . В этом случае моменты сил $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$ равны нулю: $M_A(\vec{X}_A) = 0$; $M_A(\vec{Y}_A) = 0$.

При определении момента силы $\vec{F}$ удобно воспользоваться теоремой Вариньона. С этой целью представим вектор силы $\vec{F}$ как равнодействующую двух сил $\vec{F}_x$ и $\vec{F}_y$, параллельных осям Ax и Ay : $\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y$ (см. рис. 1.27). Величины сил $\vec{F}_x$ и $\vec{F}_y$ определяются как проекции силы $\vec{F}$ на оси координат: $F_x = F \cos 30^\circ$, $F_y = F \cos 60^\circ$. Плечо вектора силы $\vec{F}_x$ относительно центра A равно c (как длина перпендикуляра, проведённого из центра A на линию действия силы $\vec{F}_x$), плечом силы $\vec{F}_y$ является расстояние a . По теореме Вариньона

момент силы $\vec{F}$ относительно центра A равен алгебраической сумме моментов сил $\vec{F}_x$ и $\vec{F}_y$ относительно того же центра:

$$M_A(\vec{F}) = M_A(\vec{F}_x) + M_A(\vec{F}_y) = F_x \cdot c - F_y \cdot a = F \cos 30^\circ \cdot c - F \cos 60^\circ \cdot a.$$

Аналогично вычисляем моменты сил $\vec{G}$ и $\vec{T}$: $M_A(\vec{G}) = G \cos 30^\circ \cdot (a + b)$;

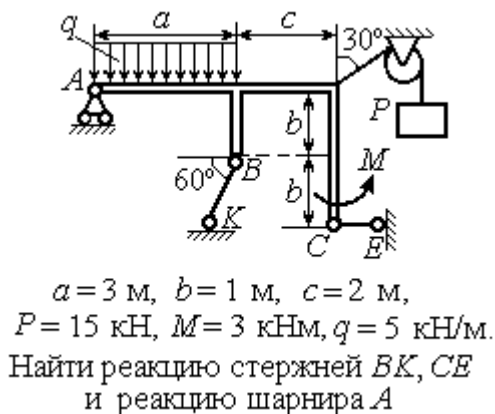
$M_A(\vec{T}) = -T \cos 60^\circ \cdot c + T \cos 30^\circ \cdot (a + b)$. В результате уравнение моментов имеет вид:

$$\begin{aligned} \sum M_A(\vec{F}_k) = F \cos 30^\circ \cdot c - F \cos 60^\circ \cdot a - T \cos 60^\circ \cdot c + T \cos 30^\circ \cdot (a + b) + \\ + G \cos 30^\circ \cdot (a + b) - Q \frac{a}{2} - M + M_A = 0. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Подставляя в уравнения равновесия (1.3) – (1.5) численные значения из условий задачи, получим систему уравнений относительно неизвестных X_A, Y_A, M_A , откуда найдём значения реакций: $X_A = 11,16$ кН; $Y_A = -21,31$ кН; $M_A = -70,73$ Н·м. Знаки показывают, что составляющая $\vec{Y}_A$ силы реакции жёсткой заделки и момент реакции M_A направлены в противоположную сторону. Величина силы реакции жесткой заделки $R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = 24,05$ кН.

Упражнения

Упражнение 1.1



Упражнение 1.2

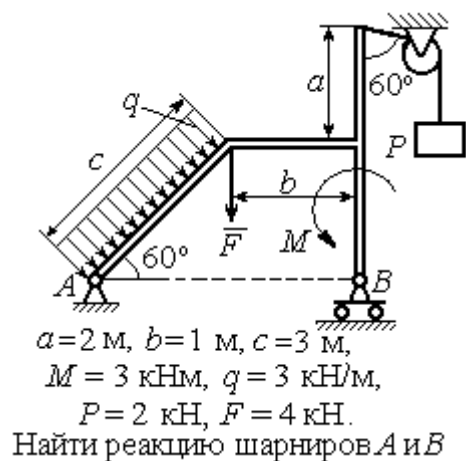
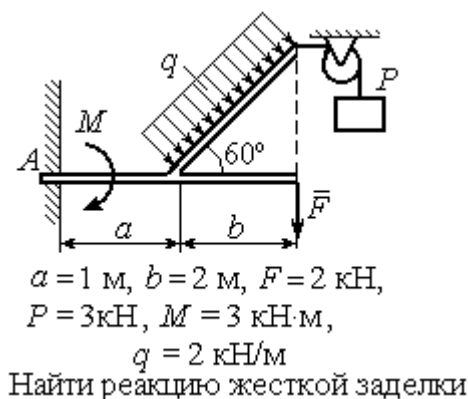


Рис. 1.28. Задания для самостоятельного решения. Упражнения 1.1, 1.2

Упражнение 1.3



Упражнение 1.4

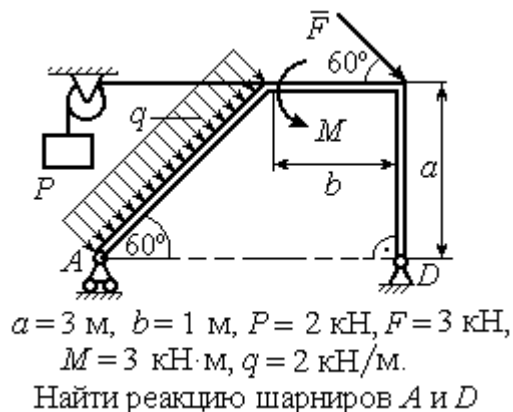


Рис. 1.29. Задания для самостоятельного решения. Упражнения 1.3, 1.4

1.4. Равновесие систем тел

Связи, соединяющие части конструкции, называются **внутренними** в отличие от **внешних** связей, скрепляющих конструкцию с внешними телами, не входящими в данную конструкцию.

Одним из способов решения задач на равновесие сил, действующих на сочленённую конструкцию, является **разбиение конструкции на отдельные тела** и составление уравнений равновесия для каждого из тел, входящих в конструкцию. В уравнения равновесия будут входить только силы, непосредственно приложенные к телу, равновесие которого рассматривается. При этом **реакции внутренних связей, приложенные к разным телам, будут попарно равны по модулю и противоположны по направлению.**

Примеры решения задач на равновесие систем тел

Задача 10. Диск весом $Q = 100 \text{ кН}$ опирается на вертикальную стенку и на наклонную балку AB . На диск действует сила $\vec{F}$, равная по величине 50 кН (рис. 1.30). Линия действия силы $\vec{F}$ проходит через центр диска под углом 30° к его вертикальному диаметру.

Однородная балка AB весом $G = 80$ кН закреплена в точке A шарнирно и удерживается под углом 60° к стене при помощи вертикального троса, один конец которого закреплён на балке в точке B , а другой – переброшен через блок и несёт груз весом P . Определить давление диска на стенку и на балку, реакцию шарнира A и вес груза P , удерживающий конструкцию в равновесии, если длина балки AB $\ell = 6$ м, радиус диска $r = 1$ м.

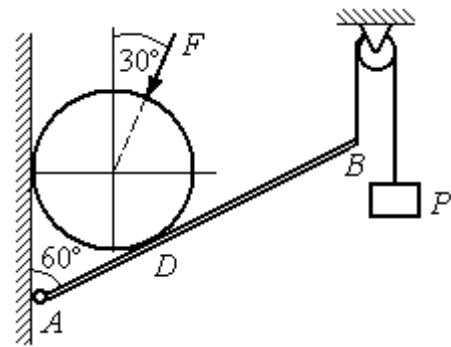


Рис. 1.30. Равновесие составной конструкции

Решение

Объект равновесия включает балку и диск и представляет собой составную конструкцию. Опора диска на балку в точке D является внутренней связью конструкции. Рассмотрим равновесие диска и балки отдельно.

Освобождаем диск от связей. На диск действует сила веса $\vec{Q}$, сила $\vec{F}$ и

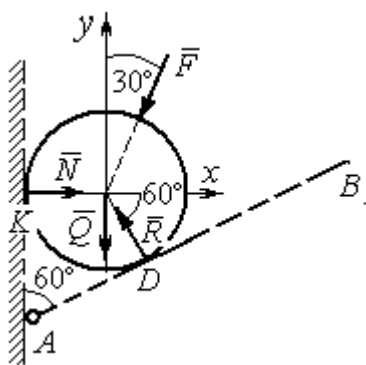


Рис. 1.31. Внешние силы и реакции связей при равновесии диска

реакции $\vec{N}$ и $\vec{R}$ опор диска на стену в точке K и на балку в точке D (рис. 1.31). Силы, приложенные к диску, составляют плоскую систему сходящихся сил. Выберем систему координат, как показано на рис. 1.31, и составим уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx} = -F \cos 60^\circ - R \cos 60^\circ + N = 0; \quad (1.6)$$

$$\sum F_{ky} = -F \cos 30^\circ + R \cos 30^\circ - Q = 0. \quad (1.7)$$

Рассмотрим равновесие балки AB (рис. 1.32).

На балку действуют сила тяжести $\vec{G}$, реакция шарнира A , (на рис. 1.32 показано её разложение на составляющие $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$), реакция нити $\vec{T}$, численно равная весу груза P , и сила $\vec{R}'$ давления диска на балку. Сила давления $\vec{R}'$ про-

тивоположна реакции $\vec{R}$ опоры диска на балку и численно равна ей. Система сил ($\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{G}, \vec{T}, \vec{R}'$), действующих на

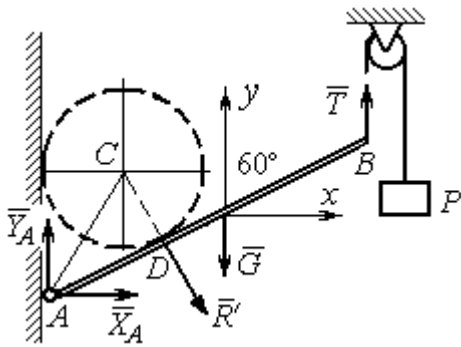


Рис. 1.32. Силы, действующие на балку, при равновесии

балку, является произвольной плоской. Условия равновесия такой системы сил: $\sum F_{kx} = 0$;

$$\sum F_{ky} = 0; \sum M_A(\vec{F}_k) = 0.$$

Выберем оси, как показано на рис. 1.32, и составим уравнения равновесия, полагая точку A центром, относительно которого производятся вычисления моментов сил:

$$\sum F_{kx} = X_A + R' \cos 60^\circ = 0, \quad (1.8)$$

$$\sum F_{ky} = Y_A - R' \cos 30^\circ - G + T = 0, \quad (1.9)$$

$$\sum M_A(\vec{F}_k) = -R' \cdot AD - G \cdot \frac{\ell}{2} \cos 30^\circ + T \ell \cos 30^\circ = 0. \quad (1.10)$$

Добавив к уравнениям (1.8) – (1.10) равновесия балки AB уравнения (1.6), (1.7) равновесия диска с учётом, что $R' = R$, получим систему пяти уравнений с пятью неизвестными. Подставляя данные из условия задачи и решая совместную систему, найдём: $R = 165,47 \text{ кН}$; $N = 107,74 \text{ кН}$; $P = 95,26 \text{ кН}$;
 $X_A = -82,73 \text{ кН}$; $Y_A = 128,03 \text{ кН}$.

Сила давления диска на стену равна модулю реакции опоры $\vec{N}$ и направлена в противоположную сторону, сила давления диска на балку равна $\vec{R}'$.

Задача 11. Кронштейн состоит из горизонтальной балки AD, прикрепленной к вертикальной стене в точке A, и откоса BC, соединённого с балкой AD в точке C под углом

60° и прикреплённого к вертикальной стене в точке B (рис. 1.33). Все соедине-

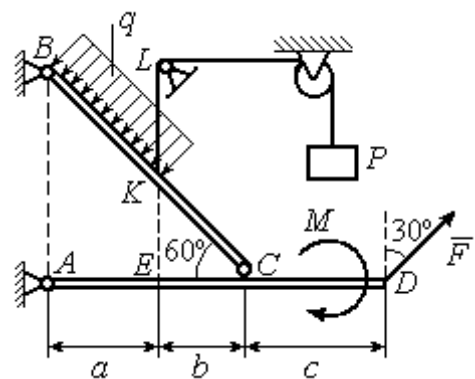


Рис.1.33. Равновесие кронштейна как сочленённой конструкции

ния шарнирные. На конструкцию действуют сила $\vec{F}$, приложенная в точке D под углом 30° к вертикали и равная по модулю $F=10$ кН, пара сил с моментом $M=8$ кН·м и равномерно распределенная на отрезке BK нагрузка интенсивностью $q=3$ кН/м. В точке K к балке BC прикреплена нить, другой конец которой, переброшенный через невесомые блоки, несёт груз весом $P=5$ кН (см. рис. 1.33).

Определить реакции шарниров A , B и C , если $a=2$ м, $b=1$ м, $c=3$ м, а на отрезке KL нить натянута вертикально.

Решение

Рассмотрим равновесие каждой из составных частей конструкции – балки BC и балки AD . Освобождаем балки от связей и заменяем их реакциями (рис. 1.34).

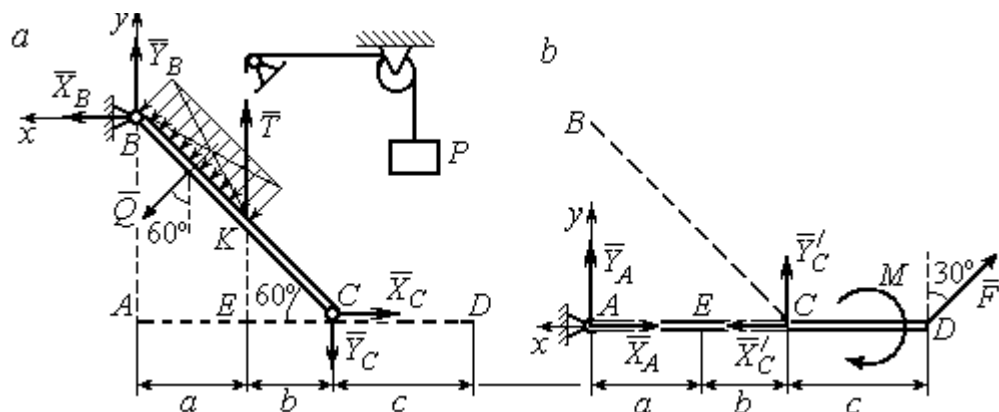


Рис. 1.34. Равновесие элементов конструкции кранштейна:
 a - силы, действующие на балку BC ; b - силы, действующие на балку AD

На рис. 1.34, a показаны реакции внешних и внутренних связей балки BC : реакция $\vec{R}_B$ шарнира B , реакция нити $\vec{T}$, равная по величине весу груза, $T=P$ и реакция $\vec{R}_C$ внутреннего шарнира C . Реакции шарниров B и C представлены в виде разложения на составляющие $\vec{X}_B$, $\vec{Y}_B$ и $\vec{X}_C$, $\vec{Y}_C$. Заменяем равномерную нагрузку равнодействующей силой $\vec{Q}$, приложенной в середине отрезка BK (см. рис. 1.34, a) и численно равной $Q=q \cdot BK = q \cdot \frac{a}{\cos 60^\circ} = q \cdot 2a$.

Система сил $(\vec{Q}, \vec{X}_B, \vec{Y}_B, \vec{X}_C, \vec{Y}_C, \vec{T})$, действующая на балку BC , является произвольной плоской уравновешенной системой сил. Выберем оси координат xBy , как показано на рис. 1.34, a , и составим уравнения равновесия. При этом моменты сил будем вычислять относительно центра C :

$$\sum F_{kx} = X_B + Q\cos 30^\circ - X_C = 0; \quad (1.11)$$

$$\sum F_{ky} = Y_B - Q\cos 60^\circ + T - Y_C = 0; \quad (1.12)$$

$$\sum M_C(\vec{F}_k) = X_B \cdot AB - Y_B(a+b) - Tb + Q\left(CK + \frac{1}{2}BK\right) = 0, \quad (1.13)$$

где $AB = (a+b)\operatorname{tg} 60^\circ$; $CK = 2b$; $\frac{1}{2}BK = a$.

Рассмотрим равновесие балки AD (рис. 1.34, b).

На балку действует сила $\vec{F}$, реакция $\vec{R}_A$ шарнира A и реакция $\vec{R}'_C$ внутреннего шарнира C . Реакция $\vec{R}'_C$ равна по величине и противоположна по направлению реакции $\vec{R}_C$. На рис. 1.34, b реакция $\vec{R}_A$ представлена составляющими $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$, реакция $\vec{R}'_C$ – составляющими $\vec{X}'_C$ и $\vec{Y}'_C$. При этом следует отметить: $\vec{X}'_C = -\vec{X}_C$; $\vec{Y}'_C = -\vec{Y}_C$.

Выберем оси координат xAy как показано на рис. 1.34, b , и составим уравнения равновесия балки AD , вычисляя моменты сил относительно центра C :

$$\sum F_{kx} = -X_A + X'_C - F\cos 60^\circ = 0; \quad (1.14)$$

$$\sum F_{ky} = Y_A + Y'_C + F\cos 30^\circ = 0; \quad (1.15)$$

$$\sum M_C(\vec{F}_k) = -Y_A(a+b) + F\cos 30^\circ \cdot c - M = 0. \quad (1.16)$$

Решая совместно систему уравнений (1.11) – (1.16) с учётом исходных данных задачи и равенства модулей сил $X_C = X'_C$ и $Y_C = Y'_C$, находим:

$$X_A = 5,99 \text{ кН}, Y_A = 5,99 \text{ кН}, X_C = 10,99 \text{ кН}, Y_C = -14,65 \text{ кН};$$

$$X_B = 0,6 \text{ кН}, Y_B = -13,65 \text{ кН},$$

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = 8,47 \text{ кН}, \quad R_C = \sqrt{X_C^2 + Y_C^2} = 18,31 \text{ кН},$$

$$R_B = \sqrt{X_B^2 + Y_B^2} = 13,65 \text{ кН}.$$

Задача 12. Вертикальная балка AB с горизонтальной перекладиной LC закреплена в точке A с помощью жесткой заделки (рис. 1.35). Наклонная балка EC с углом наклона к горизонту 60° в точке C шарнирно прикреплена к горизонтальной перекладине LC балки AB , а в точке E опирается на каток установленный на горизонтальной поверхности. На конструкцию действуют равномерно распределенная на отрезках BL и DE нагрузка с одинаковой интенсивностью $q = 2 \text{ кН/м}$, сила $\vec{F}$, приложенная в точке D перпендикулярно балке EC и равная по величине $F = 10 \text{ кН}$, и пара сил с моментом $M = 5 \text{ кН}\cdot\text{м}$. Определить реакцию жесткой заделки A и реакции шарниров C и E , если параметр a , определяющий размеры конструкции, равен $a = 2 \text{ м}$.

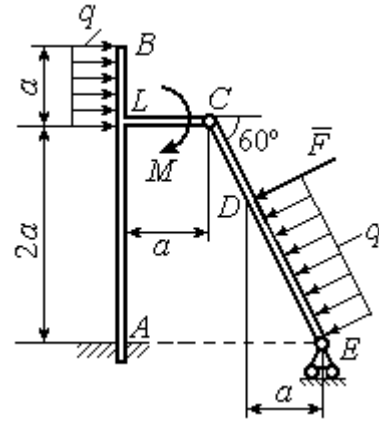


Рис. 1.35. Равновесие сочленённой конструкции

Решение

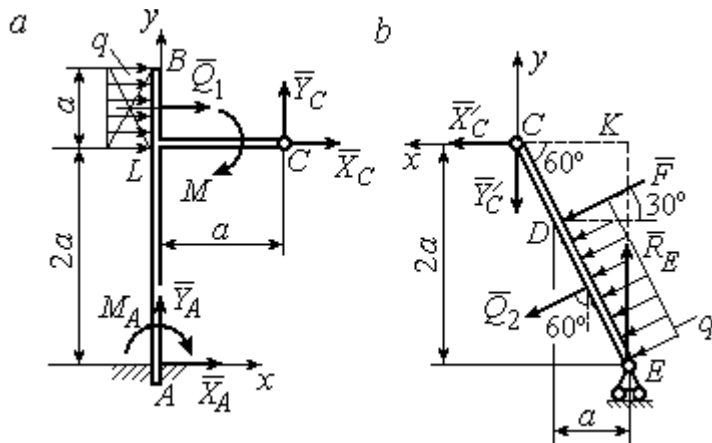


Рис. 1.36. Равновесие элементов конструкции:
 а - силы и реакции связей, действующие на балку AB ;
 б - силы и реакции связей, действующие на балку CE

но равной $Q_1 = qa = 4 \text{ кН}$. На балку действует сила $\vec{Q}_1$, пара сил с моментом M и реакции связей – жёсткой заделки в точке A и шарнира C .

Разделим систему на две части по шарниру C и рассмотрим равновесие балок ABC и EC отдельно.

Рассмотрим балку ABC (рис. 1.36, а). Заменим распределенную нагрузку эквивалентной силой $\vec{Q}_1$, числен-

На рис. 1.36, *a* изображена реакция жесткой заделки в точке *A* в виде силы, разложенной на составляющие $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, и пары с моментом M_A . Реакция $\vec{R}_C$ шарнира *C* показана разложением на составляющие $\vec{X}_C$, $\vec{Y}_C$. Силы образуют произвольную плоскую систему.

Введём систему координат, как показано на рис. 1.36, *a*, и составим уравнения равновесия балки, выбрав центром вычисления моментов сил точку *A*.

Имеем систему

$$\sum F_{kx} = X_A + Q_1 + X_C = 0; \quad \sum F_{ky} = Y_A + Y_C = 0; \quad (1.17)$$

$$\sum M_A(\vec{F}_k) = -M_A - Q_1 \cdot \left(2a + \frac{a}{2}\right) - M + Y_C a - X_C 2a = 0. \quad (1.18)$$

Рассмотрим теперь равновесие балки *EC* (рис. 1.36, *b*). Заменим распределённую нагрузку эквивалентной силой $\vec{Q}_2$, приложенной в середине отрезка *ED* и равной $Q_2 = \frac{qa}{\cos 60^\circ} = q \cdot 2a = 8 \text{ кН}$. На балку действуют силы $\vec{Q}_2$, $\vec{F}$, реакция $\vec{R}_E$ подвижной опоры – катка *E* и реакция $\vec{R}'_C$ шарнира *C*. На рис. 1.36, *b* реакция $\vec{R}'_C$ показана в виде разложения на составляющие $\vec{X}'_C$, $\vec{Y}'_C$. При этом силы $\vec{X}'_C$, $\vec{Y}'_C$ направлены противоположно силам $\vec{X}_C$, $\vec{Y}_C$ и равны им по модулю: $X_C = X'_C$; $Y_C = Y'_C$ (см. рис. 1.36, *a*, *b*).

Действующие на балку *EC* силы образуют уравновешенную произвольную плоскую систему сил. Выберем систему координат, как показано на рис. 1.36, *b*, и составим уравнения равновесия, вычисляя моменты сил относительно центра *C*. Получим:

$$\sum F_{kx} = Q_2 \sin 60^\circ + F \cos 30^\circ + \vec{X}'_C = 0, \quad (1.19)$$

$$\sum F_{ky} = R_E - Q_2 \cos 60^\circ - F \sin 30^\circ - Y'_C = 0, \quad (1.20)$$

$$\sum M_C(\vec{F}_k) = -F \cdot \left(\frac{2a}{\cos 30^\circ} - 2a\right) - Q_2 \cdot \left(\frac{2a}{\cos 30^\circ} - a\right) + R_E \cdot 2a \tan 30^\circ = 0. \quad (1.21)$$

Подставим в совместную систему (1.17) – (1.21) исходные данные задачи и, воспользовавшись тем, что модули сил $\vec{X}_C$, $\vec{Y}_C$ и $\vec{X}'_C$, $\vec{Y}'_C$ равны, найдём:

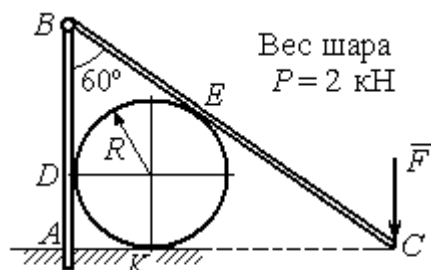
$$X_A = 11,59 \text{ кН}; \quad Y_A = -2,76 \text{ кН}; \quad M_A = 42,87 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$X_C = -15,59 \text{ кН}; \quad Y_C = 2,76 \text{ кН}; \quad R_E = 11,76 \text{ кН}.$$

Полные величины сил реакции жесткой заделки и взаимного давления в шарнире C : $R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = 11,91 \text{ кН}$; $R_C = \sqrt{X_C^2 + Y_C^2} = 15,83 \text{ кН}$.

Упражнения

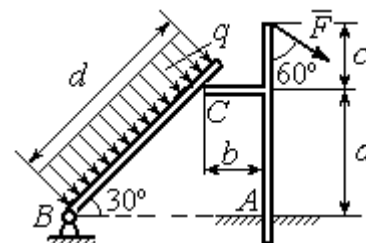
Упражнение 1.5



$$R = 1 \text{ м}, \quad F = 8 \text{ кН}.$$

Найти реакцию жесткой заделки в точке A , реакцию шарнира B , реакцию опоры шара в точках D, K, E

Упражнение 1.6

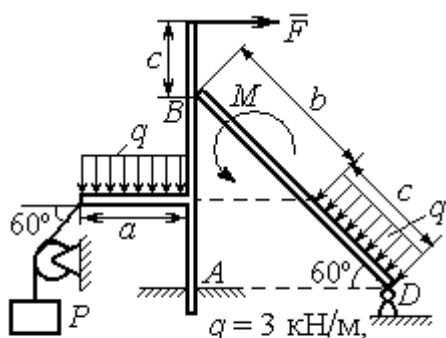


$$a = 2 \text{ м}, \quad b = 1 \text{ м}, \quad c = 1 \text{ м}, \quad d = 5 \text{ м},$$

$$q = 3 \text{ кН/м}, \quad F = 4 \text{ кН}.$$

Найти реакцию жесткой заделки в точке A , реакцию шарнира B и реакцию опоры в точке C

Упражнение 1.7

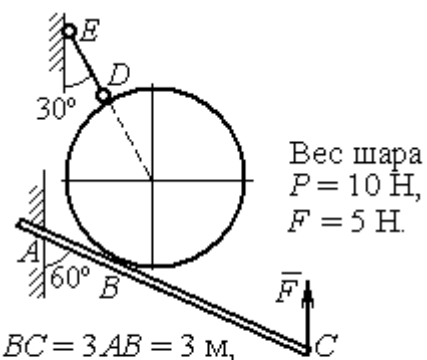


$$F = 4 \text{ кН}, \quad P = 3 \text{ кН}, \quad M = 2 \text{ кН}\cdot\text{м},$$

$$a = 2 \text{ м}, \quad b = 3 \text{ м}, \quad c = 1 \text{ м}$$

Найти реакцию заделки A , шарнира D и реакцию опоры B

Упражнение 1.8



$$\text{Вес шара } P = 10 \text{ Н},$$

$$F = 5 \text{ Н}.$$

$$BC = 3AB = 3 \text{ м},$$

Найти реакцию жесткой заделки A , реакцию стержня DE и реакцию опоры в точке B

Рис. 1.37. Задания для самостоятельного решения. Упражнения 1.5 – 1.8

1.5. Произвольная пространственная система сил

Моментом силы относительно оси называют момент вектора проекции этой силы на плоскость, перпендикулярную оси, относительно точки пересечения

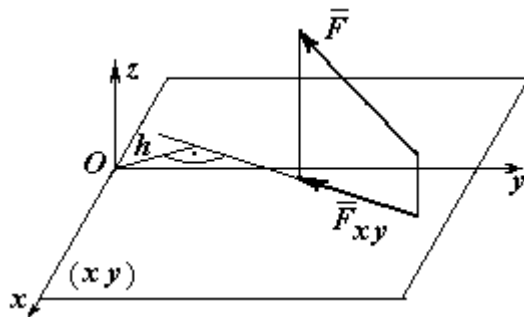


Рис. 1.38. Момент силы относительно оси

ния оси с плоскостью. На рис. 1.38 показано вычисление момента силы $\vec{F}$ относительно оси z :

$$M_z(\vec{F}) = M_O(\vec{F}_{xy}) = F_{xy}h,$$

где O – точка пересечения оси z с плоскостью xy , перпендикулярной оси z ;

$\vec{F}_{xy}$ – вектор проекции силы $\vec{F}$ на плос-

кость xy ; h – плечо силы $\vec{F}_{xy}$ относительно центра O . Момент силы относительно оси считается положительным, если при взгляде с положительного направления оси он создаёт вращение против хода часовой стрелки.

Равновесие пространственной системы сил. Для равновесия пространственной системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на оси прямоугольной системы координат x, y, z были равны нулю и суммы моментов всех сил относительно тех же осей также были равны нулю:

$$\sum F_{kx} = 0; \sum F_{ky} = 0; \sum F_{kz} = 0;$$

$$\sum M_x(\vec{F}_k) = 0; \sum M_y(\vec{F}_k) = 0; \sum M_z(\vec{F}_k) = 0,$$

где F_{kx}, F_{ky}, F_{kz} – проекции всех сил на координатные оси; $M_x(\vec{F}_k), M_y(\vec{F}_k), M_z(\vec{F}_k)$ – моменты всех сил относительно выбранных осей, $k = 1, 2, \dots$

Примеры решения задач на равновесие пространственных систем сил

Задача 13. Горизонтальный вал (рис. 1.39) закреплён в подпятнике C и подшипнике K . Вал имеет шкив B радиуса R и шкив D радиуса r .

Оба шкива перпендикулярны оси вала. Рукоять AE параллельна оси Cx .

Нить, удерживающая груз Q , сходит со шкива D по касательной в точке L параллельно плоскости zCx , так что радиус шкива D , проведённый в точку схода нити, составляет с вертикальным диаметром угол 30° .

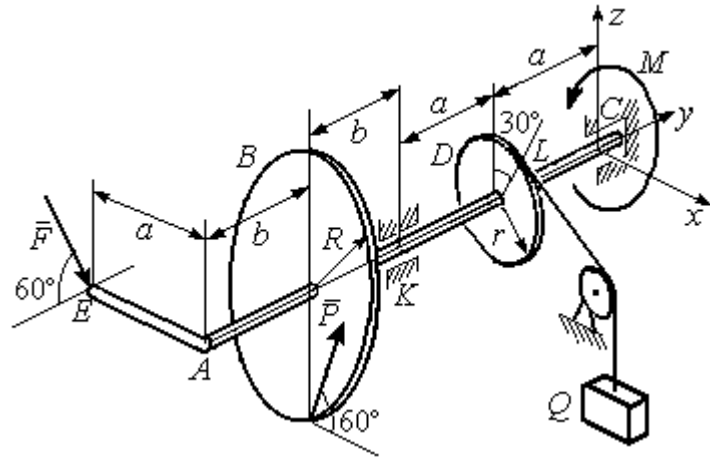


Рис. 1 39. Равновесие вала

На вал действуют силы: $\vec{F}$, $\vec{P}$ и пара сил с моментом M . Сила $\vec{F}$ находится в плос-

кости, параллельной zCy , и составляет угол 60° с направлением оси Cy . Сила $\vec{P}$ приложена в нижней точке шкива B , параллельна плоскости zCx и составляет угол 60° с направлением оси Cx . Определить вес удерживаемого груза Q и реакции подшипника и подпятника, если $P = 4$ кН; $F = 2$ кН; $M = 3$ кН·м; $R = 0,6$ м; $r = 0,3$ м; $a = 0,8$ м; $b = 0,4$ м.

Решение

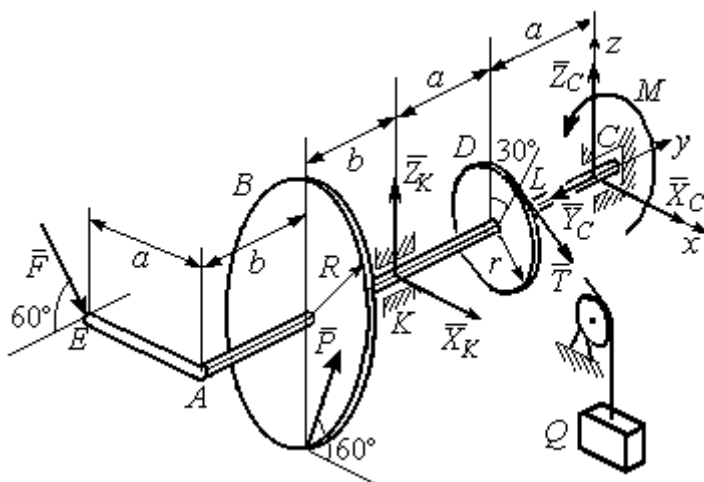


Рис. 1.40. Активные силы и реакции связей, действующие на вал, при его равновесии

Рассмотрим равновесие вала. На вал действуют активные силы $\vec{F}$, $\vec{P}$, пара с моментом M и реакции связей. Связями являются нить, натянутая грузом Q , подпятник C и подшипник K . Освобождаем вал от связей, заменяя их действие реакциями. Реакцию $\vec{R}_C$ подпятника C рас-

кладываем на три составляющие: $\vec{X}_C$, $\vec{Y}_C$, $\vec{Z}_C$, направленные вдоль координатных осей (рис. 1.40). Реакция $\vec{R}_K$ подшипника K лежит в плоскости, пер-

пендикулярной оси вала, и ее составляющими будут вектора $\vec{X}_K, \vec{Z}_K$, направленные вдоль координатных осей x, z . Реакция нити $\vec{T}$ направлена вдоль нити от точки L и по модулю равна весу груза Q .

Активные силы и реакции связей составляют произвольную пространственную уравновешенную систему сил. При составлении уравнений равновесия изобразим вал вместе с действующими на него силами в проекциях на координатные плоскости (рис. 1.41).

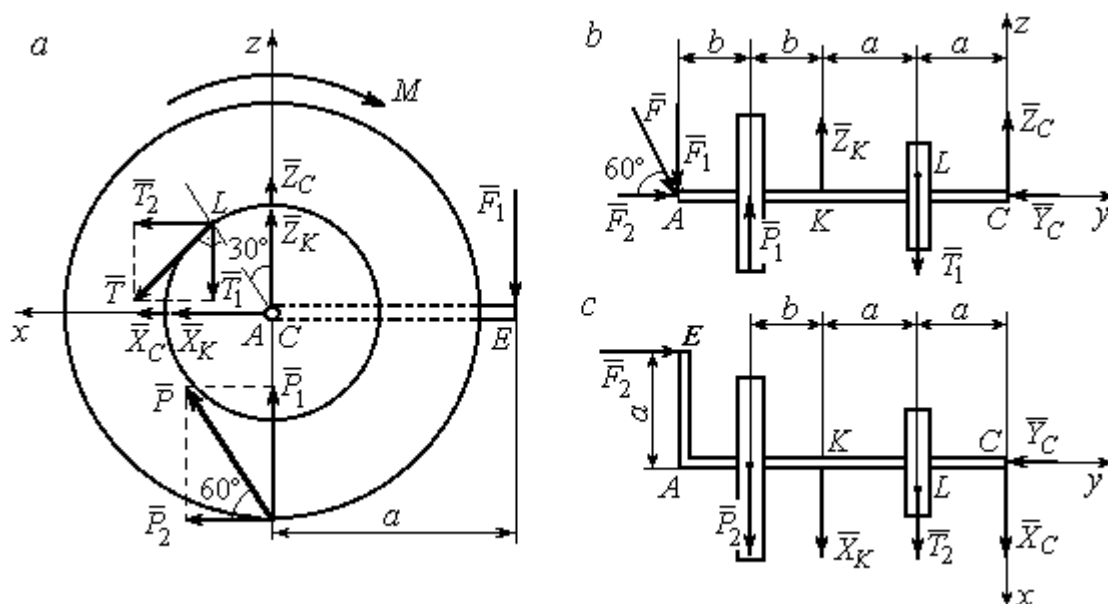


Рис. 1.41. Вал и действующие на него силы в проекциях на координатные плоскости:

- a – вид вала в проекции на плоскость zCx с положительного конца оси y ;
- b – вид вала в проекции на плоскость zCy с положительного конца оси x ;
- c – вид вала в проекции на плоскость xCy с положительного конца оси z

На рис. 1.41, a показаны проекции вала и всех сил на плоскость zCx . Вычисляя моменты проекций сил относительно точки C , получим значения моментов этих сил относительно оси y . При вычислении моментов сил относительно оси x достаточно вычислить моменты проекций сил на плоскость zCy относительно точки C (рис. 1.41, b), а вычисляя моменты проекций сил на

плоскость xCy относительно точки C , получим значения моментов сил относительно оси z (рис. 1.41, c).

Величины проекций сил определяются равенствами: $P_1 = P \cos 30^\circ$;
 $P_2 = P \cos 60^\circ$; $T_1 = T \cos 60^\circ$; $T_2 = T \cos 30^\circ$; $F_1 = F \cos 30^\circ$; $F_2 = F \cos 60^\circ$.

Составляем уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx} = P \cos 60^\circ + X_K + T \cos 30^\circ + X_C = 0; \quad \sum F_{ky} = F \cos 60^\circ - Y_C = 0;$$

$$\sum F_{kz} = P \cos 30^\circ + Z_K - T \cos 60^\circ + Z_C - F \cos 30^\circ = 0;$$

$$\sum M_x(\vec{F}_k) = T \cos 60^\circ \cdot a - Z_K \cdot 2a - P \cos 30^\circ \cdot (2a + b) + \\ + F \cos 30^\circ \cdot (2a + 2b) = 0;$$

$$\sum M_y(\vec{F}_k) = -F \cos 30^\circ \cdot a - P \cos 60^\circ \cdot R + T \cdot r - M = 0;$$

$$\sum M_z(\vec{F}_k) = T \cos 30^\circ \cdot a + X_K \cdot 2a + P \cos 60^\circ \cdot (2a + b) - F \cos 60^\circ \cdot a = 0.$$

Подставляя исходные данные задачи, получим систему шести уравнений с шестью неизвестными, решая которую, найдём:

$$X_C = -8,09 \text{ кН}, \quad Y_C = 1 \text{ кН}, \quad Z_C = 4,65 \text{ кН}, \quad Z_K = 2,92 \text{ кН};$$

$$X_K = -10,02 \text{ кН}, \quad T = 18,6 \text{ кН}.$$

Реакции подпятника и подшипника:

$$R_C = \sqrt{X_C^2 + Y_C^2 + Z_C^2} = 9,4 \text{ кН}, \quad R_K = \sqrt{X_K^2 + Z_K^2} = 10,44 \text{ кН}.$$

Вес удерживаемого груза Q равен реакции нити T .

Задача 14. Однородная прямоугольная плита (рис. 1.42) веса 25 кН прикреплена к полу при помощи шарового шарнира A , подшипника B и удерживается в вертикальном положении стержнем CO , лежащим в плоскости, перпендикулярной плоскости плиты так, что $\angle COB = 60^\circ$. В плоскости плиты на неё действуют пара сил с моментом $M = 6 \text{ кН} \cdot \text{м}$, сила $\vec{F}_1$, равная $F_1 = 10 \text{ кН}$, приложенная на верхней стороне плиты в точке H под углом 30° к линии EC , и сила $\vec{F}_2$, равная $F_2 = 5 \text{ кН}$, приложенная в точке D параллельно стороне AB .

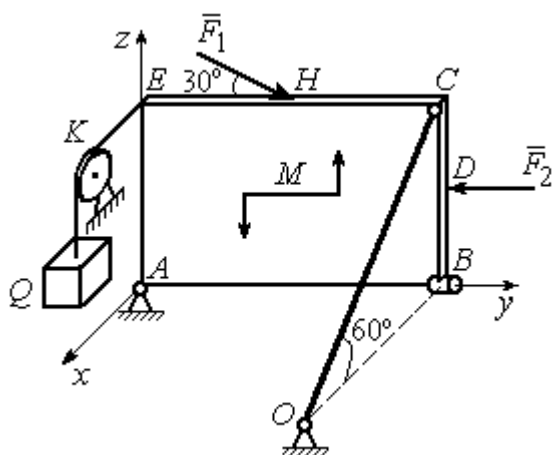


Рис. 1.42. Равновесие плиты

В точке E к плите прикреплён трос, на другом конце которого, перекинутым через блок K , подвешен груз весом $Q = 20$ кН. Отрезок троса EK перпендикулярен плоскости плиты.

Определить реакции шарнира A , подшипника B и реакцию стержня CO , если ширина плиты $AB = 3$ м; высота $AE = 2$ м; $EH = HC$, $CD = DB$.

Решение

Рассмотрим равновесие плиты $ABCE$. На плиту действуют активные силы $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, сила тяжести плиты $\vec{P}$, пара сил с моментом M и реакции связей. Связями являются пространственный шарнир A , нить, натянутая грузом Q , подшипник B и невесомый стержень CO .

Выберем систему координат, как показано на рис. 1.43. Освобождаем плиту от связей, заменяя их действие реакциями. Реакцию $\vec{R}_A$ шарнира A раскладываем на три составляющие: $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, $\vec{Z}_A$, направленные вдоль координатных осей. Реакция нити $\vec{T}$ направлена вдоль нити параллельно оси Ax и равна весу груза

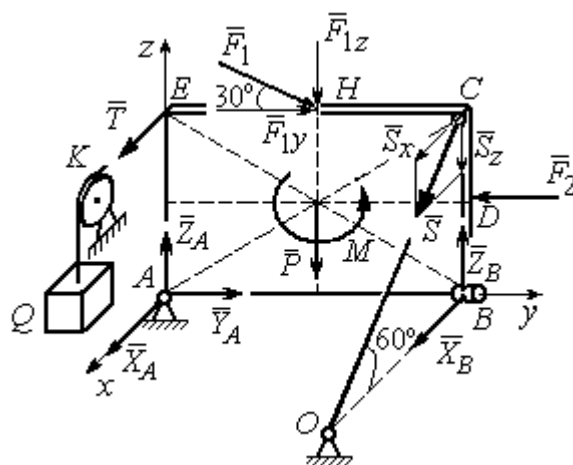


Рис. 1.43. Силы, действующие на плиту, при её равновесии

$T = Q$, реакция $\vec{R}_B$ подшипника B расположена в плоскости, перпендикулярной оси Ay , и представлена в виде двух своих составляющих $\vec{X}_B$, $\vec{Z}_B$, реакция $\vec{S}$ невесомого стержня CO направлена вдоль стержня. Направления активных сил и реакций связей показаны на рис. 1.43.

Силы, действующие на плиту, и реакции связей составляют пространственную уравновешенную систему сил. Составим уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx} = X_A + T + X_B + S \cos 60^\circ = 0;$$

$$\sum F_{ky} = Y_A - F_2 + F_1 \cos 30^\circ = 0;$$

$$\sum F_{kz} = Z_A - F_1 \cos 60^\circ - P + Z_B - S \cos 30^\circ = 0;$$

$$\begin{aligned} \sum M_x(\vec{F}_k) = & -F_1 \cos 60^\circ \cdot 0,5 \cdot AB - F_1 \cos 30^\circ \cdot AE - P \cdot 0,5 \cdot AB + \\ & + F_2 \cdot BD + Z_B \cdot AB - S \cos 30^\circ \cdot AB + M = 0; \end{aligned}$$

$$\sum M_y(\vec{F}_k) = T \cdot AE + S \cos 60^\circ \cdot CB = 0;$$

$$\sum M_z(\vec{F}_k) = -X_B \cdot AB + S \cos 60^\circ \cdot EC = 0.$$

Подставляя исходные данные задачи, получим систему уравнений, решая которую, найдём значения реакций: $S = -40$ кН; $X_B = -20$ кН; $Z_B = -17,53$ кН; $X_A = 20$ кН; $Y_A = -3,66$ кН; $Z_A = 12,89$ кН.

Задача 15. Прямоугольная фрамуга $ACEB$ весом $P = 50$ Н, закрепленная в точках A и B цилиндрическими шарнирами, открыта на угол 60° (рис. 1.44). На фрамуге в точке H закреплена верёвка, другой конец которой, переброшенный через невесомый блок K , несёт груз Q . При этом линия верёвки HK параллельна прямой ED . На фрамугу действует сила $\vec{F}$, приложенная в верхнем углу в точке C перпендикулярно плоскости фрамуги и равная по величине $F = 15$ Н.

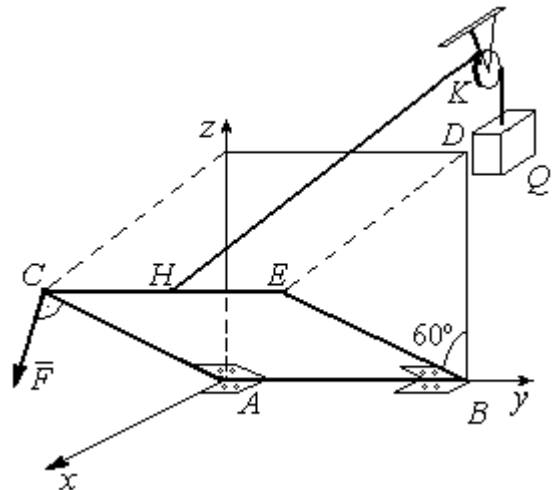


Рис. 1.44. Равновесие фрамуги

Определить вес груза Q , необходимый для удержания фрамуги в равновесии и реакции цилиндрических шарниров A и B , если размеры фрамуги $BE = BD = 2$ м; $AB = 3$ м; $CH = HE$.

Решение

Рассмотрим равновесие фрамуги $ABCE$. Изображаем внешние активные

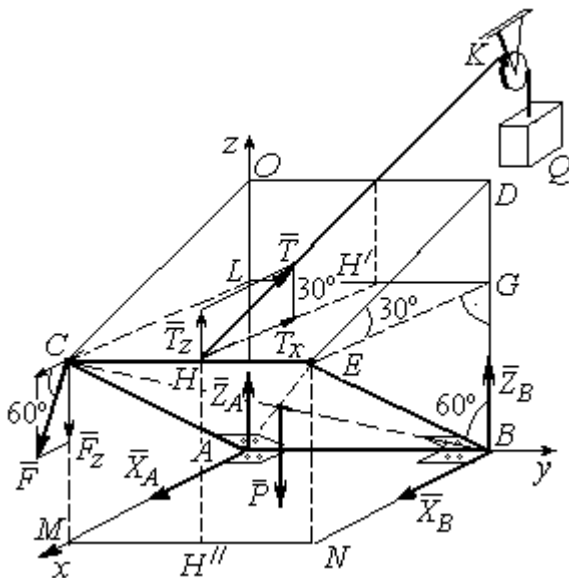


Рис. 1.45. Активные силы и реакции при равновесии фрамуги

силы: силу $\vec{F}$, силу тяжести фрамуги $\vec{P}$, а также реакции связей. Связями являются два цилиндрических шарнира A и B (связь, аналогичная подшипнику) и нить, натянутая грузом Q . Выберем систему координат $Axuz$, как показано на рис. 1.45. Освобождаем фрамугу от связей, заменяя их действие реакциями. Реакции $\vec{R}_A$ и $\vec{R}_B$ шарниров A и B раскладываем на взаимно перпендикулярные составляющие: $\vec{X}_A$, $\vec{Z}_A$ и $\vec{X}_B$, $\vec{Z}_B$ в

плоскостях, перпендикулярных оси вращения фрамуги (ось Ay), реакция нити $\vec{T}$ направлена вдоль нити и равна весу груза $T = Q$. Направления активных сил и реакций связей показаны на рис. 1.45.

Силы, действующие на фрамугу, составляют уравновешенную пространственную систему сил.

Составим уравнения равновесия. При этом для удобства вычисления моментов сил относительно осей изобразим плоскости, перпендикулярные этим осям, с проекциями на них сил, действующих на фрамугу (рис. 1.46). Тогда моменты сил, действующих на фрамугу, например, относительно оси Ax определяются как моменты векторов проекций этих сил на плоскость zAy относительно точки A – пересечения оси Ax и перпендикулярной ей плоскости zAy (см. рис. 1.46, a). Аналогично при вычислении моментов сил относительно оси Az достаточно вычислить моменты векторов проекций сил на плоскость xAy относительно точки A (см. рис. 1.46, b).

Значения моментов сил относительно оси Ay получим, вычисляя моменты векторов проекций сил на плоскость zAx относительно точки A (см. рис. 1.46, c).

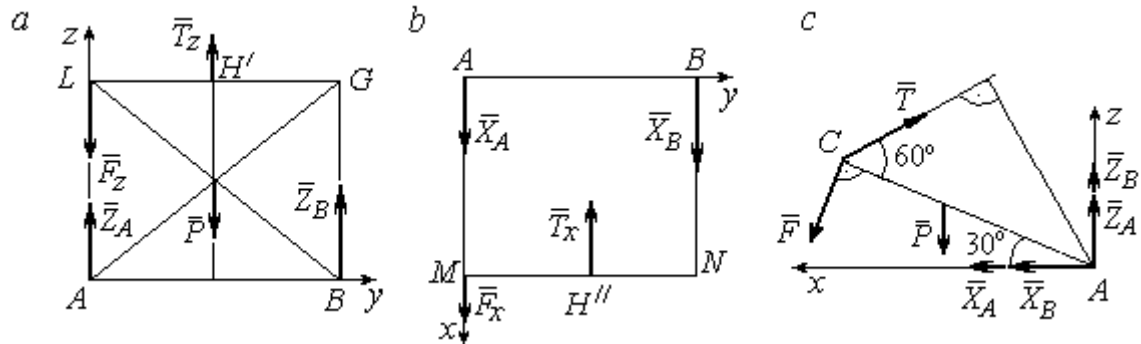


Рис. 1.46. Фрамуга и действующие на неё силы в проекциях на координатные плоскости:

a – проекция на плоскость zAy со стороны положительного направления оси x ;
 b – проекция на плоскость xAy со стороны положительного направления оси z ; c – проекция на плоскость zAx со стороны положительного направления оси y

Уравнения равновесия фрамуги имеют вид:

$$X_A + X_B + F \cos 60^\circ - T \cos 30^\circ = 0;$$

$$Z_A + Z_B - P - F \cos 30^\circ + T \cos 60^\circ = 0;$$

$$\begin{aligned} \sum M_x(\vec{F}_k) &= T_z \cdot 0,5 \cdot AB - P \cdot 0,5 \cdot AB + Z_B \cdot AB = \\ &= T \cos 60^\circ \cdot 0,5 \cdot AB - P \cdot 0,5 \cdot AB + Z_B \cdot AB = 0; \end{aligned}$$

$$\sum M_y(\vec{F}_k) = P \cdot 0,5 \cdot AC \cos 30^\circ + F \cdot AC - T \cdot AC \sin 60^\circ = 0;$$

$$\sum M_z(\vec{F}_k) = -X_B \cdot AB + T_x \cdot 0,5 \cdot AB = -X_B \cdot AB + T \cos 30^\circ \cdot 0,5 \cdot AB = 0.$$

Подставляя исходные данные из условия задачи и решая систему, найдём реакции шарниров фрамуги:

$$X_B = 18,22 \text{ Н}, Z_B = 14,41 \text{ Н}, R_B = \sqrt{X_B^2 + Z_B^2} = 23,31 \text{ Н};$$

$$X_A = 10,83 \text{ Н}, Z_A = 27,41 \text{ Н}, R_A = \sqrt{X_A^2 + Z_A^2} = 29,47 \text{ Н}.$$

Вес груза, удерживающий фрамугу в равновесии, численно равен реакции верёвки: $Q = T = 42,37 \text{ Н}$.

Задача 16. Горизонтальный коленчатый вал AD (рис. 1.47) закреплен в подпятнике A и подшипнике C . Вал имеет шкив радиуса r и рукоять DH , перпендикулярные оси вала. Рукоять DH образует угол 30° к направлению оси Ax . Колено вала расположено в горизонтальной плоскости xAy . Нить, удерживающая груз Q , намотана на шкив и сходит с него вертикально вниз. На вал действуют силы $\vec{F}$, $\vec{P}$, $\vec{G}$ и пара сил с моментом M . Сила $\vec{F}$ приложена в верхней

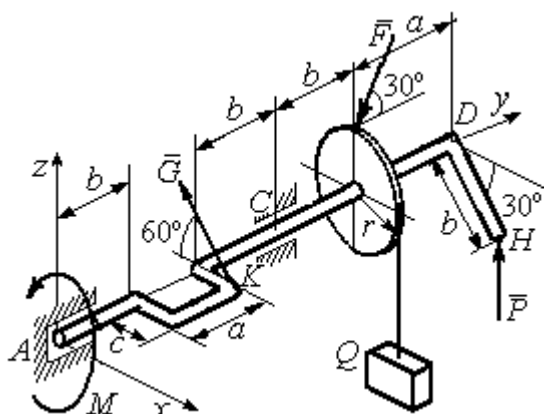


Рис. 1.47. Равновесие вала

пендикулярные оси вала. Рукоять DH образует угол 30° к направлению оси Ax . Колено вала расположено в горизонтальной плоскости xAy . Нить, удерживающая груз Q , намотана на шкив и сходит с него вертикально вниз. На вал действуют силы $\vec{F}$, $\vec{P}$, $\vec{G}$ и пара сил с моментом M . Сила $\vec{F}$ приложена в верхней

точке вертикального диаметра шкива под углом 30° к направлению оси Ay и находится в плоскости zAy . Сила $\vec{P}$ приложена в нижней точке H рукояти параллельно оси Az . Сила $\vec{G}$ приложена в крайней точке K стойки колена вала под углом 60° к стойке и находится в плоскости, перпендикулярной оси вала. Пара сил с моментом M создаёт вращение вала вокруг оси Ay .

Определить вес удерживаемого груза Q и реакции подпятника и подпятника, если: $P = 10$ кН; $F = 12$ кН;
 $G = 6$ кН; $M = 3$ кН·м; $r = 0,3$ м;
 $a = 0,8$ м; $b = 0,4$ м; $c = 0,2$ м.

Решение

Рассмотрим равновесие вала. На вал действуют активные силы – $\vec{F}$, $\vec{P}$, $\vec{G}$, пара сил с моментом M и реакции связей. Связями являются нить, натянутая грузом Q , подпятник A и подшипник C .

Освобождаем вал от связей, заменяя их действие реакциями.

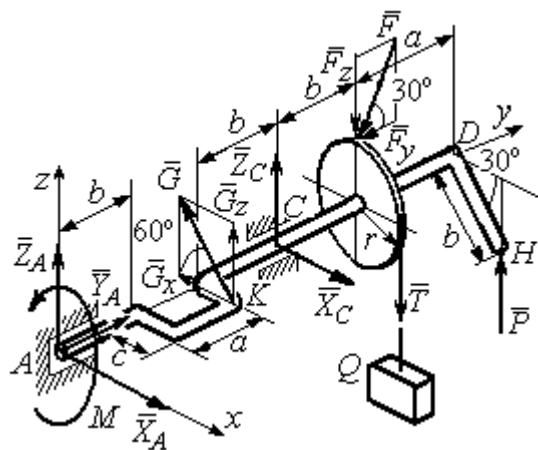


Рис. 1.48. Силы и реакции, действующие на вал при равновесии

Реакцию подпятника A раскладываем на три составляющие: $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Z}_A$, направленные вдоль координатных осей. Реакция подшипника C лежит в плоскости, перпендикулярной оси вала, и также может быть разложена на составляющие $\vec{X}_C, \vec{Z}_C$, направленные вдоль координатных осей Ax, Az . Реакция нити $\vec{T}$ направлена вдоль нити и по модулю равна весу груза, $T = Q$. Действие на вал активных сил и реакций связи показано на рис. 1.48.

Указанные силы составляют произвольную пространственную уравновешенную систему сил.

Составим уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx} = X_A - G \cos 60^\circ + X_C = 0;$$

$$\sum F_{ky} = Y_A - F \cos 30^\circ = 0;$$

$$\sum F_{kz} = Z_A + G \cos 30^\circ + Z_C - F \cos 60^\circ - T + P = 0.$$

$$\begin{aligned} \sum M_x(\vec{F}_k) = G_z(b+a) + Z_C(b+a+b) - F_z(b+a+b+b) + F_y r - \\ - T(b+a+b+b) + P(b+a+b+b+a) = 0; \end{aligned}$$

$$\sum M_y(\vec{F}_k) = -G_z c + Tr - Pb \cos 30^\circ - M = 0;$$

$$\sum M_z(\vec{F}_k) = G_x(b+a) - X_C(b+a+b) = 0,$$

где значения проекций сил на оси $G_z = G \cos 30^\circ$; $G_x = G \cos 60^\circ$; $F_z = F \cos 60^\circ$; $F_y = F \cos 30^\circ$.

Подставляя исходные данные и решая систему, получим значения реакций:

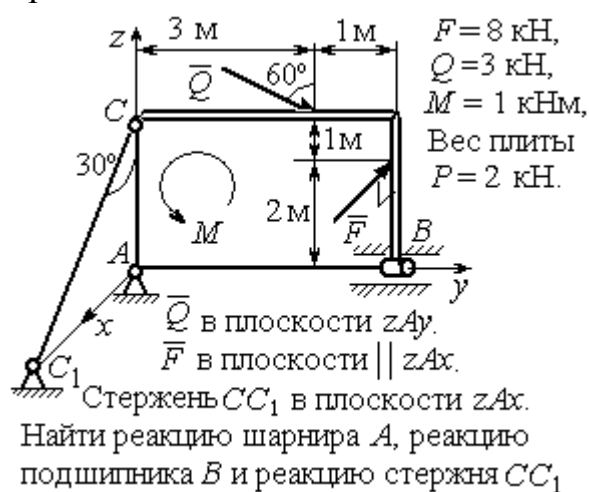
$$X_C = 2,25 \text{ кН}; Z_C = 13,57 \text{ кН}; R_C = \sqrt{X_C^2 + Z_C^2} = 15,58 \text{ кН};$$

$$Z_A = 0,39 \text{ кН}; Y_A = 10,39 \text{ кН}; X_A = 0,75 \text{ кН}; R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2 + Z_A^2} = 10,42 \text{ кН}.$$

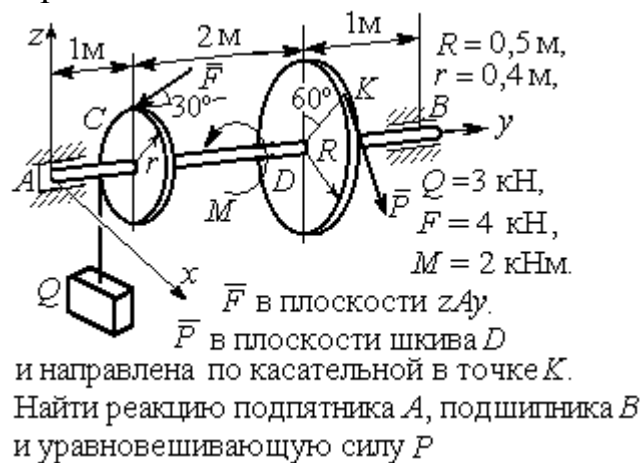
Вес удерживаемого груза равен реакции нити $Q = T = 25,03 \text{ кН}$.

Упражнения

Упражнение 1.9



Упражнение 1.10



Упражнение 1.11



Упражнение 1.12

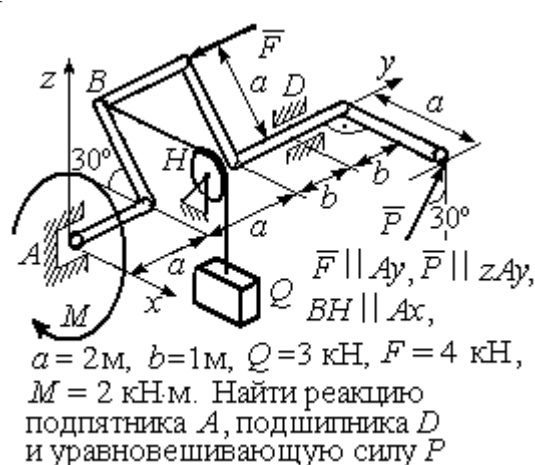


Рис. 1.49. Задания для самостоятельного решения. Упражнения 1.9 – 1.12

1.6. Равновесие тел при наличии сил трения

Трение скольжения. При наличии трения скольжения полная реакция $\vec{R}$ шероховатой опоры раскладывается на нормальную составляющую $\vec{N}$ опоры и

силу $\vec{F}_{\text{тр с}}$ трения скольжения, направленную по касательной к поверхности в точке опоры.

В покое сила трения скольжения может принимать любые значения от нуля до некоторого предельного значения $F_{\text{тр с}}$, называемого **предельной силой трения скольжения** (рис. 1.50).

Наибольший угол φ_0 , который полная реакция шероховатой поверхности образует с нормалью к поверхности, называется **предельным углом трения**.

Предельная сила трения численно равна произведению коэффициента трения на величину нормальной реакции опоры тела на поверхность: $F_{\text{тр с}} = f \cdot N$, где f – безразмерный коэффициент трения, определяемый экспериментально.

Изучение равновесия тел с учетом сил трения сводится к рассмотрению предельного равновесия, когда сила трения принимает предельное значение.

Трением качения называется сопротивление, возникающее при качении одного тела по шероховатой поверхности другого. Реакция шероховатой опоры раскладывается на нормальную составляющую $\vec{N}$ и силу трения качения $\vec{F}_{\text{тр к}}$, направленную по касательной к поверхности качения. При этом за счёт небольшого вдавливания в поверхность качения нормальная реакция опоры $\vec{N}$

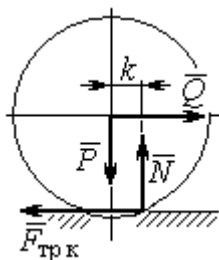


Рис. 1.51. Реакция опоры с трением качения

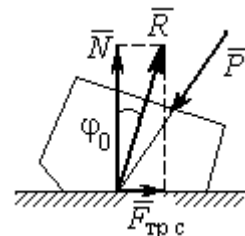


Рис. 1.50. Реакция опоры с трением скольжения

смещена в сторону от линии действия силы тяжести $\vec{P}$ так, что вместе с ней образует пару, противодействующую качению (рис. 1.51). В предельном положении равновесия тела смещение нормальной реакции опоры максимально. Величина максимального смещения k называется **коэффициентом трения качения**, измеряемого в единицах длины. Момент,

создаваемый парой $(\vec{N}, \vec{P})$, называется **моментом трения качения** $M_{\text{тр к}} = kN$.

Максимальная сила трения качения $\vec{F}_{\text{тр к}}$ определяется из условия, что в предельном положении равновесия момент трения качения равен моменту качения, создаваемого парой $(\vec{F}_{\text{тр к}}, \vec{Q})$ (рис. 1.51).

Если максимальная сила трения качения меньше предельной силы трения скольжения, движение представляет качение без скольжения.

Примеры решения задач на равновесие тел с трением

Задача 17. Груз Q весом 50 Н удерживается нитью на шероховатой наклонной плоскости (рис.1.52). Один конец нити закреплен на грузе Q , а к

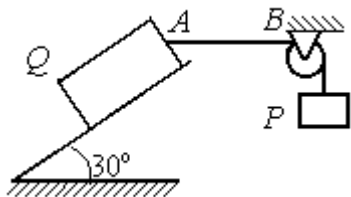


Рис.1.52. Равновесие груза на наклонной плоскости с трением

другому, перекинута через невесомый блок, подвешен груз весом P . Отрезок нити AB горизонтальный. Угол наклона плоскости составляет 30° к горизонту. Определить максимальное и минимальное значения веса груза P , при которых груз Q может начать скольжение по плос-

кости без опрокидывания, если коэффициент трения скольжения между грузом Q и наклонной плоскостью $f = 0,4$.

Решение

Рассмотрим равновесие груза Q при минимальном значении веса груза P . На груз действуют сила тяжести $\vec{Q}$, реакция нити $\vec{T}_{\text{min}}$ и реакция шероховатой поверхности наклонной плоскости, состоящая из нормальной реакции наклонной плоскости $\vec{N}$ и силы трения $\vec{F}_{\text{тр1}}$ (рис. 1.53, а). Особенностью задач на равновесие призм является то, что точка приложения нормальной реакции не определена. В случае необходимости она находится из уравнений равновесия.

Определим направление силы трения. Если вес уравнивающего груза P имеет минимальное значение $P_{\min}$, то при его дальнейшем уменьшении груз Q начнёт двигаться вниз по наклонной плоскости. Таким образом, предельная сила трения $\vec{F}_{\text{тр}1}$, обеспечивающая равновесие при минимальном значении веса груза P , направлена вверх по наклонной плоскости (см. рис. 1.53, a).

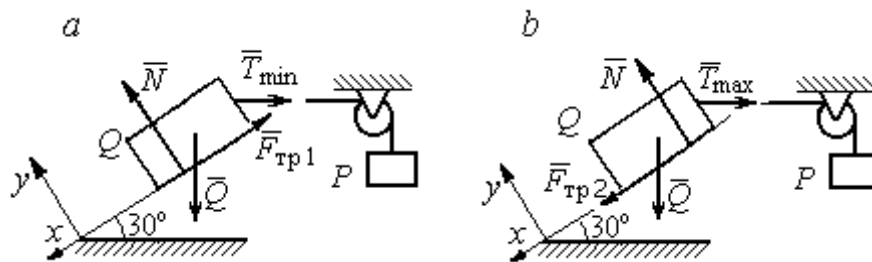


Рис. 1.53. Силы, действующие на груз при равновесии:
 a – минимальный вес уравнивающего груза;
 b – максимальный вес уравнивающего груза

Выберем систему координат, как показано на рис. 1.53, и составим уравнения равновесия в виде проекций сил:

$$\sum F_{kx} = Q \cos 60^\circ - T_{\min} \cos 30^\circ - F_{\text{тр}} = 0;$$

$$\sum F_{ky} = -Q \cos 30^\circ + N - T_{\min} \cos 60^\circ = 0.$$

Полагая в первом уравнении $F_{\text{тр}1} = fN$, решаем систему и находим реакцию нити $T_{\min} = 7,21$ Н. Минимальное значение веса уравнивающего груза равно реакции нити: $P_{\min} = T_{\min} = 7,21$ Н.

Рассмотрим равновесие груза Q при максимальном $P_{\max}$ значении веса груза P . На груз действует сила тяжести $\vec{Q}$, реакция нити $\vec{T}_{\max}$ и реакция шероховатой поверхности наклонной плоскости, состоящая, как и в первом случае, из нормальной реакции наклонной плоскости $\vec{N}$ и силы трения $\vec{F}_{\text{тр}2}$ (см. рис. 1.53, b).

При определении направления силы трения заметим, что увеличение веса груза P больше максимального вызывает движение груза Q вверх по наклонной плоскости. Тогда предельная сила трения $\vec{F}_{\text{тр}2}$, действующая против возможного движения, должна быть направлена вниз по наклонной плоскости (см. рис. 1.53, b). Уравнения равновесия груза Q :

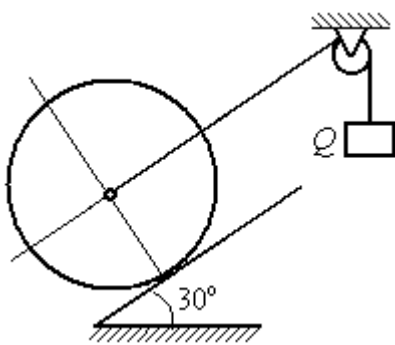
$$\sum F_{kx} = Q \cos 60^\circ - T_{\max} \cos 30^\circ + F_{\text{тр}2} = 0;$$

$$\sum F_{ky} = -Q \cos 30^\circ + N - T_{\max} \cos 60^\circ = 0.$$

Решаем систему, подставляя вместо силы трения её значение $F_{\text{тр}2} = fN$, и находим максимальное значение веса груза P : $P_{\max} = T_{\max} = 63,54 \text{ Н}$.

Таким образом, груз Q будет находиться в равновесии на наклонной плоскости, если вес уравнивающего груза находится в пределах $8,87 < P < 48,87 \text{ Н}$.

Задача 18. Цилиндрический каток радиуса $r = 0,5 \text{ м}$, весом $P = 50 \text{ Н}$ удерживается в равновесии на наклонной плоскости нитью, один конец кото-



рой закреплён в центре катка, а другой перекинут через блок и несёт груз весом Q (рис. 1.54). Коэффициент трения качения катка $f_k = 0,02 \text{ м}$. Наклонная плоскость составляет угол 30° с горизонтом.

Определить наименьшую и наибольшую величину веса Q , при которых каток будет в равновесии. Найти наименьшее значение коэффициента трения скольжения f_c , при котором в случае движения каток будет катиться без скольжения.

Решение

Рассмотрим равновесие катка при минимальном значении веса груза Q . На каток действует сила тяжести $\vec{P}$, реакции нити $\vec{Q}_{\min}$ и реакция шероховатой

поверхности наклонной плоскости $\vec{R}$, имеющая своими составляющими нормальную реакцию поверхности $\vec{N}$ и силу трения качения $\vec{F}_{\text{тр1к}}$ (рис. 1.55, *a*).

Минимальный вес груза $Q_{\min}$ удерживает каток от качения вниз по наклонной плоскости. В этом случае составляющие реакции шероховатой поверхности наклонной плоскости приложены в точке K_1 , слева от нормально-

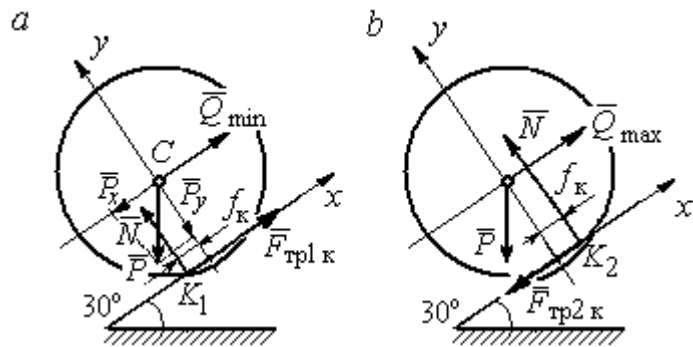


Рис. 1.55. Силы, действующие на каток, при равновесии:

a – минимальный вес груза; *b* – максимальный вес груза

го к плоскости диаметра катка (см. рис. 1.55, *a*). Выбор точки приложения реакции шероховатой поверхности основан на том, что пара $(\vec{N}, \vec{P}_y)$ должна создавать момент трения качения, противодействующий предполагаемому движению.

На каток действует плоская уравновешенная система сил $(\vec{Q}_{\min}, \vec{F}_{\text{тр1к}}, \vec{N}, \vec{P}) \propto 0$. Выберем систему координат, как показано на рис. 1.55, *a*, и составим уравнения равновесия катка, где уравнение моментов сил составлено относительно точки K_1 :

$$\sum F_{kx} = -P \cos 60^\circ + Q_{\min} + F_{\text{тр1к}} = 0;$$

$$\sum F_{ky} = -P \cos 30^\circ + N = 0;$$

$$\sum M_{K_1}(\vec{F}_k) = P \cos 60^\circ \cdot r - Q_{\min} r - P \cos 30^\circ \cdot f_k = 0.$$

Подставляем данные задачи и находим минимальное значение веса груза, при котором каток находится в равновесии $Q_{\min} = 7,68$ Н, величину нормальной реакции наклонной плоскости $N = 43,3$ Н и значение силы трения качения, удерживающей каток в равновесии, $F_{\text{тр1к}} = 17,32$ Н.

Рассмотрим равновесие катка при максимальном значении веса груза $Q_{\max}$. Здесь нарушение предельного равновесия при увеличении веса груза Q вызывает движение катка вверх по наклонной плоскости. В таком случае точка приложения реакции опоры шероховатой поверхности (точка K_2) расположена справа от нормального к плоскости качения диаметра катка (рис. 1.55, *b*).

На каток действует плоская уравновешенная система сил $(\vec{Q}_{\max}, \vec{F}_{\text{тр}2\text{к}}, \vec{N}, \vec{P}) \propto 0$. Выберем систему координат, как показано на рис. 1.55, *b*. Уравнения равновесия катка, где уравнение моментов сил составлено относительно точки K_2 имеют вид:

$$\sum F_{kx} = -P \cos 60^\circ + Q_{\max} - F_{\text{тр}2\text{к}} = 0;$$

$$\sum F_{ky} = -P \cos 30^\circ + N = 0;$$

$$\sum M_{K_2}(\vec{F}_k) = -P \cos 60^\circ \cdot r + Q_{\max} r - P \cos 30^\circ \cdot f_k = 0.$$

Решая систему, получим: $Q_{\max} = 42,32 \text{ Н}$; $N = 43,3 \text{ Н}$; $F_{\text{тр}2\text{к}} = 17,32 \text{ Н}$.

Таким образом, на шероховатой поверхности каток находится в равновесии, если вес уравновешивающего груза выбран в пределах $7,68 \leq Q \leq 42,32 \text{ Н}$.

При любом движении (вверх или вниз) качение катка будет без скольжения, если предельная сила трения скольжения $F_{\text{тр}c}$ больше аналогичной силы трения качения: $F_{\text{тр}c} > F_{\text{тр}к}$. Величина силы трения скольжения не зависит от направления движения: $F_{\text{тр}c} = f_c N = 43,3 f_c$, где f_c – коэффициент трения скольжения. Величина силы трения качения также не зависит от направления движения: $F_{\text{тр}к} = F_{\text{тр}1к} = F_{\text{тр}2к} = 17,32 \text{ Н}$. Таким образом, для определения требуемого коэффициента скольжения имеет место неравенство $43,3 f > 17,32$, откуда $f > 0,4$.

Задача 19. Для подъёма и опускания грузов в выработках используется ступенчатый ворот с тормозом, изображённый на рис. 1.56. Радиусы большой и малой ступенек барабана ворота $R = 0,5$ м и $r = 0,2$ м. Ворот тормозят, надавливая на конец A рычага AB , соединённого цепью CD с

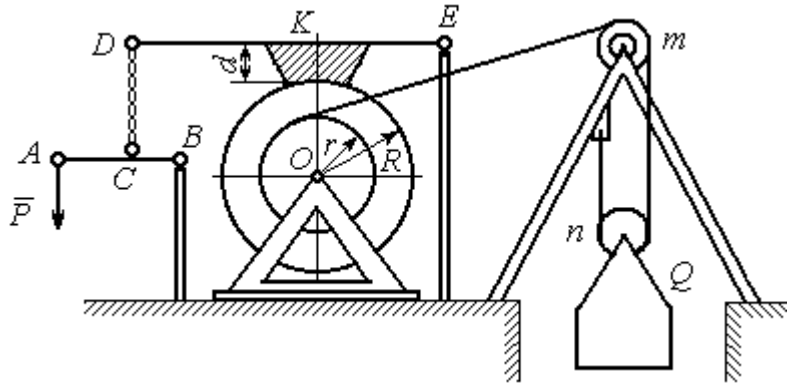


Рис. 1.56. Ворот с колодочным тормозом

концом D тормозного рычага ED с расположенной на нём тормозной колодкой. Коэффициент трения между тормозной колодкой и барабаном ворота $f = 0,4$. На малой ступеньке барабана ворота навита верёвка, другой конец которой, переброшенный через невесомые неподвижный блок m и подвижный блок n , удерживает груз Q весом 1 кН (см. рис. 1.56). Угол наклона к горизонту участка верёвки, соединяющей барабан с неподвижным блоком m , составляет 30° .

Определить величину силы $\vec{P}$, уравнивающей груз Q , и реакции шарниров O и E , если вес ворота $G = 140$ Н, высота тормозной колодки $d = 0,1$ м, расстояния $AB = 1$ м, $BC = 0,1$ м; $ED = 1,2$ м; $EK = 0,6$ м.

Решение

Рассмотрим отдельно равновесие барабана ворота, тормозного рычага DE и рычага AB (рис. 1.57).

Для того; чтобы определить силу натяжения верёвки, прикреплённой к барабану, рассмотрим равновесие груза вместе с подвижным блоком n (см. рис. 1.57, а). На объект равновесия действует сила тяжести груза $\vec{Q}$ и реакции $\vec{T}'$ и $\vec{T}''$ двух ветвей верёвки, огибающей снизу блок n .

Уравнения равновесия такой системы сил:

$$T' + T'' - Q = 0; \quad T''r_{\text{бл}} = T'r_{\text{бл}},$$

где моменты сил вычислены относительно центра блока; $r_{\text{бл}}$ – радиус блока n .

Решая систему уравнений, получим: $T' = T'' = 0,5Q = 500 \text{ Н}$.

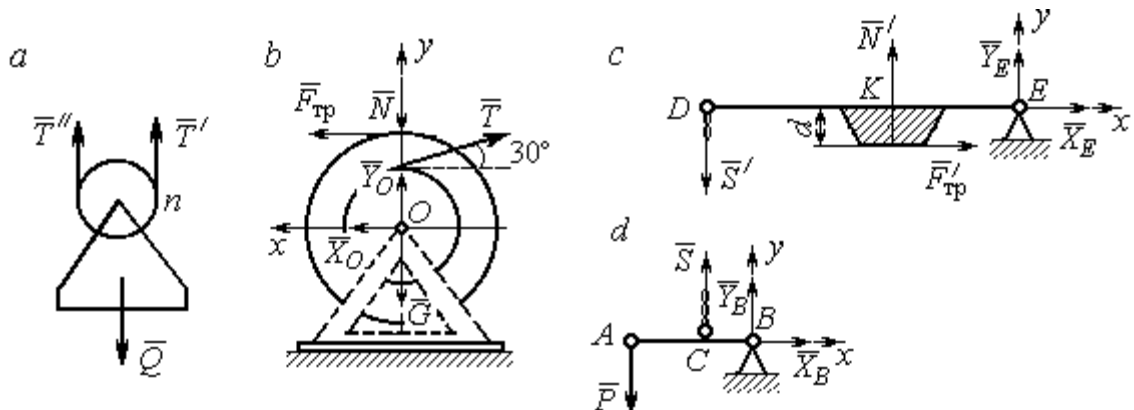


Рис. 1.57. Равновесие элементов конструкции ворота:
 а – равновесие груза; б – силы, действующие на барабан; в – силы, действующие на тормозной рычаг DE; д – силы, действующие на рычаг AB

Рассмотрим равновесие барабана. На барабан действуют: сила веса барабана $\vec{G}$, сила давления $\vec{N}$ со стороны рычага, направленная по радиусу барабана, сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$, действующая по касательной к барабану в сторону, противоположную движению барабана при опускании груза, реакция $\vec{R}_O$ шарнира O , представленная двумя составляющими $\vec{X}_O, \vec{Y}_O$, и реакция верёвки $\vec{T}$, численно равная модулю силы $\vec{T}'$ (см. рис. 1.57, б).

Силы, действующие на барабан, составляют уравновешенную произвольную плоскую систему сил $(\vec{G}, \vec{X}_O, \vec{Y}_O, \vec{T}, \vec{N}, \vec{F}_{\text{тр}}) \sim 0$. Составим уравнение моментов относительно точки O :

$$-Tr + F_{\text{тр}}R = 0, \text{ откуда с учётом } T = T' \quad F_{\text{тр}} = 200 \text{ Н.}$$

Величина силы $\vec{N}$ давления рычага на барабан находится из вида зависимости силы трения $F_{\text{тр}} = fN$, тогда $N = \frac{F_{\text{тр}}}{f} = 500 \text{ Н}$.

Составим уравнения равновесия барабана в виде проекций сил на оси, выбранные, как показано на рис. 1.57, б:

$$\sum F_{kx} = X_O + F_{\text{тр}} - T \cos 30^\circ = 0;$$

$$\sum F_{ky} = Y_O + T \cos 60^\circ - N - G = 0.$$

Решая систему, найдём реакцию шарнира O :

$$X_O = 233 \text{ Н}; Y_O = 390 \text{ Н}; R_O = \sqrt{X_O^2 + Y_O^2} = 454,3 \text{ Н}.$$

Рассмотрим теперь равновесие тормозного рычага DE (см. рис. 1.57, c).

На рычаг действуют сила $\vec{N}'$ давления со стороны барабана и сила трения $\vec{F}'_{\text{тр}}$, приложенные в точке касания тормозной колодки с барабаном, равные по величине и противоположные по направлению, соответственно, силам $\vec{N}$ и $\vec{F}_{\text{тр}}$. Кроме того, в точке D на рычаг действует сила $\vec{S}'$, под действием которой рычаг прижимается к барабану, и реакция шарнира E , разложенная на составляющие $\vec{X}_E, \vec{Y}_E$ вдоль осей x, y . Уравнения равновесия рычага имеют вид:

$$\sum F_{kx} = X_E + F'_{\text{тр}} = 0; \quad \sum F_{ky} = Y_E + N' - S' = 0;$$

$$\sum M_E(\vec{F}_k) = S' \cdot DE - N' \cdot EK + F'_{\text{тр}} d = 0.$$

Подставляя в систему данные из условия задачи, с учётом найденных значений $F'_{\text{тр}} = F_{\text{тр}} = 200 \text{ Н}$, $N' = N = 500 \text{ Н}$, определим усилие S' , с которым тормозной рычаг прижимается к барабану, и реакцию шарнира E :

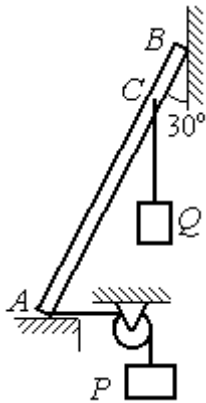
$$S' = 233,33 \text{ Н}; X_E = -200 \text{ Н}; Y_E = -266,67 \text{ Н}; R_E = \sqrt{X_E^2 + Y_E^2} = 333,34 \text{ Н}.$$

Силу $\vec{P}$, необходимую для уравнивания груза Q , найдём рассматривая равновесие рычага AB (см. рис. 1.57, d). На рычаг действуют сила $\vec{P}$, реакция цепи $\vec{S}$ и реакция шарнира B , показанная на рис. 1.57, d составляющими $\vec{X}_B, \vec{Y}_B$.

Составим уравнение равновесия рычага в форме равенства нулю суммы моментов сил относительно точки B : $P \cdot AB - S \cdot CB = 0$. С учётом того, что модули сил $\vec{S}$ и $\vec{S}'$ равны, найдём $P = 23,3 \text{ Н}$.

Упражнения

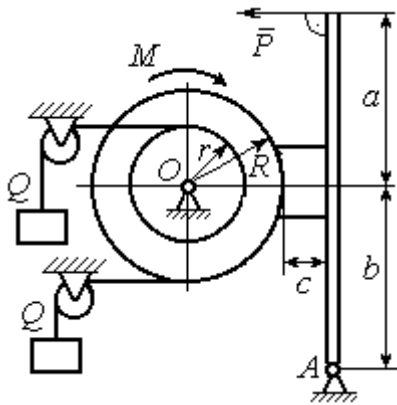
Упражнение 1.13



Невесомый стержень AB опирается в точках A и B на шероховатые поверхности – горизонтальный пол и вертикальную стену. Коэффициент трения между стержнем и полом и между стержнем и стеной $f = 0,2$. Угол наклона стержня к вертикальной стене 30° . В точке C к стержню подвешен груз Q . Стержень удерживается в равновесии горизонтальной нитью, прикреплённой в точке A и перекинутой через блок. К другому концу нити подвешен груз P . В каких границах можно изменять вес груза P , не нарушая равновесия стержня?

$$AB = 3 \text{ м}, AC = 2 \text{ м}, Q = 200 \text{ Н}.$$

Упражнение 1.14



Шкив O состоит из двух барабанов радиусов R и r . На барабаны навиты верёвки, натянутые одинаковыми грузами Q . К шкиву приложена пара сил с моментом M . Шкив затормаживается с помощью рычажного тормоза. Коэффициент трения между тормозной колодкой и шкивом $f = 0,4$. Определить силу $\vec{P}$, приложенную к рычагу тормозной колодки и уравнивающую шкив. Найти реакцию шарнира A .

$$a = b = 1 \text{ м}; c = 0,1 \text{ м}; Q = 100 \text{ Н}; M = 120 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$R = 0,6 \text{ м}; r = 0,2 \text{ м}.$$

Рис. 1.58. Задания для самостоятельного решения. Упражнения № 1.13, 1.14

2. КИНЕМАТИКА ТОЧКИ И ТВЁРДОГО ТЕЛА

2.1. Криволинейное движение точки

Кривая, которую описывает движущаяся точка, называется **траекторией** точки. Движение точки может быть задано **векторным, координатным** или **естественным** способами.

Координатный способ задания движения точки основан на том, что положение точки определяется ее координатами, заданными для каждого момента времени (рис. 2.1): $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$.

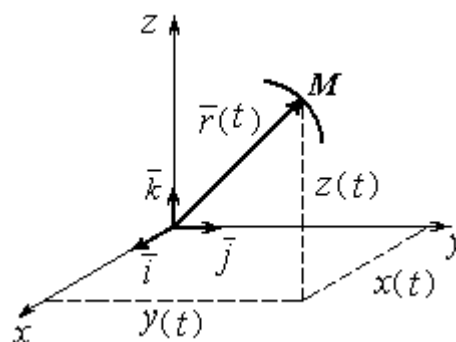


Рис. 2.1. Векторный и координатный способы задания движения точки

Мгновенная скорость, или скорость точки в данный момент времени, является векторной величиной и определяется как производная по времени от радиус-вектора точки: $\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}$. **Вектор скорости точки $\vec{V}$ всегда направлен по касательной к траектории в сторону движения точки.** Величины V_x , V_y , V_z проекций вектора скорости $\vec{V}$ на координатные оси определяются как производные по времени от соответствующих координат: $V_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$; $V_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}$; $V_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}$. Модуль вектора скорости: $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$.

Мгновенное ускорение точки, или ускорение в данный момент времени, является векторной величиной и определяется как производная по времени от вектора скорости точки или как вторая производная от радиус-вектора точки:

$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$. Величины a_x , a_y , a_z проекций вектора ускорения на координатные оси определяются как производные по времени от соответствующих проекций вектора скорости:

натные оси определяются равенствами: $a_x = \frac{dV_x}{dt} = \dot{V}_x = \ddot{x}$; $a_y = \frac{dV_y}{dt} = \dot{V}_y = \ddot{y}$;

$a_z = \frac{dV_z}{dt} = \dot{V}_z = \ddot{z}$. Модуль вектора ускорения: $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

Естественный способ задания движения используется, если траектория движения точки заранее известна. Тогда положение точки однозначно опреде-

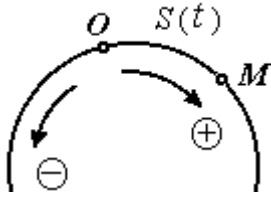


Рис. 2.2. Естественный способ задания движения точки

ляется длиной дуги $OM = S(t)$, отсчитываемой от некоторой фиксированной точки O , принятой за начало отсчета (рис. 2.2). При этом заранее устанавливаются положительное и отрицательное направления отсчета дуговой координаты.

При естественном способе задания движения вектор скорости точки определяется равенством: $\vec{V} = \dot{S} \vec{\tau} = V_\tau \vec{\tau}$, где S – дуговая координата; $\vec{\tau}$ – единичный вектор касательной к траектории движения, направленный в сторону положительного направления дуговой координаты. Величина $V_\tau = \dot{S}$ называется алгебраической скоростью точки и представляет собой проекцию вектора скорости точки на касательную к траектории.

Вектор ускорения точки $\vec{a}$ раскладывается на составляющие по направлениям естественных осей – касательную (ось τ) и перпендикулярную к ней нормальную (ось n):

$$\vec{a} = a_\tau \vec{\tau} + a_n \vec{n} \text{ или } \vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n,$$

где $\vec{\tau}$ – единичный направляющий вектор касательной; $\vec{n}$ – единичный направляющий вектор нормали траектории; a_τ – проекция ускорения точки на касательную называется **касательным ускорением**; a_n – проекция вектора ускорения точки на нормаль называется **нормальным ускорением** (рис. 2.3). Касательная составляющая ускорения характеризует изменение величины скорости точки, нормальная – изменение направления вектора скорости.

Если проекции V_τ и a_τ имеют одинаковые знаки (направлены в одну сторону), движение будет ускоренным, если разных знаков (разнонаправлены) – замедленным (см. рис. 2.3, *a*, *b*).

Проекции ускорения на естественные оси и модуль вектора ускорения вычисляются по формулам:

$$a_\tau = \ddot{S} = \dot{V}_\tau, \quad a_n = \frac{V^2}{\rho};$$

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2},$$

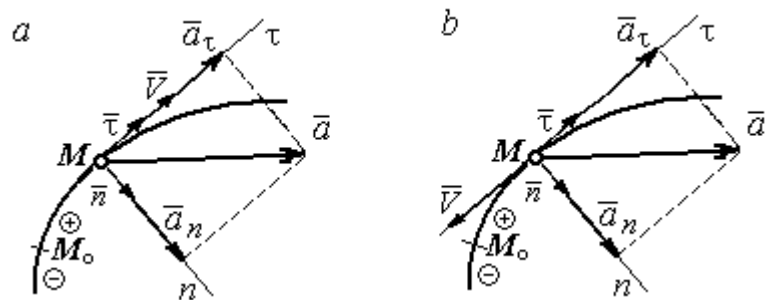


Рис. 2.3. Скорость и ускорение точки. Разложение ускорения на нормальную и касательную составляющие:
a – ускоренное движение; *b* – замедленное движение

где ρ – радиус кривизны траектории. Иногда при вычислении касательной составляющей ускорения удобнее пользоваться формулой $a_\tau = \frac{a_x V_x + a_y V_y}{V_\tau}$.

Вектор нормальной составляющей ускорения $\vec{a}_n$ всегда направлен к центру кривизны траектории. Вектор касательной составляющей ускорения $\vec{a}_\tau$ направлен в сторону положительного направления касательной (по направлению единичного вектора $\vec{\tau}$), если $\ddot{S} > 0$, и в противоположную сторону – при $\ddot{S} < 0$.

Криволинейное движение точки называется **равномерным**, если проекция вектора скорости на касательную – постоянная величина: $V_\tau = \text{const}$.

Криволинейное движение точки называется **равнопеременным**, если постоянна проекция вектора ускорения на касательную: $a_\tau = \text{const}$.

Примеры решения задач на криволинейное движение точки

Задача 20. Движение точки задано координатным способом уравнениями $x(t) = 2\sin\pi t$, $y(t) = \cos 2\pi t$, где x, y – в сантиметрах, t – в секундах.

Найти траекторию точки, величину и направление скорости и ускорения в моменты времени $t_1 = 0,25$ с, $t_2 = 0,75$ с. Определить участки ускоренного и замедленного движений точки.

Решение

Определяем траекторию точки. Из уравнений движения находим $y = \cos 2\pi t = \cos^2 \pi t - \sin^2 \pi t = 1 - 2\sin^2 \pi t = 1 - \frac{x^2}{2}$. Траекторией точки является парабола $y = 1 - \frac{x^2}{2}$ (рис. 2.4). Однако не вся парабола будет траекторией движения, а только та её часть, точки которой согласно уравнениям движения удовлетворяют неравенствам: $-2 \leq x \leq 2$, $-1 \leq y \leq 1$.

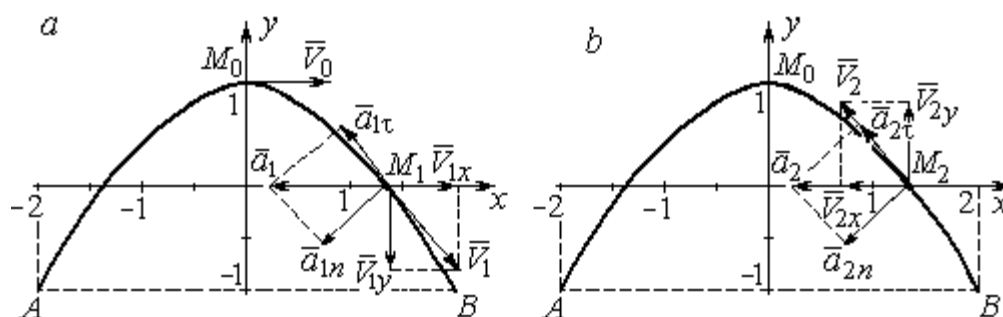


Рис. 2.4. Траектория движения точки:

a – замедленное движение точки на участке от M_0 к B ;
b – ускоренное движение точки на участке от B к M_0

Определяем параметры движения точки в момент времени $t_1 = 0,25$ с.

Находим координаты x_1, y_1 положения точки M_1 :

$$x_1 = x(0,25) = 2\sin \frac{\pi}{4} = \sqrt{2} \text{ см}, \quad y_1 = y(0,25) = \cos \frac{\pi}{2} = 0.$$

Находим проекции V_{1x}, V_{1y} вектора $\vec{V}_1$ скорости точки на оси системы координат:

$$V_x(t) = \dot{x} = 2\pi \cos \pi t; \quad V_y(t) = \dot{y} = -2\pi \sin 2\pi t;$$

$$V_{1x} = V_x(0,25) = 2\pi \cos \frac{\pi}{4} = \pi\sqrt{2} \text{ см/с}; \quad V_{1y} = V_y(0,25) = -2\pi \sin \frac{\pi}{2} = -2\pi \text{ см/с}.$$

Модуль скорости $V_1 = \sqrt{V_{1x}^2 + V_{1y}^2} = \pi\sqrt{6}$ см/с.

Находим проекции a_{1x} , a_{1y} вектора $\vec{a}_1$ ускорения точки на оси системы координат:

$$a_x(t) = \dot{V}_x = -2\pi^2 \sin \pi t; \quad a_y(t) = \dot{V}_y = -4\pi^2 \cos 2\pi t;$$

$$a_{1x} = a_x(0,25) = -2\pi^2 \sin \frac{\pi}{4} = -\pi^2 \sqrt{2} \text{ см/с}^2; \quad a_{1y} = a_y(0,25) = -4\pi^2 \cos \frac{\pi}{2} = 0.$$

Модуль вектора ускорения $a_1 = \sqrt{a_{1x}^2 + a_{1y}^2} = \pi^2 \sqrt{2}$ см/с.

Положение точки M_1 в момент времени $t_1 = 0,25$ с, построение векторов скорости $\vec{V}_1$ и ускорения $\vec{a}_1$ по их проекциям показано на рис. 2.4, а.

Для того чтобы определить характер движения точки в положении M_1 – ускоренное или замедленное, найдём направление касательного ускорения. С этой целью разложим известный уже вектор ускорения $\vec{a}_1$ на нормальную и касательную составляющие согласно равенству $\vec{a}_1 = \vec{a}_{1\tau} + \vec{a}_{1n}$. При этом направление касательной совпадает с направлением вектора скорости $\vec{V}_1$, а направление нормали – перпендикулярно ему. Касательное ускорение $\vec{a}_{1\tau}$ оказалось направленным противоположно вектору скорости $\vec{V}_1$ (см. рис. 2.4, а). Следовательно, точка в рассматриваемый момент движется замедленно.

В момент времени $t_2 = 0,75$ с положение M_2 совпадает с положением M_1 :

$$x_2 = x(0,75) = 2\sin \frac{3\pi}{4} = \sqrt{2} \text{ см}; \quad y_2 = y(0,75) = \cos 2\pi \frac{3}{4} = 0.$$

Проекции векторов скорости $\vec{V}_2$ и ускорения $\vec{a}_2$ точки на оси координат:

$$V_{2x} = V_x(0,75) = 2\pi \cos \frac{3\pi}{4} = -\pi\sqrt{2} \text{ см/с}; \quad V_{2y} = V_y(0,75) = -2\pi \sin 2\pi \frac{3}{4} = 2\pi \text{ см/с};$$

$$a_{2x} = a_x(0,75) = -2\pi^2 \sin \frac{3\pi}{4} = -\pi^2 \sqrt{2} \text{ см/с}^2; \quad a_{2y} = a_y(0,75) = -4\pi^2 \cos 2\pi \frac{3}{4} = 0.$$

Модули скорости и ускорения точки в момент времени $t_2 = 0,75$ с:

$$V_2 = \sqrt{V_{2x}^2 + V_{2y}^2} = \pi\sqrt{6} \text{ см/с}; \quad a_2 = |a_{2x}| = \pi^2\sqrt{2} \text{ см/с}^2.$$

Положение точки M_2 в момент времени $t_2 = 0,75$ с, построение векторов скорости $\vec{V}_2$ и ускорения $\vec{a}_2$ по их проекциям, а также разложение вектора ускорения $\vec{a}_2$ на составляющие $\vec{a}_{2n}$ и $\vec{a}_{2\tau}$ показано на рис. 2.4, *b*. В данном случае вектор касательного ускорения совпадает по направлению с вектором скорости (см. рис. 2.4, *b*), поэтому движение ускоренное.

В целом движение точки по траектории происходит следующим образом. Из начального положения M_0 ($t_0 = 0$) точка с замедлением перемещается по правой ветви параболы. Достигнув положения B на траектории ($t_B = 0,5$ с), точка совершает мгновенную остановку и начинает обратное ускоренное движение. Достигнув положения M_0 ($t_{M_0} = 1$ с), точка переходит на левую часть параболы, где движется аналогично.

Задача 21. Рудничный поезд выходит на закруглённый участок пути радиуса $R = 1$ км с начальной скоростью 54 км/ч. Считая движение поезда равнопеременным, определить его скорость и ускорение в конце 10-й секунды движения по закруглённому участку, если за это время поезд прошёл путь 500 м.

Решение

Примем за начало отсчёта расстояния точку M_0 , где поезд выходит на за-

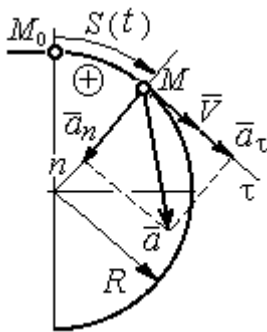


Рис. 2.5. Скорость и ускорение поезда

круглённый участок пути (рис. 2.5). Предположим, движение поезда равноускоренное и происходит в сторону возрастания дуговой координаты S . В этом случае вектор скорости и вектор касательного ускорения направлены в положительную сторону касательной.

При равнопеременном движении проекция вектора ускорения на касательную постоянна: $a_\tau = \text{const}$. Так как

$a_\tau = \frac{dV_\tau}{dt}$, то $V_\tau = a_\tau t + C_1$, где V_τ – проекция вектора скорости на касательную

ось. Далее, поскольку $V_\tau = \frac{dS}{dt}$, имеем $S = \frac{a_\tau t^2}{2} + C_1 t + C_2$. Константы интегрирования C_1 и C_2 находятся из начальных условий: при $t = 0$ $S = 0$ и $V_\tau = V_0 = 54 \text{ км/ч} = 15 \text{ м/с}$. Подставив эти условия в уравнения движения, найдём константы интегрирования: $C_1 = 15 \text{ м/с}$; $C_2 = 0$.

В результате получена система уравнений:

$$V_\tau = a_\tau t + 15; \quad S = \frac{a_\tau t^2}{2} + 15t.$$

По условию задачи через 10 с от начала движения по закруглённому участку поезд прошёл по дуге путь $S = 500 \text{ м}$. Подставляя это условие во второе уравнение, получим $a_\tau = 7 \text{ м/с}^2$. Скорость поезда в конце пройденного пути с учётом известной величины касательного ускорения найдём из первого уравнения $V_\tau = 85 \text{ м/с}$. Следует заметить, что при указанном движении поезда проекция вектора скорости на касательную ось положительна и равна его модулю: $V_\tau = V$.

Нормальное ускорение поезда при движении по дуге окружности радиуса $R = 1000 \text{ м}$ в момент времени $t = 10 \text{ с}$ равно $a_n = \frac{V_\tau^2}{R} = 7,23 \text{ м/с}^2$. Величина (модуль) полного ускорения поезда $a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = 10,06 \text{ м/с}^2$. Разложение вектора ускорения поезда на нормальную и касательную составляющие показано на рис. 2.5.

Задача 22. Вагонетка движется равнопеременно по дуге окружности радиуса $R = 80 \text{ м}$. За время движения скорость вагонетки изменилась от начальной $V_0 = 18 \text{ км/ч}$ до конечной $V_1 = 9 \text{ км/ч}$.

Определить характер движения – ускоренное или замедленное. Найти ускорение вагонетки в начале и в конце участка движения, если за это время она прошла путь $S = 60 \text{ м}$.

Решение

Выберем некоторую точку на траектории в качестве начальной, а направление положительного отсчёта расстояний – в сторону движения вагонетки.

Уравнения равнопеременного движения точки при начальных условиях: $t = 0$; $S = 0$ и $V_{\tau} = V_0 = 5$ м/с имеют вид:

$$V_{\tau} = 5 + a_{\tau}t; \quad S = 5t + \frac{a_{\tau}t^2}{2}.$$

Подставим в уравнения параметры движения в момент времени $t = t_1$, когда скорость вагонетки стала $V_{1\tau} = 2,5$ м/с, а пройденный ею путь составил 60 м.

Получим систему:

$$-2,5 = a_{\tau}t_1; \quad 60 = 5t_1 + \frac{a_{\tau}t_1^2}{2},$$

откуда найдём касательное ускорение: $a_{\tau} = -0,16$ м/с².

Отрицательная величина означает, что вектор касательного ускорения направлен в сторону, противоположную направлению вектора скорости, и движение равнозамедленное.

Нормальное ускорение вагонетки в начале движения $a_{n0} = \frac{V_0^2}{R} = 0,31$ м/с².

Полное ускорение $a_0 = \sqrt{a_{n0}^2 + a_{\tau}^2} = 0,35$ м/с². В конце движения нормальное

ускорение $a_{n1} = \frac{V_1^2}{R} = 0,08$ м/с². Полное ускорение $a_1 = \sqrt{a_{n1}^2 + a_{\tau}^2} = 0,18$ м/с².

2.2. Поступательное движение и вращение твердого тела вокруг неподвижной оси

Движение твёрдого тела называется **поступательным**, если любой произвольный отрезок, связанный с телом, остаётся в процессе движения параллельным самому себе. При **поступательном** движении твёрдого тела все его

точки движутся по одинаковым траекториям, имеют равные скорости и ускорения.

Вращением твёрдого тела вокруг неподвижной оси называется такое его движение, при котором две точки тела остаются неподвижными в течение всего времени движения. Прямая, проходящая через неподвижные точки, называется **осью вращения** тела.

Положение вращающегося тела определяется углом поворота $\varphi = \varphi(t)$ относительно какой-либо системы отсчёта, например, относительно неподвижной плоскости, проходящей через ось вращения.

Вектор угловой скорости вращения тела $\vec{\omega}$ лежит на оси вращения и направлен в сторону, откуда вращение тела видно против хода часовой стрелки. **Алгебраическим значением угловой скорости** вращения тела называют проекцию вектора угловой скорости на ось вращения (ось z) $\omega_z = \dot{\varphi}$. При $\dot{\varphi} > 0$ тело вращается в сторону положительного направления отсчёта угла φ , при $\dot{\varphi} < 0$ – в обратную сторону. Направление угловой скорости обычно показывают дуговой стрелкой вокруг оси вращения. Модуль алгебраического значения угловой скорости вращения тела называется угловой скоростью $\omega = |\omega_z| = |\dot{\varphi}|$.

Алгебраическим значением **углового ускорения** вращающегося тела называют проекцию вектора углового ускорения на ось вращения (ось z) $\varepsilon_z = \dot{\omega}_z = \ddot{\varphi}$. Модуль алгебраического значения углового ускорения вращения тела называется угловым ускорением: $\varepsilon = |\varepsilon_z| = |\dot{\omega}_z| = |\ddot{\varphi}|$.

Вектор углового ускорения направлен вдоль оси вращения. Если $\varepsilon_z \omega_z > 0$ (вектора угловой скорости и углового ускорения сонаправлены), движение ускоренное, если $\varepsilon_z \omega_z < 0$ (векторы угловой скорости и углового ускорения противоположны по направлению), – замедленное.

При равномерном вращении угловая скорость тела (алгебраическое значение) – постоянная величина: $\omega_z = \text{const}$. Угол поворота тела изменяется по линейному закону $\varphi = \varphi_0 + \omega_z t$, где φ_0 – начальный угол поворота тела.

При равнопеременном вращении постоянной величиной является алгебраическое значение углового ускорения: $\varepsilon_z = \text{const}$. В этом случае справедливы уравнения движения: $\omega_z = \omega_{z0} + \varepsilon_z t$; $\varphi = \varphi_0 + \omega_{z0} t + \frac{\varepsilon_z t^2}{2}$.

При вращательном движении тела все его точки движутся по окружностям, радиусы которых равны расстояниям от выбранной точки до неподвижной оси. **Скорость точки** вращающегося твердого тела (в отличие от угловой скорости тела) называют **линейной**, или **окружной скоростью** точки. Модуль скорости точки рассчитывается по формуле: $V = \omega h$, где ω – угловая скорость тела; h – расстояние от точки до оси вращения. Вектор скорости направлен по

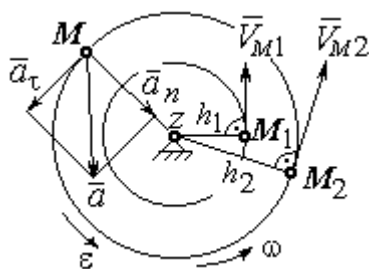


Рис. 2.6. Скорость и ускорение точек вращающегося тела

касательной к описываемой точкой окружности в сторону вращения тела.

При вращении тела отношение скоростей двух точек тела равно отношению расстояний от

этих точек до оси вращения: $\frac{V_{M_1}}{V_{M_2}} = \frac{h_1}{h_2}$ (рис. 2.6).

Ускорение точки вращающегося твердого

тела рассчитывается как ускорение точки при естественном способе задания движения в виде суммы векторов касательного и нормального ускорений (см. рис. 2.6): $\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$, где модули векторов $a_\tau = \varepsilon h$, $a_n = \omega^2 h$;

$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$; ω , ε – угловая скорость и угловое ускорение тела, $\varepsilon = |\varepsilon_z|$; h – расстояние от точки до оси вращения. **Вектор касательного ускорения точки** $\vec{a}_\tau$ направлен по касательной к описываемой точкой окружности в сторону движения точки, если вращение тела ускоренное, и в противоположную сторо-

ну, если движение тела замедленное. **Вектор нормального ускорения точки** $\vec{a}_n$ направлен вдоль радиуса описываемой точкой окружности к её центру.

При **передаче вращения** одного тела другому без проскальзывания соотношения между угловыми скоростями и угловыми ускорениями выражаются из равенства скоростей и касательных ускорений в точке

контакта: $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1}$; $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{r_2}{r_1}$ (рис. 2.7).

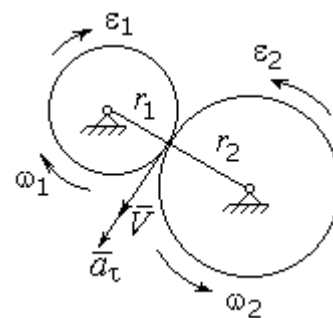


Рис. 2.7. Передача вращения одного тела другому

Примеры решения задач на вращательное движение тел

Задача 23. Вал, начиная вращаться равноускоренно из состояния покоя, за первые 2 мин. сделал 3600 оборотов. Определить угловую скорость вала в конце 2-й минуты и угловое ускорение вала.

Решение

Допустим, вращение вала вокруг оси z происходит в сторону положительного направления отсчёта угла. Тогда алгебраические значения угловой скорости и углового ускорения равны модулям соответствующих векторов $\omega_z = \omega$; $\varepsilon_z = \varepsilon$.

Воспользуемся уравнениями равнопеременного вращения вала с нулевыми начальными условиями (начальный угол поворота $\varphi_0 = 0$ и начальная угловая скорость вала $\omega_0 = 0$). Имеем $\omega = \varepsilon t$; $\varphi = \frac{\varepsilon t^2}{2}$.

Подставим в уравнения параметры движения вала в момент времени $t = t_1 = 2 \text{ мин} = 120 \text{ с}$; $\varphi_1 = 3600 \text{ об} = 7200\pi \text{ рад}$. Получим систему:

$$\omega_1 = \varepsilon \cdot 120, \quad 7200\pi = \frac{\varepsilon \cdot 120^2}{2}, \text{ откуда } \varepsilon = \pi \text{ с}^{-2}; \quad \omega_1 = 120\pi \text{ с}^{-1}.$$

Задача 24. В механизме стрелочного индикатора (рис. 2.8) движение от рейки мерительного штифта 1 передаётся шестерне 2, скреплённой на одной

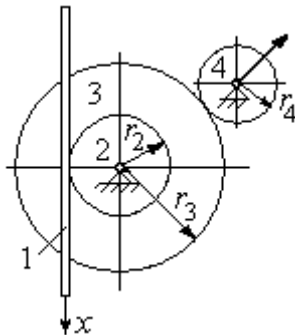


Рис. 2.8. Механизм стрелочного индикатора

оси с зубчатым колесом 3. Колесо 3 сцепляется, в свою очередь, с шестернёй 4, несущей стрелку-индикатор. Определить угловую скорость стрелки, если движение штифта задаётся уравнением $x = 4\sin\pi t$ и радиусы зубчатых колёс: $r_2 = 6$ см, $r_3 = 10$ см, $r_4 = 4$ см.

Решение

Мерительный штифт движется поступательно вдоль оси x (см. рис. 2.8). Проекция скорости любой точки штифта на ось x $V_{1x} = \dot{x} = 4\pi\cos\pi t$ см/с. Такую же скорость имеет и точка касания штифта с шестернёй 2.

Полагая, что точка касания штифта с шестернёй 2 принадлежит и шестерне, найдём алгебраическое значение угловой скорости шестерни 2:

$$\omega_{2z} = \frac{V_{1x}}{r_2} = \frac{4\pi\cos\pi t}{6} = \frac{2\pi}{3}\cos\pi t \text{ рад/с.}$$

Зубчатое колесо 3 скреплено с шестернёй 2 на одной оси и имеет ту же угловую скорость $\omega_{3z} = \omega_{2z}$. Вращение колеса 3 через точку зацепления передаётся шестерне 4. Выразим соотношение между алгебраическими значениями угловых скоростей при передаче вращения одно-

го тела другому: $\frac{\omega_{3z}}{\omega_{4z}} = \frac{r_4}{r_3}$. Отсюда получим: $\omega_{4z} = \frac{V_{1x}r_3}{r_2r_4} = \frac{5\pi}{3}\cos\pi t \text{ с}^{-1}$.

Угловая скорость стрелки равна угловой скорости шестерни 4.

Задача 25. Ведущее колесо 1 подъёмного устройства (рис. 2.9) передаёт движение шестерне 2. На одной оси с шестернёй 2 расположен шкив 3, жёстко скреплённый с шестернёй. Шкив 3 соединяется со шкивом 4 бесконечным

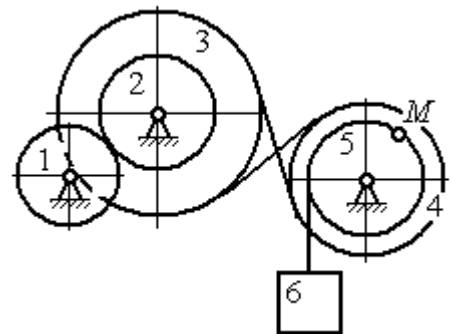


Рис. 2.9. Схема механизма подъёмного устройства

перекрёстным ремнём. Барабан 5 скреплён со шкивом 4 и находится с ним на одной оси. На барабан намотана нить, удерживающая груз 6. По заданному уравнению движения колеса 1 определить скорость, нормальное, касательное и полное ускорения точки M на ободе барабана 5 в момент времени $t_1 = 1$ с, а также скорость и ускорение груза 6. Скольжение между звеньями механизма отсутствует.

Значения радиусов колёса, шкивов и барабана механизма: $r_1 = 20$ см, $r_2 = 10$ см, $r_3 = 40$ см, $r_4 = 16$ см, $r_5 = 8$ см. Уравнение вращения колеса 1: $\varphi_1 = 2t^2 - 5t$ рад.

Решение

Ведущим звеном в механизме является колесо 1. Выберем положительное направление отсчёта угла поворота колеса 1 в сторону, противоположную

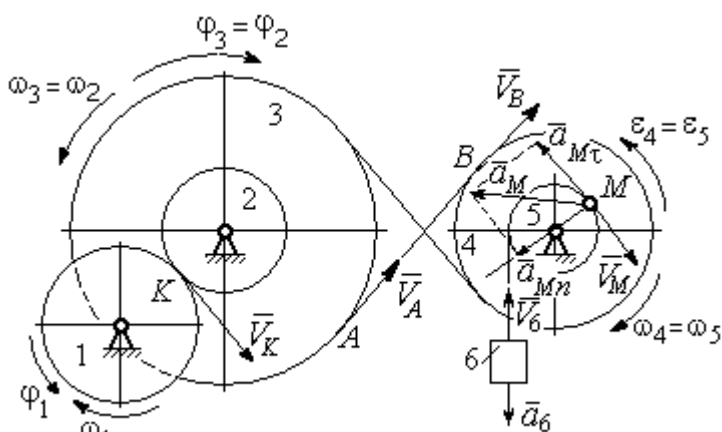


Рис. 2.10. Расчётная схема механизма

направлению вращения часовой стрелки. На рис. 2.10 это направление показано дуговой стрелкой φ_1 .

Продифференцировав по времени уравнение движения колеса 1, получим алгебраическое значение его угловой

скорости: $\omega_{1z} = \dot{\varphi}_1 = 4t - 5$ рад/с. В момент времени $t_1 = 1$ с алгебраическое значение угловой скорости колеса 1 отрицательно: $\dot{\varphi}_1(1) = -1$ рад/с. Это означает, что в данный момент времени колесо 1 вращается в сторону, противоположную положительному направлению отсчёта угла φ_1 . Угловая скорость колеса 1 равна модулю: $\omega_1 = |\omega_{1z}| = 1$ рад/с. Направление угловой скорости ω_1 колеса 1 в момент времени $t_1 = 1$ с показано дуговой стрелкой ω_1 .

Вращение колеса 1 передаётся шестерне 2 через точку контакта K . Из соотношения $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1}$ найдём угловую скорость шестерни 2: $\omega_2 = \frac{\omega_1 r_1}{r_2}$. Шкив 3, закреплённый на одной оси с шестернёй 2 имеет такую же угловую скорость, $\omega_3 = \omega_2$. Направление угловых скоростей шестерни 2 и шкива 3 показано на рис. 2.10 дуговой стрелкой ω_2 .

Передача движения шкива 3 шкиву 4 производится с помощью ремённой передачи. На участке от точки A , где ремень сходит со шкива 3, и до точки B , где ремень набегаёт на шкив 4, ремень движется поступательно, поэтому скорости точек A и B равны: $V_A = V_B$. Выразив скорости точек через угловые скорости тел, имеем равенство $\omega_3 r_3 = \omega_4 r_4$, откуда с учётом, что $\omega_3 = \omega_2$, найдём угловую скорость шкива 4: $\omega_4 = \frac{\omega_3 r_3}{r_4} = \frac{\omega_1 r_1 r_3}{r_2 r_4}$. Угловая скорость барабана 5 равна угловой скорости шкива 4, $\omega_5 = \omega_4$. Направление угловых скоростей шкива 4 и барабана 5 показано на рис. 2.10 дуговой стрелкой ω_4 .

Величина (модуль) скорости точки M рассчитывается по формуле:

$$V_M = \omega_5 r_5. \text{ В момент времени } t_1 = 1 \text{ с } \omega_5 = \frac{\omega_1 r_1 r_3}{r_2 r_4} = 5 \text{ рад/с и } V_M = 20 \text{ см/с.}$$

Вектор скорости $\vec{V}_M$ направлен по касательной к ободу барабана в точке M и направлен в сторону вращения барабана 5 (см. рис. 2.10).

Нить, несущая груз 6, сматываясь с обода барабана, имеет скорость, равную скорости точек обода барабана, и, следовательно, равна скорости точки M : $V_6 = V_M$. Направление скорости груза 6 определяется направлением вращения барабана 5. При $t_1 = 1$ с груз поднимается со скоростью $V_6 = 20$ см/с.

Определим ускорение точки M . Вектор ускорения точки M равен сумме векторов: $\vec{a}_M = \vec{a}_M^{\tau} + \vec{a}_M^n$, где $\vec{a}_M^{\tau}$, $\vec{a}_M^n$ — касательная и нормальная составляющие ускорения.

Найдём алгебраическое значение угловой скорости барабана 5:

$$\omega_{5z} = \frac{\omega_{1z} r_1 r_3}{r_2 r_4} = 20t - 25 \text{ рад/с.}$$

Алгебраическое значение углового ускорения барабана 5 ε_{5z} равно производной $\varepsilon_{5z} = \dot{\omega}_{5z} = 20 \text{ рад/с}^2$. Так как в момент времени $t_1 = 1 \text{ с}$ знаки алгебраических значений угловой скорости барабана и его углового ускорения разные ($\omega_{5z} = -5 \text{ рад/с}$, $\vec{a}_M = \vec{a}_M^{\tau} + \vec{a}_M^n$, $\varepsilon_{5z} = +20 \text{ рад/с}^2$), угловое ускорение (по величине равное модулю $\varepsilon_5 = |\varepsilon_{5z}|$) направлено в сторону, противоположную угловой скорости. На рис. 2.10 направление углового ускорения барабана 5 показано дуговой стрелкой ε_5 .

Касательное ускорение точки: $a_{M\tau} = \varepsilon_5 r_5 = 80 \text{ см/с}^2$. Вектор $\vec{a}_{M\tau}$ касательного ускорения точки M направлен по касательной к траектории в точке M в сторону углового ускорения ε_5 (см. рис. 2.10).

Нормальное ускорение точки M рассчитывается как $a_M^n = \omega_5^2 r_5$, где угловая скорость барабана $\omega_5 = |\omega_{5z}|$. В момент времени $t_1 = 1 \text{ с}$ $\omega_5 = 5 \text{ рад/с}$ и величина нормального ускорения: $\vec{a}_M^n = 100 \text{ см/с}^2$. Вектор нормального ускорения $\vec{a}_M^n$ направлен по радиусу к центру барабана 5.

Модуль полного ускорения точки M в заданный момент времени: $a_M = \sqrt{(a_M^{\tau})^2 + (a_M^n)^2} = 128,06 \text{ см/с}^2$. Вектор ускорения $\vec{a}_M$ направлен по диагонали прямоугольника, построенного на векторах $\vec{a}_M^n$ и $\vec{a}_M^{\tau}$ (см. рис. 2.10).

Ускорение a_6 груза 6 находится из условия, что груз движется прямолинейно. При прямолинейном движении нормальная составляющая ускорения равна нулю. В результате, ускорение груза 6 $a_6 = a_6^{\tau} = \dot{V}_6 = \dot{V}_M = a_M^{\tau} = \varepsilon_5 r_5 = 80 \text{ см/с}^2$. Направление вектора ускорения груза 6 определяется направлением углового ускорения барабана 5. На рис. 2.10 направление ускорения груза 6 показано вектором $\vec{a}_6$.

Задача 26. По заданному уравнению поступательного движения звена 1 механизма (рис. 2.11, *a*) определить скорость, нормальное, касательное и полное ускорения точки M диска 3 в момент времени $t_1 = 1$ с, а также скорость и ускорение звена 4. Скольжение между звеньями механизма отсутствует. Значения радиусов колес механизма и закон движения звена 1: $R_2 = 20$ см, $r_2 = 5$ см, $R_3 = 8$ см, $r_3 = 4$ см, $x_1 = \cos \pi t + \sin \pi t$ см.

Решение

Звено 1 движется поступательно вдоль оси x . Положительное направление движения задаётся направлением оси x (рис. 2.11, *a*). Продифференцировав по времени уравнение движения звена 1, получим его алгебраическое значение скорости: $V_{1x}(t) = \dot{x}_1 = -\pi \sin \pi t + \pi \cos \pi t$.

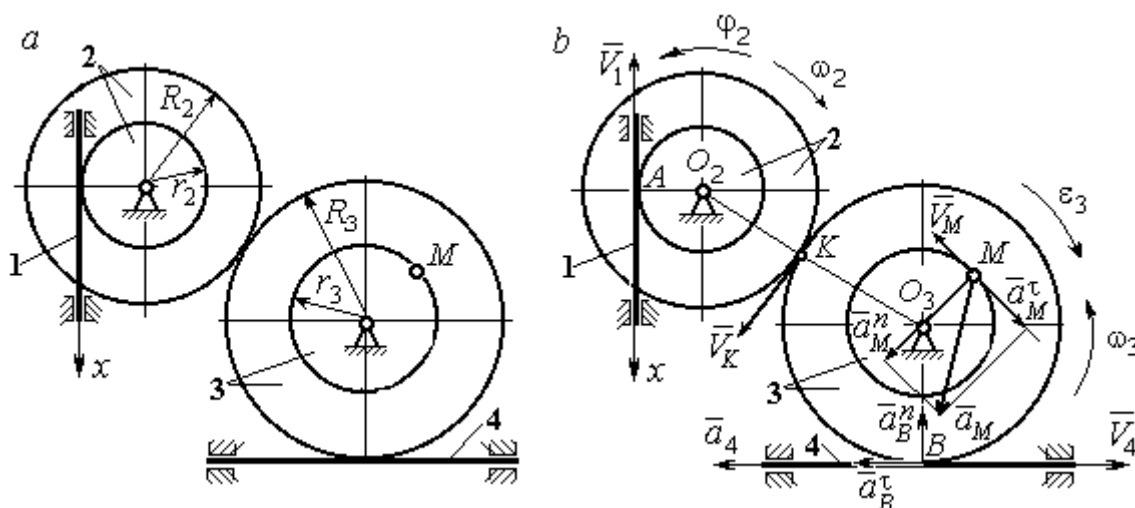


Рис. 2.11. Кинематика поступательного и вращательного движений твердого тела:
a – схема механизма; *b* – расчетная схема для определения скоростей и ускорений точек механизма

В момент времени $t_1 = 1$ с алгебраическое значение скорости звена 1 отрицательное: $V_{1x}(1) = -\pi$ см/с. Это показывает, что в данный момент времени звено 1 движется в сторону, противоположную положительному направлению оси x . Скорость звена 1 равна модулю производной $V_1(1) = |\dot{x}_1| = \pi$ см/с. На рис. 2.11, *b* показано направление вектора скорости $\vec{V}_1$.

Точка A соприкосновения звена 1 с диском 2 имеет ту же скорость, что и звено 1. Угловая скорость диска 2 определяется из равенства $\omega_2 = \frac{V_1}{r_2}$ рад/с. Направление угловой скорости вращения диска 2 показано на рис. 2.11, b дуговой стрелкой ω_2 .

Передача вращения диска 2 диску 3 происходит в точке K . Из соотношения $\frac{\omega_3}{\omega_2} = \frac{R_2}{R_3}$ находим угловую скорость диска 3: $\omega_3 = \frac{V_1 R_2}{r_2 R_3} = \frac{\pi}{2}$. Направление угловой скорости диска 3 показано на рис. 2.11, b дуговой стрелкой ω_3 .

Модуль скорости точки M $V_M = \omega_3 r_3 = 2\pi$ см/с. Вектор скорости $\vec{V}_M$ направлен по касательной к траектории движения точки M в сторону вращения диска 3 (см. рис. 2.11, b).

Звено 4 движется поступательно. Величина и направление скорости звена 4 совпадают с величиной и направлением скорости точки B касания звена 4 с диском 3: $V_4 = V_B = \omega_3 R_3$. В момент времени $t_1 = 1$ с $V_4 = 4\pi$ см/с. Направление вектора скорости $\vec{V}_4$ определяется направлением вращения диска 3.

Определим ускорение точки M . Найдём алгебраическое значение ω_{3z} угловой скорости диска 3: $\omega_{3z} = \frac{V_{1x} R_2}{r_2 R_3} = \frac{\pi}{2}(-\sin\pi t + \cos\pi t)$. Алгебраическое значение ε_{3z} углового ускорения диска 3: $\varepsilon_{3z} = \dot{\omega}_{3z} = -\frac{\pi^2}{2}(\cos\pi t + \sin\pi t)$ и в момент времени $t_1 = 1$ с $\varepsilon_{3z} = \frac{\pi^2}{2}$. Разные знаки алгебраических значений угловой скорости и углового ускорения диска 3 ($\omega_{3z} = -\frac{\pi}{2}$; $\varepsilon_{3z} = +\frac{\pi^2}{2}$) показывают, что угловое ускорение направлено в сторону, противоположную угловой скорости. На рис. 2.11, b направление углового ускорения диска 3 показано дуговой стрелкой ε_3 .

Касательное ускорение точки M рассчитывается по формуле $a_M^\tau = \varepsilon_3 r_3$, где угловое ускорение $\varepsilon_3 = |\varepsilon_{3z}|$. В момент времени $t_1 = 1$ с $a_M^\tau = 2\pi^2$ см/с². Вектор касательного ускорения точки M $\vec{a}_M^\tau$ направлен по касательной к траектории точки M в сторону углового ускорения ε_3 (см. рис. 2.11, б).

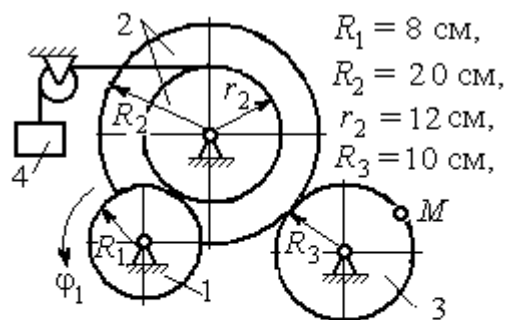
Нормальное ускорение точки M рассчитывается как $a_M^n = \omega_3^2 r_3$. В момент времени $t_1 = 1$ с величина нормального ускорения $a_M^n = \pi^2$ см/с². Вектор нормального ускорения $\vec{a}_M^n$ направлен по радиусу к центру диска 3.

Модуль полного ускорения точки M : $a_M = \sqrt{(a_M^n)^2 + (a_M^\tau)^2} = \pi^2 \sqrt{5}$ см/с². Вектор полного ускорения $\vec{a}_M$ направлен по диагонали прямоугольника, построенного на векторах $\vec{a}_M^n$ и $\vec{a}_M^\tau$.

Звено 4 движется поступательно и прямолинейно. Ускорение звена 4 равно проекции ускорения точки B (касания диска 3 со звеном 4) на линию движения звена 4: $a_4 = a_B^\tau = \varepsilon_3 R_3 = 4\pi^2$ см/с². Направление ускорения звена 4 совпадает с касательным ускорением точки B .

Упражнения

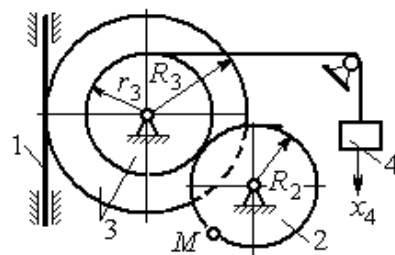
Упражнение 2.1



$$\varphi_1 = 3t + 2 \sin \frac{\pi t}{2} \text{ рад},$$

Найти скорость и ускорение точки M и груза 4 в момент $t = 1$ с

Упражнение 2.2



$$R_2 = 0,2 \text{ м}, \quad R_3 = 0,4 \text{ м}, \quad r_3 = 0,3 \text{ м},$$

$$x_4 = t - 1 - \sin \frac{\pi t}{3} + \cos \frac{\pi t}{3} \text{ м}.$$

Найти скорость и ускорение точки M и звена 1 в момент $t = t_1 = 3$ с.

Рис. 2.12. Задания для самостоятельного решения. Упражнения 2.1, 2.2

2.3. Скорости точек при плоскопараллельном движении твёрдого тела

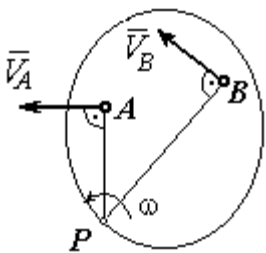
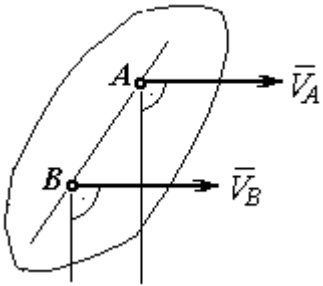
Плоскопараллельным, или **плоским** движением твёрдого тела, называется такое движение, при котором все точки тела движутся параллельно некоторой неподвижной (основной) плоскости.

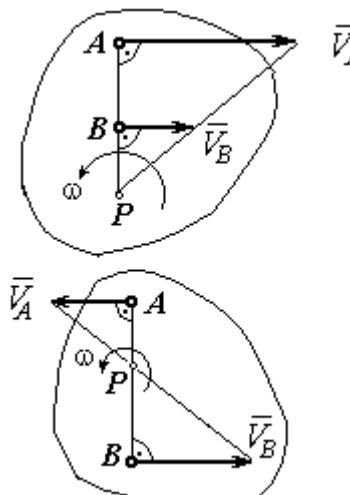
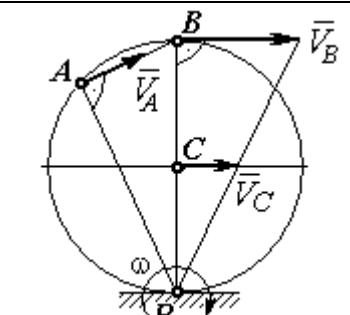
Для скоростей $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_M$ двух точек A и M тела, совершающего плоское движение, справедливо утверждение: **проекции скоростей двух точек твёрдого тела на ось, проходящую через эти точки, равны друг другу:** $V_A \cos \alpha = V_M \cos \beta$, где α, β – углы между векторами скорости $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_M$ и осью, проходящей через точки A и M .

Мгновенным центром скоростей (МЦС) называется точка P плоской фигуры, скорость которой в данный момент времени равна нулю. При известном положении МЦС скорость любой точки плоской фигуры находят так, как если бы движение фигуры было мгновенно вращательным вокруг мгновенного центра скоростей с угловой скоростью, равной угловой скорости плоской фигуры. Способы построения мгновенного центра скоростей приведены в табл. 2.1.

Таблица 2.1

Способы построения мгновенного центра скоростей

1. Если известны направления скоростей $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$ каких-нибудь двух точек A и B плоской фигуры, то мгновенный центр скоростей P находится в точке пересечения перпендикуляров, восстановленных из этих точек к векторам скоростей.	
2. Если скорости двух точек $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$ параллельны, но точки A и B не лежат на общем перпендикуляре к скоростям, то, как видно из рисунка, мгновенный центр P бесконечно удалён. В этом случае угловая скорость $\omega = 0$ и тело в данный момент движется поступательно (движение является мгновенным поступательным). При таком движении скорость любой точки тела равна $\vec{V}_A$.	

3. Если скорости двух точек $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$ параллельны, а точки A и B лежат на общем перпендикуляре к скоростям, то мгновенный центр скоростей P находится как пересечение прямой, соединяющей точки A и B и линии, проходящей через концы векторов, изображающих скорости $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$.	
4. Если плоскопараллельное движение осуществляется путем качения без скольжения одного тела по неподвижной поверхности другого, то мгновенный центр скоростей P расположен в точке касания катящегося тела с неподвижной поверхностью.	

Примеры решения задач на плоскопараллельное движение тела

Задача 27. Приводной механизм насоса находится в положении, показанном на рис. 2.13. Кривошип O_1C вращается с постоянной угловой скоростью

$\omega_{O_1C} = 2$ рад/с вокруг оси, проходящей через точку O_1 перпендикулярно плоскости чертежа.

Определить скорость поршня D и угловые скорости шатуна BC , коромысла AB и штока AD , если $O_1C = 20$ см, $OB = 2 \cdot OA = 40$ см, $AD = 60$ см.

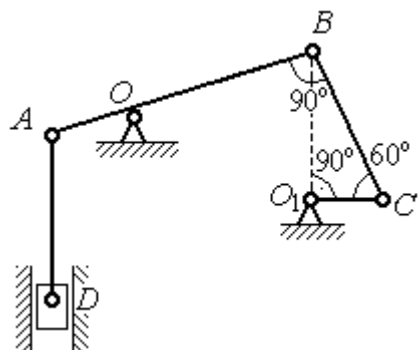


Рис. 2.13. Приводной механизм насоса

Решение

Предположим для определённости, что кривошип O_1C вращается в направлении по ходу часовой стрелки. Вектор $\vec{V}_C$ скорости точки C направлен

перпендикулярно кривошипу O_1C , в сторону его вращения (рис. 2.14). Модуль скорости $V_C = \omega_{O_1C} \cdot O_1C = 40$ см/с.

Коромысло AB качается (вращается) вокруг оси, проходящей через точку O , параллельно оси вращения кривошипа.

Скорость точки B направлена перпендикулярно коромыслу AB вдоль шатуна BC (рис. 2.14).

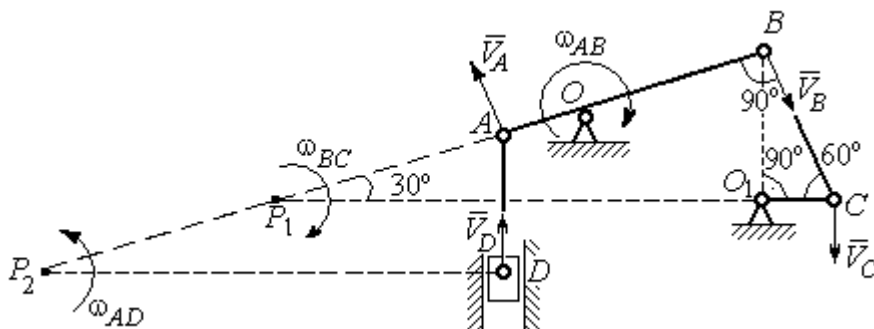


Рис. 2.14. Расчётная кинематическая схема механизма привода насоса

Шатун BC совершает плоскопараллельное движение. Мгновенный центр скоростей шатуна P_1 расположен в точке пересечения перпендикуляров к скоростям $\vec{V}_C$ и $\vec{V}_B$ точек C и B шатуна. Находим $P_1C = 4O_1C = 80$ см. Угловая скорость вращения шатуна BC $\omega_{BC} = \frac{V_C}{CP_1} = 0,5$ рад/с. Направление угловой скорости вращения шатуна BC определяется направлением вращения кривошипа O_1C и на рис. 2.14 показано дуговой стрелкой ω_{BC} .

Скорость V_B найдём по теореме о проекциях скоростей. Спроектируем вектора скоростей $\vec{V}_C$ и $\vec{V}_B$ точек C и B на линию BC . Получим $V_B \cos 0^\circ = V_C \cos 30^\circ$. Отсюда $V_B = 20\sqrt{3}$ см/с.

Угловая скорость коромысла AB $\omega_{AB} = \frac{V_B}{OB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ рад/с. Направление угловой скорости коромысла определяется направлением вектора скорости $\vec{V}_B$ и показано дуговой стрелкой ω_{AB} .

Скорость точки A коромысла равна половине скорости точки B :
 $V_A = \frac{1}{2}V_B = 10\sqrt{3}$ см/с. Вектор скорости $\vec{V}_A$ направлен перпендикулярно коромыслу AB в сторону его вращения.

Точка P_2 пересечения перпендикуляров к скоростям $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_D$ является мгновенным центром скоростей штока AD . Тогда угловая скорость штока
 $\omega_{AD} = \frac{V_A}{AP_2} = \frac{\sqrt{3}}{12}$ рад/с. Направление угловой скорости штока определяется по направлению скорости точки A и на рис. 2.14 показано дуговой стрелкой ω_{AD} .

Скорость поршня $V_D = \omega_{AD} \cdot P_2D = 15$ см/с.

Задача 28. Механизм качалки (рис. 2.15) состоит из кривошипа OA ,

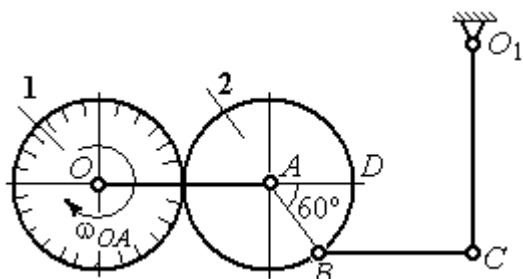


Рис. 2.15. Схема механизма качалки

вращающегося вокруг оси O и несущего в точке A ось подвижной шестерни 2, которая катится по неподвижной шестерне 1. Вращение кривошипа происходит с угловой скоростью $\omega_{OA} = 2$ рад/с. Радиусы шестерён $r_1 = r_2 = 6$ см. К ободу шестерни 2 в

точке B шарнирно прикреплён шатун BC длиной $BC = 8$ см, который в точке C передаёт движение коромыслу CO_1 длиной $CO_1 = 16$ см.

Определить угловые скорости шестерни 2, шатуна BC , коромысла CO_1 , а также скорости точек A , B , C , D в момент, когда кривошип OA и шатун BC горизонтальны и угол $\angle DAB = 60^\circ$.

Решение

Найдём скорость точки A кривошипа: $V_A = \omega_{OA} \cdot OA = 24$ см/с. Вектор скорости точки $\vec{V}_A$ расположен перпендикулярно кривошипу OA и направлен в сторону вращения кривошипа (рис. 2.16).

Мгновенный центр скоростей P_2 шестерни 2 находится в точке касания с неподвижной поверхностью шестерни 1. Угловая скорость шестерни 2

$\omega_2 = \frac{V_A}{AP_2} = 4 \text{ рад/с}$. Направление угло-

вой скорости шестерни 2 определяется направлением вектора скорости $\vec{V}_A$ и на рис. 2.16 показано дуговой стрелкой ω_2 .

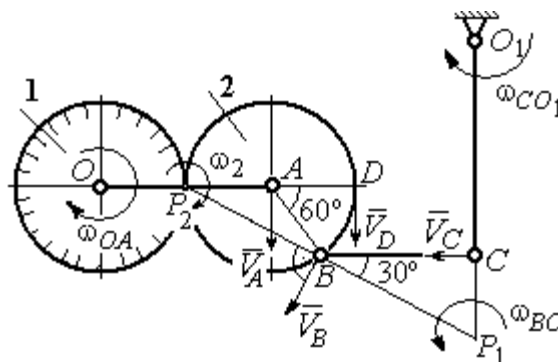


Рис.2.16. Расчётная кинематическая схема механизма качалки

Найдём расстояние P_2B из равнобедренного треугольника P_2AB по

теореме косинусов: $P_2B = \sqrt{r^2 + r^2 - 2r^2 \cos 120^\circ} = 6\sqrt{3} \text{ см}$. Скорость точки B $V_B = \omega_2 \cdot P_2B = 24\sqrt{3} \text{ см/с}$. Вектор скорости $\vec{V}_B$ перпендикулярен линии P_2B и направлен в сторону вращения шестерни 2.

Скорость точки D : $V_D = \omega_2 \cdot P_2D = 48 \text{ см/с}$. Вектор скорости $\vec{V}_D$ перпендикулярен линии P_2D и направлен в ту же сторону (см. рис. 2.16).

Скорость точки C перпендикулярна линии CO_1 . Восстанавливая перпендикуляры к скоростям $\vec{V}_B$ и $\vec{V}_C$, получим точку пересечения P_1 , которая будет мгновенным центром скоростей шатуна BC . Расстояние $P_1B = \frac{BC}{\cos 30^\circ} = \frac{16}{\sqrt{3}} \text{ см}$.

Угловая скорость шатуна $\omega_{BC} = \frac{V_B}{P_1B} = \frac{9}{2} \text{ рад/с}$. Направление угловой скорости определяется по направлению скорости $\vec{V}_B$ и показано дуговой стрелкой ω_{BC} .

Скорость точки C : $V_C = \omega_{BC} \cdot P_1C = \frac{36}{\sqrt{3}} \text{ см/с}$. Направление вектора скорости определяется направлением вращения шатуна BC .

Угловая скорость коромысла CO_1 : $\omega_{CO_1} = \frac{V_C}{O_1C} = \frac{9}{4\sqrt{3}} \text{ рад/с}$.

Задача 29. В планетарном механизме (рис. 2.17) кривошип OA длиной

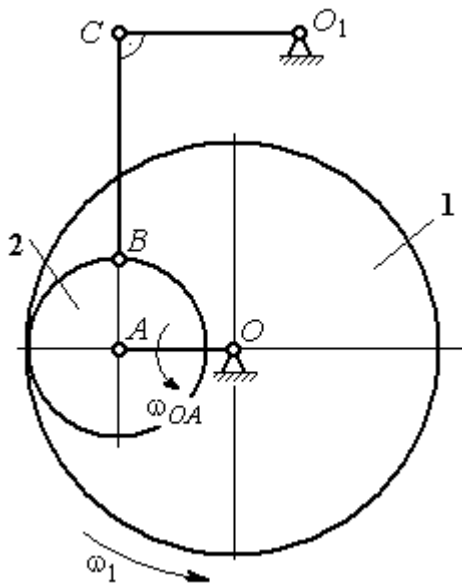


Рис. 2.17. Планетарный механизм

$OA = 25$ см вращается вокруг неподвижной оси O , перпендикулярной плоскости рисунка, с угловой скоростью $\omega_{OA} = 3,6$ рад/с. На конец A кривошипа насажена шестерёнка 2, находящаяся во внутреннем зацеплении с колесом 1 радиуса $r_1 = 45$ см, соосным с кривошипом OA и вращающимся с угловой скоростью $\omega_1 = 1$ рад/с. Шатун BC , шарнирно соединённый с шестерёнкой 2 на её ободе в точке B , приводит в движение кривошип CO_1 . Определить угловые скорости шестерёнки 2, шатуна BC и кривошипа CO_1 . Определить угловые скорости шестерёнки 2, шатуна BC и кривошипа CO_1 , скорости точек A , B , C в положении, показанном на рис.2.17, если длина шатуна $BC = 100$ см, длина кривошипа $CO_1 = 50$ см.

Решение

Найдём скорости точек A и D

$$V_A = \omega_{OA} \cdot OA = 90 \text{ см/с}; \quad V_D = \omega_1 \cdot r_1 = 45 \text{ см/с}.$$

Вектор скорости $\vec{V}_A$ направлен перпендикулярно кривошипу OA в сторону его вращения. Вектор скорости $\vec{V}_D$ перпендикулярен радиусу OD колеса 1 и направлен в сторону вращения колеса (рис. 2.18).

Мгновенный центр скоростей P_2 шестерни 2 находится на пересечении прямой, соединяющей точки A и D , и линии, проходящей через концы векторов $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_D$, изображающих скорости точек A и D . Расстояние P_2D от центра скоростей до точки D находится из пропорции $\frac{V_A}{V_D} = \frac{AP_2}{DP_2} = \frac{DP_2 + 20}{DP_2}$, откуда $P_2D = 20$ см.

Задача 30. В плоском механизме (рис. 2.19) кривошип OA вращается вокруг оси O с угловой скоростью ω_{OA} . На конец A кривошипа насажена шестерня 2, находящаяся во внешнем зацеплении с неподвижным колесом 1. Радиусы колеса и шестерни r_1 и r_2 . Шестерня 2 соединяется с колесом 3 шатуном BC , закреплённым на шестерне в точке B и на колесе в точке C . Колесо 3 катится без скольжения по горизонтальной поверхности. Все соединения шарнирные. Качение шестерни 2 по неподвижному колесу 1 без проскальзывания. Для положения механизма, изображенного на рис. 2.19, определить скорости точек A , B , C и угловые скорости шатуна BC , шестерни 2 и колеса 3, если $\omega_{OA} = 4$ рад/с; $r_1 = 4$ см; $r_2 = r_3 = 8$ см.

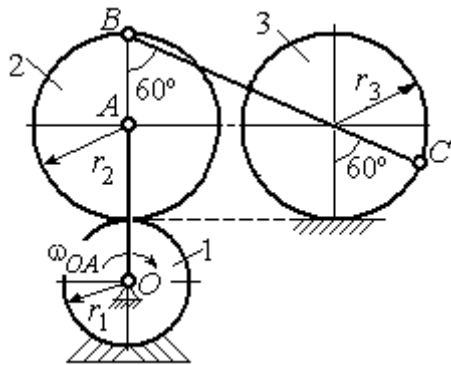


Рис. 2.19. Схема движения плоского механизма

круг оси O с угловой скоростью ω_{OA} . На конец A кривошипа насажена шестерня 2, находящаяся во внешнем зацеплении с неподвижным колесом 1. Радиусы колеса и шестерни r_1 и r_2 . Шестерня 2 соединяется с колесом 3 шатуном BC , закреплённым на шестерне в точке B и на колесе в точке C . Колесо 3 катится

без скольжения по горизонтальной поверхности. Все соединения шарнирные. Качение шестерни 2 по неподвижному колесу 1 без проскальзывания. Для положения механизма, изображенного на рис. 2.19, определить скорости точек A , B , C и угловые скорости шатуна BC , шестерни 2 и колеса 3, если $\omega_{OA} = 4$ рад/с; $r_1 = 4$ см; $r_2 = r_3 = 8$ см.

Решение

Рассмотрим вращательное движение кривошипа OA . Скорость точки A кривошипа: $V_A = \omega_{OA} \cdot OA = 48$ см/с. Вектор скорости $\vec{V}_A$ направлен перпендикулярно кривошипу OA в сторону его вращения (рис. 2.20).

При качении шестерни 2 по неподвижной поверхности колеса 1 точка их соприкосновения P_2 является мгновенным центром скоростей шестерни.

Угловая скорость шестерни 2

$$\omega_2 = \frac{V_A}{AP_2} = 6 \text{ рад/с.}$$

Скорость точки B шестерни 2 $V_B = \omega_2 \cdot BP_2 = 96$ см/с.

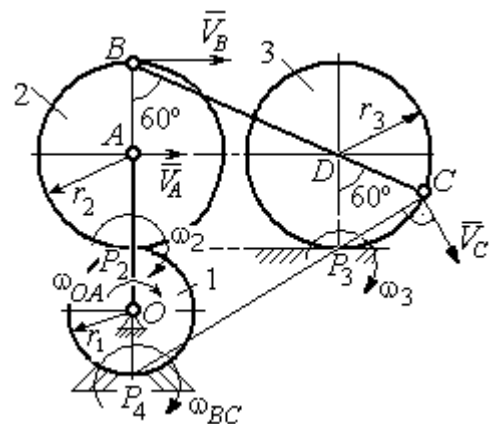


Рис. 2.20. Расчетная схема для определения угловых скоростей звеньев механизма

Точка P_3 касания колеса 3 с неподвижной поверхностью является его мгновенным центром скоростей. Вектор $\vec{V}_C$ скорости точки C колеса 3 перпендикулярен линии P_3C и направлен в сторону качения колеса (см. рис. 2.20).

Мгновенный центр скоростей шатуна BC – точка P_4 находится на пересечении перпендикуляров, восстановленных к скоростям точек B и C . По построению $BP_4 = BC = BD + DC = 2r_2 + r_3 = 24$ см. Угловая скорость шатуна BC $\omega_{BC} = \frac{V_B}{BP_4} = 4$ рад/с. Так как $BP_4 = CP_4$, скорости точек C и B $V_C = 96$ см/с.

Угловая скорость колеса 3 $\omega_3 = \frac{V_C}{CP_3} = 12$ рад/с.

Задача 31. В плоском механизме (рис. 2.21) кривошип OC , вращаясь вокруг неподвижной оси O , приводит в движение два шатуна CD и CE , присоединённых к кривошипу в точке C . Шатун CE прикреплен в точке E к ободу цилиндрического выступа диска 1, который катится без проскальзывания своим выступом по неподвижному горизонтальному рельсу. К другому шатуну CD в точке D прикреплен ползун, перемещающийся вдоль направления вертикального диаметра диска 1. Все соединения шарнирные. Радиусы диска и цилиндрического выступа $R_1 = 3$ см, $r_1 = 2$ см. Длина шатуна $CE = 4$ см. В заданном положении механизма (см. рис. 2.21) шатун CE горизонтален.

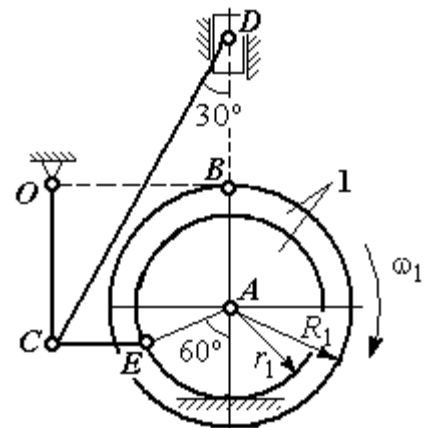


Рис. 2.21. Схема движения плоского механизма

Определить скорости точек A , E , C , D и угловые скорости диска 1, шатунов CE , CD и кривошипа CO , если известна скорость точки B на ободу диска 1 $V_B = 10$ см/с и направление ω_1 угловой скорости диска.

Решение

Изобразим вектор скорости точки B диска 1 в соответствии с заданным направлением его движения. При качении диска 1 по неподвижной поверхности

рельса точка P_1 касания обода выступа с поверхностью рельса является его мгновенным центром скоростей (рис. 2.22).

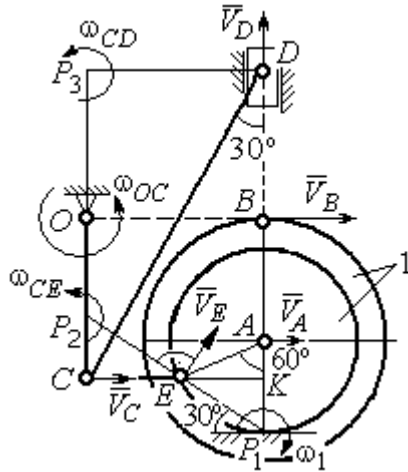


Рис. 2.22. Расчётная схема для определения скоростей точек и угловых скоростей звеньев механизма

Угловая скорость диска 1

$$\omega_1 = \frac{V_B}{BP_1} = 2 \text{ рад/с.}$$

Скорость точки A

$$V_A = \omega_1 \cdot AP_1 = 4 \text{ см/с.}$$

Скорость точки E

$$V_E = \omega_1 \cdot EP_1 = 4 \text{ см/с.}$$

Вектор скорости $\vec{V}_A$

и вектор скорости $\vec{V}_E$ перпендикулярны,

соответственно, линиям AP_1 EP_1 и направлены в сторону вращения диска.

Шатун CE совершает плоскопараллельное движение. Скорость точки C шатуна неизвестна по величине, но известно, что вектор скорости $\vec{V}_C$ перпендикулярен кривошпиу OC и направлен вдоль CE в сторону точки E . Мгновенный центр скоростей P_2 шатуна CE находится на пересечении перпендикуляров, восстановленных к скоростям $\vec{V}_E$ и $\vec{V}_C$ (см. рис. 2.22).

$$\text{Расстояние } EP_2 = \frac{EC}{\cos 30^\circ} = 4,62 \text{ см.}$$

$$\omega_{CE} = \frac{V_E}{EP_2} = 0,86 \text{ рад/с.}$$

Направление угловой скорости шатуна, определяемое по направлению скорости точки E , на рис. 2.22 показано дуговой стрелкой

$$\omega_{CE}. \text{ Скорость точки } C \text{ шатуна } CE \quad V_C = \omega_{CE} \cdot CP_2 = \frac{V_E}{2} = 2 \text{ см/с.}$$

Длина кривошипа $OC = BK = R_1 + r_1 \sin 30^\circ = 4$ см. Угловая скорость кривошипа $\omega_{OC} = \frac{V_C}{OC} = 0,5$ рад/с.

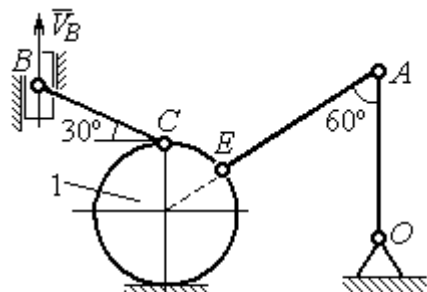
Для шатуна CD известны величина и направление вектора $\vec{V}_C$ скорости точки C и направление вектора $\vec{V}_D$ скорости точки D . Мгновенный центр скоростей шатуна CD находится в точке P_3 , полученной на пересечении перпендикуляров, восстановленных к скоростям $\vec{V}_C$ и $\vec{V}_D$.

Расстояние $CP_3 = DK = (CE + r_1 \cos 30^\circ) \operatorname{ctg} 30^\circ = 9,92$ см (см. рис. 2.22). Угловая скорость шатуна CD : $\omega_{CD} = \frac{V_C}{CP_3} = 0,21$ рад/с.

Скорость ползуна D : $V_D = \omega_{CD} DP_3 = \omega_{CD} (CE + r_1 \cos 30^\circ) = 1,2$ см/с.

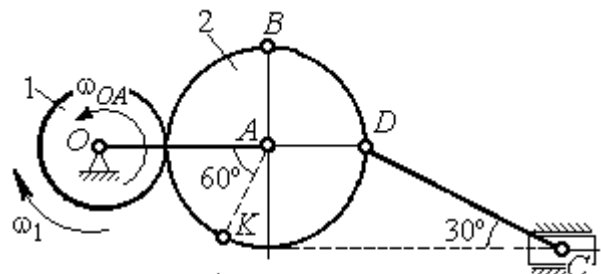
Упражнения

Упражнение 2.3



$R_1 = 2$ см, $OA = AE = 6$ см,
 $BC = 5$ см, $V_B = 5$ см/с.
 Найти: ω_{OA} , ω_{AE} , ω_{CB} , ω_1 , V_C , V_A , V_E

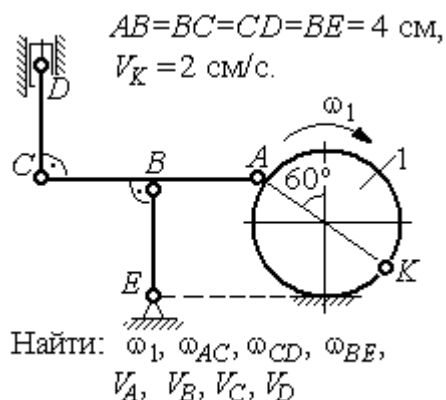
Упражнение 2.4



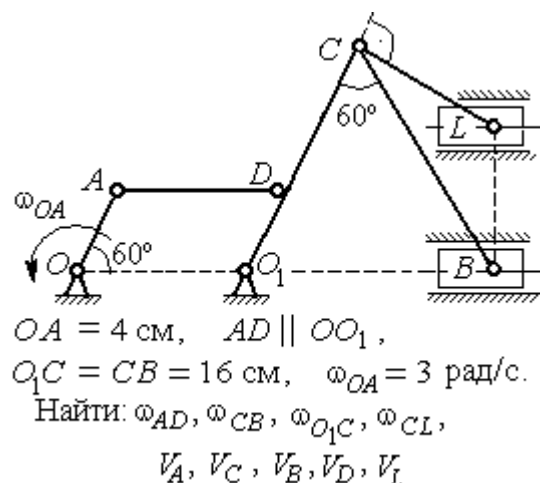
$\omega_{OA} = 2$ рад/с, $\omega_1 = 6$ рад/с,
 $r_1 = 3$ см, $r_2 = 6$ см.
 Найти: ω_2 , ω_{DC} , V_B , V_K , V_D , V_C

Рис. 2.23. Задания для самостоятельного решения. Упражнения 2.3, 2.4

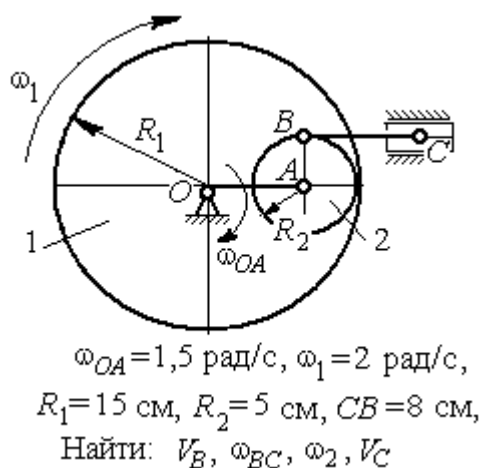
Упражнение 2.5



Упражнение 2.6



Упражнение 2.7



Упражнение 2.8

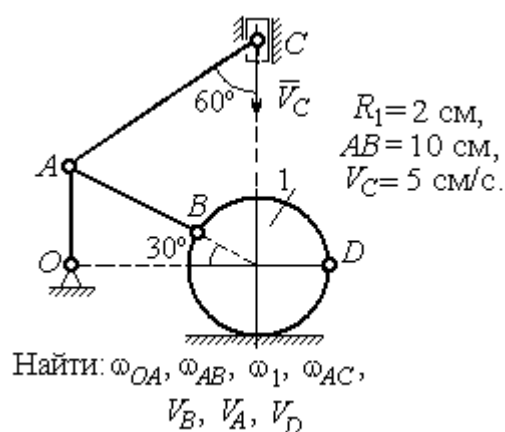


Рис. 2.24. Задания для самостоятельного решения. Упражнения 2.5 – 2.8

2.4. Ускорения точек при плоскопараллельном движении твёрдого тела

Ускорение любой точки M плоской фигуры при плоскопараллельном движении твёрдого тела представляется как сумма векторов $\vec{a}_M = \vec{a}_A + \vec{a}_{MA}^{\tau} + \vec{a}_{MA}^n$, где $\vec{a}_A$ – ускорение полюса A ; $\vec{a}_{MA}^{\tau}$, $\vec{a}_{MA}^n$ – касательная и

нормальная составляющие ускорения точки M при вращении фигуры вокруг полюса A (рис. 2.25).

Вектор нормального ускорения $\vec{a}_{MA}^n$ всегда направлен от точки M к полюсу A . Вектор касательного ускорения $\vec{a}_{MA}^\tau$ направлен перпендикулярно отрезку AM в сторону вращения, если оно ускоренное (см. рис. 2.25, a), и против вращения, если оно замедленное (см. рис. 2.25, b). Величины касательного и нормального составляющих ускорения точки M определяются по формулам:

$a_{MA}^\tau = \varepsilon \cdot AM$; $a_{MA}^n = \omega^2 \cdot AM$, где ω , ε – угловая скорость и угловое ускорение тела (плоской фигуры); AM – расстояние от точки M до полюса A .

Если при движении плоской фигуры известны траектории движения полюса A и точки M , то для определения ускорения точки M используется векторное равенство $\vec{a}_M^\tau + \vec{a}_M^n = \vec{a}_A^\tau + \vec{a}_A^n + \vec{a}_{MA}^\tau + \vec{a}_{MA}^n$, где $\vec{a}_M^\tau$, $\vec{a}_M^n$, $\vec{a}_A^\tau$, $\vec{a}_A^n$ – касательная и нормальная составляющие ускорения точки M и полюса A при движении их по заданным траекториям.

Примеры решения задач на определение ускорений точек

Задача 32. Поршень D гидравлического пресса приводится в движение шарнирно-рычажным механизмом $OABD$. В положении механизма, указанном на рис. 2.26, точка L рычага имеет скорость $V_L = 0,6$ м/с и ускорение $a_L = 0,5$ м/с². Длина рычага $OA = 2 \cdot AL = 0,6$ м, длина звена $AB = 0,4$ м. Определить скорость и ускорение поршня D , угловую скорость и ускорение звена AB .

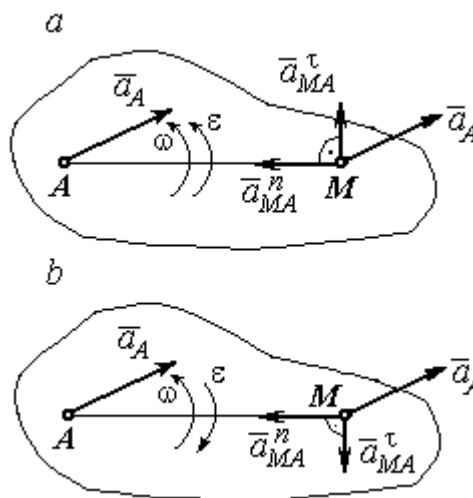


Рис. 2.25. Ускорение точки плоской фигуры:
 a – ускоренное движение;
 b – замедленное движение

Решение

Найдём угловую скорость рычага OL : $\omega_{OL} = \frac{V_L}{OL} = \frac{2}{3}$ рад/с.

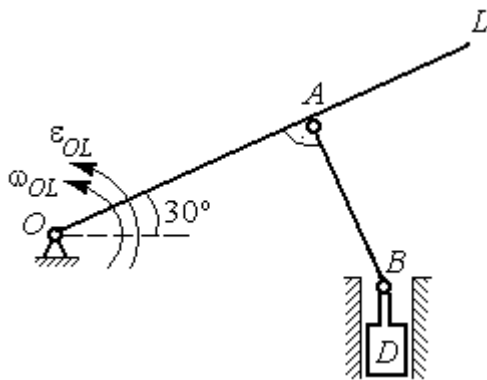


Рис. 2.26. Шарнирно-рычажный механизм гидравлического пресса

Ускорение точки L представляется в виде суммы векторов нормального и касательного ускорений: $\vec{a}_L = \vec{a}_L^\tau + \vec{a}_L^n$ (рис. 2.27). Модуль нормального ускорения точки L $a_L^n = \omega_{OL}^2 \cdot OL = 0,4$ м/с². Модуль её касательного ускорения и угловое ускорение рычага, соответственно, равны:

$$a_L^\tau = \sqrt{a_L^2 - (a_L^n)^2} = 0,3 \text{ м/с}^2, \quad \epsilon_{OL} = \frac{a_L^\tau}{OL} = \frac{1}{3} \text{ рад/с}^2.$$

Скорость $\vec{V}_A$ точки A перпендикулярна рычагу OL и направлена в сторону вращения рычага. Её модуль $V_A = \omega_{OL} \cdot OA = 0,4$ м/с. Скорость $\vec{V}_B$ точки B направлена вертикально вверх вдоль линии движения поршня. Направления векторов скоростей $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$ показаны на рис. 2.27. Точка P_1 – пересечения перпендикуляров, восстановленных к векторам скоростей $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$ – определяет положение мгновенного центра скоростей звена AB . Расстояние $AP_1 = P_1B \cdot \cos 30^\circ = 0,4\sqrt{3}$ м.

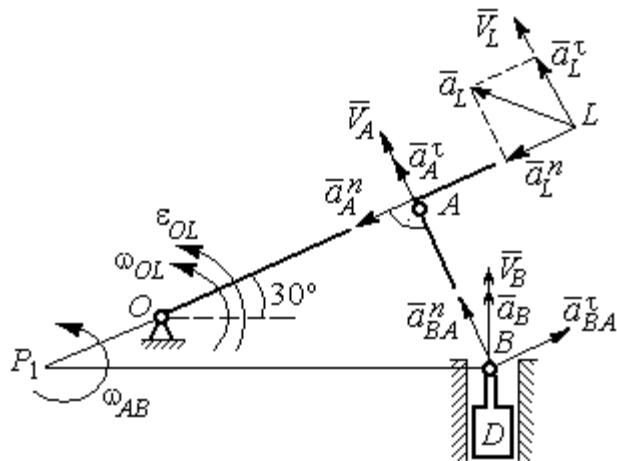


Рис. 2.27. Расчётная кинематическая схема механизма

Угловая скорость звена AB $\omega_{AB} = \frac{V_A}{P_1A} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ рад/с.

Представим ускорение точки B через полюс A : $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^\tau + \vec{a}_{BA}^n$, где $\vec{a}_A$ – ускорение полюса A ; $\vec{a}_{BA}^\tau$, $\vec{a}_{BA}^n$ – касательная и нормальная составляющие ускорения точки B при вращении звена AB вокруг полюса A . Так как траекторией точки A является окружность с центром в точке O , ускорение этой точки может быть разложено на две составляющие: $\vec{a}_A = \vec{a}_A^\tau + \vec{a}_A^n$. В результате ускорение точки B представляется в виде векторной суммы $\vec{a}_B = \vec{a}_A^\tau + \vec{a}_A^n + \vec{a}_{BA}^\tau + \vec{a}_{BA}^n$. Направления векторов ускорений показаны на рис. 2.27.

Модули ускорений:

$$a_A^n = \omega_{OL}^2 \cdot OA = 0,27 \text{ см/с}^2; a_{BA}^n = \omega_{AB}^2 \cdot AB = 0,13 \text{ см/с}^2;$$

$$a_A^\tau = \varepsilon_{OL} \cdot OA = 0,2 \text{ см/с}^2.$$

Ускорение $a_{BA}^\tau = \varepsilon_{AB} \cdot AB$ остаётся неизвестной величиной, так как угловое ускорение ε_{AB} звена AB неизвестно.

Спроектируем векторное равенство ускорения точки B на оси x, y , где ось x проходит вдоль линии звена AB , ось y – перпендикулярна ей (рис. 2.28). Получим равенства:

$$a_B \cdot \cos 30^\circ = a_A^\tau + a_{BA}^n; a_B \cdot \cos 60^\circ = -a_A^n + a_{BA}^\tau.$$

Решая систему уравнений, находим модуль ускорения точки B : $a_B = 0,38 \text{ см/с}^2$ и величину касательного ускорения: $a_{BA}^\tau = 0,46 \text{ см/с}^2$. Угловое ускорение стержня AB

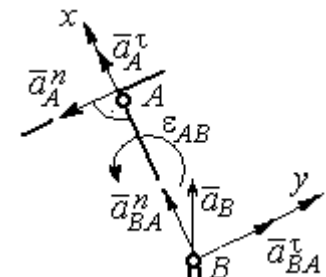


Рис. 2.28. Вычисление проекций векторов ускорений

$\varepsilon_{AB} = \frac{a_{BA}^\tau}{AB} = 1,15 \text{ рад/с}^2$. Направление углового ускорения ε_{AB} звена AB определяется направлением вектора $\vec{a}_{BA}^\tau$ касательного ускорения точки B при вращении звена вокруг полюса A (см. рис. 2.28).

Ускорение поршня D равно ускорению точки B : $a_D = a_B = 0,38 \text{ см/с}^2$.

Задача 34. Колесо 1 радиуса $r_1 = 0,6$ м катится без скольжения по прямой

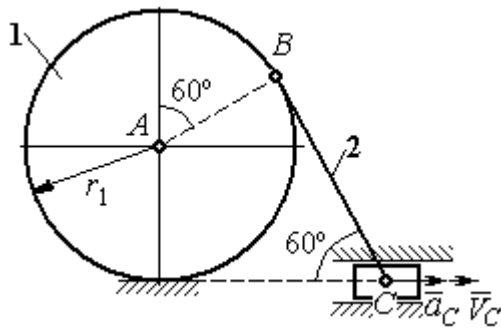


Рис. 2.29. Механизм, связывающий качение колеса с поступательным движением ползуна

молинейному участку пути и приводит в движение шатун 2, соединённый шарнирно с колесом в точке B на его ободе. На другом конце шатуна в точке C к нему присоединён ползун, перемещающийся горизонтально (рис. 2.29).

В положении механизма, показанном на рис. 2.29, найти ускорение центра

A колеса 1, его угловое ускорение, а также угловое ускорение шатуна 2, если заданы скорость и ускорение ползуна C : $V_C = 9$ м/с; $a_C = 4$ м/с².

Решение

При качении диска 1 по неподвижной поверхности точка P_1 касания его с поверхностью является мгновенным центром скоростей диска. Вектор скорости $\vec{V}_B$ перпендикулярен линии P_1B . Восстановим перпендикуляры к скоростям $\vec{V}_B$ и $\vec{V}_C$. Их пересечение в точке P_2 определяет положение мгновенного центра скоростей шатуна 2 (рис. 2.30).

Вычислим необходимые расстояния.

Расстояние P_1B (см. рис. 2.30) найдём из треугольника P_1AB по теореме косинусов:

$P_1B = r_1\sqrt{3} = 1,04$ м. Из построения мгновенных центров скоростей P_1 и P_2 следует: $P_1B = BP_2 = BC$. Расстояние P_2C определяется из треугольника P_1P_2C : $P_2C = P_1P_2 \cdot \cos 30^\circ = 1,8$ м.

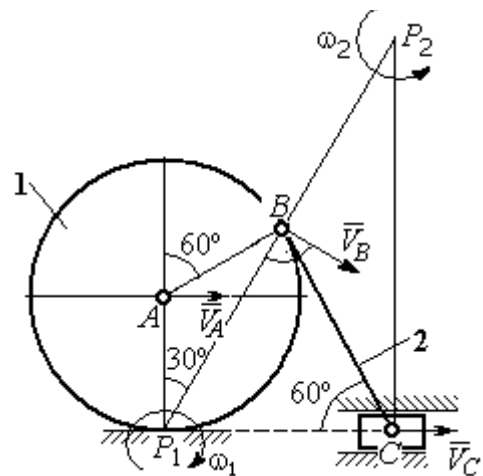


Рис. 2.30. Расчётная схема механизма для определения скоростей точек

Угловая скорость шатуна 2 $\omega_2 = \frac{V_C}{P_2C} = 5 \text{ рад/с}$. Направление угловой скорости ω_2 определяется направлением скорости $\vec{V}_C$.

Скорость точки B найдём по формуле $V_B = \omega_2 \cdot P_2B = 5,2 \text{ м/с}$.

Угловая скорость диска 1 $\omega_1 = \frac{V_B}{P_1B} = 5 \text{ рад/с}$. Скорость центра колеса 1 $V_A = \omega_1 \cdot P_1A = 3 \text{ м/с}$.

Найдём ускорение точки A .

Примем точку B за полюс и выразим ускорение точки A через полюс B :

$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{a}_{AB}^\tau + \vec{a}_{AB}^n$, где $\vec{a}_B$ – ускорение полюса B ; $\vec{a}_{AB}^\tau$, $\vec{a}_{AB}^n$ – касательная и нормальная составляющие ускорения точки A при вращении диска 1 вокруг полюса B (рис. 2.31). Направления ускорения точки $\vec{a}_A$ и касательной составляющей ускорения $\vec{a}_{AB}^\tau$ точки A выбраны в предположении ускоренного движения диска.

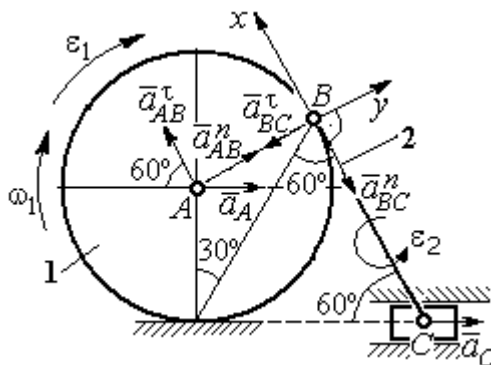


Рис. 2.31. Расчётная схема механизма для определения ускорений точек

Ускорение полюса B выразим через полюс C : $\vec{a}_B = \vec{a}_C + \vec{a}_{BC}^\tau + \vec{a}_{BC}^n$, где $\vec{a}_C$ – ускорение полюса C ; $\vec{a}_{BC}^\tau$, $\vec{a}_{BC}^n$ – касательная и нормальная составляющие ускорения точки B при вращении шатуна 2 вокруг полюса C . Направление касательной составляющей ускорения $\vec{a}_{BC}^\tau$ точки B выбрано в направлении вращения шатуна 2 (см. рис. 2.30) исходя из предположения его ускоренного движения. В результате ускорение точки A выражается векторной суммой:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_{AB}^\tau + \vec{a}_{AB}^n + \vec{a}_{BC}^\tau + \vec{a}_{BC}^n + \vec{a}_C.$$

Направления векторов ускорений показаны на рис. 2.31.

Заметим, что в любой момент времени движения колеса 1 расстояние от точки A до мгновенного центра скоростей колеса P_1 остаётся постоянным, равным радиусу колеса. Дифференцируем выражение $V_A = \omega_1 \cdot P_1 A = \omega_1 \cdot r_1$. Получим $\frac{dV_A}{dt} = \frac{d\omega_1}{dt} r_1 = \varepsilon_1 \cdot r_1$, откуда с учётом $\frac{dV_A}{dt} = a_A$ (прямолинейное движение точки A) угловое ускорение диска 1 $\varepsilon_1 = \frac{a_A}{r_1}$. В результате, касательное ускоре-

ние a_{AB}^τ точки A при вращении диска 1 вокруг полюса B $a_{AB}^\tau = \varepsilon_1 \cdot AB = a_A$.

Найдём модули векторов ускорений:

$$a_{AB}^n = \omega_1^2 \cdot AB = 15 \text{ м/с}^2; \quad a_{BC}^n = \omega_2^2 \cdot BC = 26 \text{ м/с}^2.$$

Ускорение $a_{BC}^\tau = \varepsilon_2 \cdot BC$ остаётся неизвестным. Применить здесь способ дифференцирования выражения $V_C = \omega_2 \cdot P_2 C$ для определения углового ускорения ε_2 невозможно, так как расстояние $P_2 C$ от мгновенного центра скоростей P_2 шатуна 2 до точки C меняется во время движения механизма неизвестным образом.

Спроектируем векторное равенство ускорения точки A на оси x , y , выбранные, как показано на рис. 2.31. Получим систему уравнений:

$$\text{проекция на ось } x: -a_A \cos 60^\circ = a_{AB}^\tau - a_{BC}^n - a_C \cos 60^\circ;$$

$$\text{проекция на ось } y: a_A \cos 30^\circ = a_{AB}^n - a_{BC}^\tau + a_C \cos 30^\circ.$$

Из первого уравнения с учётом того, что $a_{AB}^\tau = a_A$, найдём ускорение точки A : $a_A = 18,67 \text{ м/с}^2$. Положительное значение ускорения точки A означает, что вектор $\vec{a}_A$ направлен так, как показано на рис. 2.31, – в сторону направления вектора скорости $\vec{V}_A$. Из этого следует, что диск 1 движется ускоренно и угловое ускорение направлено в сторону его угловой скорости.

Из второго уравнения получим: $a_{BC}^\tau = 2,29 \text{ м/с}^2$. Угловое ускорение шатуна 2:

$\varepsilon_2 = \frac{|a_{BC}^\tau|}{BC} = 2,2 \text{ рад/с}^2$. Из того, что касательное ускорение a_{BC}^τ положительно, следует, что направление вектора $\vec{a}_{BC}^\tau$ совпадает с направлением, указанным на рис. 2.31. Это, в свою очередь, означает, что в данном положении механизма угловое ускорение шатуна 2 направлено так, как показано на рис. 2.31, – по направлению его угловой скорости, то есть шатун 2 вращается ускоренно.

Задача 35. По неподвижной шестерне 1 радиуса r_1 обкатывается шестерня 2 радиуса r_2 , насаженная в центре на кривошипе OA (рис. 2.32). Кривошип OA вращается вокруг оси O с угловой скоростью ω_{OA} и угловым ускорением ε_{OA} . На ободе шестерни 2 в точке B шарнирно прикреплен стержень BC , соединенный другим концом с центром C диска 3, катящегося без скольжения вдоль горизонтальной прямой. Радиус диска 3 равен радиусу шестерни 2: $r_3 = r_2$. Для положения механизма, изображенного на рис. 2.32, определить ускорение точки D и угловое ускорение стержня BC , если $r_1 = 0,2 \text{ м}$, $r_2 = 0,4 \text{ м}$, $\omega_{OA} = 4 \text{ рад/с}$, $\varepsilon_{OA} = 2 \text{ рад/с}^2$. Длина стержня $BC = 1 \text{ м}$.

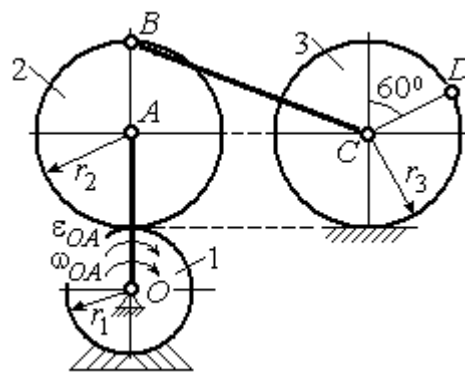


Рис. 2.32. Схема движения плоского механизма

Решение

Найдём угловые скорости звеньев механизма.

Рассмотрим вращательное движение кривошипа OA . Скорость его точки A : $V_A = \omega_{OA} \cdot OA = 2,4 \text{ м/с}$. Вектор скорости $\vec{V}_A$ направлен перпендикулярно кривошипу OA в сторону его вращения (рис. 2.33).

При качении подвижной шестерни 2 по неподвижной 1, точка их соприкосновения P_2 является мгновенным центром скоростей шестерни 2. Угловая скорость шестерни 2: $\omega_2 = \frac{V_A}{AP_2} = 6$ рад/с. Скорость точки B шестерни 2:

$$V_B = \omega_2 \cdot BP_2 = 4,8 \text{ м/с.}$$

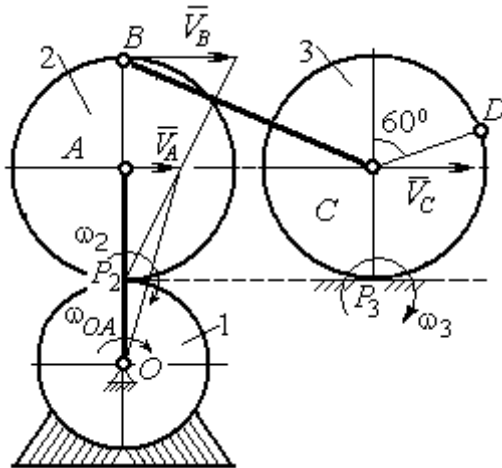


Рис. 2.33. Расчетная схема для определения угловых скоростей звеньев механизма

Для определения угловой скорости стержня BC заметим, что скорости двух точек стержня $\vec{V}_B$ и $\vec{V}_C$ параллельны, но точки B и C не лежат на общем перпендикуляре к скоростям. В этом случае мгновенный центр скоростей стержня BC отсутствует (или бесконечно удалён), угловая скорость стержня равна нулю и стержень совершает мгновенное поступательное движение.

При таком движении мгновенные скорости всех точек стержня BC одинаковы по величине и направлению. Таким образом, $\omega_{BC} = 0$; $V_C = V_B = 4,8$ м/с.

При качении диска 3 по неподвижной поверхности без проскальзывания точка P_3 касания диска с поверхностью является его мгновенным центром скоростей. Угловая скорость диска 3: $\omega_3 = \frac{V_C}{CP_3} = 12$ рад/с. Направление угловой скорости ω_3 определяется направлением вектора $\vec{V}_C$.

Найдём ускорения точек и угловые ускорения звеньев механизма.

Выразим ускорение $\vec{a}_C$ точки C , направленное вдоль линии движения центра колеса 3, через полюс B . Ускорение представляется векторной суммой: $\vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{a}_{CB}^n + \vec{a}_{CB}^{\tau}$, где $\vec{a}_B$ – вектор ускорения полюса B ; $\vec{a}_{CB}^n$, $\vec{a}_{CB}^{\tau}$ – нормальная и касательная составляющие ускорения точки C при вращении

стержня BC вокруг полюса B .

Вектор $\vec{a}_{CB}^n$ направлен вдоль стержня от точки C к полюсу B , вектор $\vec{a}_{CB}^\tau$ перпендикулярен стержню BC . Направление вектора $\vec{a}_{CB}^\tau$ выбрано по предполагаемому угловому ускорению стержня BC , показанному на рис. 2.34 дуговой стрелкой ε_{CB} .

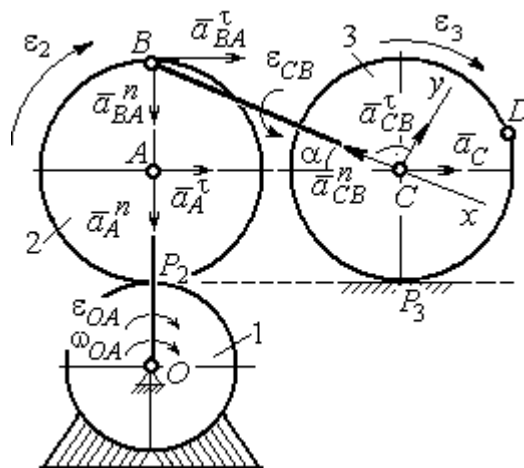


Рис. 2.34. Расчетная схема для определения ускорений точек механизма и угловых ускорений его звеньев

Рассмотрим плоскопараллельное движение шестерни 2 и выразим ускорение точки B через полюс A в виде векторного равенства: $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^\tau$, где $\vec{a}_A$ – ускорение полюса A ; $\vec{a}_{BA}^n$, $\vec{a}_{BA}^\tau$ – нормальная и касательная составляющие ускорения точки B при вращении шестерни 2 вокруг полюса A . Вектор $\vec{a}_{BA}^n$ направлен вдоль радиуса шестерни от точки B к полюсу A , вектор $\vec{a}_{BA}^\tau$ перпендикулярен линии BA . Направление вектора $\vec{a}_{BA}^\tau$ соответствует ускоренному вращению шестерни 2.

Рассмотрим вращение кривошипа OA . Вектор ускорения точки A кривошипа при вращении его вокруг неподвижной оси O представляется в виде суммы: $\vec{a}_A = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^\tau$, где $\vec{a}_A^n$ и $\vec{a}_A^\tau$ – вектора нормальной и касательной составляющих ускорения точки A . Вектор $\vec{a}_A^n$ направлен вдоль кривошипа по направлению к оси вращения, вектор $\vec{a}_A^\tau$ перпендикулярен кривошипу и направлен в сторону углового ускорения ε_{OA} вращения кривошипа.

В результате для определения ускорения точки C имеем векторное равенство:

$$\vec{a}_C = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^\tau + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^\tau + \vec{a}_{CB}^n + \vec{a}_{CB}^\tau.$$

Направления всех векторов ускорений показаны на рис. 2.34.

Вычислим модули векторов, составляющих векторную сумму:

$$a_A^n = \omega_{OA}^2 \cdot OA = 9,6 \text{ м/с}^2; \quad a_A^\tau = \varepsilon_{OA} \cdot OA = 1,2 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{BA}^n = \omega_2^2 \cdot BA = 14,4 \text{ м/с}^2; \quad a_{CB}^n = \omega_{BC}^2 \cdot BC = 0.$$

Заметим, что во время движения шестерни 2 расстояние AP_2 остается постоянным, равным r_2 . Дифференцируя равенство $V_A = \omega_2 \cdot AP_2 = \omega_2 r_2$, получим: $\frac{dV_A}{dt} = \frac{d\omega_2}{dt} r_2$. При криволинейном движении точки A производная от скорости

равна касательному ускорению: $\frac{dV_A}{dt} = a_A^\tau$. С учётом, что $\frac{d\omega_2}{dt} = \varepsilon_2$, по-

лучим: $a_A^\tau = \varepsilon_2 r_2$, откуда $\varepsilon_2 = \frac{a_A^\tau}{r_2} = 3 \text{ рад/с}^2$ и $a_{BA}^\tau = \varepsilon_2 \cdot BA = 1,2 \text{ м/с}^2$.

Выберем оси Cx , Cy , как показано на рис. 2.34, – вдоль отрезка BC и перпендикулярно ему и спроектируем на них векторное равенство ускорения точки C . Получим систему уравнений:

$$a_C \cos \alpha = a_A^n \sin \alpha + a_A^\tau \cos \alpha + a_{BA}^n \sin \alpha + a_{BA}^\tau \cos \alpha - a_{CB}^n;$$

$$a_C \sin \alpha = -a_A^n \cos \alpha + a_A^\tau \sin \alpha - a_{BA}^n \cos \alpha + a_{BA}^\tau \sin \alpha + a_{CB}^\tau,$$

где α – угол между стержнем BC и линией центров AC , $\sin \alpha = \frac{AB}{BC} = 0,4$; $\cos \alpha = 0,92$.

Находим из первого уравнения ускорение точки C : $a_C = 12,83 \text{ м/с}^2$, из второго – касательное ускорение точки C при вращении стержня BC вокруг полюса B : $a_{CB}^\tau = 33,95 \text{ м/с}^2$. Величина углового ускорения стержня BC :

$\varepsilon_{CB} = \frac{|a_{CB}^\tau|}{BC} = 33,95 \text{ рад/с}^2$. Положительное значение a_{CB}^τ означает, что вектор

касательного ускорения $\vec{a}_{CB}^\tau$ направлен так, как показано на рис. 2.34. Тогда и

направление углового ускорения ε_{CB} стержня BC совпадает с направлением, показанным дуговой стрелкой на рис. 2.34.

При качении диска 3 точка C движется по прямой и расстояние CP_3 остается постоянным, равным радиусу диска 3. В этом случае равенство $V_C = \omega_3 \cdot CP_3 = \omega_3 r_3$ можно продифференцировать

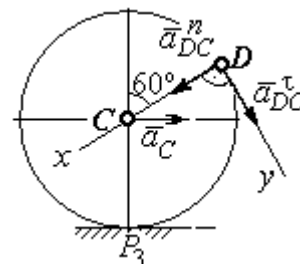


Рис.2.35. Расчетная схема для определения ускорения точки D

по времени. Получим: $\frac{dV_C}{dt} = \frac{d\omega_3}{dt} r_3$. Так как дви-

жение точки C является прямолинейным, производная от скорости точки C

равна ускорению этой точки: $\frac{dV_C}{dt} = a_C$. Тогда с учётом $\frac{d\omega_3}{dt} = \varepsilon_3$ имеем равен-

ство $a_C = \varepsilon_3 r_3$. Угловое ускорение диска 3: $\varepsilon_3 = \frac{a_C}{r_3} = 32,07 \text{ рад/с}^2$.

Выразим ускорение точки D через полюс C , ускорение которого известно и по величине, и по направлению: $\vec{a}_D = \vec{a}_C + \vec{a}_{DC}^n + \vec{a}_{DC}^\tau$, где $\vec{a}_C$ – ускорение точки C ; $\vec{a}_{DC}^n$, $\vec{a}_{DC}^\tau$ – нормальное и касательное составляющие ускорения точки D при вращении диска 3 вокруг полюса C . Модули ускорений

$$a_C = 12,83 \text{ м/с}^2; a_{DC}^n = \omega_3^2 DC = 57,6 \text{ м/с}^2; a_{DC}^\tau = \varepsilon_3 DC = 12,83 \text{ м/с}^2.$$

Проведём оси Dx и Dy , как показано на рис. 2.34, и спроектируем векторное равенство ускорения точки D на оси. Получим систему уравнений:

$$a_{Dx} = -a_C \cos 30^\circ + a_{DC}^n; \quad a_{Dy} = a_C \cos 60^\circ + a_{DC}^\tau.$$

Подставляя в уравнения проекций значения модулей ускорений, найдём: $a_{Dx} = 46,49 \text{ м/с}^2$; $a_{Dy} = 19,25 \text{ м/с}^2$.

$$\text{Величина ускорения точки } D: a_D = \sqrt{a_{Dx}^2 + a_{Dy}^2} = 50,32 \text{ м/с}^2.$$

Заметим, что для определения ускорения точки D невозможно было сразу использовать приём с последовательным выражением ускорения точки D через

ускорения полюсов C , B и A , так как в полученной в результате проекций системе двух уравнений будет три неизвестных величины - a_{Dx} , a_{Dy} и величина ускорения a_{CB}^{τ} .

Задача 36. Механизм качалки (рис. 2.36) включает в себя кривошип OA , вращающийся вокруг неподвижной оси O , шестерню 1 радиуса r_1 , насаженную

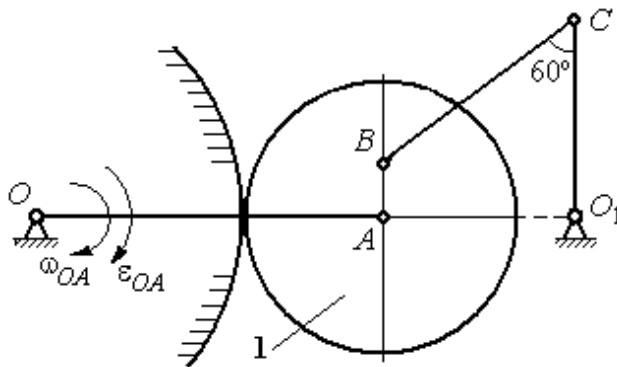


Рис. 2.36. Механизм качалки

на кривошип в точке A и обкатывающуюся по неподвижной цилиндрической поверхности, и шатун BC , присоединённый одним концом в точке B к шестерне, а другим – в точке C к коромыслу CO_1 . В положении,

указанном на рис. 2.36, определить угловую скорость и угловое ускорение коромысла CO_1 , если $\omega_{OA} = 2$ рад/с; $\epsilon_{OA} = 4$ рад/с²; $OA = 0,8$ м; $r_1 = 0,4$ м; $AB = 0,2$ м; $BC = 0,6$ м. Для этого же положения определить ускорение точки C .

Решение

Найдём угловые скорости звеньев механизма.

Скорость точки A кривошипа $V_A = \omega_{OA} \cdot OA = 1,6$ м/с. Вращаясь, кривошип передаёт движение шестерне 1, которая катится по неподвижной поверхности. Точка касания P_1 шестерни с неподвижной поверхностью является мгновенным центром скоростей шестерни. Тогда её угловая скорость $\omega_1 = \frac{V_A}{AP_1} = 4$ рад/с. Направление угловой скорости показано на рис. 2.37 дуговой стрелкой ω_1 .

Расстояние от мгновенного центра скоростей шестерни до её точки B $P_1B = 0,45$ м. Скорость точки B : $V_B = \omega_1 \cdot P_1B = 1,8$ м/с. Вектор скорости $\vec{V}_B$ перпендикулярен линии P_1B и направлен в сторону вращения шестерни.

При вращении коромысла CO_1 вокруг неподвижной оси O_1 вектор скорости $\vec{V}_C$ перпендикулярен коромыслу. Точка P_2 , лежащая на пересечении перпендикуляров, восстановленных к векторам $\vec{V}_B$ и $\vec{V}_C$ – скоростей точек B и C , является мгновенным центром скоростей шатуна BC (рис. 2.37). Расстояние $BK = BC \cos 30^\circ = 0,52$ м; $\cos \alpha = \frac{AP_1}{BP_1} = 0,89$; $P_2B = \frac{BK}{\cos \alpha} = 0,58$ м. Угловая скорость шатуна $\omega_{BC} = \frac{V_B}{BP_2} = 3,1$ рад/с.

Направление угловой скорости шатуна показано на рис. 2.37 дуговой стрелкой ω_{BC} .

Расстояние

$$P_2C = BC \cdot \sin 30^\circ - P_2B \cdot \sin \alpha = 0,04 \text{ м.}$$

Скорость точки C шатуна BC :

$V_C = \omega_{BC} \cdot P_2C = 0,12$ м/с. Длина коромысла $CO_1 = CK + KO_1 = 0,5$ м, угловая скорость коромысла $\omega_{CO_1} = \frac{V_C}{CO_1} = 0,24$ рад/с.

Найдём ускорения звеньев механизма.

Считая, что точка C принадлежит шатуну BC , выразим ускорение точки C через полюс B : $\vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{a}_{CB}^n + \vec{a}_{CB}^\tau$, где $\vec{a}_B$ – ускорение полюса B ; $\vec{a}_{CB}^n$, $\vec{a}_{CB}^\tau$ – нормальная и касательная составляющие вектора ускорения точки C при вращении шатуна вокруг полюса B .

Полагая, что точка B принадлежит шестерне 1, выразим её ускорение через полюс A : $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^\tau$, где $\vec{a}_A$ – ускорение точки A шестерни; $\vec{a}_{BA}^n$, $\vec{a}_{BA}^\tau$ – нормальная и касательная составляющие вектора ускорения точки B при вращении шестерни вокруг полюса A .

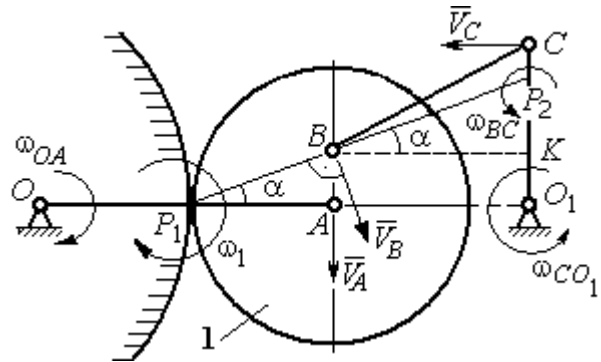


Рис. 2.37. Расчётная схема для определения угловых скоростей звеньев механизма

Поскольку точка A принадлежит и кривошипу OA , а точка C – коромыслу CO_1 , вращающихся вокруг своих неподвижных осей, вектора ускорений этих

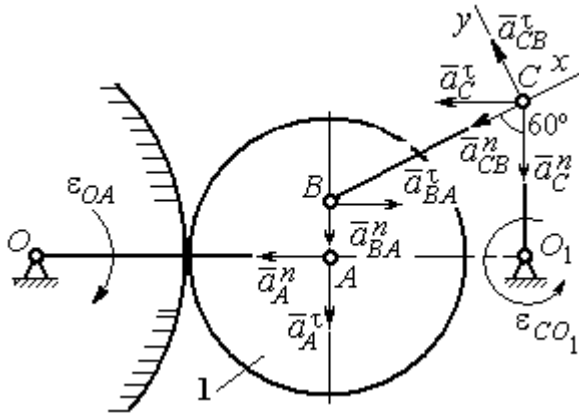


Рис. 2.38. Расчётная схема для определения ускорений точек механизма

точек можно представить в виде сумм векторов:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^\tau, \quad \vec{a}_C = \vec{a}_C^n + \vec{a}_C^\tau,$$

где $\vec{a}_A^n$, $\vec{a}_A^\tau$ – нормальная и касательная составляющие вектора ускорения точки A при вращении кривошипа вокруг оси O ; $\vec{a}_C^n$, $\vec{a}_C^\tau$ – нормальная и касательная составляющие

вектора ускорения точки C при вращении коромысла вокруг оси O_1 .

В результате подстановок получим полное векторное равенство, связывающее ускорения точек механизма:

$$\vec{a}_C^n + \vec{a}_C^\tau = \vec{a}_{CB}^n + \vec{a}_{CB}^\tau + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^\tau + \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^\tau.$$

Направления векторов ускорений показаны на рис. 2.38.

Модули векторов ускорений:

$$a_C^n = \omega_{CO_1}^2 \cdot CO_1 = 0,03 \text{ м/с}^2; \quad a_{CB}^n = \omega_{CB}^2 \cdot CB = 5,77 \text{ м/с}^2,$$

$$a_A^n = \omega_{OA}^2 \cdot OA = 3,2 \text{ м/с}^2; \quad a_A^\tau = \varepsilon_{OA} \cdot OA = 3,2 \text{ м/с}^2,$$

$$a_{BA}^n = \omega_1^2 \cdot BA = 3,2 \text{ м/с}^2; \quad a_{BA}^\tau = \varepsilon_1 \cdot BA.$$

Для определения ε_1 углового ускорения шестерни 1 продифференциру-

ем равенство $V_A = \omega_1 \cdot AP_1 = \omega_1 r_1$. Получим: $a_A^\tau = \varepsilon_1 r_1$, откуда $\varepsilon_1 = \frac{a_A^\tau}{r_1} = 8 \text{ рад/с}^2$.

Тогда $a_{BA}^\tau = 1,6 \text{ м/с}^2$.

Неизвестными в векторном равенстве ускорений остаются модули векторов $\vec{a}_{CB}^\tau$ и $\vec{a}_C^\tau$. Выберем ось x вдоль шатуна BC , как показано на рис. 2.38, и спроектируем на неё полное векторное равенство.

Получим уравнение:

$$-a_C^n \cos 60^\circ - \vec{a}_C^\tau \cos 30^\circ = -a_{CB}^n - a_{BA}^n \cos 60^\circ + a_{BA}^\tau \cos 30^\circ - a_A^n \cos 30^\circ - a_A^\tau \cos 60^\circ,$$

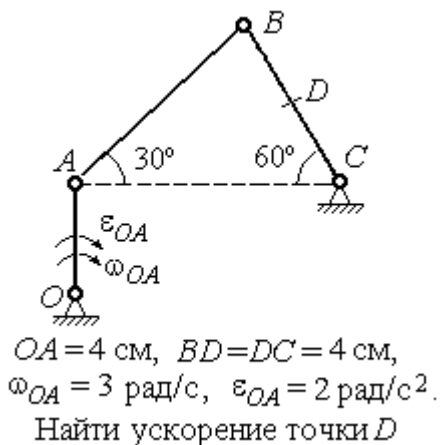
откуда найдём ускорение $a_C^\tau = 11,94 \text{ м/с}^2$. Угловое ускорение качалки

$$\varepsilon_{CO_1} = \frac{|\vec{a}_C^\tau|}{CO_1} = 23,88 \text{ рад/с}^2.$$

Положительное значение касательного ускорения a_C^τ свидетельствует о том, что направление вектора ускорения $\vec{a}_C^\tau$ совпадает с направлением, показанным на рис. 2.38. В эту же сторону направлена и скорость $\vec{V}_C$ точки C (см. рис. 2.37). Следовательно, в данном положении движение качалки ускоренное и угловое ускорение направлено в сторону угловой скорости.

Упражнения

Упражнения 2.9



Упражнения 2.10

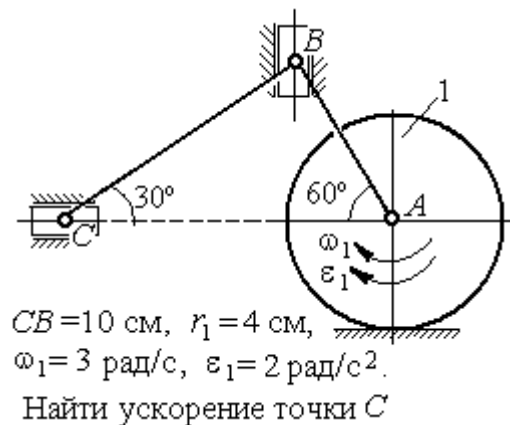


Рис. 2.39. Задания для самостоятельного решения. Упражнения 2.9, 2.10

3. СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

3.1. Основные понятия и определения сложного движения точки

Рассматривается подвижное твердое тело и точка, перемещающаяся относительно тела.

Неподвижная система координат, относительно которой определяются движения точки и тела, называется **основной**. Связанная с телом и движущаяся вместе с ним система координат называется **подвижной**.

Движение точки относительно подвижной системы координат (фактически движение точки относительно тела) называется **относительным**. **Переносным** движением называют движение, которое совершает точка вместе с подвижной системой координат (фактически вместе с телом). Движение точки относительно основной (неподвижной) системы координат называется **абсолютным**.

Скорость точки относительно подвижной системы координат называют **относительной скоростью**, ускорение – **относительным ускорением**.

Переносной скоростью точки и **переносным ускорением** называют скорость и ускорение той точки тела, с которой в данный момент совпадает движущаяся точка.

Скорость и ускорение точки относительно основной системы называют **абсолютной скоростью и абсолютным ускорением**.

При вычислении абсолютной скорости используется теорема о сложении скоростей: **скорость абсолютного движения точки равна векторной сумме переносной и относительной скоростей**: $\vec{V} = \vec{V}_e + \vec{V}_r$, где $\vec{V}$, $\vec{V}_e$, $\vec{V}_r$ – вектора абсолютной, переносной и относительной скоростей точки.

При вычислении абсолютного ускорения используется теорема Кориолиса о сложении ускорений: **абсолютное ускорение точки равно векторной сумме трех ускорений – относительного, переносного и ускорения Кориолиса**: $\vec{a} = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_k$, где $\vec{a}$ – вектор абсолютного ускорения точки; $\vec{a}_e, \vec{a}_r$ –

вектора соответственно переносного и относительного ускорений точки; $\vec{a}_k$ – вектор ускорения Кориолиса.

Вектор ускорения Кориолиса определяется векторным произведением: $\vec{a}_k = 2(\vec{\omega}_e \times \vec{V}_r)$, где $\vec{\omega}_e$ – вектор угловой скорости переносного движения; $\vec{V}_r$ – вектор относительной скорости точки. Модуль ускорения Кориолиса:

$$|\vec{a}_k| = 2|\vec{\omega}_e| \cdot |\vec{V}_r| \sin \alpha, \quad \text{где } \alpha -$$

угол между вектором угловой скорости переносного движения $\vec{\omega}_e$ и вектором относительной скорости точки $\vec{V}_r$ (рис. 3.1).

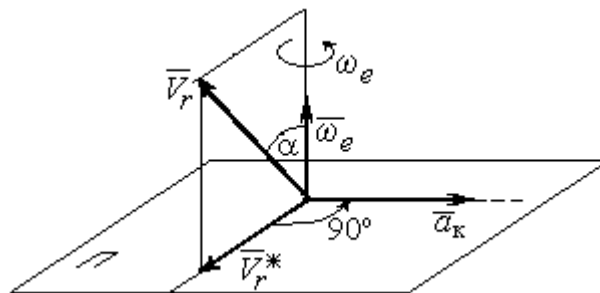


Рис. 3.1. Определение ускорения Кориолиса по правилу Жуковского

На рис. 3.1 показан способ определения вектора ускорения Кориолиса по правилу Н. Е. Жуковского. Правило состоит в следующем. Построим плоскость Π , перпендикулярную вектору угловой скорости $\vec{\omega}_e$, и спроектируем вектор относительной скорости $\vec{V}_r$ на эту плоскость. Проекцию обозначим $\vec{V}_r^*$ (см. рис. 3.1). Чтобы получить направление ускорения Кориолиса, следует вектор проекции относительной скорости $\vec{V}_r^*$ повернуть на 90° в плоскости Π вокруг оси переносного вращения в направлении этого вращения.

Если сложное движение точки происходит в плоскости, перпендикулярной оси переносного вращения, направление ускорения Кориолиса можно получить простым поворотом вектора относительной скорости на угол 90° вокруг оси переносного вращения в направлении этого вращения. При этом модуль ускорения Кориолиса $a_k = 2|\omega_e| \cdot |V_r| \sin 90^\circ = 2\omega_e V_r$.

Примеры решения задач на сложное движение точки

Задача 37. Компрессор с криволинейными каналами (рис. 3.2) вращается с постоянной угловой скоростью $\omega = 10$ рад/с вокруг оси O , перпендикулярной

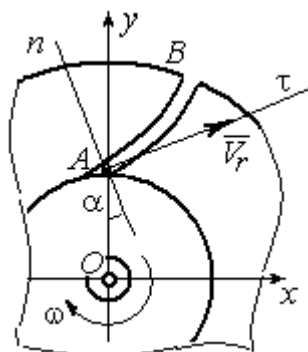


Рис.3.2. Движение воздуха по каналу компрессора

плоскости рисунка. Воздух перемещается по каналу AB с постоянной относительной скоростью $V_r = 4$ м/с. Найти ускорение частицы воздуха в начале канала в точке A и проекции этого ускорения на оси неподвижной системы координат xOy , если радиус $OA = 0,5$ м, радиус кривизны канала в точке A $\rho = 0,8$ м, угол между нормалью n к кривой AB в точке A и радиусом OA $\alpha = 30^\circ$.

Решение

Переносным движением для частицы воздуха будет вращательное движение компрессора, а скорость точки A компрессора, где по условию находится частица воздуха, будет её переносной скоростью: $V_e = \omega \cdot OA = 5$ м/с. Вектор $\vec{V}_e$ переносной скорости частицы перпендикулярен радиусу OA и направлен в сторону угловой скорости вращения компрессора (рис. 3.3).

Вектор $\vec{V}_r$ относительной скорости частицы воздуха направлен вдоль касательной к кривой AB (стенки канала) в точке A .

Вектор абсолютной скорости частицы воздуха равен геометрической сумме векторов относительной и переносной скоростей:

$\vec{V} = \vec{V}_r + \vec{V}_e$ (см. рис. 3.3). Спроектируем это векторное равенство на оси x, y . Получим систему уравнений:

$$V_x = V_e + V_r \cos 30^\circ = 8,46 \text{ м/с}; \quad V_y = V_r \cos 60^\circ = 2 \text{ м/с}.$$

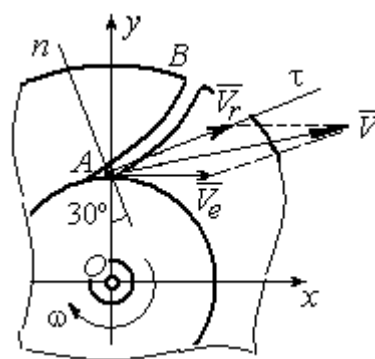


Рис. 3.3. Построение вектора абсолютной скорости частицы

Модуль абсолютной скорости $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = 8,69$ м/с.

Найдём ускорение частицы воздуха.

Абсолютное ускорение частицы определяется по теореме сложения ускорений:

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_k.$$

В относительном движении частица движется между стенками канала по криволинейной траектории, и её ускорение $\vec{a}_r$ представляется суммой: $\vec{a}_r = \vec{a}_r^n + \vec{a}_r^\tau$, где $\vec{a}_r^n$, $\vec{a}_r^\tau$ – вектора нормальной и касательной составляющих относительного ускорения частицы.

Переносное ускорение частицы $\vec{a}_e$ есть ускорение точки A вращающегося компрессора, которое выражается суммой $\vec{a}_e = \vec{a}_e^n + \vec{a}_e^\tau$, где $\vec{a}_e^n$, $\vec{a}_e^\tau$ – вектора нормальной и касательной составляющих переносного ускорения частицы.

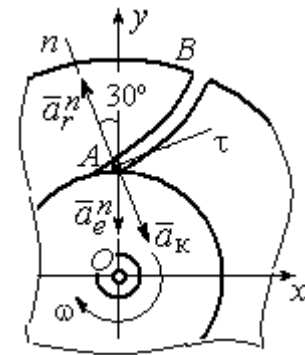


Рис. 3.4. Составляющие ускорения частицы в сложном движении

В результате абсолютное ускорение частицы воздуха в точке A выражается векторной суммой:

$$\vec{a} = \vec{a}_r^n + \vec{a}_r^\tau + \vec{a}_e^n + \vec{a}_e^\tau + \vec{a}_k.$$

Вычислим модули ускорений:

$$a_r^\tau = \dot{V}_r = 0, \quad a_r^n = \frac{V_r^2}{\rho} = 20 \text{ м/с}^2; \quad a_e^\tau = \varepsilon \cdot OA = \dot{\omega} \cdot OA = 0,$$

$$a_e^n = \omega^2 r = 50 \text{ м/с}^2; \quad a_k = 2\omega V_r = 80 \text{ м/с}^2.$$

Направление ускорения Кориолиса определяется простым поворотом вектора относительной скорости на угол 90° вокруг оси переносного вращения в направлении этого вращения. Вектора ускорений показаны на рис. 3.4.

Спроектируем векторное равенство ускорения частицы на оси неподвижной системы координат xOy . Получим:

$$a_x = -a_r^n \cos 60^\circ + a_k \cos 60^\circ = 30 \text{ м/с}^2 ;$$

$$a_y = a_r^n \cos 30^\circ - a_e^n - a_k \cos 30^\circ = -101,96 \text{ м/с}^2.$$

$$\text{Модуль ускорения } a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 106,28 \text{ м/с}^2.$$

Задача 38. При совмещении работы механизмов подъёма груза и поворо-

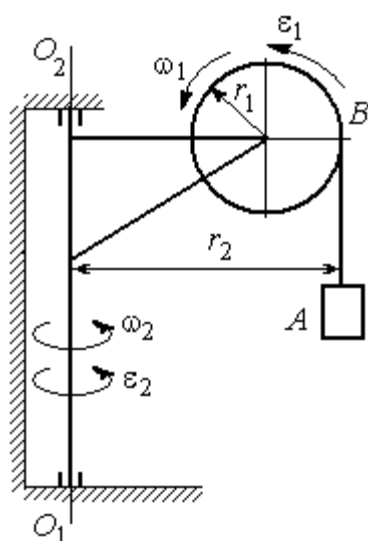


Рис. 3.5. Механизм поворотного крана

та крана (рис. 3.5) груз A перемещается в горизонтальном и вертикальном направлениях. На участке разгона барабан B радиуса $r_1 = 0,5$ м, на который навит канат, поддерживающий груз, вращается с постоянным угловым ускорением $\varepsilon_1 = 3 \text{ рад/с}^2$, а кран разворачивается вокруг оси O_1O_2 с угловым ускорением $\varepsilon_2 = 0,5 \text{ рад/с}^2$.

Пренебрегая отклонением каната от вертикали, определить скорость и ускорение груза в момент времени $t_1 = 1$ с, если вылет стрелы крана до линии подвеса груза $r_2 = 10$ м.

Решение

Подъём груза A на канате является для груза относительным движением, а вращение крана – переносным. Вектор абсолютной скорости груза равен сумме $\vec{V} = \vec{V}_r + \vec{V}_e$, где вектора относительной $\vec{V}_r$ и переносной $\vec{V}_e$ скоростей.

При равноускоренном вращении барабана B из состояния покоя его угловая скорость $\omega_1 = \varepsilon_1 t$. В момент времени $t_1 = 1$ с $\omega_1 = 3 \text{ рад/с}$. Скорость подъёма груза A в этот момент $V_r(1) = \omega_1(1)r_1 = 1,5 \text{ м/с}$. Вектор относительной скорости $\vec{V}_r$ направлен вдоль линии движения груза, в сторону его подъёма (рис. 3.6).

Угловая скорость крана при постоянном угловом ускорении $\omega_2 = \varepsilon_2 t$.

При $t_1 = 1$ с $\omega_2 = 0,5$ рад/с. Переносная скорость груза A равна скорости груза, движущегося вместе со стрелой крана по окружности радиуса r_2 : $V_e = \omega_2 r_2 = 5$ м/с. Вектор переносной скорости груза $\vec{V}_e$ направлен по касательной к траектории переносного движения груза в сторону угловой скорости вращения крана (см. рис. 3.6).

Так как вектора относительной и переносной скоростей груза взаимно перпендикулярны, модуль абсолютной скорости $V = \sqrt{V_r^2 + V_e^2} = 5,22$ м/с.

Найдём абсолютное ускорение груза.

Теорема сложения ускорений имеет вид векторной суммы: $\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_k = \vec{a}_r^n + \vec{a}_r^\tau + \vec{a}_e^n + \vec{a}_e^\tau + \vec{a}_k$, где $\vec{a}_r^n$, $\vec{a}_r^\tau$, $\vec{a}_e^n$, $\vec{a}_e^\tau$, $\vec{a}_k$ – вектора нормального и касательного ускорений груза в относительном и переносном движениях и ускорение Кориолиса. Найдём модули векторов ускорений.

Нормальное относительное ускорение a_r^n груза, движущегося прямолинейно, равно нулю: $a_r^n = 0$, а касательное a_r^τ равно по величине касательному ускорению точки на поверхности барабана: $a_r^\tau = \varepsilon_1 r_1 = 1,5$ м/с². Направление вектора $\vec{a}_r^\tau$ относительного касательного ускорения груза определяется направлением углового ускорения барабана.

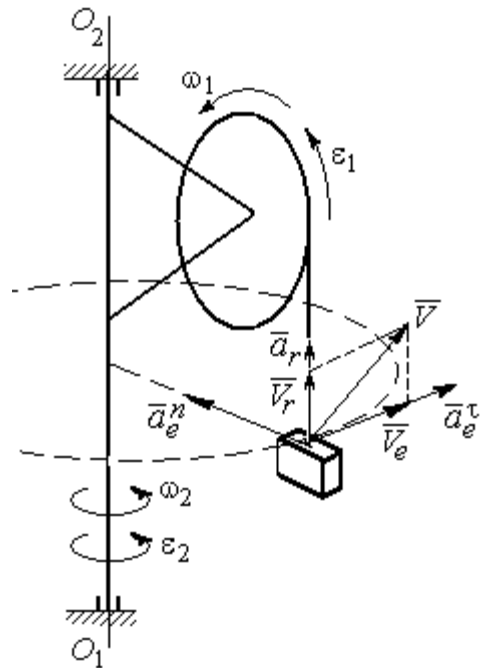


Рис. 3.6. Расчётная схема для определения скорости и ускорения груза на поворотном кране

Переносные нормальное a_e^n и касательное a_e^τ ускорения груза: $a_e^n = \omega_2^2 r_2 = 2,5 \text{ м/с}^2$; $a_e^\tau = \varepsilon_2 r_2 = 5 \text{ м/с}^2$. Вектор касательного ускорения $\vec{a}_e^\tau$ направлен в сторону углового ускорения вращения крана.

Ускорение Кориолиса a_k равно нулю, так как вектор $\vec{V}_r$ параллелен вектору $\vec{\omega}_2$: $a_k = 0$.

Направления векторов ускорений, модули которых отличны от нуля, показаны на рис. 3.6. В результате вектор абсолютного ускорения груза представлен в виде разложения на три взаимно перпендикулярных вектора: $\vec{a} = \vec{a}_e^n + \vec{a}_e^\tau + \vec{a}_r^\tau$, поэтому модуль абсолютного ускорения груза $a = \sqrt{(a_e^n)^2 + (a_e^\tau)^2 + (a_r^\tau)^2} = 5,79 \text{ м/с}^2$.

Задача 39. Фигура, состоящая из половины диска и построенного на его диаметре равнобедренного треугольника (рис. 3.7), вращается вокруг оси, перпендикулярной плоскости фигуры и проходящей через вершину A треугольника, по закону $\varphi_e = 5t - 2t^2$ рад. Положительное направление вращения отмечено на схеме дуговой стрелкой φ .

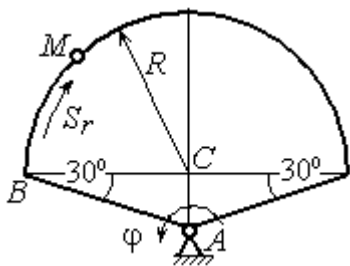


Рис. 3.7. Схема сложного движения точки

По ободу диска из начального положения B движется точка M . Уравнение движения точки:

$B\ddot{M} = S_r = 9\pi t^2$, см.. Положительное направление отсчёта дуги BM показано дуговой стрелкой S_r (см. рис. 3.7). Радиус диска $R = 9$ см. Найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M в момент времени $t_1 = 1$ с.

Решение

Переносным движением точки M является вращение фигуры вокруг оси A , относительным – её движение по окружности обода диска.

$\alpha = \frac{S_r}{R}$, где S_r – длина дуги окружности, пройденная точкой. В момент времени $t_1 = 1$ с $S_r = 9\pi$ см и $\alpha = \pi$. Расчётное положение точки M на рис. 3.8 обозначено M_1 .

Направление угловой скорости определяется знаком производной $\dot{\varphi}_e$. Положительная на данный момент времени величина производной ($\dot{\varphi}_e = 1$) показывает, что вращение фигуры происходит в положительном направлении отсчёта угла φ_e и отмечено на рис. 3.8 дуговой стрелкой ω_e .

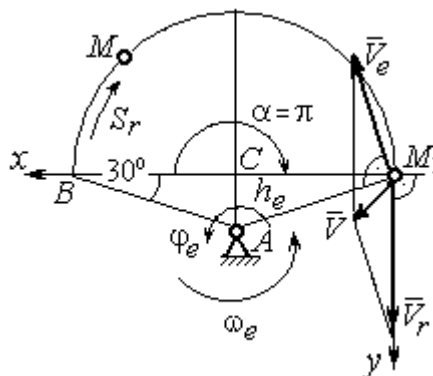


Рис. 3.8. Расчетная схема для вычисления абсолютной скорости точки

Переносная скорость точки V_e – это скорость расчётного положения точки M вращающейся фигуры: $V_e = \omega_e h_e = \omega_e AM_1 = \frac{\omega_e R}{\cos 30^\circ} = 10,39$ см/с. Вектор переносной скорости точки $\vec{V}_e$ перпендикулярен отрезку AM_1 и направлен в сторону вращения фигуры (см. рис. 3.8).

Скорость точки в относительном движении определяется как модуль производной: $V_r = |\dot{S}_r| = |18\pi t|$. При $t_1 = 1$ с $V_r = 56,5$ см/с. Положительное значение производной $\dot{S}_r = 18\pi > 0$ указывает, что в этот момент времени относительное движение точки происходит в положительном направлении отсчёта дуги окружности, по которой движется точка. Вектор $\vec{V}_r$ относительной скорости точки перпендикулярен отрезку CM_1 и направлен в сторону её движения.

Абсолютная скорость точки равна сумме векторов переносной и относительной скоростей $\vec{V} = \vec{V}_e + \vec{V}_r$. Для того чтобы найти абсолютную скорость

точки, выберем оси координат M_1x , M_1y , как показано на рис. 3.8, и спроектируем обе части векторного равенства теоремы сложения скоростей на эти оси:

$$V_x = V_e \cos 60^\circ = 5,2 \text{ см/с}, \quad V_y = -V_e \cos 30^\circ + V_r = 47,5 \text{ см/с}.$$

Модуль абсолютной скорости: $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = 47,8 \text{ см/с}.$

Абсолютное ускорение точки определяется по теореме сложения ускорений: $\vec{a} = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_k.$

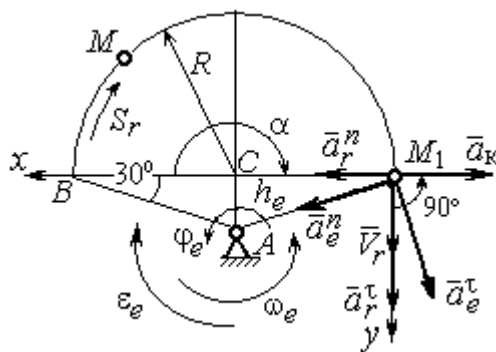


Рис. 3.9. Расчетная схема для определения абсолютного ускорения точки

Переносное ускорение точки представляется в виде суммы: $\vec{a}_e = \vec{a}_e^\tau + \vec{a}_e^n$, где $\vec{a}_e^\tau$ и $\vec{a}_e^n$ – переносные касательное и нормальное ускорения. В относительном движении точки (по дуге окружности) ускорение также может быть разложено на две составляющие – относительные касательное и нормальное ускорения: $\vec{a}_r = \vec{a}_r^\tau + \vec{a}_r^n$. В результате теорема о сложении ускорений приобретает вид: $\vec{a} = \vec{a}_r^\tau + \vec{a}_r^n + \vec{a}_e^\tau + \vec{a}_e^n + \vec{a}_k.$

ма о сложении ускорений приобретает вид: $\vec{a} = \vec{a}_r^\tau + \vec{a}_r^n + \vec{a}_e^\tau + \vec{a}_e^n + \vec{a}_k.$

Вычислим модули и направления векторов ускорений в расчётном положении точки M_1 .

Относительное касательное ускорение a_r^τ вычисляется по формуле: $a_r^\tau = |\ddot{S}_r|$, где $\ddot{S}_r = 18\pi = 56,5 \text{ см/с}^2$. Так как значение второй производной $\ddot{S}_r$ положительно, вектор ускорения $\vec{a}_r^\tau$ направлен по касательной в сторону положительного отсчёта траектории относительного движения. Относительное нормальное ускорение точки a_r^n вычисляется по формуле: $a_r^n = \frac{V_r^2}{R}$ и в момент $t_1 = 1 \text{ с}$ равно $355,3 \text{ см/с}^2$. Вектор ускорения $\vec{a}_r^n$ направлен по радиусу диска к центру C (рис. 3.9).

Угловое ускорение фигуры в момент времени $t_1 = 1$ с, $\varepsilon_e = |\ddot{\phi}_e| = 4$ рад/с².

Поскольку значение второй производной угла поворота отрицательное ($\ddot{\phi}_e = -4$ рад/с²), то угловое ускорение направлено в сторону, противоположную положительному направлению отсчёта угла поворота фигуры, как показано на рис. 3.9 дуговой стрелкой ε_e . Модуль переносного касательного ускорения a_e^τ определяется по формуле $a_e^\tau = \varepsilon_e h_e = \varepsilon_e \cdot AM_1$ и в момент времени $t_1 = 1$ с равен 41,6 см/с². Вектор переносного касательного ускорения точки $\vec{a}_e^\tau$ перпендикулярен AM_1 и направлен в сторону углового ускорения фигуры ε_e (см. рис. 3.9). Переносное нормальное ускорение вычисляется по формуле $a_e^n = \omega_e^2 h_e = \omega_e^2 \cdot AM_1$ и на момент времени $t_1 = 1$ с: $a_e^n = 10,4$ см/с². Вектор переносного нормального ускорения $\vec{a}_e^n$ направлен вдоль отрезка M_1A к оси вращения тела (см. рис. 3.9).

Модуль ускорения Кориолиса в момент времени $t_1 = 1$ с $a_k = 2\omega V_r = 113,1$ см/с². По условию задачи вектор $\vec{V}_r$ скорости относительного движения точки перпендикулярен вектору $\vec{\omega}_e$ угловой скорости переносного движения. В этом случае для определения направления ускорения Кориолиса достаточно повернуть вектор относительной скорости $\vec{V}_r$ на 90° в сторону переносного движения (см. рис. 3.9).

Для определения абсолютного ускорения точки выберем оси M_1x и M_1y , как показано на рис. 3.9, и спроектируем обе части векторного равенства теоремы сложения ускорений на эти оси. Получим:

$$a_x = -a_e^\tau \cos 60^\circ + a_e^n \cos 30^\circ + a_r^n - a_k = 230,4 \text{ см/с}^2;$$

$$a_y = a_e^\tau \cos 30^\circ + a_e^n \cos 60^\circ + a_r^\tau = 97,9 \text{ см/с}^2.$$

Модуль абсолютного ускорения

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 250,3 \text{ см/с}^2.$$

Задача 40. Диск (рис. 3.10) вращается вокруг оси O_1O_2 , проходящей вдоль вертикального диаметра, с угловой скоростью $\omega = 2t^2 + 4\cos\pi t$ рад/с. Положительное направление отсчёта угла поворота диска отмечено на схеме дуговой стрелкой φ . Вдоль другого диаметра диска, наклоненного под углом 30° к вертикальному, движется точка M по закону $CM = S_r = (4t - 1)^2 - 1$ см. Расстояние отсчитывается от точки C на краю диска. Положительное направление движения точки M показано стрелкой S_r . Радиус диска $R = 4$ см. Найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M

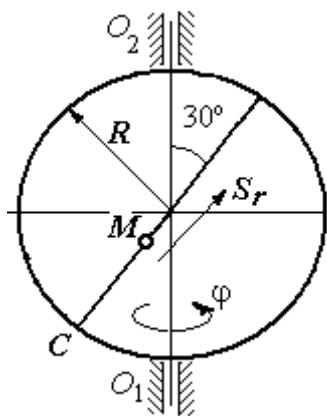


Рис. 3.10. Схема сложного движения точки

в момент времени $t_1 = 1$ с.

Решение

Переносным движением точки M является вращение диска вокруг вертикального диаметра, относительным – её прямолинейное движение вдоль наклонного диаметра диска.

Расстояние S_r , пройденное точкой, к моменту времени $t_1 = 1$ с равно 8 см. При радиусе диска $R = 4$ см точка M в данный момент времени находится на противоположном от точки C конце диаметра. На рис. 3.11 это положение обозначено буквой M_1 .

Угловая скорость диска равна модулю производной: $\omega = |\dot{\varphi}| = |2 + 4\cos\pi t|$ и при $t_1 = 1$ с $\omega = 2$ рад/с. Направление угловой скорости определяется по знаку производной $\dot{\varphi}$. В данном случае производная имеет отрицательное значение ($\dot{\varphi} = -2$ рад/с). Это означает, что вращение диска происходит в сторону, противоположную положительному направлению отсчёта угла поворота. Направление угловой скорости диска в данный момент времени отмечено на рис. 3.11 дуговой стрелкой ω .

Переносная скорость точки V_e – это скорость точки M_1 на вращающемся диске: $V_e = \omega h_e = \omega \cdot KM_1$, где $KM_1 = h_e$ – расстояние от оси вращения диска до точки M_1 . Очевидно, $KM_1 = 0,5R = 2$ см. При $t_1 = 1$ с величина переносной скорости $V_e = 4$ см/с. Вектор переносной скорости $\vec{V}_e$ перпендикулярен плоскости диска $O_1M_1O_2$ и направлен в сторону вращения диска (рис. 3.11, а).

(На рис. 3.11, а символ $\odot$ рядом с вектором означает, что данный вектор направлен перпендикулярно плоскости рисунка «к нам», символ $\oplus$ – «от нас».)

Относительная скорость точки равна модулю производной: $V_r = |\dot{S}_r| =$

$= |8(4t - 1)|$. При $t_1 = 1$ с $V_r = 24$ см/с. Положительное значение самой производной $\dot{S}_r$ указывает, что относительное движение точки в данный момент времени происходит в положительном направлении. Вектор $\vec{V}_r$ относительной скорости точки в положении M_1 направлен вдоль диаметра диска CM_1 в сторону движения.

Абсолютная скорость точки равна сумме векторов переносной и относительной скоростей: $\vec{V} = \vec{V}_e + \vec{V}_r$. Так как векторы $\vec{V}_e$ и $\vec{V}_r$ взаимно перпендикулярны, модуль абсолютной скорости $V = \sqrt{V_e^2 + V_r^2} = 24,33$ см/с. Вектор абсолютной скорости на рис. 3.11 не показан.

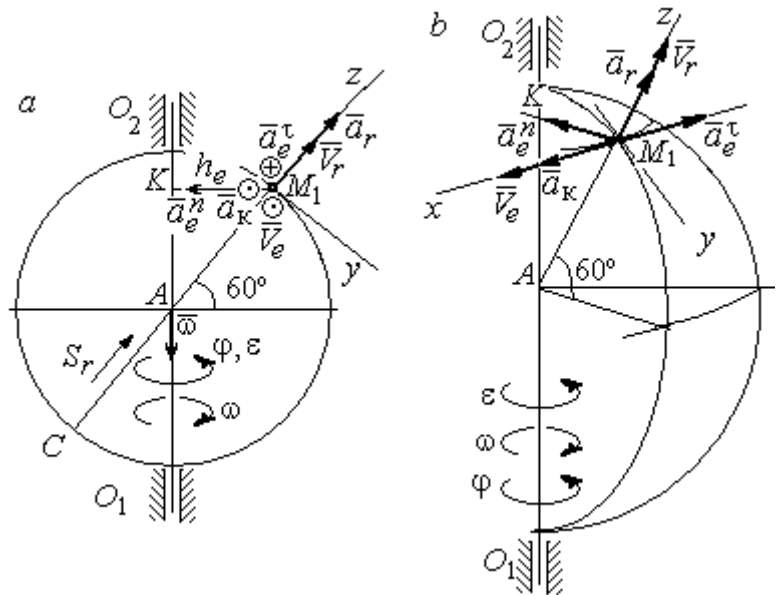


Рис. 3.11. Расчётная схема определения абсолютной скорости и ускорения точки:
а – плоская модель движения;
б – пространственная модель движения

Абсолютное ускорение точки определяется векторной суммой, которая при прямолинейном относительном и вращательном переносном движениях представляется в виде: $\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_e^\tau + \vec{a}_e^n + \vec{a}_k$.

Относительное ускорение точки $a_r = |\ddot{S}_r| = 32 \text{ см/с}^2$. Так как значение второй производной $\ddot{S}_r$ положительно, вектор ускорения $\vec{a}_r$ в точке M_1 направлен по линии движения точки в сторону положительного направления (см. рис. 3.11).

Угловое ускорение диска $\varepsilon = |\dot{\omega}| = |4t - 4\pi \sin \pi t|$. В момент времени $t_1 = 1 \text{ с}$ $\varepsilon = 4 \text{ рад/с}^2$. Положительное значение производной в данный момент времени ($\dot{\omega} = 4 \text{ рад/с}^2$) означает, что угловое ускорение ε направлено в сторону положительного направления отсчёта угла поворота диска. Направление углового ускорения показано на рис. 3.11 дуговой стрелкой ε . Модуль переносного касательного ускорения a_e^τ определяется по формуле $a_e^\tau = \varepsilon h_e$, и при $t_1 = 1 \text{ с}$ $a_e^\tau = 8 \text{ см/с}^2$. Вектор ускорения $\vec{a}_e^\tau$ перпендикулярен плоскости диска $O_1M_1O_2$ в точке M_1 и направлен в сторону углового ускорения (противоположно вектору скорости).

Переносное нормальное ускорение a_e^n рассчитывается по формуле $a_e^n = \omega^2 h_e = \omega^2 \cdot KM_1$, и при $t_1 = 1 \text{ с}$ $a_e^n = 8 \text{ см/с}^2$. Вектор переносного нормального ускорения $\vec{a}_e^n$ направлен вдоль отрезка M_1K к оси вращения диска (см. рис. 3.11).

Вектор скорости относительного движения точки $\vec{V}_r$ составляет с вектором угловой скорости переносного движения $\vec{\omega}$ угол 150° . Модуль ускорения Кориолиса на момент времени $t_1 = 1 \text{ с}$ $a_k = 2|\omega||V_r|\sin 150^\circ = 48 \text{ см/с}^2$. Направление вектора ускорения Кориолиса определяем по правилу Жуковского. Так, вектор относительной скорости точки $\vec{V}_r$ проектируем на плоскость, перпенди-

кулярную вектору $\vec{\omega}$ (т. е. на плоскость, перпендикулярную оси вращения тела). На рис 3.11, a это будет проекция на линию KM_1 . Далее следует повернуть вектор проекции относительной скорости вокруг оси вращения на 90° в сторону угловой скорости вращения диска. На рис 1.11, a вектор ускорения Кориолиса перпендикулярен плоскости рисунка в точке M_1 и направлен «на нас».

Для определения абсолютного ускорения точки выберем оси координат M_1x , M_1y и M_1z , как показано на рис. 3.11 (на рис. 3.11, a ось M_1x направлена перпендикулярно рисунку «к нам» и на рисунке не показана). Спроектируем обе части векторного равенства теоремы сложения ускорений на оси

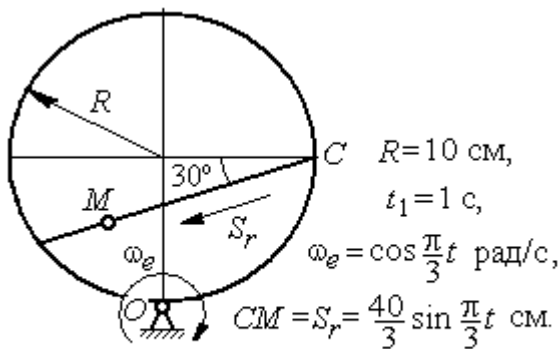
$$a_x = -a_e^\tau + a_k = 40 \text{ см/с}^2; \quad a_y = -a_e^n \cos 30^\circ = 6,93 \text{ см/с}^2;$$

$$a_z = a_r - a_e^n \cos 60^\circ = 28 \text{ см/с}^2.$$

$$\text{Модуль абсолютного ускорения } a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = 49,32 \text{ см/с}^2.$$

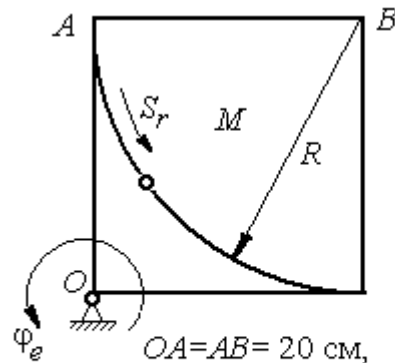
Упражнения

Упражнение 3.1



Найти скорость и ускорение точки M в момент $t = t_1$

Упражнение 3.2



Найти скорость и ускорение точки M в момент $t = t_1 = 1 \text{ с}$

Рис. 3.12. Задания для самостоятельного решения. Упражнения 3.1, 3.2

4. ДИНАМИКА ТОЧКИ

4.1. Дифференциальные уравнения движения точки

Движение материальной точки под действием системы сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_K$ в прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$ описывается **дифференциальными уравнениями**:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = \sum F_{kx}, \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = \sum F_{ky}, \quad m \frac{d^2 z}{dt^2} = \sum F_{kz}.$$

Обозначая вторые производные от координат по времени двумя точками, уравнения движения можно записать в виде:

$$m \ddot{x} = \sum F_{kx}; \quad m \ddot{y} = \sum F_{ky}; \quad m \ddot{z} = \sum F_{kz},$$

где m – масса точки; x, y, z – текущие координаты точки; $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$ – проекции вектора ускорения точки на оси координат; $\sum F_{kx}, \sum F_{ky}, \sum F_{kz}$ – алгебраические суммы проекций всех сил на оси координат.

Для удобства интегрирования дифференциальные уравнения движения иногда представляют в виде:

$$m \frac{dV_x}{dt} = \sum F_{kx}; \quad m \frac{dV_y}{dt} = \sum F_{ky}; \quad m \frac{dV_z}{dt} = \sum F_{kz},$$

где $V_x = \dot{x}, V_y = \dot{y}, V_z = \dot{z}$ – проекции вектора скорости точки на оси координат.

В естественной системе координат движение материальной точки описывается уравнениями в естественной форме:

$$m \frac{dV}{dt} = \sum F_{k\tau}; \quad m \frac{V^2}{\rho} = \sum F_{kn}; \quad 0 = \sum F_{kb},$$

где ρ – радиус кривизны траектории; τ, n, b – оси естественного трехгранника – касательная, нормаль и бинормаль.

В общем случае правые части дифференциальных уравнений зависят от времени, положения и скорости точки. Интегрирование дифференциальных

уравнений производится в зависимости от их вида методами, известными из курса математики.

Примеры решения задач на интегрирование уравнений движения

Задача 41. При обогащении по трению разделение частиц производится следующим образом. Барабанный питатель (рис. 4.1) сообщает частице в точке A сортировочного стола AB начальную скорость V_0 , направленную вдоль поверхности стола, наклоненного под углом α к горизонту. Нижний край стола в точке B поднят на высоту h над уровнем пола. Частица скользит по столу, испытывая силу трения скольжения с коэффициентом трения f . Дойдя до края стола в точке B , частица отрывается от него и совершает свободное падение с высоты h . На каком расстоянии $CK = \ell$ на полу нужно установить стенку приёмного устройства, чтобы частицы с коэффициентом трения меньше заданного $f < f_1$ перелетали за точку C и попадали в приёмник, а с большим коэффициентом $f > f_1$ – не долетали до него.

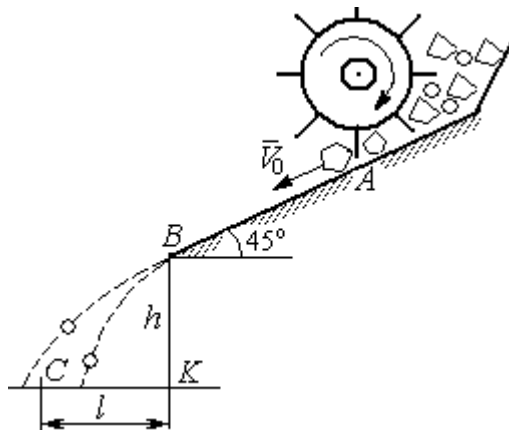


Рис. 4.1. Разделение частиц по трению

Начальная скорость частицы $V_0 = 1$ м/с, длина сортировочного стола $AB = S = 1,2$ м, угол наклона $\alpha = 45^\circ$, высота точки отрыва $BK = h = 1,5$ м, заданный коэффициент трения для разделения частиц $f_1 = 0,4$.

Решение

Из условия задачи следует, что частица с коэффициентом трения, равным заданному, $f = f_1$ в конце своего движения (скольжение по столу + свободное падение) должна попасть ровно в точку C (см. рис. 4.1).

Рассмотрим первый участок движения такой частицы – прямолинейное движение по шероховатой поверхности наклонного стола. На частицу действуют сила тяжести $\vec{P}$, реакция опоры $\vec{N}$ и сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$. Выберем систему координат xAy , направив ось x вдоль линии движения, а ось y – перпендикулярно ей (рис. 4.2). Движение частицы описывается уравнениями:

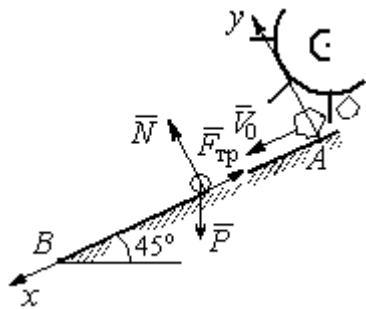


Рис. 4.2. Движение частицы по наклонной плоскости

$$m\ddot{x} = \sum F_{kx} = P\cos 45^\circ - F_{\text{тр}};$$

$$m\ddot{y} = \sum F_{ky} = -P\cos 45^\circ + N.$$

Поскольку вдоль оси y частица не перемещается, то $\ddot{y} = 0$. Тогда второе уравнение движения представляется в виде: $-P\cos 45^\circ + N = 0$, откуда реакция опоры частицы $N = mg\cos 45^\circ$. Сила трения,

которую испытывает частица, двигаясь по сортировочному столу: $F_{\text{тр}} = fN = fmg\cos 45^\circ$, где f – коэффициент трения.

Подставляя в уравнение движения частицы, выражение силы трения и полагая ускорение $\ddot{x} = \frac{dV_x}{dt}$, получим дифференциальное уравнение

$$\frac{dV_x}{dt} = g(1 - f)\cos 45^\circ \text{ или при } f = f_1 = 0,4: \frac{dV_x}{dt} = 4,18.$$

После интегрирования найдём скорость и закон движения частицы как функции времени: $V_x = 4,18t + C_1$; $x = 2,09t^2 + C_1t + C_2$.

Константы интегрирования C_1, C_2 находятся из начальных условий движения. Подставляя начальные условия $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = V_x(0) = V_0$ в уравнение движения частицы, найдём $C_2 = 0$, $C_1 = V_0$.

Окончательно движение частицы на прямолинейном участке AB сортировочного стола описывается системой уравнений: $V_x = 4,18t + 1$; $x = 2,09t^2 + t$.

Допустим частица достигает края стола B в момент времени $t = t_B$. Её координата равна длине сортировочного стола: $x(t_B) = S$, а скорость равна скорости отрыва её от стола: $V_x(t_B) = V_B$. Подставим эти условия в уравнения движения, получим систему: $V_B = 4,18t_B + 1$, $S = 2,09t_B^2 + t_B$, откуда скорость частицы в точке отрыва её от стола $V_B = \sqrt{1 + 8,36S}$. При длине стола $S = 1,2$ м скорость отрыва $V_B = 3,32$ м/с.

Рассмотрим участок BC свободного падения частицы, брошенной с высоты h с начальной скоростью V_B , направленной под углом 45° к горизонту (рис. 4.3). В полёте на частицу действует только сила тяжести $\vec{P}$. Выберем прямоугольную систему координат xKy с началом координат в точке K (см. рис. 4.3). Дифференциальные уравнения движения точки

$$m\ddot{x} = 0; m\ddot{y} = -P = -mg \text{ или } \ddot{x} = 0, \ddot{y} = -g.$$

Интегрируя первое уравнение, получим, что движение частицы вдоль оси x описывается уравнениями $\dot{x} = C_3$; $x = C_3t + C_4$. Константы интегрирования C_3 и C_4 определяются из начальных условий движения: при $t = 0$, $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = V_{Bx}$, где V_{Bx} – проекция вектора скорости $\vec{V}_B$ на ось x , $V_{Bx} = V_B \cos 45^\circ = 2,35$ м/с. После подстановки начальных условий в уравнение движения частицы получим: $C_4 = 0$, $C_3 = 2,35$. В результате, движение частицы вдоль оси x при её свободном падении описывается уравнением $x = 2,35t$.

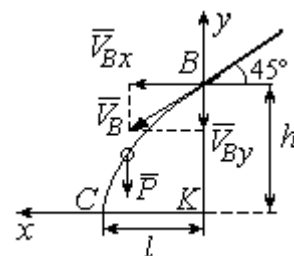


Рис. 4.3. Свободное падение частицы

Проинтегрируем уравнение движения частицы в направлении оси y . Получим: $\dot{y} = -gt + C_5$ и $y = -g\frac{t^2}{2} + C_5t + C_6$. Начальные условия движения частицы вдоль оси y : при $t = 0$, $y(0) = h = 1,5$ м, $\dot{y}(0) = V_{By} = -V_B \cos 45^\circ = -2,35$ м/с, где V_{By} – проекция вектора скорости $\vec{V}_B$ на ось y . Подставляя начальные

условия в уравнение движения, найдём: $C_6 = h$; $C_5 = V_{By} = -2,35$. Таким образом, движение частицы вдоль оси y при её свободном падении описывается уравнением $y = -4,91t^2 - 2,35t + 1,5$.

В момент $t = t_{\Pi}$ падения частицы на пол её вертикальная координата обращается в нуль: $y = 0$, а горизонтальная – равна дальности полёта: $x = \ell$. Подставляя эти условия в уравнения движения частицы, получим систему:

$$\ell = 2,35t_{\Pi}, \quad 0 = -4,91t_{\Pi}^2 - 2,35t_{\Pi} + 1,5.$$

Исключая в системе время t_{Π} , выразим уравнение для определения дальности горизонтального полёта: $\ell^2 + 1,12\ell - 1,68 = 0$. Отсюда находим: $\ell = 0,85$ м.

Таким образом, частицы с коэффициентом трения $f = 0,4$ в конце своего движения падают на горизонтальную поверхность на расстоянии 0,85 м от края стола. Очевидно, именно здесь необходимо установить разделительную стенку приёмного устройства. Частицы с меньшим коэффициентом трения ($f < 0,4$) будут улетать за стенку, а при большем ($f > 0,4$) – не долетать. К примеру, длина горизонтального полёта частицы с коэффициентом трения $f = 0,3$ составляет 0,89 м, а при $f = 0,5$ равна 0,61 м.

Задача 42. Материальная точка массой $m = 1$ кг движется прямолинейно

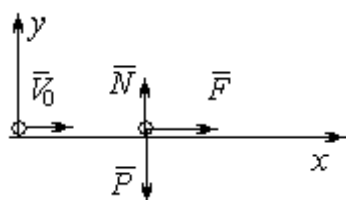


Рис. 4.4. Прямолинейное движение точки

по горизонтальной поверхности под действием силы $F = 10 - kt$ Н, где k – коэффициент пропорциональности; $k = \text{const}$; t – время в секундах. Определить величину коэффициента k , при котором скорость точки за первую секунду от начала движения

увеличится от начального значения $V_0 = 2$ м/с до величины $V_1 = 10$ м/с, а также путь, пройденный точкой до остановки.

Решение

Для описания движения точки выберем прямоугольную систему координат x, y с началом в том месте, откуда точка начала движение (рис. 4.4).

На точку действуют сила тяжести $\vec{P}$, реакция опоры $\vec{N}$ и заданная сила $\vec{F}$. Направление силы $\vec{F}$ на рис. 4.4 соответствует начальному этапу движения, когда проекция силы на ось x положительная. Движение точки описывается уравнением $m\ddot{x} = F_x = 10 - kt$.

Положим $\ddot{x} = \frac{dV}{dt}$. Здесь в силу того, что движение происходит только вдоль одной координаты, индекс x у скорости опущен. Учитывая массу точки, получим уравнение $\frac{dV}{dt} = 10 - kt$. Разделив переменные и проинтегрировав полученное уравнение, найдём закон изменения скорости точки $V = 10t - k\frac{t^2}{2} + C_1$. Выражая скорость через производную от координаты $V = \frac{dx}{dt}$, получим дифференциальное уравнение $\frac{dx}{dt} = 10t - k\frac{t^2}{2} + C_1$, интегрируя которое, найдём уравнение движения точки $x = 5t^2 - k\frac{t^3}{6} + C_1t + C_2$.

Подставляя начальные условия (при $t = 0$, $V = V_0 = 2$ м/с, $x = 0$) в уравнения, получим: $C_1 = 2$, $C_2 = 0$. Окончательно движение точки описывается системой уравнений: $V = 10t - k\frac{t^2}{2} + 2$; $x = 5t^2 - k\frac{t^3}{6} + 2t$.

Известно, что через 1 с от начала движения точка приобрела скорость $V_1 = 10$ м/с. Подставляя это условие в первое уравнение, найдём $k = 4$.

В момент t_1 точка остановилась и её скорость обращается в нуль: $V(t_1) = 0$, а координата равна пройденному пути: $x(t_1) = S$. Подставляя эти условия в уравнения движения с учетом вычисленного значения коэффициента k , получим систему: $0 = 10t_1 - 2t_1^2 + 2$; $S = 5t_1^2 - \frac{2}{3}t_1^3 + 2t_1$, откуда находим путь, пройденный точкой до остановки: $S = 51,86$ м.

Задача 43. Материальная точка массой $m = 1$ кг, находясь на высоте $h_1 = 2$ м над уровнем Земли, подброшена вертикально вверх (ось x) с начальной скоростью $V_0 = 4$ м/с (рис. 4.5, a). При движении на точку действует сила сопротивления, пропорциональная квадрату скорости, так, что проекция её на вертикаль направлена в сторону, противоположную движению, $R_x = -0,5mV^2$ Н, где V – скорость точки. Определить, на какой высоте h_2 от уровня Земли скорость падающей обратно точки достигнет значения начальной стартовой скорости.

Решение

Решение задачи осуществляется в два этапа. На первом этапе рассматри-

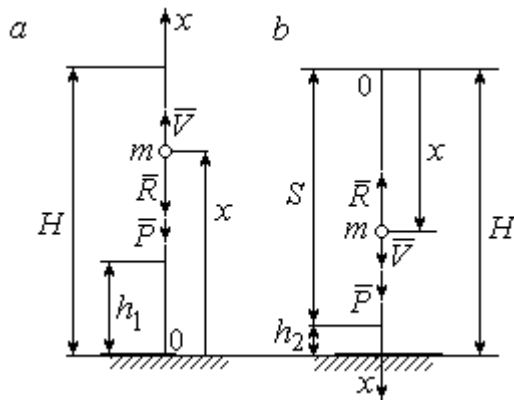


Рис. 4.5. Силы, действующие на точку в полёте:
 a – движение точки вверх;
 b – движение точки вниз

вается движение точки вверх с высоты h_1 с начальной скоростью V_0 и определение максимальной высоты полёта H , на втором этапе – падение точки вниз с высоты H без начальной скорости (рис. 4.5, b).

Рассмотрим первый этап движения и найдём максимальную высоту подъёма точки. На рис. 4.5, a показаны силы, действующие на точку в полёте: сила тяжести $\vec{P}$ и сила сопротивления $\vec{R}$. Ось x , вдоль

которой происходит движение точки, выбрана по направлению движения, начало координат – на уровне Земли (см. рис. 4.5, a).

Дифференциальное уравнение движения точки в проекции на ось x : $m\ddot{x} = \sum F_x = P_x + R_x$, где проекции сил тяжести и сопротивления на ось x :

$P_x = -P = -mg$; $R_x = -0,5mV^2$. Полагая $\dot{x} = \frac{dV}{dt}$, получим уравнение движения

точки в виде: $\frac{dV}{dt} = -(g + 0,5V^2)$.

Учитывая, что $\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dx} \frac{dx}{dt} = V \frac{dV}{dx} = \frac{dV^2}{2dx}$, исходное уравнение движения

представляется в виде, удобном для интегрирования: $\frac{dV^2}{g + 0,5V^2} = -2dx$.

Проинтегрировав это уравнение, находим: $\ln(g + 0,5V^2) = -x + C$.

В начальном положении, т. е. при $t = 0$, точка находилась на высоте $x = h_1$, а скорость её $V = V_0$. Подставив эти значения в проинтегрированное уравнение, получим: $C = h_1 + \ln(g + 0,5V_0^2)$. Окончательно положение точки в полёте определяется выражением $x = h_1 + \ln\left(\frac{g + 0,5V_0^2}{g + 0,5V^2}\right)$.

При максимальном подъёме точки, т. е. при $x = H$, её скорость обращается в нуль: $V = 0$. Подставляя H , получим: $H = h_1 + \ln\left(1 + \frac{V_0^2}{2g}\right)$. При начальной скорости $V_0 = 4$ м/с, с учётом высоты точки старта $h_1 = 2$ м, высота подъёма точки относительно уровня Земли $H = 2,6$ м.

Рассмотрим второй этап решения задачи – движение точки вниз с максимальной высоты H без начальной скорости. Выберем ось x по направлению движения и поместим начало координат в точке, откуда началось движение вниз (рис. 4.5, *b*). Дифференциальное уравнение движения падающей точки:

$m \frac{dV}{dt} = P_x + R_x = mg - 0,5mV^2$, которое, как и в предыдущем случае, приводится к виду:

$\frac{dV^2}{g - 0,5V^2} = 2dx$.

Проинтегрировав это уравнение, находим: $\ln(g - 0,5V^2) = -x + C_1$.

В начальном положении, т. е. при $t = 0$, координата точки и скорость равны нулю: $x = 0$, $V = 0$. Подставив эти значения, находим: $C_1 = \ln g$.

Окончательно положение падающей точки определяется выражением

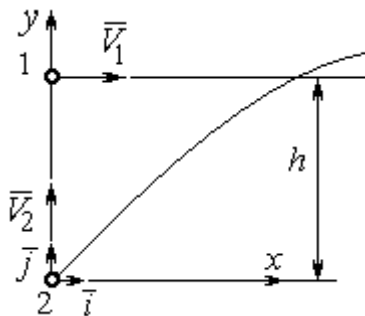
$$x = \ln\left(\frac{g}{g - 0,5V^2}\right).$$

Расстояние S , которое пролетела точка с высоты H , приобретя скорость,

$$V_0: S = \ln\left(\frac{g}{g - 0,5V_0^2}\right). \text{ Высота } h_2 \text{ этого положения от уровня Земли: } h_2 = H - S$$

(см. рис. 4.5, *b*). С учётом величины начальной скорости $V_0 = 4$ м/с, максимальной высоты подъёма точки $H = 2,6$ м высота $h_2 = 0,91$ м.

Задача 44. Точка 1 движется горизонтально с постоянной скоростью V_1



на высоте h . Точка 2 массой m_2 находится в начале координат (рис. 4.6).

В момент, когда обе точки находились на одной вертикали y , точка 2 стартовала вертикально вверх со скоростью V_2 . В полёте на точку 2 действует отклоняющая сила $\vec{F}_2$, которая представле-

на в виде разложения по единичным векторам $\vec{i}$,

$\vec{j}$ системы координат xu : $\vec{F}_2 = p\vec{i} + q\vec{j}$, где $p, q - \text{const}$. С какой скоростью V_2 должна стартовать точка 2, чтобы обе точки встретились.

Решение

Рассмотрим движение точки 2. На точку действует сила тяжести $\vec{P}_2$ и сила $\vec{F}_2$, проекции которой на оси x, y : $F_{2x} = p$, $F_{2y} = q$ (рис. 4.7).

Уравнения движения точки в проекциях на оси xu имеют вид:

$$m_2\ddot{x} = p, \quad m_2\ddot{y} = q - m_2g.$$

Дважды интегрируя первое уравнение, полу-

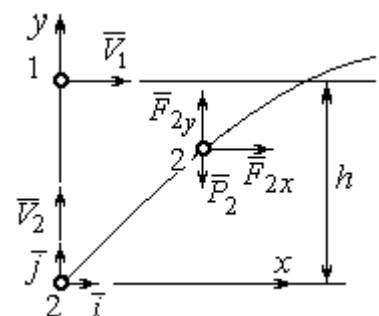


Рис. 4.7. Расчётная схема встречи точек

чим: $\dot{x} = \frac{p}{m_2}t + C_1$; $x = \frac{p}{2m_2}t^2 + C_1t + C_2$. Константы интегрирования найдём из условия, что в начальный момент вторая точка стартовала из начала координат вертикально, то есть при $t = 0$ $x = 0$ и $\dot{x} = V_{2x} = 0$. Подставляя начальные условия в уравнения движения, получим: $C_1 = 0$, $C_2 = 0$. Таким образом, движение точки 2 вдоль оси x описывается уравнением $x = \frac{p}{2m_2}t^2$.

Аналогично, дважды интегрируя второе уравнение движения, получим зависимость скорости движения точки 2 от времени и закон её движения вдоль оси y : $\dot{y} = \left(\frac{q}{m_2} - g\right)t + C_3$; $y = \left(\frac{q}{m_2} - g\right)\frac{t^2}{2} + C_3t + C_4$. Из начальных условий: при $t = 0$ $y = 0$, $\dot{y} = V_{2y} = V_2$ следует: $C_3 = V_2$, $C_4 = 0$.

В результате закон движения точки 2 вдоль оси y : $y = \left(\frac{q}{m_2} - g\right)\frac{t^2}{2} + V_2t$.

Обозначим t_1 – время движения точек до встречи. В момент встречи высота точки 2 $y(t_1) = h$, а расстояние по горизонтали, которое прошла точка 2 до встречи, должно быть равно расстоянию, пройденному точкой 1 за это же время. Подставляя условия встречи в уравнения движения, получим систему:

$$V_1t_1 = \frac{p}{2m_2}t_1^2; \quad h = \left(\frac{q}{m_2} - g\right)\frac{t_1^2}{2} + V_2t_1,$$

откуда найдём: $V_2 = \frac{h}{t_1} - \left(\frac{q}{m_2} - g\right)\frac{t_1}{2}$, где $t_1 = \frac{2V_1m_2}{p}$.

Упражнения

Упражнение 4.1. Тело массы $m = 2$ кг поднимается по прямой по шероховатой поверхности, составляющей угол 30° с горизонтом. Коэффициент трения $f = 0,4$. На тело действует сила $F = kt + 0,5P$, направленная в сторону движения, параллельно плоскости. Определить величину коэффициента k и начальную скорость тела, направленную вверх по наклонной плоскости, если за первую секунду тело прошло путь $S = 2$ м, а скорость увеличилась вдвое относительно начальной.

Упражнение 4.2. Материальную точку массы $m = 1$ кг, находящуюся на высоте $H = 10$ м над уровнем Земли, бросили под углом $\varphi = 30^\circ$ к горизонту с начальной скоростью V_0 . Свободное движение точки происходит в вертикальной плоскости. Определить начальную скорость V_0 и горизонтальную дальность полета l при падении точки на Землю, если высоту $h = 7$ м она пересекла через 1 с от начала движения.

4.2. Колебания материальной точки

Если материальная точка массой m движется вдоль оси Ox под действием линейной восстанавливающей силы, равной $F = cx$, где c – постоянный коэффициент, x – отклонение точки от положения равновесия, куда поместили начало координат, то дифференциальное уравнение свободных прямолинейных колебаний имеет вид:

$$m\ddot{x} + cx = 0, \text{ или } \ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad \omega^2 = \frac{c}{m},$$

где ω – угловая частота колебаний.

Решение дифференциального уравнения свободных колебаний представляется в виде $x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$. Постоянные интегрирования C_1 и C_2 находятся из начальных условий.

Если кроме восстанавливающей силы на материальную точку действует переменная возмущающая сила, колебания точки называются **вынужденными**. В случае гармонического возмущения $Q = H \sin pt$, где H , p – амплитуда и угловая частота возмущающей силы, дифференциальное уравнение вынужденных колебаний материальной точки относительно положения равновесия

$$m\ddot{x} + cx = H \sin pt, \text{ или } \ddot{x} + \omega^2 x = h \sin pt, \quad \omega^2 = \frac{c}{m}, \quad h = \frac{H}{m}$$

где ω – угловая частота собственных колебаний; h – относительная амплитуда возмущающей силы.

Общее решение неоднородного дифференциального уравнения вынужденных колебаний при отсутствии резонанса (частота собственных колебаний точки не совпадает с частотой возмущающей силы $p \neq \omega$) имеет вид:

$x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + \frac{h}{\omega^2 - p^2} \sin p t$, а в случае возникновения резонанса

($p = \omega$) определяется формулой: $x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t - \frac{ht}{2p} \cos p t$. Значения

произвольных постоянных C_1 и C_2 находятся с учётом начальных условий движения.

Колебания груза на двух параллельных пружинах с жесткостью c_1 и c_2 можно рассматривать как колебания груза на одной пружине с эквивалентной жесткостью $c_{\text{экв}} = c_1 + c_2$, где $c_{\text{экв}}$ – жесткость эквивалентной пружины. При последовательном соединении пружин коэффициент жесткости эквивалентной

пружины $c_{\text{экв}} = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2}$.

Примеры решения задач на колебания точки

Задача 45. Подъёмное устройство (рис. 4.8) опускает груз Q массой $m = 400$ кг в шахту при помощи упругого троса с коэффициентом жесткости $c = 8 \cdot 10^4$ Н/м с постоянной скоростью $V = 10$ м/с. В некоторый момент во время спуска трос защемило в блоке. Пренебрегая массой троса, определить дальнейшее движение груза и найти максимальную силу натяжения троса.

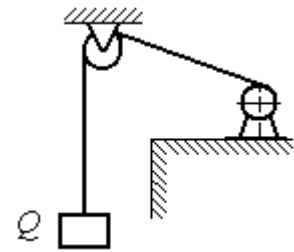


Рис. 4.8. Подъёмное устройство

Решение

После того как произошло защемление троса в обойме блока, вертикальную часть троса длиной ℓ_0 можно рассматривать как пружину с закреплённым верхним концом, а груз – материальной точкой.

Расчетная схема колебаний груза Q на пружине показана на рис. 4.9.

Ось Ox , вдоль которой происходят колебания груза, направлена вертикально вниз. Начало отсчёта координаты x (точка O) выбрано в положении нерастянутой пружины.

На рис. 4.9, *a* положение нерастянутой пружины соответствует положению

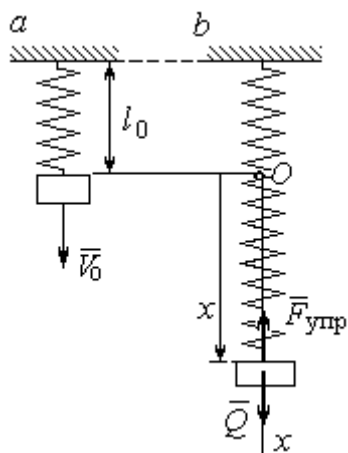


Рис. 4.9. Расчётная схема колебаний груза:

a – положение груза на начало колебаний; *b* – положение груза в произвольный момент времени

груза на тросе в момент его защемления. В произвольном положении груза (рис. 4.9, *b*), обозначенном координатой x , к нему приложены две силы: сила тяжести $\vec{Q}$ и сила упругости пружины $\vec{F}_{\text{упр}}$. Проекция силы упругости пружины на ось Ox : $F_{\text{упр}x} = -c\Delta\ell = -cx$, где $\Delta\ell$ – удлинение пружины. Дифференциальное уравнение движения груза в проекции на ось Ox имеет вид: $m\ddot{x} = Q - cx$. В результате получаем не-

однородное дифференциальное уравнение колебаний:

$$m\ddot{x} + cx = mg \text{ или } \ddot{x} + \omega^2 x = g,$$

где ω – угловая частота собственных колебаний, $\omega = \sqrt{\frac{c}{m}} = 14,14$ рад/с.

Решение неоднородного дифференциального уравнения представляется в виде $x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + \frac{g}{\omega^2}$, где первые два слагаемых представляют общее решения однородного уравнения, последнее – частное решение неоднородного

Для определения произвольных постоянных C_1 и C_2 используем начальные условия движения: при $t = 0$ груз находился в положении $x = 0$, а его скорость равнялась скорости груза $\dot{x} = V_0 = 10$ м/с. Подставляя значение координаты начального положения груза в общее решение уравнения колебаний, полу-

чим: $C_1 = -\frac{g}{\omega^2} = -0,69$ м. Для определения второй константы вычислим скорость груза: $\dot{x} = -C_1\omega\sin\omega t + C_2\omega\cos\omega t$. Подставив начальное значение скорости груза при $t = 0$, получим: $C_2 = \frac{V_0}{\omega} = 0,71$ м. Окончательно, движение груза после заземления троса в обойме блока описывается уравнением

$$x = -0,69\cos 14,14t + 0,71\sin 14,14t + 0,69.$$

Представим уравнение колебаний в виде $x = A\sin(\omega t + \alpha) + \frac{g}{\omega^2}$, где A – амплитуда собственных колебаний груза $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$, α – фаза колебаний; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{C_1}{C_2}$. Максимальное растяжение троса равно максимальному значению координаты груза: $x_{\max} = \max\left[A\sin(\omega t + \alpha) + \frac{g}{\omega^2}\right] = A + \frac{g}{\omega^2} = 1,68$ м. Соответственно, максимальное усилие в тросе равно значению силы упругости при максимальном растяжении: $F_{\text{упр max}} = cx_{\max} = 134,4$ кН.

Задача 46. Рабочий орган вибрационной машины представляет собой массивное тело, расположенное на гладкой наклонной плоскости между двумя пружинами (см. рис. 4.10). Угол наклона плоскости к горизонту 60° . Масса груза $m = 9$ кг. Пружины, зажимающие груз, имеют коэффициенты жесткости $c_1 = 300$ Н/м и $c_2 = 600$ Н/м.

В начальный момент груз, когда пружины не деформированы, груз оттягивают вниз по наклонной плоскости на расстояние $\Delta\ell = 0,12$ м и отпускают без начальной скорости.

Найти период колебаний, амплитуду и уравнение движения груза.

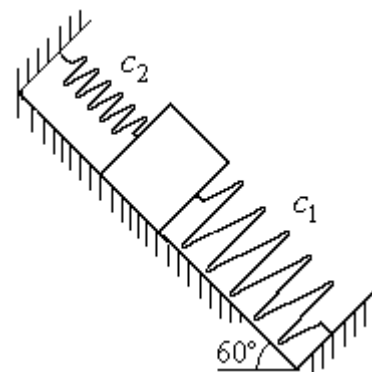


Рис. 4.10. Колебания груза на наклонной плоскости

Решение

Колебания груза, зажатого между двумя пружинами, представим как колебания груза, прикрепленного к одной пружине эквивалентной жёсткости: $c_3 = c_1 + c_2 = 900 \text{ Н/м}$ (рис. 4.11). Ось, вдоль которой происходят колебания, направим вниз по наклонной плоскости. Начало отсчёта координаты груза x

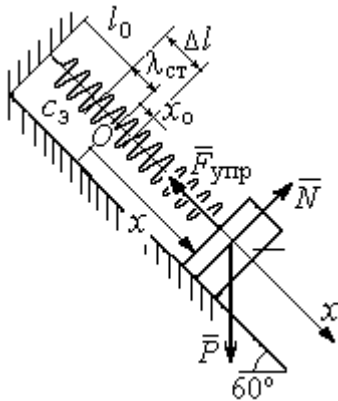


Рис. 4.11. Схема колебаний груза на эквивалентной пружине

выберем в положении его статического равновесия (точка O) (см. рис. 4.11).

Дифференциальное уравнение движения груза в проекции на ось Ox : $m\ddot{x} = P_x - F_{\text{упр}x}$.

Проекция силы упругости пружины на ось Ox :

$F_{\text{упр}x} = -c_3 \Delta \ell$, где $\Delta \ell = (x + \lambda_{\text{ст}})$ – удлинение

пружины, включающее её растяжение $\lambda_{\text{ст}}$ относительно положения нерастянутой пружины и

растяжение x относительно начала координат.

Удлинение пружины $\lambda_{\text{ст}}$ определяется из условия равновесия груза на наклонной плоскости в положении статического равновесия:

$$P \cos 30^\circ - F_{\text{упр}} = 0,87mg - c_3 \lambda_{\text{ст}} = 0.$$

Находим $\lambda_{\text{ст}} = \frac{0,87mg}{c_3} = 0,085 \text{ м}$.

Подставляя выражение силы упругости, с учётом условия статического равновесия груза ($0,87mg = c_3 \lambda_{\text{ст}}$), получим дифференциальное уравнение колебаний: $m\ddot{x} = -c_3 x$ или $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$, где ω – угловая частота собственных колебаний груза, $\omega = \sqrt{\frac{c_3}{m}} = 10 \text{ рад/с}$.

Общее решение уравнения колебаний $x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$.

Для определения произвольных постоянных C_1 и C_2 вычислим начальные условия движения груза.

Координата начального положения груза на оси Ox (см. рис. 4.11) $x_0 = \Delta\ell - \lambda_{\text{ст}} = 0,035$ м. Подставляя значение координаты начального положения груза в общее решение уравнения колебаний при $t = 0$, получим: $C_1 = x_0 = 0,035$ м. Для определения второй константы вычислим скорость груза: $\dot{x} = -C_1\omega_2\sin\omega_2t + C_2\omega_2\cos\omega_2t$. Подставив начальное значение скорости груза: при $t = 0$ $\dot{x} = V_0 = 0$, получим $C_2 = 0$. Окончательно уравнение движения груза относительно его положения статического равновесия $x(t) = 0,035\cos 10t$ м. Амплитуда колебаний $A = 0,035$ м. Период колебаний $T = \frac{2\pi}{\omega} = 0,63$ с.

Задача 47. Пружинный амортизатор состоит из двух одинаковых вертикально стоящих пружин, к верхним концам которых прикреплена невесомая горизонтальная площадка (рис. 4.12). Жёсткость каждой пружины $c = 350$ Н/м. Груз массой $m = 5$ кг падает с высоты $h = 0,3$ м.

Коснувшись площадки, груз начинает двигаться вместе с ней. Определить максимальную осадку амортизатора и уравнение движения груза.

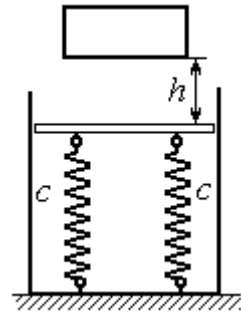


Рис. 4.12. Пружинный амортизатор

Решение

Заменим две пружины амортизатора одной с жесткостью, эквивалентной двум пружинам: $c_{\text{э}} = 2c = 700$ Н/м. Расчётная схема колебаний груза показана на рис. 4.13. Начало координат оси x (точка O), вдоль которой происходят колебания, выбрано на уровне статического равновесия груза.

При движении (на рис. 4.13, с предполагается движение груза вниз) на груз действуют сила упругости $\vec{F}_{\text{упр}}$ и сила тяжести $\vec{P}$. Уравнение движения груза в проекции на ось x : $m\ddot{x} = P - F_{\text{упр}} = P - c_{\text{э}}\Delta\ell$, где $\Delta\ell$ – удлинение (или сжатие) пружины относительно недеформированного состояния.

В произвольном положении груза, обозначенном координатой x (см. рис. 4.13, c), сжатие пружины относительно её недеформированного состояния

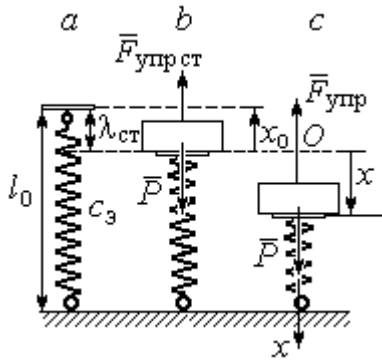


Рис. 4.13. Расчётная схема колебаний на эквивалентной пружине:
 a – недеформированная пружина;
 b – положение статического равновесия груза; c – произвольное положение

(см. рис. 4.13, a) составляет величину: $\Delta l = x + \lambda_{\text{ст}}$. Величина $\lambda_{\text{ст}}$ находится из условия статического равновесия груза, которое выражается равенством (рис. 4.13, b): $P - F_{\text{упр ст}} = P - c_3 \lambda_{\text{ст}} = 0$.

Подставляя это условие в уравнение движения груза, получим дифференциальное уравнение колебаний:

$$m\ddot{x} + c_3 x = 0 \quad \text{или} \quad m\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad \text{где}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{c_3}{m}} = 11,83 \text{ рад/с} - \text{угловая частота колебаний.}$$

Общее решение однородного уравнения колебаний представляется в виде $x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$, где C_1 и C_2 – произвольные постоянные, вычисляемые по начальным условиям движения груза.

По условию задачи груз падает на площадку, установленную на недеформированных пружинах. Это означает, что начальная координата груза при его движении на пружинах соответствует положению недеформированной пружины: $x_0 = -\lambda_{\text{ст}} = -\frac{mg}{c_3} = -0,07 \text{ м}$.

Начальная скорость колебаний груза равна скорости груза при падении его с высоты 1 м. Интегрируя уравнение движения груза во время падения $m\ddot{s} = mg$, где s – путь, пройденный телом, получим зависимость скорости от пройденного пути: $V^2 = 2gs$. Полагая $s = 0,3$, найдём скорость груза при его встрече с площадкой: $V = 2,43 \text{ м/с}$. Проекция начальной скорости колебаний груза на ось x положительна: $V_{0x} = V = 2,43 \text{ м/с}$.

Подставив начальные условия в общее решение уравнения колебаний, получим: $C_1 = x_0 = -0,07$ м; $C_2 = \frac{V_{0x}}{\omega} = 0,2$ м. Окончательно уравнение колебаний груза на амортизаторе $x = -0,07\cos 11,83t + 0,2\sin 11,83t$. Амплитуда колебаний $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = 0,21$ м. Проседание амортизатора H отсчитывается от положения нерастянутых пружин: $H = A + \lambda_{ст} = 0,28$ м.

Задача 48. Для регистрации (записи) вертикальных колебаний тяжёлых платформ используется пружинный виброграф (рис. 4.14). Схема действия прибора состоит в следующем. Массивная платформа A совершает вертикальные гармонические колебания по закону $\xi = \xi(t)$. На платформе установлена вертикальная стойка с горизонтальной перекладиной, к которой прикреплена пружина жесткостью c . К нижнему концу пружины подвешен груз P массой m с индикаторной стрелкой B (см. рис. 4.14). Вертикальная шкала индикаторной стрелки закреплена на платформе A . В начальный момент груз на пружине находился в покое в положении статического равновесия. Определить закон колебаний стрелки B вдоль шкалы, если масса груза $m = 1$ кг, жесткость пружины $c = 10$ Н/м, платформа совершает вертикальные колебания по закону $\xi = a \sin pt$ см, где амплитуда $a = 0,02$ м, частота колебаний платформы $p = 7$ рад/с.

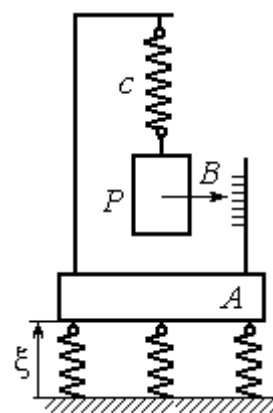


Рис.4.14. Регистратор вертикальных колебаний

Решение

Выберем неподвижную ось x , связанную, например, с неподвижной поверхностью, на которой стоит платформа. Начало координат – точку O выберем на уровне статического равновесия груза на пружине при неподвижной платформе. Произвольное положение груза отмечено координатой x (рис. 4.15).

Растяжение пружины при неподвижной платформе составляет величину $x + \lambda_{\text{ст}}$, где $\lambda_{\text{ст}}$ – удлинение пружины в положении статического равновесия

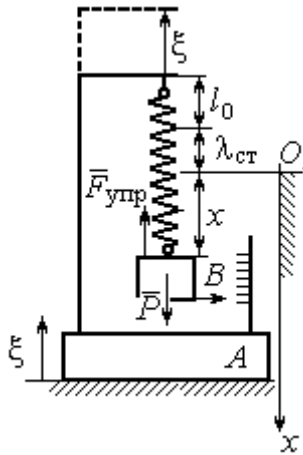


Рис. 4.15. Расчётная схема колебаний груза

груза, определяемое из условия $P - c\lambda_{\text{ст}} = 0$.

Вместе с тем колебание платформы вызывает аналогичное смещение точки подвеса пружины.

В результате растяжение пружины при произвольном положении груза равно сумме:

$$\Delta \ell = (x + \lambda_{\text{ст}} + \xi).$$

На груз действуют сила тяжести $\vec{P}$ и сила упругости пружины $\vec{F}_{\text{упр}}$. Дифференциальное

уравнение движения груза в проекции на ось Ox :

$m\ddot{x} = P_x + F_{\text{упр}x}$, где проекции $P_x = P$, $F_{\text{упр}x} = -c\Delta \ell = -c(x + \lambda_{\text{ст}} + \xi)$. Расчётная

схема колебаний груза показана на рис. 4.15.

С учётом условия статического равновесия груза $P - c\lambda_{\text{ст}} = 0$ получим дифференциальное уравнение вынужденных колебаний груза в виде:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = -h \sin pt,$$

где ω – угловая частота собственных колебаний груза, $\omega = \sqrt{\frac{c}{m}} = 3,16$ рад/с;

h – относительная амплитуда вынужденных колебаний, $h = \frac{ca}{m} = 0,2$ м/с²;

p – угловая частота вынужденных колебаний, $p = 7$ рад/с.

Решение уравнения вынужденных колебаний представляется суммой $x = x_1 + x_2$, где x_1 является общим решением однородного уравнения

$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = 0$, а x_2 – частное решение уравнения вынужденных колебаний:

$$\ddot{x}_2 + \omega^2 x_2 = -h \sin pt.$$

Решив однородное уравнение, находим: $x_1 = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$.

При отсутствии резонанса (а в данном случае частота вынужденных колебаний груза не совпадает с частотой собственных $\omega \neq p$) частное решение уравнения вынужденных колебаний ищем в виде $x_2 = b \sin pt$. Подставляя частное решение в уравнение вынужденных колебаний, получим уравнение $-bp^2 \sin pt + \omega^2 b \sin pt = -h \sin pt$, откуда находим коэффициент: $b = \frac{h}{p^2 - \omega^2}$.

В результате общее решение уравнения колебаний принимает вид:

$$x = x_1 + x_2 = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + \frac{h}{p^2 - \omega^2} \sin pt,$$

где константы C_1 и C_2 подлежат определению.

В начальный момент груз находился на пружине в положении статического равновесия, и потому его начальная координата и скорость равны нулю. Подставляя значение координаты начального положения груза в общее решение уравнения вынужденных колебаний при $t = 0$, получим $C_1 = 0$. Для определения второй константы вычислим скорость груза в произвольный момент времени: $\dot{x} = -C_1 \omega \sin \omega t + C_2 \omega \cos \omega t + \frac{hp}{p^2 - \omega^2} \cos pt$. Подставив начальное значение скорости груза, найдём $C_2 = -\frac{hp}{\omega(p^2 - \omega^2)} = -0,01$ м.

Таким образом, колебания груза относительно неподвижной системы координат описываются уравнением $x = -0,01 \sin 3,16t + 0,05 \sin 7t$ и представляют абсолютное движение груза. Для того чтобы найти закон движения груза относительно платформы – относительное движение, нужно из его абсолютного движения исключить переносное – колебания платформы. Поскольку стрелка прибора закреплена на грузе, а шкала – на платформе, то закон движения стрелки относительно шкалы:

$$x_r = x - \xi = -0,01 \sin 3,16t + 0,05 \sin 7t - 0,02 \sin 7t = -0,01 \sin 3,16t + 0,03 \sin 7t.$$

Упражнения

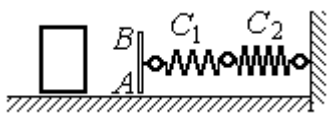


Рис. 4.16. Схема движения груза

Упражнение 4.3. Груз массы $m = 0,5$ кг, получив начальную скорость $V_0 = 6$ м/с, движется по горизонтальной поверхности, испытывая силу сопротивления, равную по величине $F = kV$ и направленную в сторону, противоположную движению. Через 1 с груз соединяется с невесомой вертикальной площадкой AB и продолжает движение вместе с ней, уже без сопротивления. К площадке прикреплены две горизонтальные последовательно соединённые пружины жёсткостью $C_1 = 120$ и $C_2 = 40$ Н/м (рис. 4.16).

Найти величину максимального сжатия пружины, если $k = 0,5$ Н/м/с. Определить закон движения груза.

Упражнение 4.4. Груз массы $m = 1$ кг прикреплен к конструкции, состоящей из трёх вертикальных пружин одинаковой жёсткости $C = 160$ Н/м (рис. 4.17), и находится в равновесии. В некоторый момент времени грузу сообщают скорость $V = 4$ м/с, направленную вверх.

Найти амплитуду и частоту колебаний груза.

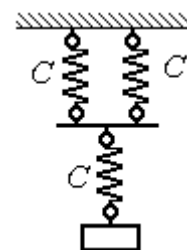


Рис. 4.17. Схема крепления груза на пружинах

4.3. Теорема об изменении кинетической энергии точки

Работой постоянной по величине и направлению силы $\vec{F}$ на прямолинейном перемещении точки приложения силы M (рис. 4.18) называется ска-

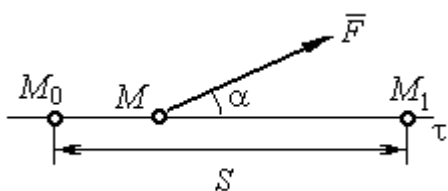


Рис. 4.18. Работа постоянной силы на прямолинейном участке

лярная величина $A(\vec{F}) = FS \cos \alpha$, где F — модуль силы; S — конечное перемещение точки приложения силы; α — угол между направлением вектора силы и направлением перемещения точки приложения силы.

Работа силы тяжести материальной точки при перемещении её из положения M_0 в положение M_1 равна произведению $A_{(M_0 M_1)} = \pm Ph$, где P — величина силы тяжести точки; h — вертикальное перемещение точки (рис. 4.19).

Работа силы тяжести положительна, если начальная точка движения выше конечной (см. рис. 4.19, *a*), и отрицательна, если начальная точка ниже конечной (см. рис. 4.19, *b*).

Работа силы упругости пружины при перемещении вдоль линии действия силы из положения недеформированной пружины на

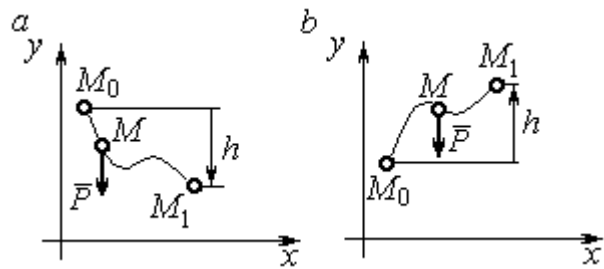


Рис. 4.19. Работа силы тяжести:
a – перемещение точки сверху вниз;
b – перемещение точки снизу вверх

расстояние h определяется формулой $A(\vec{F}_{\text{упр}}) = -\frac{ch^2}{2}$, где c – коэффициент жесткости (или жёсткость) пружины.

Кинетической энергией материальной точки называется скалярная величина $T = \frac{1}{2}mV^2$, где m – масса точки; V – её скорость.

Теорема об изменении кинетической энергии точки. Изменение кинетической энергии материальной точки при переходе её из начального положения в текущее равно алгебраической сумме работ всех действующих на неё сил: $\frac{mV_1^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = \sum A_{(M_0M_1)}$, где V_0, V_1 – скорость точки в начальном положении M_0 и в положении M_1 ; $\sum A_{(M_0M_1)}$ – сумма работ всех сил, действующих на точку, при перемещении её из положения M_0 в положение M_1 . При несвободном движении точки в сумму работ сил войдёт и работа реакций связи.

Для определения реакций связи при несвободном движении точки используются уравнения движения в проекциях на оси естественной системы координат – касательную и нормальную: $m \frac{dV}{dt} = \sum F_\tau$, $m \frac{V^2}{\rho} = \sum F_n$, где $\sum F_\tau$, $\sum F_n$ – суммы проекций сил на касательную и нормальную оси естественной системы координат, ρ – радиус кривизны траектории точки.

Примеры решения задач с использованием теоремы об изменении кинетической энергии точки

Задача 49. Подъёмное устройство в шахте опускает груз массой 500 кг с постоянной скоростью $V_0 = 6$ м/с. После обрыва каната подъёмника срабатывает предохранительное устройство, которое создаёт силу трения между лифтом подъёмного устройства и стенками шахты. Какую силу трения, считая её постоянной, должно создать предохранительное устройство, чтобы остановить лифт на протяжении пути 10 м.

Решение

Рассмотрим падение груза после обрыва каната подъёмника. На груз действуют сила тяжести $\vec{P}$ и сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$, направленная в сторону, противоположную движению. Считая груз материальной точкой, составим уравнение теоремы об изменении кинетической энергии точки. Получим выражение

$$\frac{mV^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = Ps - F_{\text{тр}}s,$$
 где V_0, V – скорость груза в начале движения (сразу после обрыва каната) и в конце; s – путь, проходимый грузом за время движения. В конце движения груз должен остановиться, то есть $V = 0$. Тогда уравнение теоремы об изменении кинетической энергии точки принимает вид:

$$-\frac{mV_0^2}{2} = (P - F_{\text{тр}})s,$$
 откуда находим требуемую для остановки груза силу трения:

ния: $F_{\text{тр}} = P + \frac{mV_0^2}{2s}$. Подставляя условия задачи, получим: $F_{\text{тр}} = 5,81$ кН

Задача 50. Тонкий стержень, расположенный в вертикальной плоскости, состоит из двух дуг сопряженных окружностей радиусов $R = 1$ м и $r = 0,5$ м (рис. 4.20). Линия OO_1 , соединяющая центры окружностей, составляет с горизонтом угол 30° . На стержень надет шарик весом $P = 10$ Н. В точке A , положение которой на дуге радиуса R определяется углом $\alpha = 60^\circ$, шарик сообщают начальную скорость V_0 , после чего он скользит по стержню без трения. Опре-

делить значение начальной скорости, при которой шарик достигнет наивысшей точки B со скоростью, равной половине начальной. При найденном значении начальной скорости рассчитать давление шарика на стержень в точке C , положение которой на дуге радиуса r определяется углом $\beta = 90^\circ$ относительно линии центров.

Решение

При движении шарика по стержню без трения на него действуют сила тяжести $\vec{P}$ и реакция опоры $\vec{N}$. При этом работу совершает только сила тяжести шарика. Реакция гладкой поверхности стержня в любой момент времени перпендикулярна поверхности стержня и поэтому её работа равна нулю.

По теореме об изменении кинетической энергии точки при движении её

из начального положения A в положение B имеем равенство:

$$\frac{mV_B^2}{2} - \frac{mV_A^2}{2} = A(P) = -Ph_{(AB)},$$

где $h_{(AB)}$ – перепад высот точек B и A ,

$$h_{(AB)} = R + DO + r = \frac{3}{2}(R + r) \text{ (см. рис. 4.21);}$$

V_A , V_B – скорость шарика в точках A и B ,

причём $V_A = V_0$, $V_B = 0,5V_0$.

В результате уравнение, составленное на основании теоремы об изменении

кинетической энергии, принимает вид: $\frac{3V_0^2}{8} = g\frac{3}{2}(R + r)$, откуда

$$V_0 = 2\sqrt{(R + r)g} = 7,67 \text{ м/с.}$$

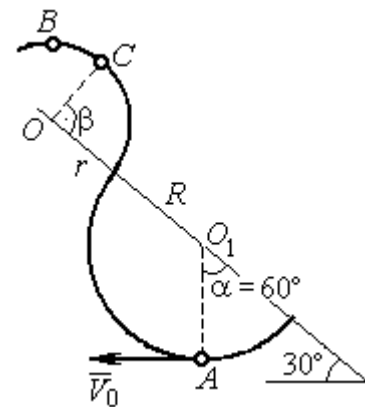


Рис. 4.20. Движение шарика по изогнутому стержню

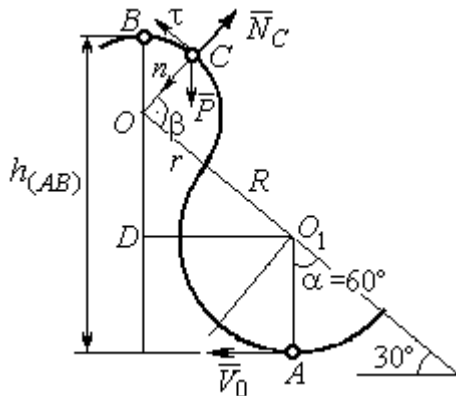


Рис. 4.21. Расчётная схема движения шарика

На рис. 4.21 показаны силы, приложенные к шарiku, в момент, когда он находится в точке C . Проведём в точке C оси естественной системы координат – касательную $C\tau$ и нормаль Cn . Уравнение движения шарика в проекции на нормальную ось имеет вид: $m \frac{V_C^2}{r} = P \cos 30^\circ - N_C$, откуда найдём реакцию N_C .

Для определения скорости шарика в точке C воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии точки при движении шарика из положения C в положение B . Получим равенство $\frac{mV_B^2}{2} - \frac{mV_C^2}{2} = -Ph_{(CB)}$, где $h_{(CB)}$ – перепад высот при движении шарика из начального положения C в положение B . С учётом известных значений $V_B = 0,5 V_0 = 3,84$ м/с и $h_{(CB)} = r \cos 30^\circ = 0,43$ м получим: $V_C = \sqrt{V_B^2 + 2gh_{(CB)}} = 4,82$ м/с.

Из уравнения движения шарика находим реакцию опоры $N_C = P \cos 30^\circ - m \frac{V_C^2}{r} = -38,7$ Н.

Отрицательное значение реакции опоры шарика показывает, что фактическое направление реакции противоположно тому, как показано на рис. 4.21. Искомое давление шарика на трубку равно модулю реакции опоры.

Задача 51. Желоб состоит из шероховатой наклонной прямой AB и гладкой дуги окружности радиуса $r = 0,8$ м, сопряжённых в точке B так, что прямая AB является касательной к окружности в точке B (рис. 4.22). Положение точки B на дуге задаётся углом 30° относительно вертикального диаметра окружности. Тяжёлый шарик массой $m = 0,5$ кг начинает движение из точки A со скоростью $V_0 = 0,2$ м/с.

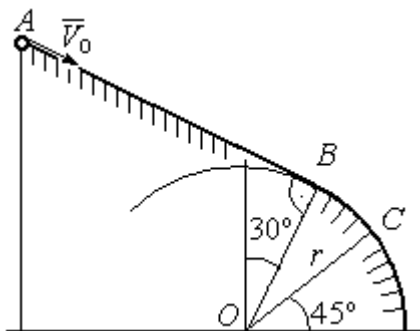


Рис. 4.22. Движение точки по составному желобу

Какой длины S должен быть желоб AB ,

чтобы шарик оторвался от окружности в точке C , определяемой углом 45° относительно горизонтального диаметра, если при движении по прямой AB шарик испытывает сопротивление скольжения с коэффициентом трения $f = 0,4$.

Решение

Рассмотрим движение шарика по дуге окружности. Проведём в точке C оси естественной системы координат – касательную $C\tau$ и нормаль Cn (рис. 4.23). На шарик действуют сила тяжести $\vec{P}$, реакция $\vec{N}_C$ опоры в точке C . Уравнение движения шарика в проекции на ось Cn имеет вид:

$m \frac{V_C^2}{r} = P \cos 45^\circ - N_C$, где V_C – скорость шарика в точке C . Реакция опоры

$$N_C = P \cos 45^\circ - m \frac{V_C^2}{r}.$$

В момент отрыва шарика в точке C реакция опоры обращается в ноль: $N_C = 0$. В результате получаем уравнение $V_C^2 = rg \cos 45^\circ$, из которого находим скорость шарика в момент его отрыва от опоры: $V_C = 2,36$ м/с.

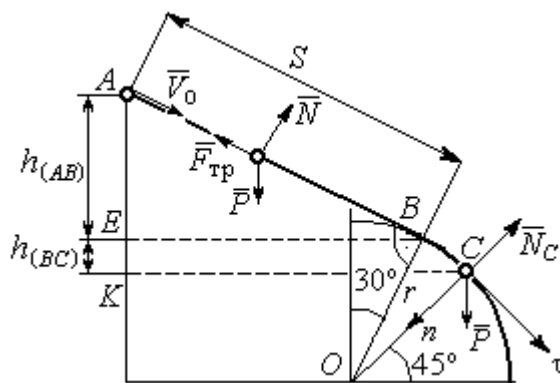


Рис. 4.23. Расчётная схема движения точки

Рассмотрим движение шарика из начального положения A в положение C . На шарик действуют сила тяжести $\vec{P}$, нормальная реакция опоры $\vec{N}$ и, при движении по наклонной прямой AB , сила трения $\vec{F}_{тр}$ (см. рис. 4.23). Работу совершают сила тяжести шарика и сила трения. Реакция опоры $\vec{N}$ и в том и другом случае перпендикулярна траектории движения, и её работа равна нулю.

Составим уравнение теоремы об изменении кинетической энергии точки

$\frac{mV_C^2}{2} - \frac{mV_A^2}{2} = Ph_{(AC)} - F_{тр}S$, где S – длина участка AB ; $h_{(AC)}$ – перепад высот на участке AC (см. рис. 4.23); $h_{(AC)} = h_{(AB)} + h_{(BC)} = S \sin 30^\circ + r(\cos 30^\circ - \cos 45^\circ)$.

Модуль силы трения: $F_{\text{тр}} = fN$. Для того чтобы найти реакцию N опоры шарика на наклонную поверхность желоба AB , составим проекцию уравнения движения шарика на ось y , перпендикулярную AB (на рис. 4.23 не показана). Получим: $m\ddot{y} = N - P\cos 30^\circ = 0$. Отсюда $N = P\cos 30^\circ$ и сила трения $F_{\text{тр}} = fP\cos 30^\circ$.

Из уравнения теоремы об изменении кинетической энергии точки найдём выражение для определения длины S участка AB :

$$\frac{V_C^2 - V_A^2}{2g} = S\sin 30^\circ + r(\cos 30^\circ - \cos 45^\circ) - fPS\cos 30^\circ,$$

откуда получим $S = 1$ м.

Задача 52. Груз подвешен на нити длиной $l = 1$ м, закреплённой в непо-

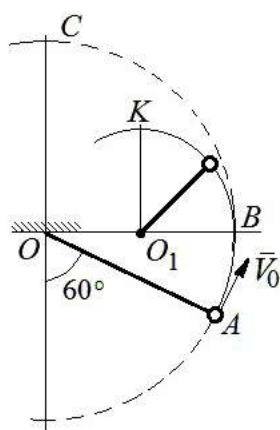


Рис. 4.24. Схема движения груза на нити

движной точке O (рис. 4.24). В начальный момент груз находился в положении A , при котором линия OA составляет с вертикалью угол 60° . В этом положении грузу сообщают начальную скорость $\vec{V}_0$, перпендикулярно нити. Достигнув горизонтального положения, нить, натянутая грузом, встречает препятствие в виде тонкой проволоки в точке O_1 , расположенной на середине длины нити, и дальше

навивается на неё.

Какую минимальную начальную скорость нужно сообщить грузу в точке A , чтобы после встречи нити с проволокой в O_1 груз проскочил верхнюю точку траектории K . На какую максимальную высоту (относительно горизонтального диаметра OB) поднимется груз, двигаясь из той же точки A и с той же начальной скоростью, если нить будет двигаться беспрепятственно. Определить скачок натяжения нити в точке B при переходе груза с одной траектории на другую.

Решение

Построим оси естественной системы координат $nK\tau$ в точке K траектории – окружности радиуса $0,5l$ с

центром O_1 (рис. 4.25, *a*). Во время движения на груз действуют сила тяжести и реакция нити. Уравнение движения груза в проекции на ось Kn имеет вид:

$$m \frac{V_K^2}{r} = P + N_K, \text{ где } V_K \text{ – скорость}$$

груза в точке K ; N_K – реакция нити; r – радиус окружности движения груза;

$r = 0,5l$. Из уравнения движения находим реакцию нити: $N_K = m \frac{2V_K^2}{l} - P$.

Так как нить представляет собой гибкую связь, то условием достижимости грузом точки K является требование, что при движении нить должна быть натянута, иначе говоря, всюду во время движения должно выполняться неравенство $N_K \geq 0$. С учётом уравнения движения груза это приводит к неравенству, выражающему требование к скорости в конечной точке: $V_K^2 \geq \frac{1}{2}gl$.

Скорость груза в точке K найдём на основании теоремы об изменении кинетической энергии точки при движении груза из положения A в положение K . Имеем равенство $\frac{mV_K^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = -Ph_{(AK)}$, где $h_{(AK)}$ – перепад высот точек A и K ; $h_{(AK)} = l$ (см. рис. 4.25, *a*). Решая полученное уравнение, найдём зависимость скорости груза в точке K от начальной: $V_K^2 = V_0^2 - 2gl$. С учётом выполнения неравенства натяжения нити получим: $V_0 \geq \sqrt{\frac{5}{2}gl}$.

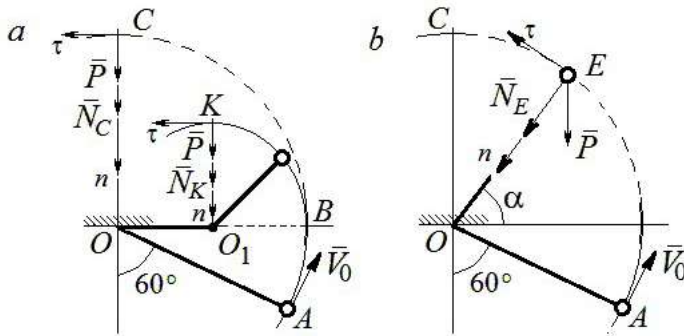


Рис. 4.25. Расчётная схема движения груза:
a – нить навивается на препятствие;
b – свободное движение

При минимальной начальной скорости $V_0 = \sqrt{\frac{5}{2}gl}$ груз достигает верхней точки K . Однако, натяжение нити в точке K обращается в нуль: $N_K = 0$ и нить в этом месте перестаёт быть натянутой. Груз продолжает движение, но уже в виде свободного падения с начальной скоростью $V_K = \sqrt{\frac{1}{2}gl}$.

Определим, на какую высоту поднимется груз из положения A с минимальной начальной скоростью $V_0 = \sqrt{\frac{5}{2}gl}$, если нить движется беспрепятственно (см. рис. 4.25, b). Построим в точке E оси естественной системы координат $nE\tau$ аналогично тому, как это было сделано в точке K . Уравнение движения груза в проекции на ось En имеет вид: $m \frac{V_E^2}{l} = P \sin \alpha + N_E$, где V_E – скорость груза в точке E ; N_E – проекция реакции нити на нормальную ось.

Для определения скорости груза в точке E составим уравнение теоремы об изменении кинетической энергии точки при движении груза из начального положения A в положение E . Получим: $\frac{mV_E^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = -Ph_{(AE)}$, где $h_{(AE)}$ – перепад высот точек A и E ; $h_{(AE)} = \frac{l}{2} + l \sin \alpha$ (см. рис. 4.25, b). Решая полученное уравнение относительно скорости V_E при заданной начальной скорости $V_0 = \sqrt{\frac{5}{2}gl}$, найдём: $mV_E^2 = \frac{3}{2}mgl - 2mgl \sin \alpha$. С другой стороны, из уравнения движения груза (учитывая, что в точке E натяжение нити равно нулю: $N_E = 0$) получим: $mV_E^2 = Pl \sin \alpha$. Приравнявая выражения, получим $\sin \alpha = \frac{1}{2}$. Высота подъёма относительно горизонтального радиуса составляет $\frac{1}{2}l$.

Для определения скачка натяжения нити при переходе груза в точке B с окружности радиуса l на окружность радиуса $\frac{1}{2}l$, т. е. в момент, когда нить начинает навиваться на проволоку, напишем проекции уравнения движения груза на нормальную ось в точке B . Получим для малой окружности $\frac{2mV_B^2}{l} = N_B$ и для большой $\frac{mV_B^2}{l} = N'_B$, где N_B и N'_B – проекции реакции нити в точке B при движении груза по окружности радиусов $\frac{1}{2}l$ и l . Из уравнений видно, что переход груза с большой окружности на малую вызывает двукратное увеличение натяжения нити: $N'_B = \frac{3}{2}mg$, $N_B = 3mg$.

Задача 53. Шарик массой $m = 0,5$ кг движется в вертикальной плоскости из положения A внутри трубки, которая состоит из полуокружности AB радиуса $R = 0,6$ м и прямолинейного участка BD , сопряжённого в точке B с окружностью (рис. 4.26). Диаметр полуокружности AB составляет с горизонталью угол 60° . Начальная скорость шарика $V_0 = 5$ м/с. В конце кругового участка в точке B шарик упирается в недеформированную пружину жесткостью $c = 100$ Н/м. Найти величину S максимального сжатия пружины.

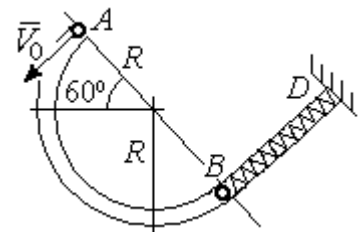


Рис. 4.26. Схема движения шарика

Решение

Найдём скорость шарика в точке B . Для этого составим уравнение теоремы об изменении кинетической энергии точки при движении шарика из начального положения A в положение B . Получим:

$$\frac{mV_B^2}{2} - \frac{mV_A^2}{2} = A(P) = Ph_{(AB)}, \quad \text{где } h_{(AB)} - \text{перепад высот точек } A \text{ и } B,$$

$$h_{(AB)} = 2R \sin 60^\circ = 1,04 \text{ м (рис. 4.27).}$$

Решая уравнение, найдём скорость шарика в точке B :

$$V_B = \sqrt{V_A^2 + 2gh_{(AB)}} = 6,74 \text{ м/с}.$$

Для того, чтобы найти величину максимального сжатия пружины, рассмотрим движение шарика на прямолинейном отрезке трубки BD . На этом отрезке работу совершают сила тяжести шарика и сила упругости пружины, приложенные к шарiku (см. рис. 4.27).

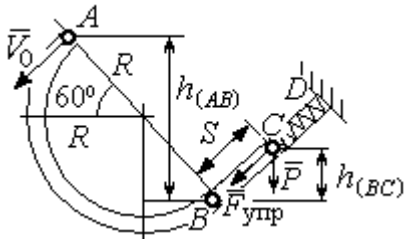


Рис. 4.27. Расчетная схема движения шарика

Обозначим S – максимальное сжатие пружины, равное BC . На основании теоремы об изменении кинетической энергии точки, применённой к движению шарика на отрезке BC , имеем уравнение

$$\frac{mV_C^2}{2} - \frac{mV_B^2}{2} = A(P) + A(F_{\text{упр}}) = -Ph_{(BC)} - \frac{cS^2}{2},$$

где $h_{(BC)}$ – перепад высот точек B и C ; $h_{(BC)} = S \sin 30^\circ = 0,5S$ (см. рис. 4.27).

В точке C максимального сжатия пружины скорость шарика обращается в нуль: $V_C = 0$. Подставляя это условие, с учётом $V_B = 6,74 \text{ м/с}$, получим уравнение для определения величины максимального сжатия пружины: $S^2 + 0,05S - 0,23 = 0$.

Выбирая положительный корень уравнения, находим: $S = 0,45 \text{ м}$.

Упражнения

Упражнение 4.5. Лётчик в самолёте пикирует из точки A по прямой, составляющей с горизонтом угол φ , с начальной скоростью V_0 . Пройдя расстояние $AB = l$, самолёт продолжает движение по дуге окружности радиуса R , сопряженной с прямой AB в точке B (рис. 4.28).

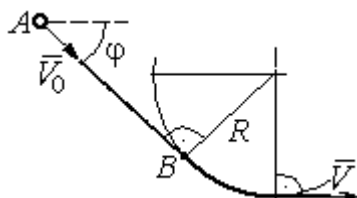


Рис. 4.28. Схема движения самолёта

Каким должен быть радиус окружности, чтобы в точке C – выхода самолёта на горизонтальный полёт – сила давления человека на корпус самолёта не превосходила его тройной вес.

Упражнение 4.6. Пружина жесткостью $C = 100$ Н/м, сжатая из недеформированного состояния на расстояние $KA = a = 0,3$ м, выталкивает шарик массой $m = 0,5$ кг, который отделяется от неё в точке K и продолжает движение в трубке по дуге KCB , окружности радиуса $R = 1$ м, затем – по горизонтальному участку BD . Определить давление шарика на трубку в точке C . Какой путь пройдёт шарик до остановки по прямой BD , если здесь на него действует сила трения с коэффициентом $f = 0,4$.

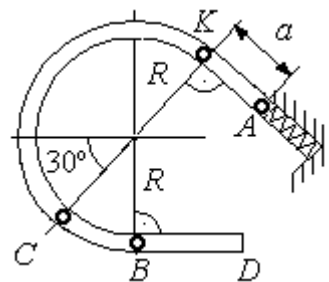


Рис. 4.29. Схема движения шарика в трубке

5. ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ СИСТЕМЫ

5.1. Теорема о движении центра масс системы

Центром масс системы материальных точек называют точку C , координаты которой x_C, y_C, z_C удовлетворяют равенствам:

$$mx_C = \sum m_k x_k, \quad my_C = \sum m_k y_k, \quad mz_C = \sum m_k z_k,$$

где m – масса системы: $m = \sum m_k$; m_k, x_k, y_k, z_k – массы и координаты материальных точек системы.

Теорема о движении центра масс системы. Центр масс механической системы движется как материальная точка с массой, равной массе системы, и к которой приложены внешние силы, действующие на систему: $m\vec{a}_C = \sum \vec{F}_k^e$, где $\vec{a}_C$ – вектор ускорения центра масс системы; $\sum \vec{F}_k^e$ – сумма всех внешних сил, действующих на систему.

Пример решения задач на применение теоремы о движении центра масс

Задача 54. Груз 1, находящийся на верхнем основании прямоугольной пирамиды $ABCD$, соединен с грузом 2 нерастяжимой нитью, перекинутой через

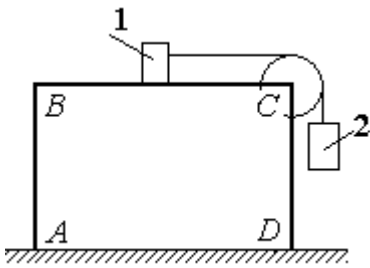


Рис. 5.1. Пирамида с системой подвижных грузов

блок C (рис. 5.1). Определить перемещение пирамиды, если груз 2 опустился на высоту 1 м. Масса груза 1 $m_1 = 15$ кг, груза 2 $m_2 = 20$ кг, пирамиды $m = 50$ кг. Трение при движении груза 1 по пирамиде и пирамиды по горизонтальной поверхности не учитывать.

Решение

Рассматриваем механическую систему, состоящую из двух грузов, соединённых нерастяжимой нитью, блока C и пирамиды $ABCD$.

Внешние силы, приложенные к системе: силы тяжести грузов и пирамиды – $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}$ и нормальная реакция $\vec{N}$ опоры поверхности, на которой стоит пирамида. Направления векторов внешних сил показаны на рис. 5.2.

Выберем неподвижную систему координат Axy , как показано на рис. 5.2. Все внешние силы, действующие на механическую систему, вертикальны, поэтому дифференциальное уравнение, составленное на основании теоремы о движении центра масс механической системы в проекции на ось Ax , имеет вид:

$$(m + m_1 + m_2)\ddot{x}_C = P_{1x} + P_{2x} + P_x + N_x = 0$$

$$\text{или } \ddot{x}_C = 0,$$

где x_C – координата центра масс системы.

Проинтегрировав его дважды, получим закон движения центра масс системы: $x_C = C_1 t + C_2$, где константы интегрирования C_1 и C_2 находятся из начальных условий. Предположим, в начальный момент движение в механической системе отсутствовало и координата центра масс системы была равна x_{C0} (на рис. 5.2, a не показана), то есть при $t = 0$ $x_C(0) = x_{C0}$ и $\dot{x}_C(0) = 0$. Подставляя начальные

условия, получим: $C_1 = 0$, $C_2 = x_{C0}$. В результате закон движения центра масс системы имеет вид: $x_C = x_{C0}$. Последнее означает, что при любом перемещении тел в системе координата центра масс системы на оси Ax остаётся постоянной, равной своему начальному значению.

Предположим, в начальный момент времени груз 1 находился у левого края призмы, как показано на рис. 5.2, a .

Начальная координата x_{C0} центра масс системы находится из равенства $(m_1 + m_2 + m)x_{C0} = \sum m_k x_k = m_1 \cdot 0 + m_2 l_2 + ml$, где l_2 – расстояние от начала координат до линии действия силы тяжести груза 2 (координата центра масс гру-

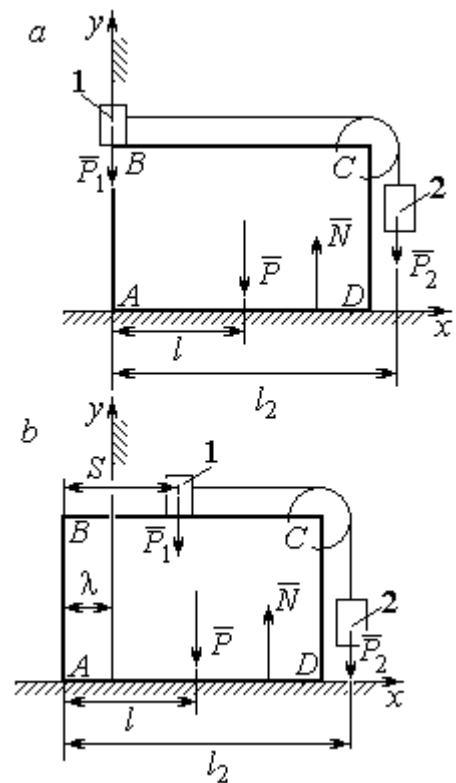


Рис. 5.2. Расчётная схема перемещения пирамиды: a – начальное положение; b – положение пирамиды при перемещении грузов на расстояние S

за 2 на оси Ax); l – аналогичное расстояние до линии действия силы тяжести пирамиды (см. рис. 5.2, a). Тогда начальная координата центра масс системы:

$$x_{C0} = \frac{m_2 l_2 + m l}{(m_1 + m_2 + m)}.$$

Положение грузов в системе, после того как груз 1 переместился на расстояние S , и положение призмы показано на рис. 5.2, b . На рисунке отмечено, что при перемещении груза 1 вправо на расстояние S призма $ABCD$ сместилась влево на расстояние λ . Координата x_{C1} центра масс для нового положения системы определяется из равенства:

$$(m_1 + m_2 + m)x_{C1} = m_1(S - \lambda) + m_2(l_2 - \lambda) + m(l - \lambda).$$

Выражая отсюда координату x_{C1} и приравнявая её начальному значению координаты центра масс $x_{C0} = x_{C1}$, найдём перемещение пирамиды

$$\lambda = \frac{m_1 S}{(m_1 + m_2 + m)}.$$

Подставляя данные задачи, получим $\lambda = 0,18$ м.

5.2. Теорема об изменении кинетического момента системы относительно оси

Момент инерции однородного диска радиусом R , массой m относительно оси z , проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости диска:

$$J_z = \frac{1}{2} m R^2.$$

Для неоднородных тел момент инерции относительно оси z вы-

числяется по формуле: $J_z = m i_z^2$, где i_z – радиус инерции тела.

Кинетическим моментом (моментом количества движения) системы относительно неподвижной оси z называется величина, равная сумме моментов количеств движения точек относительно этой оси $\vec{L}_z = \sum M_z(m_k \vec{V}_k)$.

Для твёрдого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси z , кинетический момент: $L_z = J_z \omega$, где J_z и ω – момент инерции и угловая скорость

тела. **Теорема об изменении кинетического момента системы относительно оси.** Производная по времени от кинетического момента системы относительно неподвижной оси z равна сумме моментов внешних сил относительно той же

оси:
$$\frac{dL_z}{dt} = \sum M_z(\vec{F}_k^e).$$

Примеры решения задач на применение теоремы об изменении кинетического момента системы

Задача 55. Для подъёма груза используется лебёдка со ступенчатым барабаном и противовесом. Груз 1 массой m_1 поднимается на канате, навитом на барабан 2 массой m_2 радиуса R . Противовес 3 массой m_3 прикреплён к канату, который навит на малую ступень барабана радиуса r (рис. 5.3). Радиус инерции барабана относительно оси вращения i_z . На барабан действует постоянный момент сил сопротивления $M_c = 60 \text{ Н}\cdot\text{м}$. В начале движения к барабану лебёдки прикладывается вращающий момент, пропорциональный времени: $M_{вр} = 620 + 30t \text{ Н}\cdot\text{м}$, который через 2 с отключается. Определить, на какую высоту поднимется груз, если движение началось из состояния покоя. Массы грузов и барабана: $m_1 = 100 \text{ кг}$, $m_2 = 50 \text{ кг}$, $m_3 = 20 \text{ кг}$. Радиусы ступеней барабана и радиус инерции: $R = 0,6 \text{ м}$; $r = 0,4 \text{ м}$; $i_z = 0,5 \text{ м}$.

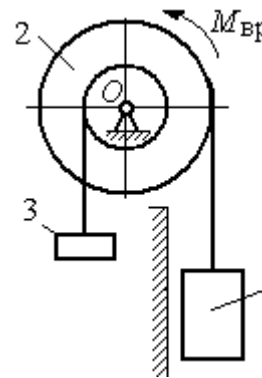


Рис. 5.3. Барабан лебёдки с грузом и противовесом

Решение

Решение следует рассматривать на двух этапах. На первом груз поднимается под действием вращающего момента, на втором – по инерции.

Рассмотрим механическую систему, состоящую из груза 1, барабана 2 и противовеса 3. На систему действуют силы тяжести груза $\vec{P}_1$, барабана $\vec{P}_2$, противовеса $\vec{P}_3$, реакция шарнира $\vec{R}$, пара сил с моментом, равным моменту вра-

щения $M_{вр}$, и пара сил с моментом сопротивления M_c . Направления векторов

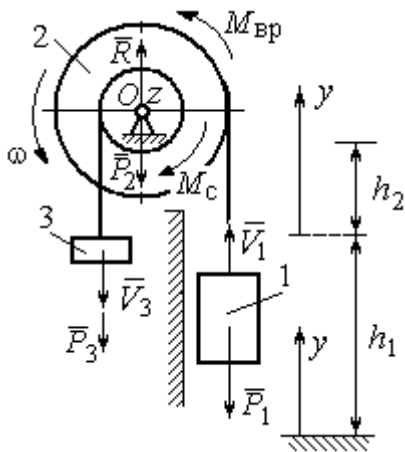


Рис. 5.4. Силы, действующие на систему во время движения

сил и моментов показаны на рис. 5.4. Выберем начало оси y , вдоль которой поднимается груз на первом участке движения, в точке начала движения (см. рис. 5.4).

Воспользуемся теоремой об изменении кинетического момента системы относительно оси z , проходящей через центр O :

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum M_z(\vec{F}_k^e).$$

Кинетический момент системы относительно оси z равен сумме кинетических моментов барабана, груза и противовеса: $L_z = L_z^{бар} + L_z^{гр} + L_z^{пр}$. Кинетический момент барабана, вращающегося вокруг неподвижной оси z : $L_z^{бар} = J_z \omega$, где J_z – момент инерции барабана относительно оси z , $J_z = m_2 i_z^2$; ω – угловая скорость барабана. Рассматривая груз и противовес как материальные точки, найдём их кинетические моменты относительно оси z : $L_z^{гр} = M_z(m_1 \vec{V}_1) = m_1 V_1 R$; $L_z^{пр} = M_z(m_3 \vec{V}_3) = m_3 V_3 r$.

Суммарный кинетический момент системы:

$$L_z = L_z^{бар} + L_z^{гр} + L_z^{пр} = m_2 i_z^2 \omega + m_1 V_1 R + m_3 V_3 r.$$

Выразим скорости груза 1 и противовеса 3 через угловую скорость барабана: $V_1 = \omega R$, $V_3 = \omega r$ – и подставим их в выражение кинетического момента.

$$\text{Получим } L_z = (m_2 i_z^2 + m_1 R^2 + m_3 r^2) \omega = (m_2 i_z^2 + m_1 R^2 + m_3 r^2) \frac{V_1}{R}.$$

Суммарный момент внешних сил относительно оси z

$$\sum M_z(\vec{F}_k^e) = M_{вр} - M_c - P_1 R + P_3 r.$$

Дифференциальное уравнение движения груза:

$$(m_2 i_z^2 + m_1 R^2 + m_3 r^2) \frac{dV_1}{dt} = (M_{вр} - M_c - P_1 R + P_3 r) R,$$

или с учётом данных задачи $\frac{dV_1}{dt} = 0,58 + 0,35t$.

Дважды интегрируя это уравнение с нулевыми начальными условиями, найдём скорость груза V_1 и проходимый им путь y как функции времени:

$$V_1(t) = 0,58t + 0,175t^2; \quad y(t) = 0,29t^2 + 0,058t^3.$$

Из уравнений движения найдём: при $t = 2$ с (конец первого участка) груз поднялся на высоту $h_1 = y(2) = 1,62$ м и имел скорость $V_1 = V_1(2) = 1,86$ м/с.

На втором участке движения груз продолжает подниматься вверх. Уравнение движения груза здесь аналогично первому участку, за исключением вращающего момента (см. рис. 5.4):

$$(m_2 i_z^2 + m_1 R^2 + m_3 r^2) \frac{dV_1}{dt} = (-M_c - P_1 R + P_3 r) R, \text{ или } \frac{dV_1}{dt} = -6,61.$$

Представим ускорение груза в виде: $\frac{dV_1}{dt} = \frac{dV_1 dy}{dy dt} = V_1 \frac{dV_1}{dy}$. Теперь урав-

нение движения груза на втором участке имеет вид: $V_1 \frac{dV_1}{dy} = -6,61$. Интегрируя

его, получим зависимость скорости груза от пройденного пути

$\frac{V_1^2}{2} = -6,61y + C_3$. Выберем начало второго участка на высоте h_1 . Из началь-

ных условий движения груза: при $t = 0$, $y = 0$, $V_1 = 1,86$ м/с, получим: $C_3 = 1,73$.

Максимальную высоту h_2 , на которую поднялся груз на втором участке, определим из условия, что в этой точке скорость груза обращается в нуль. Имеем $0 = -6,61h_2 + 1,73$, откуда $h_2 = 0,26$ м. Максимальная высота подъёма груза $H = h_1 + h_2 = 1,88$ м.

Задача 56. Тележка C поворотного подъёмного крана (рис. 5.5) движется с постоянной относительно стрелы скоростью $V = 0,5$ м/с. Длина стрелы

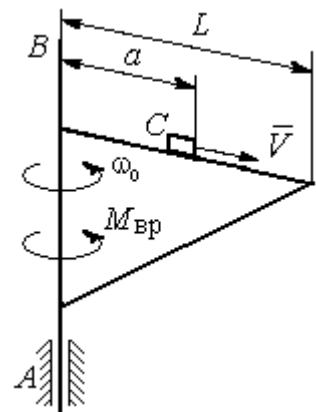


Рис. 5.5. Поворотный кран

$L = 10$ м, масса тележки с грузом $m_1 = 100$ кг, момент инерции крана относительно оси вращения AB без учёта тележки и груза $J = 1800$ кг·м². Двигатель крана создаёт постоянный вращающий момент $M_{\text{вр}} = 400$ Н·м. Определить угловую скорость крана в момент, когда тележка достигнет края стрелы, если в начальный момент конструкция вращалась с угловой скоростью $\omega_0 = 2$ рад/с, а тележка находилась на расстоянии $a = 1$ м от оси вращения.

Решение

На систему действуют внешние силы: $\vec{P}_1$ – сила тяжести тележки с гру-

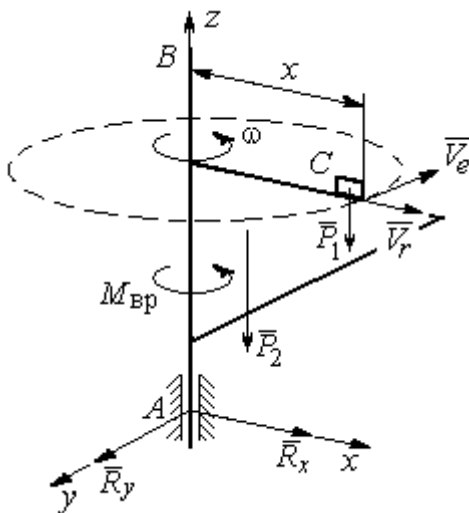


Рис. 5.6. Внешние силы, действующие на кран при его движении

зом, $\vec{P}_2$ – сила тяжести поворотного крана (на рис. 5.6 показана в условном центре тяжести крана); $\vec{R}_x$, $\vec{R}_y$ – составляющие реакции подшипника A и пара сил с моментом, равным вращающему моменту $M_{\text{вр}}$ (см. рис. 5.6). Применим к описанию движения системы теорему об изменении кинетического момента системы относительно оси вращения z , направленной вдоль линии AB .

Поскольку силы тяжести параллельны оси вращения крана, а составляющие реакции шарнира A пересекают её, то моменты этих сил относительно оси z равны нулю и теорема об изменении кинетического момента системы принимает вид: $\frac{dL_z}{dt} = M_{\text{вр}}$. Интегрируя это уравнение при постоянном вращающем моменте, получим равенство: $L_z - L_{z0} = M_{\text{вр}}t$, где L_z, L_{z0} – кинетический момент системы в текущий и начальный моменты времени.

Кинетический момент системы L_z равен сумме: $L_z = L_z^{\text{кран}} + L_z^{\text{груз}}$. Кинетический момент крана как твёрдого тела, вращающегося вокруг неподвижной

оси: $L_z^{\text{кран}} = J\omega$. Полагая тележку с грузом материальной точкой, определим её кинетический момент $L_z^{\text{груз}}$, как момент вектора количества движения тележки относительно оси z . Тележка с грузом участвует в сложном движении. Вектор абсолютной скорости тележки $\vec{V}_{\text{абс}}$ равен сумме $\vec{V}_{\text{абс}} = \vec{V}_r + \vec{V}_e$, где $\vec{V}_r$ – относительная скорость тележки (перемещение по стреле крана); $\vec{V}_e$ – переносная скорость (движение вместе с краном). Воспользовавшись теоремой Вариньона при вычислении момента количества движения тележки с грузом, получим:

$$L_z^{\text{груз}} = M_z(m_1 \vec{V}_{\text{абс}}) = M_z(m_1 \vec{V}_e + m_1 \vec{V}_r) = M_z(m_1 \vec{V}_e) = m_1 V_e x = m_1 \omega x^2.$$

В результате суммарный кинетический момент системы в текущий момент времени $L_z = L_z^{\text{кран}} + L_z^{\text{груз}} = (J + m_1 x^2)\omega$. Тогда начальный кинетический момент систем: $L_{z0} = (J + m_1 a^2)\omega_0$.

Подставляя выражения начального и текущего кинетического моментов в уравнение движения, получим: $(J + m_1 x^2)\omega - (J + m_1 a^2)\omega_0 = M_{\text{вр}} t$, откуда закон изменения угловой скорости крана $\omega = \frac{M_{\text{вр}} t + (J + m_1 a^2)\omega_0}{(J + m_1 x^2)}$. Момент времени t_k , когда тележка достигнет края стрелы ($x = L$), найдём из условия движения тележки по стреле с постоянной скоростью: $V t_k = L - a$. С учётом данных задачи угловая скорость крана в этот момент $\omega(t_k) = 0,93$ рад/с.

5.3. Теорема об изменении кинетической энергии системы

Кинетическая энергия тела при поступательном движении

$T = \frac{1}{2} m V_C^2$, где m – масса тела; V_C – скорость центра масс тела; **при враща-**

тельном движении вокруг неподвижной оси z : $T = \frac{1}{2} J_z \omega^2$, где J_z – момент

инерции тела относительно оси z ; ω – угловая скорость тела; **при плоскопа-**

параллельном движении: $T = \frac{1}{2}mV_C^2 + \frac{1}{2}J_{zC}\omega^2$, где m – масса тела; V_C , ω – скорость центра масс и угловая скорость тела; J_{zC} – момент инерции тела относительно оси z , проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения.

Работа постоянной силы F при прямолинейном перемещении точки приложения силы $A = FScos\alpha$, где S – перемещение точки; α – постоянный угол между перемещением и направлением силы. **Работа пары сил с постоянным моментом M** при повороте тела на конечный угол φ вычисляется по формуле: $A = \pm M\varphi$, где φ – угол поворота тела. Работа считается положительной, если пара сил стремится повернуть тело в направлении его вращения, и отрицательной – в противном случае.

Мощностью силы F называют величину, равную скалярному произведению силы на скорость точки её приложения: $N = \vec{F} \cdot \vec{V}$, где V – скорость точки приложения силы. При плоском движении тела мощность силы равна сумме скалярных произведений: $N = \vec{F} \cdot \vec{V}_O + \vec{M}_O \cdot \vec{\omega}$, где V_O – скорость точки, выбранной полюсом; ω – угловая скорость тела; $\vec{M}_O = M_O(\vec{F})$ – момент силы относительно полюса. Если в качестве полюса выбрать точку K – мгновенный центр скоростей, то мощность силы $N(\vec{F}) = \vec{M}_K(\vec{F}) \cdot \vec{\omega}$, где $M_K(\vec{F})$ – момент силы относительно мгновенного центра скоростей.

Теорема об изменении кинетической энергии системы в дифференциальной форме. Производная по времени от кинетической энергии системы равна сумме мощностей внешних и внутренних сил $\frac{dT}{dt} = \sum N(\vec{F}_k^e) + \sum N(\vec{F}_k^i)$.

Теорема об изменении кинетической энергии системы на конечном перемещении. Изменение кинетической энергии системы при перемещении её

из начального состояния в текущее равно сумме работ внешних и внутренних сил, действующих на систему: $T - T_0 = \sum A(\vec{F}_k^e) + \sum A(\vec{F}_k^i)$.

Механические системы, состоящие из абсолютно твердых тел, соединенных гибкими нерастяжимыми нитями, называются **неизменяемыми**. В неизменяемых системах сумма работ и сумма мощностей внутренних сил равны нулю: $\sum A(\vec{F}_k^i) = 0$.

Примеры решения задач на применение теоремы об изменении кинетической энергии системы

Задача 57. Планетарный механизм, позволяющий получать повышенные передаточные отношения угловых скоростей, состоит из трех одинаковых колёс, соединённых кривошипом OA (рис. 5.7). Колесо 1 неподвижно, кривошип OA вращается с угловой скоростью ω_{OA} и приводит в движение колёса 2 и 3. Полагая массы колёс и их радиусы одинаковыми, равными m и r , и пренебрегая массой кривошипа, найти кинетическую энергию механизма.

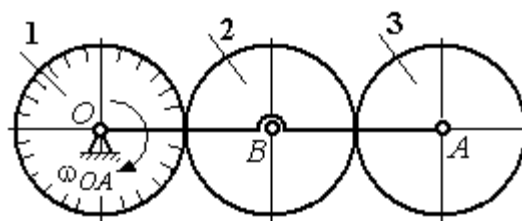


Рис. 5.7. Планетарный механизм

Решение

Кинетическая энергия механизма T равна сумме энергий колёс 2 и 3:

$T = T_2 + T_3$. Энергия колеса 1 равна нулю потому, что оно неподвижно, а энергия кривошипа равна нулю, так как массой кривошипа пренебрегаем. При движении механизма колесо 2, увлекаемое кривошипом, катится по неподвижной поверхности первого колеса. Энергия колеса 2:

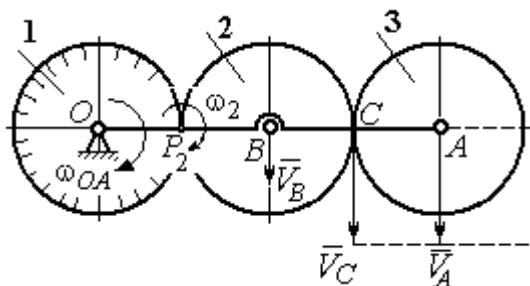


Рис. 5.8. Расчётная схема вычисления энергии механизма

$T_2 = \frac{mV_B^2}{2} + \frac{J_{2B}\omega_2^2}{2}$, где V_B – скорость центра масс колеса 2, J_{2B} – момент инерции колеса 2 относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости колеса, $J_{2B} = \frac{mr^2}{2}$.

Выразим кинетическую энергию колеса 2 через угловую скорость ω_{OA} кривошипа OA .

Скорость точки B , лежащей на кривошипе OA : $V_B = \omega_{OA} \cdot OB = \omega_{OA} 2r$.

Так как точка P_2 касания колёс 1 и 2 является мгновенным центром скоростей колеса 2 (рис. 5.8), угловая скорость колеса 2 $\omega_2 = \frac{V_B}{BP_2}$. В результате получим: $\omega_2 = 2\omega_{OA}$. Подставив зависимости V_B и ω_2 в выражение кинетической энергии колеса 2, найдём:

$$T_2 = \frac{m(\omega_{OA} 2r)^2}{2} + \frac{mr^2}{2} \cdot \frac{(2\omega_{OA})^2}{2} = 3m\omega_{OA}^2 r^2.$$

Вычислим кинетическую энергию колеса 3. Найдём скорость точки C , считая, что она принадлежит колесу 2: $V_C = \omega_2 \cdot P_2C = 4\omega_{OA}r$. Скорость точки A – центра колеса 3 определим, полагая, что точка A лежит и на кривошипе: $V_A = \omega_{OA} \cdot OA = 4\omega_{OA}r$. Скорости двух точек A и C колеса 3 равны и параллельны, причём линия AC перпендикулярна векторам скоростей $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_C$ (см. рис. 5.8). В этом случае мгновенный центр скоростей отсутствует и колесо 3 совершает мгновенно-поступательное движение. Энергия поступательного

движения колеса 3: $T_3 = \frac{mV_A^2}{2} = \frac{m(4\omega_{OA}r)^2}{2} = 8m\omega_{OA}^2 r^2$.

Окончательно, энергия механизма: $T = T_2 + T_3 = 11m\omega_{OA}^2 r^2$.

Задача 58. Горизонтальный желоб DE опирается на блок 1 и на каток 3 одинакового радиуса r (рис. 5.9). Блок 1 весом P_1 вращается вокруг неподвиж-

ной оси O_1 . Каток 3 катится по горизонтальному рельсу без проскальзывания. На одной оси с катком 3 жестко связано колесо 2 радиуса R . Их общий вес равен Q , а общий радиус инерции относительно оси z , проходящей через центр масс C перпендикулярно плоскости катка, равен i_z . Система движется в вертикальной плоскости под действием сил тяжести, силы $\vec{F}$ и пары сил с моментом M . Массой желоба пренебрегаем. Скольжение между желобом и блоком 1, а также катком 3 отсутствует. Определить ускорение центра масс колеса 2 и катка 3 и угловое ускорение блока 1, если: $P_1 = 40$ Н, $Q = 60$ Н, $F = 50$ Н, $M = 45$ Н·м, $R = 0,8$ м, $r = 0,6$ м, $i_z = 0,4$ м.

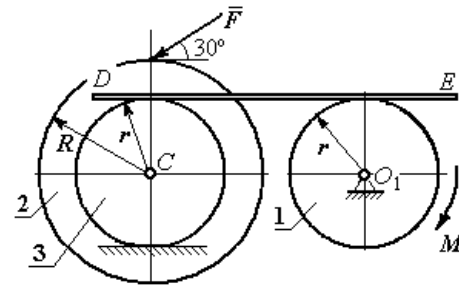


Рис. 5.9. Схема движения механической системы

Решение

Для решения задачи воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии для неизменяемых механических систем: $\frac{dT}{dt} = \sum N(\vec{F}_k^e)$, где T – энергия системы в её текущем положении; $\sum N(\vec{F}_k^e)$ – суммарная мощность внешних сил.

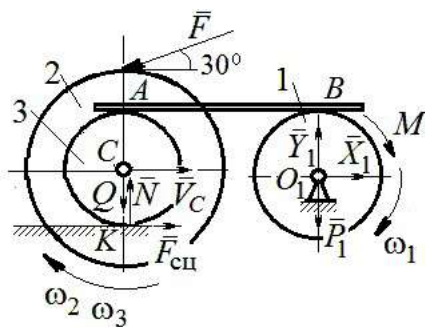


Рис. 5.10. Расчетная схема для исследования движения системы

Предположим, во время движения системы блок 1 вращается по ходу часовой стрелки.

Угловые скорости ω_1 , ω_2 блока 1, катка 3 и скорость $\vec{V}_C$ центра масс катка 3 показаны на рис. 5.10. Угловая скорость колеса 2 и катка 3 равны: $\omega_3 = \omega_2$.

Кинетическая энергия вращательного движения блока 1 $T_1 = \frac{1}{2} J_{zO_1} \omega_1^2$,

где J_{zO_1} – осевой момент инерции блока, $J_{zO_1} = \frac{m_1 r^2}{2}$.

Фигура, состоящая из катка 3 и колеса 2, движется плоскопараллельно.

Кинетическая энергия фигуры определяется по формуле:

$T_2 = \frac{1}{2} m V_C^2 + \frac{1}{2} J_{zC} \omega_2^2$, где m – общая масса катка и колеса, $m = \frac{Q}{g}$, J_{zC} – мо-

мент инерции фигуры относительно оси z , проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости диска, $J_{zC} = m i_z^2$,

У катка 3 мгновенный центр скоростей находится в точке касания его с неподвижной поверхностью (точка K на рис. 5.10). Тогда $\omega_3 = \frac{V_C}{r}$. Скорость точки A катка $V_A = \omega_3 2r = 2V_C$. Приравнивая скорость точки A на катке 2 к скорости точки B на блоке 1, получим $\omega_1 = \frac{2V_C}{r}$.

Найдём кинетическую энергию системы, выраженную через скорость центра масс катка 3:

$$T = T_1 + T_2 = \frac{P_1}{g} V_C^2 + \frac{Q}{2g} \left(1 + \frac{i_z^2}{r^2} \right) V_C^2 = \frac{V_C^2}{2g} \left[2P_1 + Q \left(1 + \frac{i_z^2}{r^2} \right) \right].$$

Найдём сумму мощностей внешних сил.

На блок 1 действуют: сила тяжести $\vec{P}_1$, пара сил с моментом M и реакция шарнира O_1 , разложенная на составляющие $\vec{X}_1$, $\vec{Y}_1$ (рис. 5.10). Мощности силы тяжести $\vec{P}_1$ и сил реакции $\vec{X}_1$, $\vec{Y}_1$ подшипника O_1 равны нулю, так как нет перемещения точек приложения этих сил. Момент M направлен в сторону вращения блока 1, его мощность $N(M) = M \omega_1 = M \frac{2V_C}{r}$.

На каток 3 (вместе с жестко связанным с ним колесом 2) действуют: сила $\vec{F}$, сила тяжести $\vec{Q}$ катка и колеса, нормальная реакция опоры $\vec{N}$ и сила сцепления $\vec{F}_{\text{сц}}$ катка 3 с поверхностью.

Мощности сил $\vec{N}$ и $\vec{F}_{\text{сц}}$ равны нулю, так как точкой приложения этих сил является мгновенный центр скоростей катка 3, скорость которого равна нулю. Мощность силы тяжести $\vec{Q}$ равна нулю, так как угол между вектором силы и вектором скорости точки C равен 90° .

Для определения мощности силы $\vec{F}$, приложенной к колесу, выберем в качестве полюса точку K – мгновенный центр скоростей диска 2. С учётом того, что скорость $V_K = 0$, получим:

$$\begin{aligned} N(\vec{F}) &= \vec{F} \cdot \vec{V}_K + \vec{M}_K(\vec{F}) \cdot \vec{\omega}_2 = \vec{M}_K(\vec{F}) \vec{\omega}_2 = \\ &= -F(r+R)\omega_2 \cos 30^\circ = -FV_C \left(1 + \frac{R}{r}\right) \cos 30^\circ. \end{aligned}$$

Поскольку вращение, создаваемое моментом силы $\vec{F}$ относительно центра K , противоположно выбранному направлению угловой скорости катка, мощность силы $\vec{F}$ отрицательная.

Суммарная мощность внешних сил:

$$\sum N(F^e) = -FV_C \left(1 + \frac{R}{r}\right) \cos 30^\circ + M \frac{2V_C}{r}.$$

Составляем уравнение теоремы об изменении кинетической энергии системы. Находим производную по времени от кинетической энергии системы

$$\frac{dT}{dt} = \frac{V_C}{g} a_C \left[2P_1 + Q \left(1 + \frac{i_z^2}{r^2} \right) \right] \text{ и приравниваем суммарной мощности внешних}$$

сил. Получим:

$$\frac{1}{g} a_C \left[2P_1 + Q \left(1 + \frac{i_z^2}{r^2} \right) \right] = -F \left(1 + \frac{R}{r} \right) \cos 30^\circ + \frac{2M}{r},$$

откуда с учётом исходных данных задачи ускорение центра масс диска 2 $a_C = 2,88 \text{ м/с}^2$. Для определения углового ускорения блока 1 продифференцируем по времени равенство $\omega_1 = \frac{2V_C}{r}$. Получим: $\varepsilon_1 = \frac{2a_C}{r} = 9,6 \text{ рад/с}^2$.

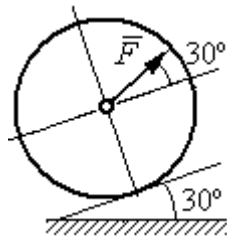


Рис. 5.11. Движение катка на наклонной плоскости

Задача 59. Каток радиуса r , весом P закатывают вверх по наклонной плоскости приложив в центре катка силу $\vec{F}$ под углом 30° к наклонной плоскости (рис. 5.11). Сама плоскость наклонена под углом 30° к горизонту. Величина силы $F = 2P$. В начальном положении центр катка имел скорость V_0 .

На какое расстояние S переместился центр катка, если в конце перемещения его скорость удвоилась.

Решение

Применим теорему об изменении кинетической энергии на конечном перемещении системы: $T - T_0 = \sum A(F_k)$. На каток действует сила тяжести $\vec{P}$, сила $\vec{F}$, нормальная реакция опоры $\vec{N}$ и сила $\vec{F}_{\text{сц}}$ сцепления диска с наклонной плоскостью (рис. 5.12). При перемещении центра катка на расстояние S вдоль наклонной плоскости работу совершают только сила $\vec{F}$: $A(\vec{F}) = F \cos 30^\circ S$ и сила тяжести:

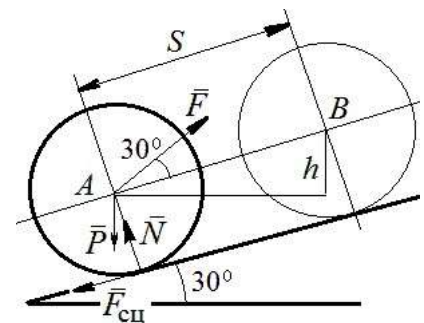


Рис. 5.12. Расчётная схема движения катка

$A(\vec{P}) = -Ph$, где h – перепад высот при перемещении центра масс катка. Работа реакции опоры и силы сцепления равна нулю.

Кинетическая энергия катка $T = \frac{1}{2} m V_A^2 + \frac{1}{2} J_{zA} \omega^2$, где J_{zA} – момент инерции фигуры относительно оси z , проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости диска, $J_{zA} = \frac{mr^2}{2}$. Выражая угловую скорость катка через

скорость центра масс $\omega = \frac{V_A}{r}$, с учётом выражения момента инерции катка, по-

лучим энергию катка в виде: $T = \frac{3}{4} m V_A^2$.

Составим уравнение теоремы об изменении кинетической энергии при перемещении центра катка на расстояние S : $\frac{3}{4} m V_B^2 - \frac{3}{4} m V_A^2 = F \cos 30^\circ S - Ph$, где $V_A = V_0$, $V_B = 2V_0$, $F = 2P$, $h = S \sin 30^\circ$.

$$\text{Найдём искомое перемещение: } S = \frac{9V_0^2}{4g(2\cos 30^\circ - \sin 30^\circ)}.$$

Упражнения

Упражнение 5.1. Крановая тележка массы m_1 может перемещаться по горизонтальной балке без трения (рис. 5.13). В центре масс тележки закреплён трос длиной l , на другом конце которого привязан груз массы m_2 . Трос может совершать колебательные движения в вертикальной плоскости. В начальный момент трос был в вертикальном положении. Определить горизонтальное перемещение тележки в зависимости от угла наклона троса. Весом троса пренебречь.

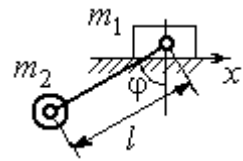


Рис. 5.13. Движение крановой тележки

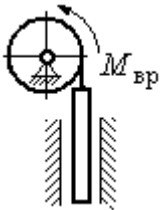


Рис. 5.14. Схема механизма лебёдки

Упражнение 5.2. К барабану лебёдки, поднимающей штангу, приложен вращающий момент, пропорциональный времени $M_{вр} = kt$ (рис. 5.14). Штанга массы m_1 поднимается посредством каната, навитого на барабан массы m_2 и радиуса r . В начальный момент система находилась в покое. Определить угловую скорость барабана, считая его однородным диском.

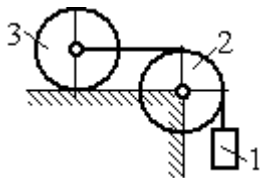


Рис. 5.15. Схема движения системы
приложен момент M .

Упражнение 5.3. Груз 1 массы m_1 подвешен на нерастяжимом тросе, другой конец которого переброшен через блок 2 и закреплён в центре масс катка 3 (рис. 5.15). Каток 3 катится по горизонтальной поверхности без проскальзывания. Блок 2 и каток 3 – однородные диски массы m_2 и m_3 , радиуса r . В начальный момент система находилась в покое. Определить скорость груза, когда он опустится на высоту h , если к катку 3

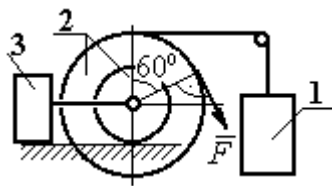


Рис. 5.16. Схема механизма катка

Упражнение 5.4. Механическая система включает два груза 1 и 3 одинакового веса P и каток 2 весом $2P$, радиусом $R = 2r$ с цилиндрическим выступом радиусом r (рис. 5.16). Каток катится выступом по неподвижной поверхности без проскальзывания. К катку по касательной к окружности приложена сила $F = 2P$. Найти ускорение центра масс катка, если его радиус инерции относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно

плоскости движения: $i_{zC} = r\sqrt{2}$.

5.4. Применение общих теорем динамики системы к описанию движений твёрдого тела

Поступательное движение твёрдого тела описывается дифференциальными уравнениями: $m\ddot{x} = \sum F_{kx}^e$, $m\ddot{y} = \sum F_{ky}^e$, $m\ddot{z} = \sum F_{kz}^e$ - или в алгебраической форме $ma_{Cx} = \sum F_{kx}^e$, $ma_{Cy} = \sum F_{ky}^e$, $ma_{Cz} = \sum F_{kz}^e$, где m – масса тела; $\ddot{x} = a_{Cx}$, $\ddot{y} = a_{Cy}$, $\ddot{z} = a_{Cz}$ – проекции ускорения центра масс тела на координатные оси; F_{kx}^e , F_{ky}^e , F_{kz}^e – проекции внешних сил.

Вращательное движение твёрдого тела относительно неподвижной оси z описывается дифференциальным уравнением: $J_z \frac{d\omega}{dt} = \sum M_z(\vec{F}_k^e)$ или алгебраическим уравнением: $J_z \varepsilon = \sum M_z(\vec{F}_k^e)$, где ω , ε – угловая скорость и угловое ускорение тела; $\sum M_z(\vec{F}_k^e)$ – сумма моментов внешних сил относительно оси z ; J_z – момент инерции тела относительно оси z .

Плоскопараллельное движение твёрдого тела описывается уравнениями движения центра масс и вращательного движения тела относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения.

В проекции на координатные оси уравнения плоскопараллельного движения тела имеют вид:

$$ma_{Cx} = \sum F_{kx}^e; ma_{Cy} = \sum F_{ky}^e; J_{zC}\varepsilon = \sum M_{zC}(\vec{F}_k^e),$$

где a_{Cx} , a_{Cy} – проекции ускорения центра масс тела; F_{kx}^e , F_{ky}^e – проекции на оси координат внешних сил, действующих на тело; J_{zC} – момент инерции тела относительно оси z , проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения; ε – угловое ускорение тела; $M_{zC}(\vec{F}_k^e)$ – моменты внешних сил относительно оси, проходящей через центр масс.

Проводя динамический расчет механической системы, следует рассматривать движение каждого тела системы в отдельности, предварительно освободив его от связей и заменив их действие реакциями.

Примеры решения задач на составление уравнений движения твердых тел

Задача 59. Лебёдка поднимает груз 1 массы $m_1 = 50$ кг посредством троса, переброшенного через блок 3 и навитого на барабан 2 массы $m_2 = 20$ кг, радиуса $r = 0,8$ м (рис. 5.17). К барабану приложен постоянный вращающий момент $M_{вр} = 480$ Н·м. Определить ускорение груза, натяжение троса и реакцию шарнира барабана 2. Весом троса и массой блока 3 пренебречь, барабан считать сплошным цилиндром.

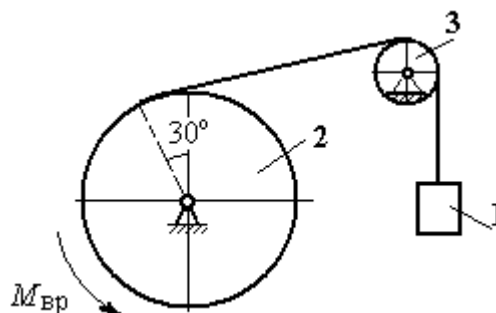


Рис. 5.17. Механизм лебёдки

Решение

Составим уравнение движения груза 1. Для этого освобождаем груз от связей, заменив действие троса реакцией. На груз действует сила тяжести $\vec{P}_1$ и реакция троса $\vec{H}_1$ (рис. 5.18). Выберем ось x по направлению движения груза. Уравнение движения груза в проекции на ось x : $m_1 a_1 = H_1 - P_1$.

Рассмотрим движение барабана 2. Освободим барабан от связей и заменим их действие реакциями.

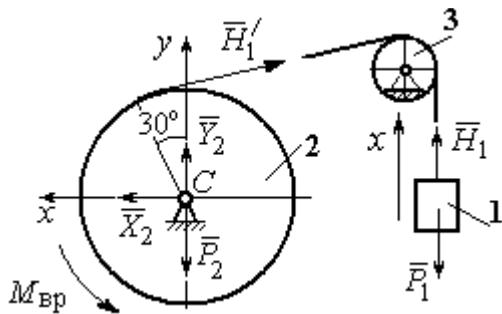


Рис. 5.18. Внешние силы и реакции, действующие на груз и барабан при движении системы

На барабан действует сила тяжести $\vec{P}_2$, пара сил с моментом вращения $M_{вр}$, реакция троса $\vec{H}_1'$ и реакция шарнира (на рис. 5.18 разложена на составляющие $\vec{X}_2$, $\vec{Y}_2$). Так как массой блока 3 пренебрегаем, то модули сил $\vec{H}_1$ и $\vec{H}_1'$ равны. Направления действия сил и момента показаны на рис. 5.18.

Уравнение вращательного движения барабана относительно оси z :

$$J_z \varepsilon_2 = \sum M_z(F_k) = M_{вр} - H_1' r, \text{ где момент инерции барабана } J_z = \frac{m_2 r^2}{2}.$$

Продифференцируем по времени равенство $V_1 = \omega_2 r$ и выразим угловое ускорение барабана через ускорение груза 1. Получим $\varepsilon_2 = \frac{a_1}{r}$. Подставляя выражение углового ускорения в уравнение вращательного движения барабана с учётом равенства модулей сил $\vec{H}_1$ и $\vec{H}_1'$, напомним уравнения движения барабана и груза в виде системы уравнений:

$$m_1 a_1 = H_1 - P_1, \quad m_2 a_1 = \frac{2M_{вр}}{r} - 2H_1,$$

откуда находим $a_1 = 1,82 \text{ м/с}^2$, $H_1 = 581,8 \text{ Н}$. Натяжение троса численно равно реакции.

Для определения реакции шарнира составим (формально) уравнение движения центра масс блока 2 в проекциях на оси x, y (см. рис. 5.18):

$$m_2 a_{Cx} = X_2 - H_1' \cos 30^\circ = 0, \quad m_2 a_{Cy} = Y_2 + H_1' \cos 60^\circ - P_2 = 0.$$

Отсюда $X_2 = 503,84 \text{ Н}$, $Y_2 = -94,7 \text{ Н}$, $R_2 = \sqrt{X_2^2 + Y_2^2} = 512,66 \text{ Н}$.

Задача 60. Барабан весом G , радиусом R имеет цилиндрический выступ радиусом r (рис. 5.19). Барабан скатывается по наклонной плоскости с углом наклона 30° , опираясь на неё поверхностью выступа. К барабану приложены постоянные силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$. Сила $\vec{F}_1$ направлена по касательной к поверхности барабана. Сила $\vec{F}_2$ действует под углом 30° к диаметру барабана, перпендикулярному наклонной плоскости. В начальный момент времени барабан приведён в равновесие парой сил с моментом M .

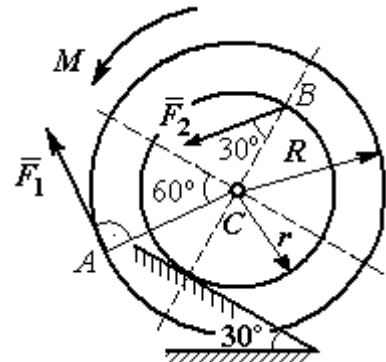


Рис. 5.19. Схема движения барабана по наклонной плоскости

Определить угловое ускорение барабана и закон движения центра масс, если в положении равновесия величину уравнивающего момента увеличить в 1,2 раза. Исходные данные для решения задачи: $R = 0,6 \text{ м}$, $r = 0,2 \text{ м}$, $G = 100 \text{ Н}$, $F_1 = 60 \text{ Н}$, $F_2 = 25 \text{ Н}$, радиус инерции барабана $i_z = 0,4 \text{ м}$.

Решение

На барабан действуют силы $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, сила тяжести $\vec{G}$, пара сил с неизвестным моментом M , нормальная реакция опоры $\vec{N}$ и сила $\vec{F}_{\text{сц}}$ сцепления барабана с поверхностью.

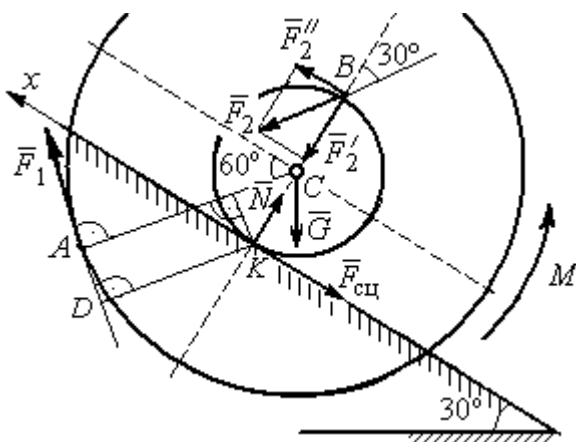


Рис. 5.20. Силы, действующие на барабан, во время движения

Сила сцепления приложена в точке K касания выступа барабана с наклонной плоскостью и направлена вдоль неё (рис. 5.20).

Для определения момента M , приводящего барабан в равновесие, запишем уравнение равно-

весия в виде равенства нулю моментов сил $\sum M_K(\vec{F}_k^e) = 0$ относительно точки K . Точка K выбрана с той целью, что в уравнение не будет входить момент неизвестной силы сцепления.

На рис. 5.20 показано разложение силы $\vec{F}_2$: $\vec{F}_2 = \vec{F}_2' + \vec{F}_2''$. Значения составляющих определяются как проекции: $F_2' = F_2 \cos 30^\circ$, $F_2'' = F_2 \sin 30^\circ$.

Применяя теорему Вариньона, вычислим момент силы $\vec{F}_2$ относительно точки K : $M_K(\vec{F}_2) = M_K(\vec{F}_2') + M_K(\vec{F}_2'') = F_2 \sin 30^\circ \cdot 2r$.

Момент силы $\vec{F}_1$ относительно точки K :

$$M_K(\vec{F}_1) = -F_1 \cdot KD = -F_1(R - r \cos 30^\circ).$$

В результате уравнение моментов сил при равновесии барабана принимает вид

$$\sum M_K(\vec{F}_k^e) = -F_1(R - r \cos 30^\circ) + F_2 \sin 30^\circ \cdot 2r - Gr \sin 30^\circ + M = 0.$$

Подставляя сюда исходные данные задачи, находим величину удерживающего момента $M = 30,61$ Н·м. Направление момента показано дуговой стрелкой на рис. 5.20.

Увеличим значение момента M , удерживающего барабан в равновесии, в 1,2 раза: $M_1 = 1,2M$. Возникшее после этого качение барабана вверх по наклонной плоскости представляет собой плоскопараллельное движение, которое описывается с применением теорем о движении центра масс и об изменении кинетического момента.

Уравнение движения центра масс барабана в проекции на ось x , направленную вверх по наклонной плоскости, имеет вид:

$$m\ddot{x}_C = F_1 \cos 30^\circ + F_2 \cos 60^\circ - G \cos 60^\circ - F_{\text{сц}},$$

где x_C – координата центра масс барабана.

Применив теорему об изменении кинетического момента барабана относительно оси z , проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости

движения и считая моменты сил положительными, если они создают вращение в сторону движущегося вверх барабана, выразим уравнение вращательного движения барабана вокруг оси z в виде:

$$J_{zC}\ddot{\varphi} = -F_1R + F_2r\cos 60^\circ + F_{\text{сц}}r + M_1,$$

где φ – угол поворота барабана; J_{zC} – момент инерции барабана, $J_{zC} = mi_z^2$; i_z – радиус инерции. С учётом соотношения $\ddot{\varphi} = \frac{\ddot{x}_C}{r}$ получим уравнение:

$$m\ddot{x}_C \left(1 + \frac{i_z^2}{r^2} \right) = -F_1 \left(\frac{R}{r} - \cos 30^\circ \right) + 2F_2 \cos 60^\circ - G \cos 60^\circ + \frac{M_1}{r}.$$

После подстановки данных задачи находим дифференциальное уравнение движения центра масс: $\ddot{x}_C = 0,6$. Дважды интегрируя его с нулевыми начальными условиями (так как движение началось из состояния покоя), находим закон движения центра масс: $x_C = 0,3t^2$ м. Из уравнения следует, что барабан движется в сторону положительного направления оси x .

Угловое ускорение барабана $\varepsilon = \ddot{\varphi} = \frac{\ddot{x}_C}{r} = 3$ рад/с².

Задача 61. Механизм

(рис. 5.21) включает в себя груз 1, каток 2 и ступенчатый барабан 3, соединённых нерастяжимыми нитями. Движение механизма происходит из состояния покоя в вертикальной плоскости под действием сил тяжести $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$, силы

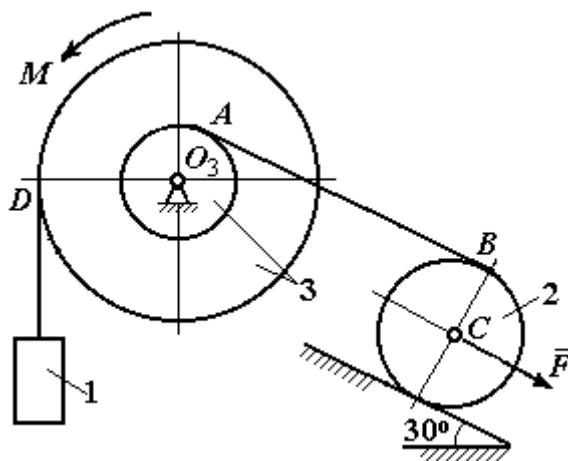


Рис. 5.21. Конструкция механической системы

$\vec{F}$, приложенной в центре масс катка 2, и пары сил с моментом M , приложенной к барабану 3. Качение катка 2 по наклонной плоскости с углом наклона к горизонту 30° происходит без проскальзывания.

Каток 2 считать однородным диском радиуса R_2 . Радиусы ступеней барабана 3: R_3 , r_3 , радиус инерции барабана i_3 .

Найти ускорение груза 1, силы натяжения нитей и динамическую реакцию шарнира барабана 3, если $P_1 = P_2 = 2P$; $P_3 = 3P$, $F = 3P$; $M = Pr$, $R_2 = 2r$; $R_3 = 3r$; $r_3 = r$; $i_3 = r\sqrt{3}$.

Решение

Рассмотрим движение каждого тела системы отдельно, предварительно освободив тела от связей и заменив их действие реакциями. На рис. 5.22 изображены силы, действующие на тела системы, после освобождения их от связей и направление движения каждого тела.

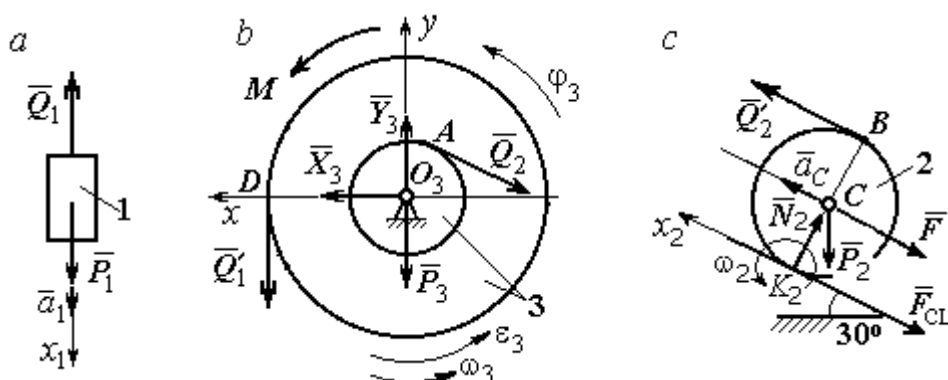


Рис. 5.22. Расчетные схемы для описания движения тел, входящих в систему

Допустим, груз движется вниз со скоростью V_1 , ускорением a_1 . К нему приложена сила тяжести $\vec{P}_1$ и реакция нити $\vec{Q}_1$ (рис. 5.22, а). Направим ось x_1 в сторону движения груза. Уравнение движения груза вдоль оси x_1 имеет вид:

$$m_1 a_1 = \sum F_{kx} = P_1 - Q_1 = 2P - Q_1.$$

Барабан 3 вращается вокруг неподвижной оси z , проходящей через центр масс O_3 . На диск 3 действует сила тяжести $\vec{P}_3$, реакция подшипника $\vec{R}_3$ (на

рис. 5.22, *b* показано разложение реакции на составляющие $\vec{X}_3, \vec{Y}_3$), пара сил с моментом M и реакции нитей $\vec{Q}'_1$ и $\vec{Q}_2$.

При составлении уравнения вращательного движения барабана моменты сил относительно оси считаем положительными, если они создают поворот в сторону вращения барабана. Уравнение вращения барабана 3 имеет вид:

$$J_{zO_3} \varepsilon_3 = \sum M_{zO_3} (F_k) = Q'_1 R_3 + M - Q_2 r_3 = Q'_1 3r + Pr - Q_2 r,$$

Момент инерции барабана относительно оси z : $J_{zO_3} = m_3 i_3^2 = \frac{9Pr^2}{g}$;

Каток 2 совершает плоскопараллельное движение. К нему приложена сила тяжести $\vec{P}_2$, сила $\vec{F}$, реакция нити $\vec{Q}'_2$, нормальная реакция $\vec{N}_2$ наклонной плоскости и сила $\vec{F}_{\text{сц}}$ сцепления диска с поверхностью (рис. 5.22, *c*).

Выберем ось x_2 по направлению движения центра масс катка 2. Плоскопараллельное движение катка описывается уравнениями движения его центра масс в проекции на ось x_2 и вращения вокруг оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости диска:

$$m_2 a_C = Q'_2 - F - F_{\text{сц}} - P_2 \cos 60^\circ = Q'_2 - 3P - F_{\text{сц}} - P;$$

$$J_C \varepsilon_2 = Q'_2 R_2 + F_{\text{сц}} R_2 = Q'_2 2r + F_{\text{сц}} 2r, \quad J_C = \frac{m_2 R_2^2}{2}.$$

При составлении второго уравнения момент силы считается положительным, если он создаёт поворот в сторону вращения катка.

К системе четырех уравнений, описывающих движения тел в системе, необходимо добавить уравнения связей между ускорениями точек и угловыми ускорениями тел. Предположим, скорость центра масс катка 2 равна V_C (см.

рис. 5.22, *c*). Угловая скорость катка $\omega_2 = \frac{V_C}{CK_2} = \frac{V_C}{R_2}$, где CK_2 – расстояние от

центра масс катка 2 до его мгновенного центра скоростей. Продифференцировав по времени последнее равенство, получим: $\varepsilon_2 = \dot{\omega}_2 = \frac{\dot{V}_C}{R_2} = \frac{a_C}{2r}$.

Скорость точки B катка 2 $V_B = \omega_2 \cdot BK_2 = 2V_C$. Приравняв скорость точки A к скорости точки B (см. рис. 5.21), получим: $2V_C = V_B = V_A = \omega_3 r_3 = \omega_3 r$, откуда $\omega_3 = \frac{2V_C}{r}$. После дифференцирования найдём: $\varepsilon_3 = \frac{2a_C}{r}$.

Скорость груза 1 связана со скоростью центра масс катка 2 следующим образом: $V_1 = V_D = \omega_3 R_3 = \frac{2V_C}{r} 3r = 6V_C$. Тогда ускорение груза 1 $a_1 = 6a_C$.

После подстановки уравнений связи в уравнения движения с учётом равенства модулей сил $\vec{Q}'_1$ и $\vec{Q}_1$, а также $\vec{Q}_2$ и $\vec{Q}'_2$ получим систему:

$$\begin{aligned} \frac{12P}{g} a_C &= 2P - Q_1; & \frac{18P}{g} a_C &= 3Q_1 + P - Q_2, \\ \frac{2P}{g} a_C &= Q_2 - 4P - F_{\text{сц}}; & \frac{P}{g} a_C &= Q_2 + F_{\text{сц}}, \end{aligned}$$

откуда находим: $a_C = 0,09g$, $Q_1 = 0,92P$, $Q_2 = 2,14P$.

Динамические реакции $\vec{X}_3$, $\vec{Y}_3$, действующие на ось вращающегося барабана 3 (рис. 5.22, b), определяются из уравнений, которые можно получить, формально применив к барабану теорему о движении центра масс. Так как центр масс барабана 3 неподвижен, его ускорение равно нулю, $a_{O_3} = 0$. Тогда уравнения движения его центра масс в проекциях на оси x , y имеют вид:

$$m_3 a_{O_3x} = X_3 - Q_2 \cos 30^\circ = 0;$$

$$m_3 a_{O_3y} = Y_3 - Q_1 - P_3 - Q_2 \cos 60^\circ = 0.$$

Подставляя значения $Q_1 = 0,92P$ и $Q_2 = 2,14P$, находим составляющие реакции оси барабана 3: $X_3 = Q_2 \cos 30^\circ = 1,85P$, $Y_3 = Q_1 + P_3 + Q_2 \cos 60^\circ = 4,98P$.

Полная величина реакции оси барабана 3: $R_3 = \sqrt{X_3^2 + Y_3^2} = 5,31P$.

Задача 62. Подъёмное устройство (рис. 5.23) состоит из однородного диска 1 массой m_1 , радиусом r_1 , ступенчатого диска 2 массой $m_2 = 3m_1$, радиусом $R_2 = 4r_1$ и радиусом ступеньки $r_2 = r_1$ и груза 3 массой $m_3 = 2m_1$. Система движется из состояния покоя в вертикальной плоскости под действием сил тяжести и пары сил с моментом $M = m_1gr_1$, приложенной к диску 1. Определить ускорение груза 3 и натяжение нити груза 3, если радиус инерции ступенчатого диска относительно оси, проходящей через центр масс, перпендикулярно плоскости диска 2, $i_{2C} = 2r_1$.

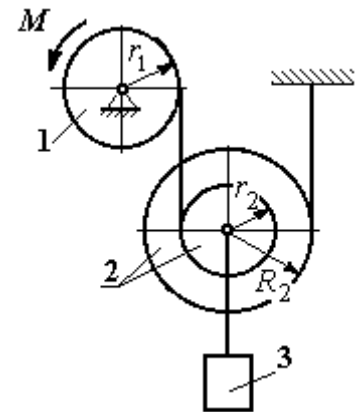


Рис. 5.23. Конструкция подъёмного устройства

Решение задачи осуществить с применением теоремы об изменении кинетической энергии системы и проверить его методом динамического расчёта, составляя уравнения движения тел, входящих в систему.

Решение

1. Для неизменяемой системы (состоящей из абсолютно твёрдых тел, соединённых нерастяжимыми нитями), движущейся из состояния покоя, теорема об изменении кинетической энергии на конечном перемещении имеет вид $T = \sum A(\vec{F}_k^e)$. Схема движения механизма в предположении, что груз 3 опускается, показана на рис. 5.24.

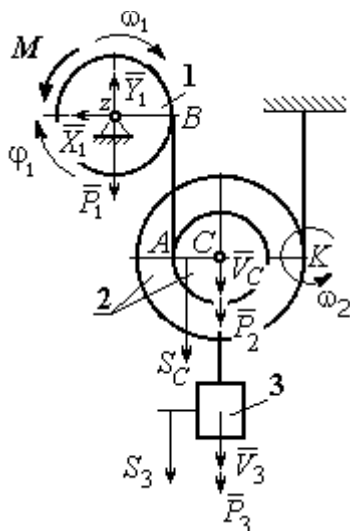


Рис. 5.24. Схема движения механизма

Диск 1 вращается вокруг неподвижной оси z . Кинетическая энергия диска 1: $T_1 = \frac{J_{1z}\omega_1^2}{2}$, где момент инерции диска $J_{1z} = \frac{m_1r_1^2}{2}$.

Диск 2 вращается вокруг центра масс C . Кинетическая энергия диска 2: $T_2 = \frac{J_{2C}\omega_2^2}{2} + \frac{m_2V_C^2}{2}$, где $J_{2C} = \frac{m_2i_{2C}^2}{2}$.

Кинетическая энергия груза 3: $T_3 = \frac{m_3V_3^2}{2}$.

Потенциальная энергия системы: $U = m_1gz_1 + m_2gz_2 + m_3gz_3$.

У диска 2 плоскопараллельное движение. Кинетическая энергия диска 2:

$T_2 = \frac{m_2 V_C^2}{2} + \frac{J_{2C} \omega_2^2}{2}$, где V_C – скорость центра масс диска 2. Момент инерции диска 2 относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно движению диска, $J_{2C} = m_2 i_{2C}^2$.

Кинетическая энергия груза 3: $T_3 = \frac{m_3 V_3^2}{2}$.

Энергия механизма равна сумме энергий тел, входящих в систему:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 = \frac{J_{1z} \omega_1^2}{2} + \frac{m_2 V_C^2}{2} + \frac{J_{2C} \omega_2^2}{2} + \frac{m_3 V_3^2}{2}.$$

Выразим угловые скорости дисков 1 и 2 и скорость центра масс диска 2 через скорость груза 3.

Скорость центра масс диска 2 равна скорости груза 3, $V_C = V_3$. Угловая скорость диска 2 $\omega_2 = \frac{V_C}{CK} = \frac{V_3}{R_2}$, где CK – расстояние от центра диска 2 до его мгновенного центра скоростей.

Скорость точки B нити равна скорости точки A . Из равенства $\omega_1 r_1 = \omega_2 (R_2 + r_2)$ найдём: $\omega_1 = \frac{(r_2 + R_2)}{r_1} \omega_2 = \frac{(r_2 + R_2)}{r_1} \frac{V_3}{R_2}$.

Подставляя найденные зависимости в выражение энергии системы, получим кинетическую энергию механизма:

$$T = \frac{V_3^2}{2} \left[\frac{m_1}{2} \left(1 + \frac{r_2}{R_2} \right)^2 + m_2 \left(1 + \frac{i_{2C}^2}{R_2^2} \right) + m_3 \right] = \frac{209}{64} m_1 V_3^2.$$

Во время движения механизма работу совершают силы тяжести $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$ и пара сил с моментом M . Перемещения S_C и S_3 точек приложения сил $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$ и угол φ_1 поворота диска 1 показаны на рис. 5.24.

Сумма работ сил $\sum A(\vec{F}_k^e) = P_3 S_3 + P_2 S_C - M\varphi_1$. Работа момента отрицательная, так как заданное направление момента противоположно выбранному направлению вращения колеса 1.

Выразим перемещение центра масс диска 2 и угол поворота диска 1 через перемещение груза 3. Проинтегрировав равенство скоростей $V_3 = V_C$, получим равенство перемещений: $S_3 = S_C$. Аналогично, из равенства $\omega_1 = \frac{(r_2 + R_2)}{r_1} \frac{V_3}{R_2}$

следует соотношение $\varphi_1 = \frac{(r_2 + R_2)}{r_1} \frac{S_3}{R_2}$.

В итоге суммарная работа внешних сил в механизме:

$$\sum A(\vec{F}_k^e) = \left[P_3 + P_2 - M \frac{(r_2 + R_2)}{r_1 R_2} \right] S_3 = \frac{15}{4} m_1 g S_3.$$

Составляя уравнение теоремы об изменении кинетической энергии системы, получим равенство:

$$\frac{209}{64} m_1 V_3^2 = \frac{15}{4} m_1 g S_3 \text{ или } V_3^2 = \frac{240}{209} g S_3.$$

Продифференцируем последнее равенство. Получим: $2V_3 \frac{dV_3}{dt} = \frac{240}{209} g \frac{dS_3}{dt}$.

Так как $\frac{dS_3}{dt} = V_3$, а $\frac{dV_3}{dt} = a_3$, находим ускорение груза 3: $a_3 = \frac{120}{209} g \text{ м/с}^2$.

Для того чтобы найти натяжение нити груза 3, необходимо написать уравнение его движения. Выделим груз 3 из системы, заменив действие нити её реакцией H_3 . Выберем ось x по направлению движения груза. Применим к описанию движения груза теорему о движении центра масс, написав её проекцию на ось x : $m_3 a_3 = P_3 - H_3$, где H_3 – реакция нити. При известном ускорении a_3 находим реакцию нити $H_3 = \frac{178}{209} m_1 g$. Натяжение нити численно равно реакции, но направлено в противоположную сторону.

2. Для решения задачи вторым способом – путём составления уравнений движения тел, входящих в состав механизма, освободим тела от связей и заменим их реакциями. На рис. 5.25 изображены силы и реакции, действующие на

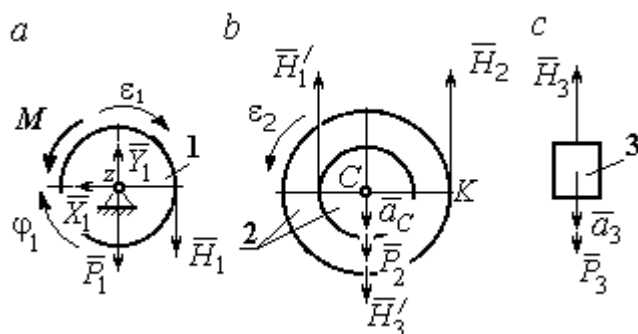


Рис. 5.25. Внешние силы и реакции связей, действующие на тела системы

каждое тело, после освобождения его от связей, а также направления угловых ускорений тел и ускорения центров масс.

Диск 1 вращается вокруг неподвижной оси z. На диск действует сила тяжести $\vec{P}_1$, реакция

подшипника $\vec{X}_1$, $\vec{Y}_1$, пара сил с моментом M и реакция нити $\vec{H}_1$. Вращение диска описывается уравнением: $J_{1z}\epsilon_1 = \sum M_z(F_k) = H_1 r_1 - M$. Момент инерции

диска 1 относительно оси z, $J_{1z} = \frac{m_1 r_1^2}{2}$.

Диск 2 (рис. 5.25, b) совершает плоскопараллельное движение. К нему приложена сила тяжести $\vec{P}_2$ и реакции нитей $\vec{H}_1'$, $\vec{H}_2$ и $\vec{H}_3'$. Плоскопараллельное движение диска 2 описывается уравнением движения его центра масс в проекции на вертикальную ось и уравнением вращения диска вокруг оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости диска:

$$m_2 a_C = P_2 - H_1' - H_2 + H_3'; \quad J_{2C} \epsilon_2 = H_2 R_2 - H_1' r_2.$$

Момент инерции диска 2 $J_{2C} = m_2 i_{2C}^2$. При составлении уравнения вращательного движения диска 2 момент силы считается положительным, если он создаёт поворот в сторону вращения диска.

Груз 3 совершает поступательное движение. К нему приложены сила тяжести $\vec{P}_3$ и реакция нити $\vec{H}_3$ (рис. 5.25, c). Уравнение движения груза 3 в проекции на вертикальную ось, направленную в сторону его движения, имеет вид:

$$m_3 a_3 = P_3 - H_3,$$

Выразим угловые ускорения дисков 1 и 2 и ускорение центра масс диска 2 через ускорение груза 3. Для этого нужно продифференцировать соответствующие кинематические соотношения между скоростями. Так, из найденных

ранее выражений: $V_3 = V_C$, $\omega_2 = \frac{V_3}{R_2}$, $\omega_1 = \frac{(r_2 + R_2)}{r_1} \frac{V_3}{R_2}$ следует: $a_3 = a_C$,
 $\varepsilon_2 = \frac{a_3}{R_2}$, $\varepsilon_1 = \frac{(r_2 + R_2)}{r_1} \frac{a_3}{R_2}$.

Подставляя кинематические соотношения между ускорениями в уравнения движения тел с учётом равенства модулей сил $\vec{H}_1$ и $\vec{H}'_1$, а также $\vec{H}_3$ и $\vec{H}'_3$, получим систему уравнений, описывающих движение звеньев механизма:

$$\frac{5}{8} m_1 a_3 = H_1 - m_1 g; \quad 3m_1 a_3 = 3m_1 g - H_1 - H_2 + H_3;$$

$$3m_1 a_3 = 4H_2 - H_1; \quad 2m_1 a_3 = 2m_1 g - H_3.$$

Решая систему, найдём $a_3 = \frac{120}{209} g$ м/с², $H_3 = \frac{178}{209} m_1 g$. Выражения ускорения a_3 груза 3 и натяжения нити H_3 совпадают с аналогичными выражениями, полученными в пункте 1 при решении данной задачи с применением теоремы об изменении кинетической энергии.

Упражнения

Упражнение 5.5. Система состоит из двух катков 1 и 2, соединённых невесомым стержнем (рис. 5.26). Каток 1 весом P , радиуса r . Каток 2 весом $2P$, радиуса $3r$ имеет цилиндрический выступ радиуса r . Невесомый стержень, параллельный плоскости качения катков, закреплён в центре катка 1 и передаёт движение катка 1 катку 2 в верхней точке вертикального диаметра цилиндрического выступа без проскальзывания. Качение катков без скольжения. К катку 1 приложена пара сил с моментом $M = 4Pr$. В центре масс катка 2 приложена сила $F = 2P$. Радиус инерции катка 2 относительно оси, проходящей через центр катка перпендикулярно плоскости движения, $i_2 = r\sqrt{2}$. Найти ускорение центра масс катка 1 и реакцию стержня.

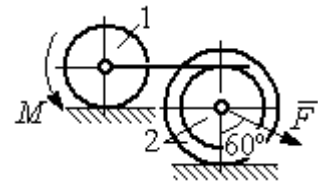


Рис. 5.26. Система катков

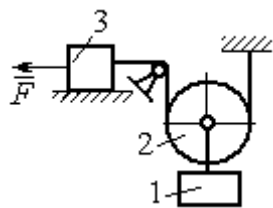


Рис. 5.27. Подъёмное устройство

Упражнение 5.6. С помощью подъёмного устройства (рис. 5.27) производится подъём груза 1. Нить, закреплённая одним концом на неподвижной поверхности, спускается, охватывает снизу блок 2 массы $m_2 = m$, радиуса r , затем поднимается и проходит параллельно горизонтальной плоскости, где к концу её привязан груз 3 массы $m_3 = m$, передвигающийся по плоскости под действием силы $F = 2,5mg$. Нити, удерживающие блок 2, вертикальны. Груз 1 массы $m_1 = 3m$ прикреп-

лён к оси блока 2. Найти ускорение груза 1 и натяжения нитей, удерживающих блок 2.

Упражнение 5.7. Груз 1 массы $m_1 = m$, спускается вниз по наклонной плоскости без трения (рис. 5.28). Нить, прикреплённая к грузу 1, другим своим концом намотана на барабан катка 2 радиуса $R = 2r$ и при движении груза заставляет барабан катиться по горизонтальной поверхности цилиндрическим выступом радиуса r . Качение происходит без проскальзывания. К центру катка привязана другая нить, посредством которой каток тащит за собой груз 3 массы $m_3 = 2m$, скользящий по горизонтальной поверхности без трения. Масса катка $m_2 = 3m$, радиус инерции катка относительно оси, проходящей через его центр масс перпендикулярно плоскости движения $i_2 = r\sqrt{3}$. По касательной к ободу катка 2 приложена сила $F = mg$ (точка приложения силы см. рис. 5.28). Определить ускорение груза 1 и натяжения нитей.

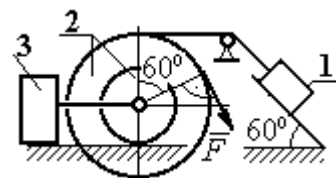


Рис. 5.28. Схема движения механической системы

6. ПРИНЦИПЫ МЕХАНИКИ

6.1. Принцип Даламбера для системы

Силой инерции материальной точки называют векторную величину, модуль которой равен произведению массы точки на модуль её ускорения. Направлен вектор силы инерции точки в сторону, противоположную ускорению $\vec{R}^{\text{и}} = -m\vec{a}$, где m – масса точки; $\vec{a}$ – вектор ускорения точки.

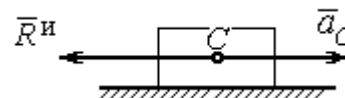


Рис. 6.1. Главный вектор сил инерции при поступательном движении твердого тела

При поступательном движении тела с ускорением центра масс $\vec{a}_C$ главный вектор сил инерции $\vec{R}^{\text{и}}$ по модулю $R^{\text{и}} = ma_C$, приложен в центре масс тела и направлен в сторону, противоположную ускорению $\vec{a}_C$ (рис. 6.1).

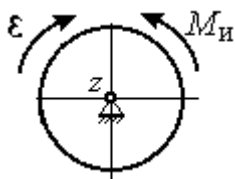


Рис. 6.2. Главный момент сил инерции при вращении тела вокруг оси, проходящей через центр масс

При вращении тела вокруг неподвижной оси z , проходящей через центр масс, главный вектор сил инерции обращается в нуль. Главный момент $\vec{M}^{\text{и}}$, сил инерции относительно оси вращения равен по величине $M^{\text{и}} = J_z \epsilon$, где J_z – момент инерции тела относительно оси z ; ϵ – угловое ускорение тела. Направлен главный момент сил инерции в сторону, противоположную угловому ускорению (рис. 6.2).

При плоскопараллельном движении тела с ускорением центра масс $\vec{a}_C$ и угловым ускорением ϵ главный вектор сил инерции $\vec{R}^{\text{и}}$ равен по модулю $R^{\text{и}} = ma_C$, приложен в центре масс тела и направлен в сторону, противоположную ускорению центра масс $\vec{a}_C$ (рис. 6.3). Главный момент сил инерции $\vec{M}^{\text{и}}$ относи-

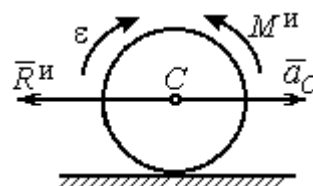


Рис. 6.3. Главный вектор и главный момент сил инерции при плоскопараллельном движении твердого тела

тельно оси, проходящей через центр масс тела перпендикулярно плоскости движения: $M^{\text{и}} = J_C \varepsilon$, где J_C – момент инерции тела относительно оси вращения, и направлен в сторону, противоположную угловому ускорению.

Если в любой момент времени к каждой из точек системы кроме действующих на нее внешних сил присоединить соответствующие силы инерции, то полученная система сил будет уравновешенной.

Принцип Даламбера даёт возможность составлять уравнения движения механической системы в виде уравнений равновесия (метод кинетостатики):

$$\sum \vec{F}_k^e + \vec{R}^{\text{и}} = 0, \quad \sum \vec{M}_O(\vec{F}_k^e) + \vec{M}_O^{\text{и}} = 0,$$

где $\vec{F}_k^e$ – внешние силы, действующие на систему; $\vec{R}^{\text{и}}$ – главный вектор сил инерции; $\vec{M}_O(\vec{F}_k^e)$, $\vec{M}_O^{\text{и}}$ – моменты внешних сил и главный момент сил инерции относительно произвольного центра O .

Примеры решения задач на применение принципа Даламбера

Задача 63. Груз 1 массы $m_1 = 10$ кг спускается вниз по наклонной грани клина, образующей угол 60° с горизонтом, и посредством нити, переброшенной

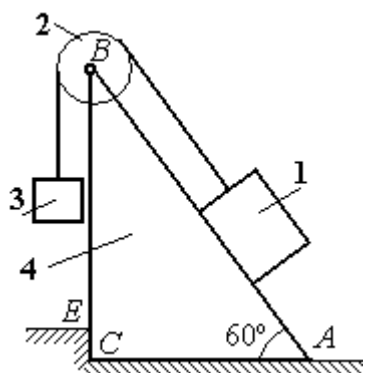


Рис. 6.4. Клин с грузами

через блок 2, укрепленный в верхней точке клина, приводит в движение груз 3 массы $m_3 = 5$ кг (рис. 6.4). Клин ABC массы $m_4 = 15$ кг стоит гранью AC на горизонтальной гладкой поверхности и упирается в выступ E .

Найти давление клина на выступ. Массой блока 2 и нити пренебречь.

Решение

Выберем систему, состоящую из клина ABC , блока 2, грузов 1 и 3 и нити, соединяющей грузы. Внешние силы, действующие на систему, – силы тяжести $\vec{P}_1$, $\vec{P}_3$ и $\vec{P}_4$ грузов 1, 3 и клина 4, горизонтальная реакция $\vec{R}_x$ упора клина в вы-

ступ и вертикальная реакция $\vec{R}_y$ опоры на горизонтальную поверхность. Реакция нити, реакция опоры груза 1 на наклонную поверхность клина и реакция шарнира B блока 2 для данной системы являются внутренними.

Допустим, груз 1 движется вниз, груз 3 – вверх. Приложим силы инерции. Направления ускорений грузов и сил инерции показаны на рис. 6.5.

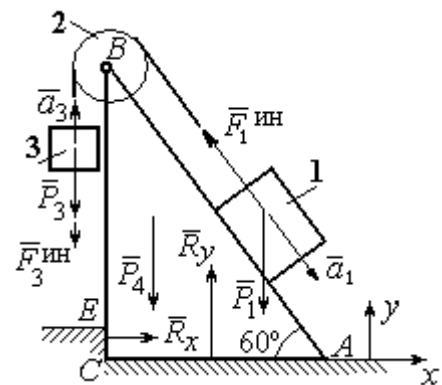


Рис. 6.5. Внешние силы и силы инерции, действующие на систему

В соответствии с принципом Даламбера, полученная система сил находится в равновесии. Условие равновесия: $\sum \vec{F}_k^e + \vec{F}_1^{\text{ин}} + \vec{F}_3^{\text{ин}} = 0$.

Выберем оси xu , как показано на рис. 6.5, и спроектируем векторное равенство на ось x . Получим: $R_x - F_1^{\text{ин}} \cos 60^\circ = 0$, где модуль силы инерции $F_1^{\text{ин}} = m_1 a_1$.

Найдём ускорение груза 1. С этой целью рассмотрим отдельно движение грузов 1 и 3 (рис. 6.6 *a, b*).

Рассматривая груз 1 как отдельную систему, изобразим внешние силы:

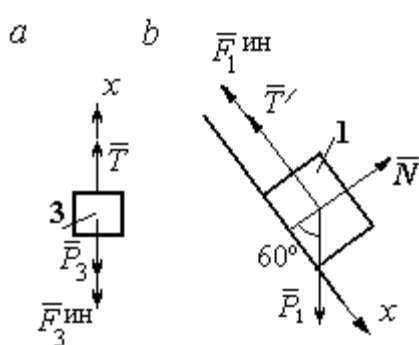


Рис. 6.6. Равновесие грузов

силу тяжести $\vec{P}_1$, реакцию нити $\vec{T}'$ и реакцию опоры $\vec{N}$ (см. рис. 6.6, *b*). Присоединим силу инерции $\vec{F}_1^{\text{ин}}$ и составим уравнение равновесия полученной системы сил в проекции на ось x , расположенную вдоль наклонной грани клина: $P_1 \sin 60^\circ - T' - F_1^{\text{ин}} = 0$, где $F_1^{\text{ин}} = m_1 a_1$.

Для груза 3 внешними силами будут сила тяжести $\vec{P}_3$ и реакция нити $\vec{T}$. Присоединим к грузу 3 силу инерции $\vec{F}_3^{\text{ин}}$ (см. рис. 6.6, *a*) и составим уравне-

ние равновесия системы сил в проекции на ось x , выбранную по направлению движения груза 3: $T - P_3 - F_3^{\text{ин}} = 0$, где модуль силы инерции $F_3^{\text{ин}} = m_3 a_3$.

Решая полученную систему с учётом, что модули реакций нити и модули ускорений грузов равны: $T = T'$ и $a_1 = a_3$, находим ускорение грузов. Получим:

$$a_1 = a_3 = \frac{(m_1 \sin 60^\circ - m_3)g}{m_1 + m_3}. \text{ Тогда давление клина на уступ:}$$

$$R_x = F_1^{\text{ин}} \cos 60^\circ = m_1 g \frac{(m_1 \sin 60^\circ - m_3)}{(m_1 + m_3)} \cos 60^\circ.$$

Подставляя данные из условия задачи, найдём $R_x = 11,97 \text{ Н}$.

Задача 64. Для подъёма грузов используется лебёдка со ступенчатым воротом, изображённая на рис. 6.7. Радиусы большой и малой ступенек барабана ворота r_1 и r_2 , радиус инерции барабана относительно оси вращения i_3 . Лебёдка уста-

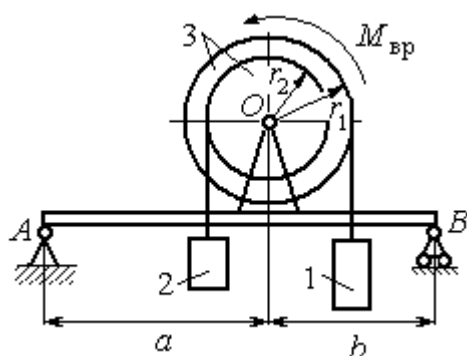


Рис. 6.7. Лебёдка на балке

новлена на горизонтальной балке AB , которая закреплена в точке A на неподвижном цилиндрическом шарнире и опирается на каток в точке B . Груз 1 поднимается на верёвке, навитой на большую ступеньку ворота. На малой

ступеньке барабана ворота закреплена другая верёвка, удерживающая противовес 2. К барабану лебёдки приложен постоянный вращающий момент $M_{\text{вр}}$.

Найти реакции опор балки во время движения груза, если радиусы ступенек барабана $r_1 = 0,8 \text{ м}$, $r_2 = 0,2 \text{ м}$, радиус инерции барабана относительно оси вращения $i_3 = 0,6 \text{ м}$, масса груза 1 $m_1 = 100 \text{ кг}$, противовеса 2 $m_2 = 30 \text{ кг}$, масса барабана $m_1 = 50 \text{ кг}$, величина вращающего момента $M_{\text{вр}} = 1050 \text{ Н}\cdot\text{м}$, расстояния от крайних точек балки A и B до линии вертикального диаметра барабана $a = 2 \text{ м}$, $b = 1 \text{ м}$.

Решение

Выберем систему, включающую только барабан 3, грузы 1 и 2 и нити, связывающие грузы с барабаном (рис. 6.8). Внешние силы, действующие на эту систему, – пара сил, создающая вращающий момент $M_{\text{вр}}$, силы тяжести $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$ грузов 1, 2 и барабана 3 и реакция $\vec{R}_O$ опоры барабана на шарнир в точке O . Натяжения нитей для данной системы являются внутренними и на рис. 6.8 не показаны.

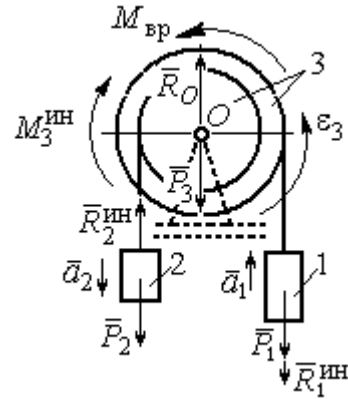


Рис. 6.8. Расчётная схема равновесия барабана

Приложим силы инерции. Направления главных векторов сил инерции $\vec{R}_1^{\text{ин}}$, $\vec{R}_2^{\text{ин}}$ и момента сил инерции $M_3^{\text{ин}}$ показаны на рис. 6.8.

Согласно принципу Даламбера, полученная система внешних сил и сил инерции является уравновешенной. Составим уравнения равновесия:

$$R_O + R_2^{\text{ин}} - P_2 - P_3 - P_1 - R_1^{\text{ин}} = 0; \quad M_{\text{вр}} - M_3^{\text{ин}} - R_2^{\text{ин}}r_2 + P_2r_2 - P_1r_1 - R_1^{\text{ин}}r_1 = 0,$$

где $R_1^{\text{ин}} = m_1a_1$, $R_2^{\text{ин}} = m_2a_2$, $M_3^{\text{ин}} = J_{3O}\varepsilon_3$, $J_{3O} = m_3i_3^2$.

Из второго уравнения с учётом кинематических соотношений: $\varepsilon_3 = \frac{a_1}{r_1}$ и

$$a_2 = \frac{r_2}{r_1}a_1, \text{ найдём ускорение груза 1: } a_1 = \frac{r_1(M_{\text{вр}} + P_2r_2 - P_1r_1)}{m_3i_3^2 + m_2r_2^2 + m_1r_1^2}.$$

Подставляя данные задачи, получим $a_1 = 3,49 \text{ м/с}^2$.

Вычислим модули сил инерции $R_1^{\text{ин}} = m_1a_1 = 349 \text{ Н}$; $R_2^{\text{ин}} = m_2a_2 = 26,17 \text{ Н}$.

Подставляя модули сил инерции в первое уравнение условий равновесия, найдём реакцию опоры барабана на шарнир O :

$$R_O = -R_2^{\text{ин}} + P_2 + P_3 + P_1 + R_1^{\text{ин}} = 2088,63 \text{ Н}.$$

Для определения реакций опор балки AB выберем объектом равновесия

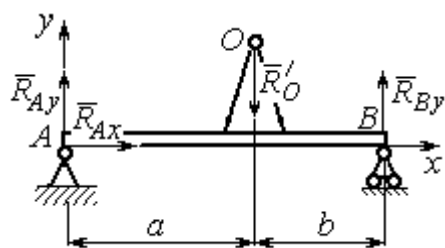


Рис. 6.9. Равновесие балки

саму балку (рис. 6.9). На балку действуют сила $\vec{R}'_O$ давления со стороны шарнира O , реакция шарнира в точке A (на рис. 6.9 разложенная на составляющие $\vec{R}_{Ax}$, $\vec{R}_{Ay}$) и реакция $\vec{R}_{By}$ опоры балки на шарнир в точке B . Составим уравне-

ния равновесия балки:

$$\sum F_x = R_{Ax} = 0, \quad \sum F_y = R_{Ay} - R'_O + R_{By} = 0,$$

$$\sum M_A(F) = R_{By}(a + b) - R'_O a = 0.$$

Решая систему с учётом того, что модули сил $\vec{R}'_O$ и $\vec{R}_O$ равны, найдём ре-

акции опор балки: $R_{By} = R_O \frac{a}{a + b} = 1392,42 \text{ Н}$; $R_{Ay} = R_O - R_{By} = 696,21 \text{ Н}$.

Для сравнения реакции опор балки при неподвижном барабане $R_{By} = 1419,18 \text{ Н}$, $R_{Ay} = 346,62 \text{ Н}$.

Упражнение

Упражнение 6.1. Груз 1 соединён с грузом 2 нерастяжимой нитью, переброшенной через неподвижный блок (рис. 6.10). Опускаясь вниз, груз 2 перемещает груз 1 по горизонтальной поверхности призмы 3 без трения. Призма стоит на горизонтальной гладкой поверхности и упирается левым краем в выступ. Определить силу давления призмы на пол, если массы грузов 1, 2 и призмы 3 одинаковы и равны m . Массой нити и блока пренебречь.

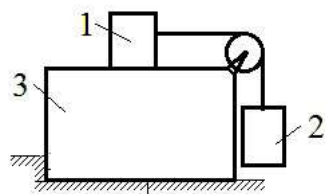


Рис. 6.10. Схема движения грузов в системе

6.2. Принцип возможных перемещений

Возможными перемещениями механической системы называют любую совокупность элементарных (бесконечно малых) перемещений точек системы из занимаемого в данный момент времени положения, которые допускаются всеми наложенными на систему связями.

Идеальными связями в механической системе называют такие связи, для которых сумма элементарных работ их реакций на любом возможном перемещении равна нулю.

Принцип возможных перемещений.

Если все приложенные к точкам системы внешние и внутренние силы разделить на **активные силы** и **реакции связей**, то для равновесия механической системы с идеальными связями необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ всех активных сил была равна нулю на любом возможном перемещении системы: $\sum \delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}}) = 0$.

Примеры решения задач на применение принципа возможных перемещений

Задача 65. В талевом механизме барабан 1 состоит из двух соосных жестко связанных валов (рис. 6.11). При поднятии груза верхний трос барабана 1 наматывается на вал большего радиуса R_1 , нижний – сматывается с вала меньшего радиуса r_1 .

Какой вращающий момент M , постоянный по величине, нужно приложить к барабану, чтобы уравновесить груз весом P , прикрепленный в центре блока 4. Массами блоков и троса пренебречь.

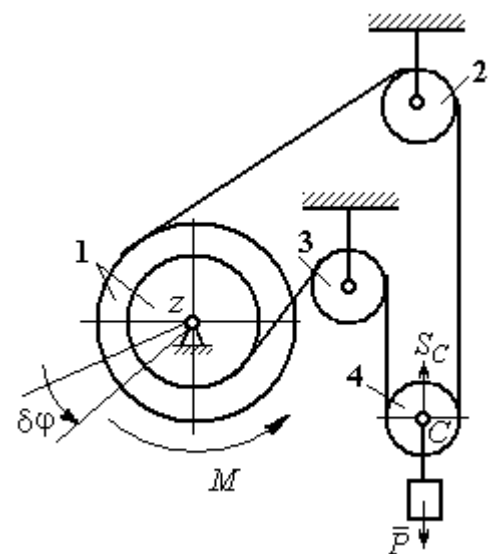


Рис. 6.11. Уравновешивание талевого механизма

Решение

Активными силами в системе являются сила тяжести груза $\vec{P}$ и уравновешивающий момент M . По принципу возможных перемещений для равновесия системы необходимо и достаточно выполнения условия:

$$\delta A(M) + \delta A(\vec{P}) = 0, \text{ или } M\delta\varphi_1 - P\delta S_C = 0.$$

где $\delta\varphi_1$ и δS_C – возможные перемещения барабана и груза.

Найдём связь между перемещениями $\delta\varphi_1$ и δS_C . Предположим, в меха-

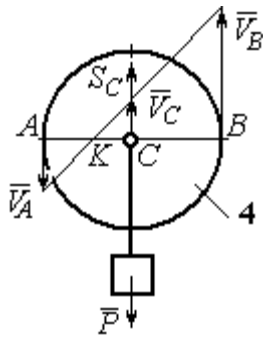


Рис. 6.12. Распределение скоростей точек блока 4

низме осуществляется подъём груза. На рис. 6.12 показано построение мгновенного центра скоростей блока 4 – точки K . Здесь скорость точки A блока 4 (рис. 6.12) равна скорости точек обода малого вала барабана 1, а скорость точки B – скорости точек обода большого вала. Составим пропорцию

$$\frac{V_B}{V_A} = \frac{BK}{AK} = \frac{r_4 + CK}{r_4 - CK}, \text{ где } r_4 - \text{ радиус блока 4 (см.}$$

рис.6.12). Подставляя выражения для скоростей точек A и B $V_A = \omega_1 r_1$,

$$V_B = \omega_1 R_1, \text{ найдём расстояние: } CK = \frac{(R_1 - r_1)r_4}{R_1 + r_1}.$$

Угловая скорость блока 4 $\omega_4 = \frac{V_B}{r_4 + CK} = \frac{\omega_1(R_1 + r_1)}{2r_4}$. Скорость его цен-

тра: $V_C = \omega_4 \cdot CK = \frac{\omega_1(R_1 - r_1)}{2}$. Выразим соотношение между скоростью точки

C и угловой скоростью барабана 1 в дифференциальной форме:

$$dS_C = d\varphi_1 \frac{(R_1 - r_1)}{2}. \text{ Поскольку действительное перемещение является одним из}$$

возможных (т. е. $ds = \delta s$, $d\varphi = \delta\varphi$), получим связь между возможными переме-

$$\text{щениями барабана 1 и груза: } \delta S_C = \frac{\delta\varphi_1(R_1 - r_1)}{2}.$$

Подставляя найденное соотношение в уравнение принципа возможных

$$\text{перемещений, представим его в окончательном виде: } M\delta\varphi_1 - P\frac{\delta\varphi_1(R_1 - r_1)}{2} = 0,$$

$$\text{откуда найдём значение уравновешивающего момента: } M = \frac{P(R_1 - r_1)}{2}.$$

Задача 66. Брус 1 весом $P_1 = P$ лежит на цилиндрическом катке 2 и на блоке 3 одинаковых радиусов r , и одинакового веса $P_2 = P_3 = 2P$ (рис. 6.13). Каток 2 катится без проскальзывания по наклонной плоскости с углом наклона 30° к горизонту. Блок 3 вращается вокруг неподвижной оси z и к нему приложена пара сил с моментом $M = =Pr$. Каток и блок расположены так, что брус 1 параллелен наклонной плоскости.

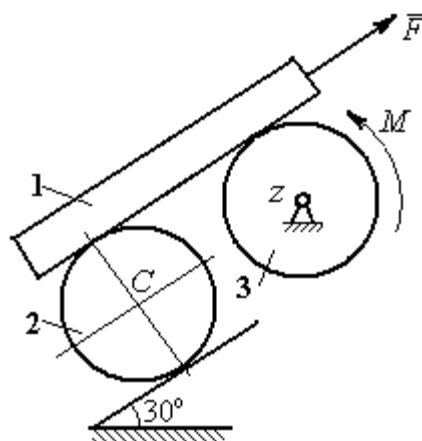


Рис. 6.13. Равновесие механической системы

Какую силу F , параллельную наклонной плоскости, нужно приложить к брусу 1, чтобы удержать его в равновесии. Скольжение между бруском и катком, бруском и блоком отсутствует.

Решение

Рассмотрим механизм, состоящий из бруса 1, катка 2 и блока 3. Активными силами, действующими на механизм, являются силы тяжести $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$ и

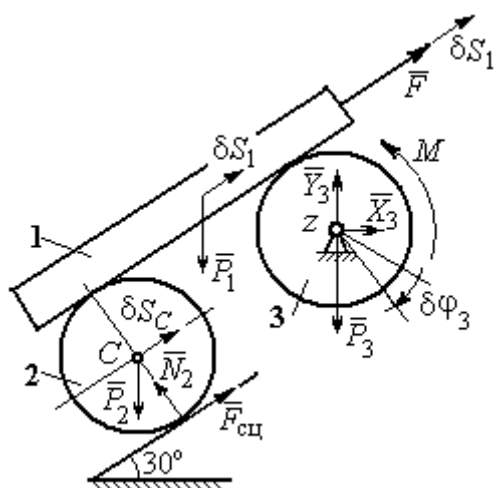


Рис. 6.14. Расчётная схема применения принципа возможных перемещений

$\vec{P}_3$ бруса, катка и блока, пара сил с моментом M , приложенная к блоку 3, и сила $\vec{F}$, приложенная к брусу. Связи в механизме идеальные, так как работа реакции $\vec{N}_2$ опоры катка 2 на плоскость, работа силы $\vec{F}_{сщ}$ сцепления катка с плоскостью и работа реакции шарнира блока 3 при любом перемещении системы равны нулю. Направления векторов сил в системе показаны на рис. 6.14.

Придадим системе возможное перемещение, сдвинув брус 1 на расстояние δS_1 вдоль линии действия силы $\vec{F}$, вверх по наклонной плоскости. Тогда

центр катка 2 переместится на расстояние δS_C , а блок 3 повернётся на элементарный угол $\delta\varphi_3$ (см. рис. 6.14).

Для определения условий равновесия применим к системе принцип возможных перемещений. Получим уравнение:

$$-P_1\delta S_1\cos 60^\circ - P_2\delta S_C\cos 60^\circ - M\delta\varphi_3 + F\delta S_1 = 0.$$

Выразим все перемещения через перемещение бруса δS_1 . Допустим, скорость бруса равна V_1 . Тогда $V_C = \frac{V_1}{2}$, и, следовательно, $\delta S_C = \frac{\delta S_1}{2}$.

Угловая скорость блока 3 $\omega_3 = \frac{V_1}{r}$, отсюда $\delta\varphi_3 = \frac{\delta S_1}{r}$.

Подставляя найденные соотношения в уравнение принципа возможных перемещений с учётом данных задачи, находим $F = 2P$.

Задача 67. Уравновешивание роликового катка 3 с противовесом 1 осуществляется с помощью пары сил с моментом M , приложенных к блоку 2. Ка-

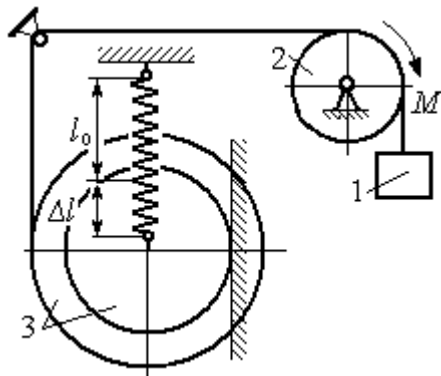


Рис. 6.15. Уравновешивание роликового катка

ток состоит из двух соосных жестко связанных дисков (рис. 6.15) радиусов r и $R = 2r$ с общей массой $3m$. Масса груза 1 равна m . При движении каток катится без скольжения по вертикальной поверхности, касаясь её диском меньшего радиуса. Вертикальная пружина с закреплённым верхним концом своим нижним концом удерживает каток за центр масс. Жесткость пружины $c = mg / r$.

Какой величины уравновешивающий момент M приложен к блоку 2, если при равновесии катка пружина растянулась относительно недеформированного состояния на величину $\Delta l = r$.

Решение

Рассмотрим механическую систему, состоящую из груза 1, блока 2 и катка 3. Активными силами, действующими на механизм, являются силы тяжести $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$ и $\vec{P}_3$ – груза, блока и катка, пара сил с моментом M , приложенная к блоку 2, и сила $\vec{F}_{\text{упр}}$ упругости пружины, приложенная к центру катка. Реакциями связей в механизме являются: сила $\vec{F}_{\text{сц}}$ сцепления катка с плоскостью и реакция $\vec{R}_2$ шарнира блока 2. Реакция $\vec{N}_2$ опоры катка 2 на вертикальную плоскость равна нулю (на рис. 6.16 не показана).

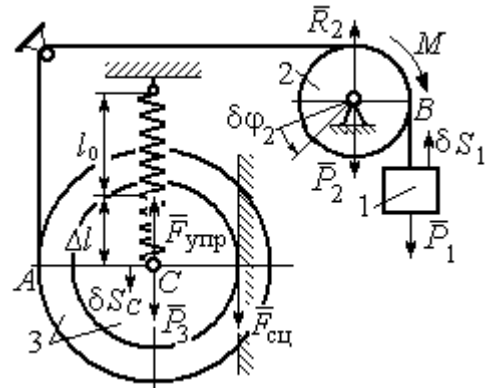


Рис. 6.16. Расчётная схема уравнивания ролика

Допустим, система находится в равновесии. Дадим центру катка возможное перемещение δS_C , направленное вертикально вниз. При этом блок 2 повернётся на угол $\delta\varphi_2$, а груз 1 получит бесконечно малое перемещение δS_1 . Направления возможных перемещений показаны на рис. 6.16.

Составим уравнение принципа возможных перемещений:

$$P_3\delta S_C - F_{\text{упр}}\delta S_C + M\delta\varphi_2 - P_1\delta S_1 = 0,$$

где сила упругости в положении равновесия системы $F_{\text{упр}} = c\Delta l$.

Выразим перемещения $\delta\varphi_2$, δS_1 блока 2 и груза 1 через перемещение центра катка δS_C . Предположим, при возможном перемещении скорость центра масс катка равна V_C . Скорость груза 1 равна скорости точки A на ободе большого диска катка: $V_1 = V_A = \frac{R+r}{r}V_C$. Здесь учтено, что точка касания катка

с вертикальной поверхностью является его мгновенным центром скоростей.

Угловая скорость блока 2 $\omega_2 = \frac{V_A}{r} = \frac{R+r}{r^2} V_C$.

Представляя кинематические соотношения в дифференциальном виде, получим необходимые связи между возможными перемещениями:

$$\delta S_1 = \frac{R+r}{r} \delta S_C = 3\delta S_C; \quad \delta \varphi_2 = \frac{R+r}{r^2} \delta S_C = \frac{3\delta S_C}{r}.$$

Окончательно уравнение принципа возможных перемещений выражается в виде: $P_3 \delta S_C - c \Delta \delta S_C + M \frac{3\delta S_C}{r} - P_1 3\delta S_C = 0$. Величина уравнивающего момента $M = \frac{1}{3} mgr$.

Упражнения

Упражнение 6.2. Штамповка деталей осуществляется при помощи рычажного пресса (рис. 6.17). Найти соотношение между силой F , приложенной к внешнему рычагу, и силой Q , сжимающей деталь A вдоль центральной оси.

Длины рычагов a, b, c, d показаны на рис. 6.17.

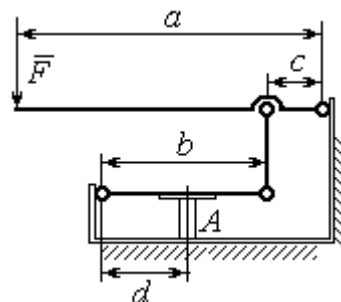


Рис. 6.17. Рычажный пресс

Упражнение 6.3. Конструкция состоит из двух валов, находящихся во внешнем зацеплении, и двух грузов, удерживающихся нитями, намотанными на валы (рис. 6.18).

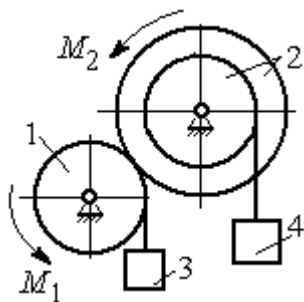


Рис. 6.18. Схема уравнивания валов

грузов, удерживающихся нитями, намотанными на валы (рис. 6.18).

Радиус вала 1 $R_1 = r$. Вал 2 состоит из двух барабанов, жестко скрепленных на одной оси. Радиусы барабанов: $R_2 = 3r$, $r_2 = r$.

Найти величину уравнивающего момента M_2 , приложенного к валу 2, если к валу 1 приложена пара сил с моментом $M_1 = 2Pr$, а грузы 3 и 4 одинакового веса P .

6.3. Общее уравнение динамики

При движении механической системы с идеальными связями в каждый момент времени сумма элементарных работ активных сил и сил инерции на любом возможном перемещении равна нулю:

$$\sum \delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}}) + \sum \delta A(\vec{R}_k^{\text{и}}) = 0,$$

где $\delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}})$, $\delta A(\vec{R}_k^{\text{и}})$ – элементарные работы активных сил и сил инерции, приложенных к точкам системы на её возможном перемещении.

При вычислении элементарных работ активных сил и сил инерции используют обычные формулы для вычисления работы сил на элементарном перемещении точек их приложения.

Примеры решения задач на применение общего уравнения динамики

Задача 68. Механическая система включает груз 1, ступенчатый диск 2 (каток), катящийся ступенькой по неподвижному рельсу, и однородный диск 3 (блок), вращающийся вокруг неподвижной оси, соединённых нерастяжимыми нитями (рис. 6.19). Качение ступенчатого диска происходит без скольжения. К грузу 1 приложена сила $\vec{F}$ под углом 30° к горизонтальному направлению движения груза. К блоку 3 приложена пара сил с моментом M . Найти закон движения центра масс катка 2 и реакцию шарнира блока 3 в момент времени $t = 1$ с, если $P_1 = 10$ Н; $P_2 = 20$ Н; $P_3 = 15$ Н; $F = 5(t+1)$ Н; $M = 3(1+2t)$ Н·м; $R_2 = 0,8$ м; $r_2 = 0,2$ м; $R_3 = 0,4$ м; момент инерции катка 2 относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения, $i_{2C} = 0,6$ м.

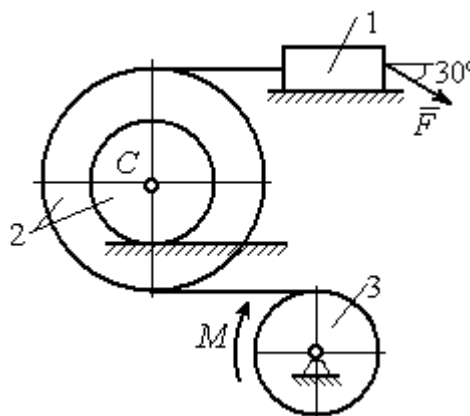


Рис. 6.19. Схема движения механической системы

Решение

В рассматриваемой механической системе активными силами являются силы тяжести $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3$, сила $\vec{F}$ и пара сил с моментом M (рис. 6.20).

Реакциями связей являются нормальные реакции опор: $\vec{N}_1, \vec{N}_2$, сила сцепления катка 2 с неподвижной поверхностью $\vec{F}_{\text{сц}}$ и реакция шарнира O

блока 3 (на рис. 6.20 реакция показана в виде разложения на составляющие $\vec{X}_3, \vec{Y}_3$). Связи идеальные, так как скольжение груза 1 происходит по гладкой поверхности, качение диска 2 без проскальзывания, а ось вращения блока 3 неподвижна.

Предположим, система движется так, что блок 3 вращается с угловой скоростью ω_3 и угловым ускорением ε_3 в направлении по-

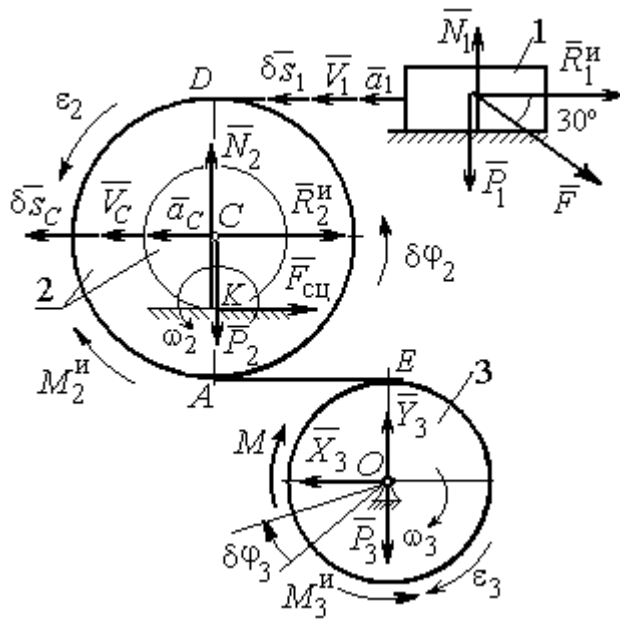


Рис. 6.20. Расчётная схема исследования движения механической системы

ворота, создаваемого моментом M . Соответствующие направления скорости $\vec{V}_C$ и ускорения $\vec{a}_C$ центра масс катка 2, его угловой скорости ω_2 и ускорения ε_2 , а также направление скорости $\vec{V}_1$ и ускорения $\vec{a}_1$ груза 1 показаны на рис. 6.20.

Присоединим к телам системы силы инерции. Главные векторы $\vec{R}_1^{\text{и}}, \vec{R}_2^{\text{и}}$ сил инерции груза 1 и катка 2 приложены в центрах масс груза и катка и направлены в сторону, противоположную ускорениям $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_C$. Главные моменты $\vec{M}_2^{\text{и}}, \vec{M}_3^{\text{и}}$ сил инерции катка 2 и блока 3 направлены в сторону, противоположную угловым ускорениям ε_2 и ε_3 .

Главные векторы и главные моменты сил инерции показаны на рис. 6.20.

Для механической системы с идеальными связями общее уравнение динамики имеет вид:

$$\sum \delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}}) + \sum \delta A(\vec{R}_k^{\text{и}}) = 0.$$

Угловая скорость катка 2 $\omega_2 = \frac{V_C}{CK} = \frac{V_C}{r_2}$. Здесь учтено, что в точке K

находится мгновенный центр скоростей катка (см. рис. 6.20). Скорость точки E блока 3 равна скорости точки A катка 2 (см. рис. 6.20):

$$V_E = V_A = \omega_2 \cdot AK = \omega_2(R_2 - r_2) = V_C \frac{R_2 - r_2}{r_2}.$$

Угловая скорость блока 3 $\omega_3 = \frac{V_E}{R_3} = V_C \frac{(R_2 - r_2)}{R_3 r_2}$.

Скорость груза 1 равна скорости точки D катка 2:

$$V_1 = V_D = \omega_2 \cdot DK = \omega_2(R_2 + r_2) = V_C \frac{(R_2 + r_2)}{r_2}.$$

Соотношения между ускорениями определяются путем дифференцирования установленных кинематических равенств:

$$a_1 = a_C \frac{(R_2 + r_2)}{r_2}, \quad \varepsilon_2 = \frac{a_C}{r_2}, \quad \varepsilon_3 = a_C \frac{(R_2 - r_2)}{R_3 r_2}.$$

Если выразить скоростные кинематические соотношения в дифференциальном виде, то, полагая действительное перемещение возможным (т. е. $ds = \delta s$, $d\varphi = \delta\varphi$), получим соотношения между перемещениями:

$$\delta s_1 = \delta s_C \frac{(R_2 + r_2)}{r_2}, \quad \delta\varphi_2 = \frac{\delta s_C}{r_2}, \quad \delta\varphi_3 = \delta s_C \frac{(R_2 - r_2)}{R_3 r_2}.$$

Найдем элементарные работы активных сил.

Работы сил тяжести груза 1 и катка 2 равны нулю, так как перемещения точек приложения сил перпендикулярны векторам сил.

Работа силы тяжести блока 3 также равна нулю, поскольку точка прило-

жения силы тяжести блока 3 не перемещается:

$$\delta A(\vec{P}_1) = P_1 \delta s_1 \cos 90^\circ = 0; \quad \delta A(\vec{P}_2) = P_2 \delta s_C \cos 90^\circ = 0; \quad \delta A(\vec{P}_3) = 0.$$

Работу совершают только пара сил с моментом M и сила $\vec{F}$:

$$\delta A(\vec{M}) = M \delta \varphi_3 = M \delta s_C \frac{(R_2 - r_2)}{R_3 r_2};$$

$$\delta A(\vec{F}) = F \delta s_1 \cos 150^\circ = -F \delta s_C \frac{(R_2 + r_2)}{r_2} \cos 30^\circ.$$

В результате сумма элементарных работ активных сил:

$$\begin{aligned} \sum \delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}}) &= \delta A(\vec{M}) + \delta A(\vec{F}) = \\ &= M \delta s_C \frac{(R_2 - r_2)}{R_3 r_2} - F \delta s_C \frac{(R_2 + r_2)}{r_2} \cos 30^\circ = (0,85 + 23,35t) \delta s_C. \end{aligned}$$

Определим модули главных векторов и главных моментов сил инерции:

$$R_1^{\text{н}} = m_1 a_1 = \frac{P_1}{g} \frac{(R_2 + r_2)}{r_2} a_C, \quad R_2^{\text{н}} = m_2 a_C = \frac{P_2 a_C}{g};$$

$$M_2^{\text{н}} = J_{2C} \varepsilon_2 = \frac{P_2}{g} i_{2C}^2 \frac{a_C}{r_2};$$

$$M_3^{\text{н}} = J_{3O} \varepsilon_3 = \frac{P_3 R_3}{2g} \frac{(R_2 - r_2)}{r_2} a_C,$$

где J_{2C} – момент инерции катка 2 относительно оси, проходящей через его центр масс перпендикулярно плоскости движения, $J_{2C} = m_2 i_{2C}^2$; i_{2C} – радиус инерции катка; J_{3O} – осевой момент инерции блока 3, $J_{3O} = \frac{m_3 R_3^2}{2}$.

Найдем элементарные работы сил инерции:

$$\delta A(\vec{R}_1^{\text{н}}) = -R_1^{\text{н}} \delta s_1 = -\frac{P_1 (R_2 + r_2)^2 a_C}{g r_2^2} \delta s_C;$$

$$\delta A(\vec{R}_2^{\text{н}}) = -R_2^{\text{н}} \delta s_C = -\frac{P_2 a_C}{g} \delta s_C;$$

$$\delta A(\vec{M}_2^{\text{и}}) = -M_2^{\text{и}} \delta \varphi_2 = -\frac{P_2 i_2^2 a_C}{gr_2^2} \delta s_C;$$

$$\delta A(\vec{M}_3^{\text{и}}) = -M_3^{\text{и}} \delta \varphi_3 = -\frac{P_3 (R_2 - r_2)^2 a_C}{2gr_2^2} \delta s_C.$$

Сумма элементарных работ сил инерции:

$$\begin{aligned} \sum \delta A(\vec{R}_k^{\text{и}}) &= -\frac{P_1 (R_2 + r_2)^2 a_C}{gr_2^2} \delta s_C - \frac{P_2 a_C}{g} \delta s_C - \frac{P_2 i_2^2 a_C}{gr_2^2} \delta s_C - \\ &- \frac{P_3 (R_2 - r_2)^2 a_C}{2gr_2^2} \delta s_C = -52,75 a_C \delta s_C, \text{ где } g = 9,81 \text{ м/с}^2. \end{aligned}$$

С учетом проделанных вычислений общее уравнение динамики принимает вид: $\sum \delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}}) + \sum \delta A(\vec{R}_k^{\text{и}}) = (0,85 + 23,35t) \delta s_C - 52,75 a_C \delta s_C = 0$, откуда найдём ускорение центра масс катка 2 как функцию времени:

$$a_C(t) = 0,02 + 0,45t.$$

Представляя ускорение a_C в виде второй производной координаты движения центра масс $a_C = \ddot{s}_C$, получим дифференциальное уравнение $\ddot{s}_C = 0,02 + 0,45t$. Дважды проинтегрировав это уравнение с нулевыми начальными условиями, найдём закон движения центра масс:

$$s_C = 0,01t^2 + 0,075t^3.$$

Рассмотрим вращательное движение блока 3, освободив его от связей. На блок действуют сила тяжести $\vec{P}_3$, реакция подшипника, разложенная на составляющие $\vec{X}_3$, $\vec{Y}_3$, пара сил с моментом M и реакция нити $\vec{H}_3$ (рис. 6.21).

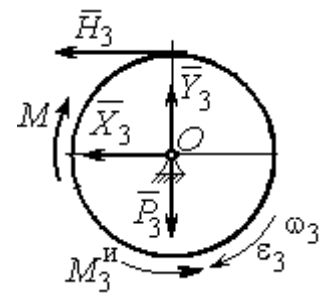


Рис. 6.21. Вращение блока 3

Присоединим к блоку 3 силы инерции. При вращательном движении блока вокруг оси, проходящей через центр масс, главный вектор сил инерции равен ну-

лю. Главный момент сил инерции $M_3^{\text{и}}$ направлен в сторону, противоположную угловому ускорению блока 3.

По принципу Даламбера система сил, приложенных к блоку 3, включая силы инерции, находится в равновесии. Составим уравнение равновесия в виде равенства нулю суммарного момента всех сил относительно оси вращения:

$$M - H_3 R_3 - M_3^{\text{и}} = 0, \text{ откуда найдём реакцию нити: } H_3 = \frac{M}{R_3} - \frac{M_3^{\text{и}}}{R_3}.$$

Подставляя в уравнение величину модуля главного момента сил инерции блока 3 $M_3^{\text{и}}(1) = 0,7 \text{ Н} \cdot \text{м}$ и значение момента, приложенного к блоку 3, в момент времени $t = 1 \text{ с}$, $M(1) = 9 \text{ Н} \cdot \text{м}$ найдём реакцию нити $H_3(1) = 20,75 \text{ Н}$.

Уравнения равновесия, составленные в виде проекций сил на вертикальную и горизонтальную оси (см. рис. 6.21), имеют вид:

$$X_3 + H_3 = 0, \quad Y_3 - P_3 = 0.$$

Составляющие реакции шарнира блока 3 в момент времени $t = 1 \text{ с}$: $X_3 = -20,75 \text{ Н}$, $Y_3 = 15 \text{ Н}$. Полная реакция шарнира $R_3 = \sqrt{X_3^2 + Y_3^2} = 25,6 \text{ Н}$.

Задача 69. Груз 2 весом P_2 , поднимаемый лебёдкой (рис. 6.22), подвешен в центре подвижного блока 3 весом P_3 . Нерастяжимая нить одним концом при-

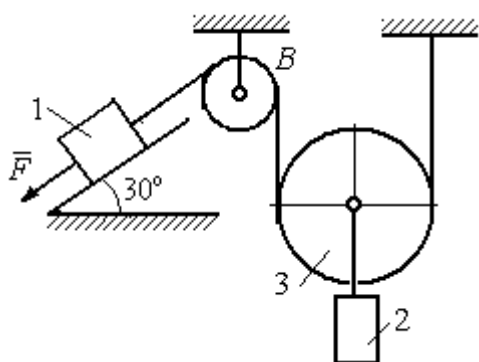


Рис. 6.22. Схема подъёмного устройства

цеплена к грузу 1 весом P_1 , лежащему на наклонной плоскости. Другой конец, переброшенный через невесомый блок В, охватывает снизу подвижный блок 3 радиуса r и закреплён в вертикальном положении. К грузу 1 приложена сила $\vec{F}$, направленная вдоль наклонной плоскости.

Найти закон движения поднимаемого груза, если $P_1 = P_3 = P$, $P_2 = 3P$, $F = 2P$ и движение началось из состояния покоя.

Решение

Применим к решению задачи общее уравнение динамики. В данной механической системе активными силами являются силы тяжести $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$ и сила $\vec{F}$ (рис. 6.23). Реакциями связей являются реакция шарнира блока B и реакция опоры груза 1 (на рис. 6.23 не показаны). Связи идеальные, так как работа реакций связей равна нулю.

Предположим, груз 1 спускается вниз по наклонной плоскости с ускорением a_1 . Приложим к телам системы силы инерции. Главные вектора сил инерции $\vec{R}_1^{\text{ин}}$ и $\vec{R}_2^{\text{ин}}$ грузов 1 и 2, движущихся поступательно, приложены в центрах масс грузов и направлены противоположно векторам ускорений тел. Главный вектор $\vec{R}_3^{\text{ин}}$ сил инерции блока 3 приложен в центре масс блока 3 и направлен противоположно вектору ускорения его центра масс. Главный момент сил инерции $M_3^{\text{ин}}$ относительно оси, проходящей через центр масс блока 3 перпендикулярно плоскости движения, направлен в сторону, противоположную направлению углового ускорения блока 3, совпадающего с направлением углового движения. Направления главных векторов и главного момента сил инерции тел показаны на рис. 6.23.

Дадим системе возможное перемещение, при котором груз 1 спустился вниз по наклонной плоскости на расстояние δS_1 . В соответствии с приложенными в системе связями центр масс подвижного блока 2 и груз 2 переместились вверх на высоту δS_C , а сам блок повернулся на угол $\delta\varphi_3$ (см. рис. 6.23).

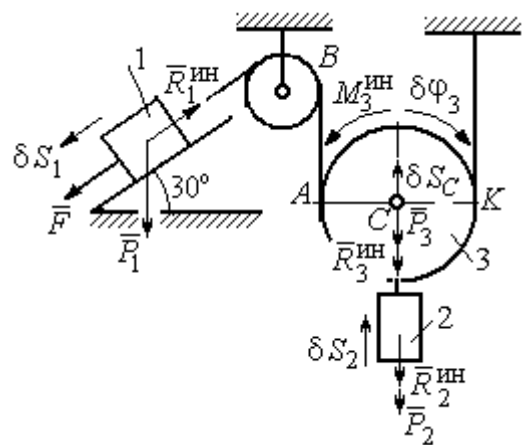


Рис.6.23. Активные силы и силы инерции, приложенные к системе

Составим общее уравнение динамики $\sum \delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}}) + \sum \delta A(\vec{R}_k^{\text{и}}) = 0$. Получим

$$F\delta S_1 + P_1\delta S_1 \cos 60^\circ - P_2\delta S_2 - P_3\delta S_C - \\ - R_1^{\text{ин}}\delta S_1 - R_2^{\text{ин}}\delta S_C - R_3^{\text{ин}}\delta S_C - M_3^{\text{ин}}\delta\varphi_3 = 0,$$

где модули сил инерции $R_1^{\text{ин}} = m_1 a_1$, $R_2^{\text{ин}} = m_2 a_2$, $R_3^{\text{ин}} = m_3 a_C$, $M_3^{\text{ин}} = \frac{m_3 r^2}{2} \varepsilon_3$.

Выразим перемещение δS_2 и ускорение a_2 груза 2, а также поворот $\delta\varphi_3$ и угловое ускорение ε_3 подвижного блока 3 через перемещение δS_1 и ускорение a_1 груза 1.

Угловая скорость блока 3 $\omega_3 = \frac{V_A}{AK} = \frac{V_1}{2r}$. Здесь учтено, что точка K блока 3 является его мгновенным центром скоростей. Тогда, элементарный поворот блока $\delta\varphi_3 = \frac{\delta S_1}{2r}$, а его угловое ускорение $\varepsilon_3 = \frac{a_1}{2r}$.

Скорость центра масс блока 3 и скорость груза 2: $V_2 = V_C = \frac{V_1}{2}$. Из этого равенства следует, что: $\delta S_2 = \delta S_C = \frac{\delta S_1}{2}$, $a_2 = a_C = \frac{a_1}{2}$.

Подставляя найденные соотношения в общее уравнение динамики с учётом данных задачи, окончательно получим уравнение: $\frac{1}{2}P\delta S_1 = \frac{17}{8g}Pa_1\delta S_1$. От-

сюда $a_1 = \frac{4}{17}g = 0,23g$. Ускорение груза 2, $a_2 = \frac{a_1}{2} = 0,12g$.

Представим ускорение груза 2 в виде второй производной координаты его движения. Получим дифференциальное уравнение: $\ddot{S}_2 = 0,12g$. Дважды проинтегрировав его с нулевыми начальными условиями, найдём закон движения груза: $S_2 = 0,06gt^2$.

Задача 70. Грузы 1 и 2 весом $P_1 = 20$ Н и $P_2 = 30$ Н привязаны к нерастяжимой нити. Нить переброшена через неподвижные блоки B и D и охватывает снизу подвижный блок 3 весом $P_3 = 40$ Н (рис. 6.24). Определить ускорения грузов 1 и 2 и центра масс блока 3. Весом неподвижных блоков B и D пренебречь.

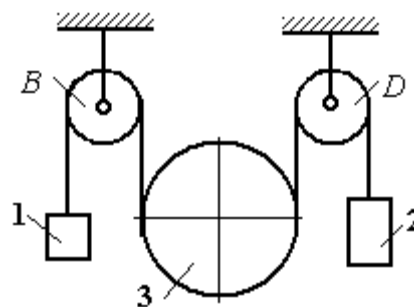


Рис. 6.24. Механическая система с двумя степенями свободы

Решение

В данной механической системе активными силами являются силы тяжести $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$,

$\vec{P}_3$ (рис. 6.25), а реакциями связей – реакции шарниров блоков B и D . Связи идеальные, так как оси вращения блоков B и D неподвижны.

Применим к решению задачи общее уравнение динамики. Система имеет две степени свободы. В этом случае общее уравнение динамики необходимо

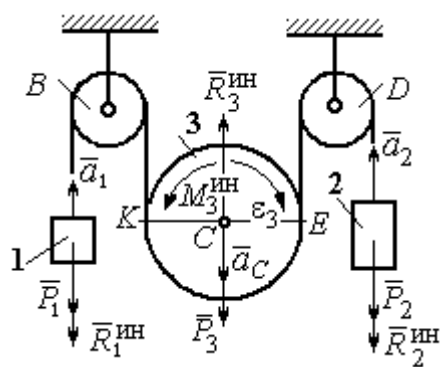


Рис. 6.25. Активные силы и силы инерции, приложенные к системе

составлять для каждого из независимых перемещений.

Предположим, система движется так, что оба груза 1 и 2 равноускоренно перемещаются вверх. Скорости грузов $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$, ускорения – $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$. Блок 3 опускается вниз с ускорением центра $\vec{a}_C$, вращается и имеет угловое ускорение ϵ_3 , направленное по ходу часовой стрелки (см. рис. 6.25).

Приложим к телам системы силы инерции (см. рис. 6.25). Модули сил инерции: $R_1^{\text{ин}} = m_1 a_1$, $R_2^{\text{ин}} = m_2 a_2$, $R_3^{\text{ин}} = m_3 a_C$. Главный момент сил инерции блока 3 $M_3^{\text{ин}} = J_{3C} \epsilon_3$, где осевой момент инерции $J_{3C} = \frac{m_3 r^2}{2}$. Направления векторов сил и моментов сил инерции показаны на рис. 6.25.

Для вычисления углового ускорения блока 3 воспользуемся векторным представлением ускорения точки при плоскопараллельном движении тела. Выберем точку K за полюс.

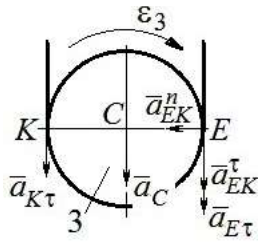


Рис. 6.26. Схема вычисления углового ускорения блока 3

Ускорение точки E определяется равенством $\vec{a}_E = \vec{a}_K + \vec{a}_{EK}^n + \vec{a}_{EK}^\tau$, где $\vec{a}_K$ – ускорение полюса K ; $\vec{a}_{EK}^n$, $\vec{a}_{EK}^\tau$ – нормальная и касательная составляющие ускорения точки E при вращении блока 3 вокруг полюса K (рис. 6.26). Спроектируем векторное равенство на вертикальную ось $E\tau$.

Получим: $a_{E\tau} = a_{K\tau} + a_{EK}^\tau$, где $a_{E\tau}$ и $a_{K\tau}$ – проекции ускорений точек E и K на вертикальную ось.

Поскольку модуль ускорения точки K нити равен модулю ускорения груза 1, то $a_{K\tau} = a_1$. Модуль ускорения точки E нити равен модулю ускорения груза 2 и $a_{E\tau} = a_2$. Так как $a_{EK}^\tau = \varepsilon_3 AK = \varepsilon_3 2r$, то $\varepsilon_3 = \frac{a_{E\tau} - a_{K\tau}}{2r} = \frac{a_2 - a_1}{2r}$.

Составляя такое же векторное уравнение для определения ускорения центра масс блока 3 (точки C) и проектируя его на вертикальную ось, найдём:

$$a_C = a_{K\tau} + a_{CK}^\tau = a_1 + \varepsilon_3 r = \frac{a_2 + a_1}{2}.$$

Выберем в качестве независимых координат s_1, s_2 – положения грузов 1 и 2, отсчитываемые от неподвижных осей вращения блоков B и D . Возможные перемещения грузов обозначим δs_1 и δs_2 .

Дадим системе возможное перемещение, при котором груз 1 поднимается вверх на расстояние δs_1 , а груз 2 – неподвижен. При таком движении нить, соединяющая груз 2 с блоком 3, неподвижна вплоть до точки E (рис. 6.27).

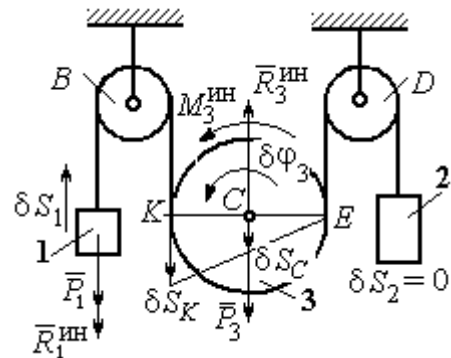


Рис. 6.27. Движение системы при перемещении груза 1.

Вращение блока 3 происходит против направления хода часовой стрелки. Точка E является мгновенным центром скоростей блока 3, и угловая скорость блока $\omega_3 = \frac{V_K}{2r} = \frac{V_1}{2r}$. Скорость центра масс блока $V_C = \frac{1}{2}V_1$. Тогда элементарный поворот блока 3 $\delta\varphi_3 = \frac{\delta s_1}{2r}$ и элементарное перемещение центра масс $\delta s_C = \frac{1}{2}\delta s_1$.

На данном возможном перемещении работу совершают как активные силы – силы тяжести $\vec{P}_1$ и $\vec{P}_3$ груза 1 и блока 3, так и силы инерции – $\vec{R}_1^{\text{ин}}$, $\vec{R}_3^{\text{ин}}$ и пара сил инерции с моментом $M_3^{\text{ин}}$.

Составим общее уравнение динамики:

$$\sum \delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}}) + \sum \delta A(\vec{R}_k^{\text{ин}}) = -P_1\delta s_1 + P_3\delta s_C - R_1^{\text{ин}}\delta s_1 - R_3^{\text{ин}}\delta s_C + M_3^{\text{ин}}\delta\varphi_3 = 0.$$

Здесь работа сил инерции

$$R_1^{\text{ин}}\delta s_1 = m_1 a_1 \delta s_1, \quad R_3^{\text{ин}}\delta s_C = m_3 a_C \delta s_C = \frac{P_3}{g} \left(\frac{a_1 + a_2}{2} \right) \cdot \frac{1}{2} \delta s_1;$$

$$M_3^{\text{ин}}\delta\varphi_3 = J_{3C} \varepsilon_3 \delta\varphi_3 = \frac{P_3 r^2}{2g} \cdot \frac{a_2 - a_1}{2r} \cdot \frac{\delta s_1}{2r}.$$

В результате общее уравнение динамики представляется выражением

$$-P_1\delta s_1 + \frac{1}{2}P_3\delta s_1 - \frac{P_1}{g}a_1\delta s_1 - \frac{P_3}{g} \left(\frac{a_1 + a_2}{2} \right) \cdot \frac{1}{2}\delta s_1 + \frac{P_3 r^2}{2g} \cdot \frac{a_2 - a_1}{2r} \cdot \frac{\delta s_1}{2r} = 0,$$

которое преобразуется к виду:

$$(3P_3 + 8P_1)a_1 + P_3a_2 = (4P_3 - 8P_1)g.$$

Дадим системе другое независимое возможное перемещение, при котором груз 2 движется вверх ($\delta s_2 \neq 0$), а груз 1 неподвижен ($\delta s_1 = 0$).

При этом перемещении нить, соединяющая груз 1 и блок 3 неподвижна вплоть до точки K (рис. 6.28). Вращение блока 3 происходит по направлению хода часовой стрелки. Точка K является мгновенным центром скоростей бло-

ка 3. Тогда $\omega_3 = \frac{V_E}{2r} = \frac{V_2}{2r}$ и скорость центра масс блока $V_C = \frac{1}{2}V_2$. Элементарный поворот блока 3 $\delta\varphi_3 = \frac{\delta s_2}{2r}$ и перемещение центра масс $\delta s_C = \delta s_E = \frac{1}{2}\delta s_2$.

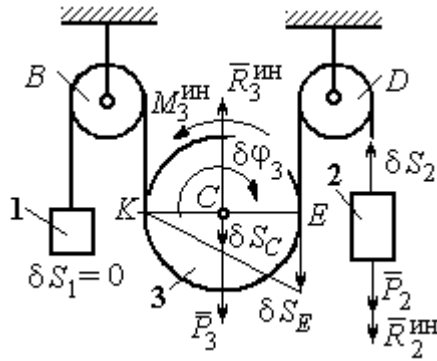


Рис. 6.28. Движение системы при перемещении груза 2

При таком движении работу совершают силы тяжести $\vec{P}_2$ и $\vec{P}_3$, силы инерции $\vec{R}_2^{\text{ин}}$, $\vec{R}_3^{\text{ин}}$ и пара сил с моментом $M_3^{\text{ин}}$.

Составим общее уравнение динамики на возможном перемещении δs_2 (см. рис. 6.28):

$$-P_2\delta s_2 - R_2^{\text{ин}}\delta s_2 + P_3\delta s_C - R_3^{\text{ин}}\delta s_C - M_3^{\text{ин}}\delta\varphi_3 = 0$$

которое преобразуется к виду

$$-P_2\delta s_2 - \frac{P_2}{g}a_2\delta s_2 + \frac{1}{2}P_3\delta s_2 - \frac{P_3}{g}\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)\frac{1}{2}\delta s_2 - \frac{P_3r^2}{2g}\left(\frac{a_2 - a_1}{2r}\right)\frac{\delta s_2}{2r} = 0$$

или к виду

$$(8P_2 + 3P_3)a_2 + P_3a_1 = (4P_3 - 8P_2)g.$$

Подставляя данные задачи в оба уравнения динамики, соответствующие независимым перемещениям δs_1 и δs_2 , получим систему уравнений:

$$7a_1 + a_2 = 0, \quad 2g + 9a_2 + a_1 = 0.$$

Решение системы: $a_1 = \frac{1}{31}g$, $a_2 = -\frac{7}{31}g$ представляет ускорения грузов 1 и 2.

Ускорение центра масс блока 3 находится по формуле $a_C = \frac{a_1 + a_2}{2} = -\frac{3}{31}g$.

Знаки ускорений определяют направления движений тел: груз 1 движется в выбранном направлении – вверх, груз 2 – вниз, центр блока 3 – вверх.

Упражнения

Упражнение 6.4. В механической системе (рис. 6.29) блок 1 радиуса r и каток 2 соединены горизонтальным невесомым стержнем. Скольжение между стержнем и катками отсутствует. Каток 2 состоит из двух шкивов радиусов r и $R = 2r$, скреплённых на одной оси. Каток катится, опираясь малым шкивом на горизонтальную поверхность, без проскальзывания. Груз 3 представляет собой поршень,двигающийся по горизонтальной поверхности без трения и прикреплённый к центру масс катка 2. К блоку 1 приложена пара сил с переменным моментом $M_{вр} = mgr \sin \omega t$.

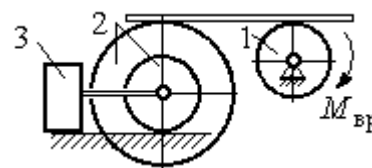


Рис. 6.29. Схема движения механической системы

Найти закон движения поршня 3, если массы грузов $m_1 = m_3 = m$, общая масса катка 2 $m_2 = 2m$, момент инерции катка 2 относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения, $i_2 = 1,5r$. Движение началось из состояния покоя.

Упражнение 6.5. Груз 1, двигаясь горизонтально, приводит в движение ступенчатый барабан 2 посредством нерастяжимой нити, намотанной на его малую ступень (рис. 6.30). К барабану на нитях, намотанных на большую и малую ступеньки, подвешены два груза 3 и 4. На груз 1 действует сила $F = P(t + 1)$. Определить закон движения груза 3, если веса грузов одинаковы и равны P , вес барабана 2 равен $2P$, радиусы ступенек барабана r и $2r$, радиус инерции барабана $i_2 = r\sqrt{2}$, и движение началось из состояния покоя.

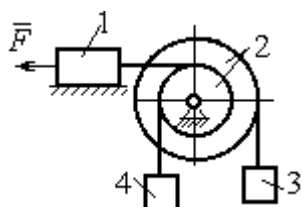


Рис. 6.30. Схема подъёмника

6.4. Уравнения Лагранжа II рода

Обобщёнными координатами называется совокупность любых s независимых параметров $q_1, q_2, \dots, q_s$, однозначно определяющих положение системы в любой момент времени.

Если системе сообщить возможное перемещение, при котором все обобщённые координаты изменятся на элементарные (бесконечно малые) величины $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_s$, называемые **вариациями обобщённых координат**, то все действующие активные силы совершат элементарную работу, которая может быть представлена в виде: $\delta A = Q_1 \cdot \delta q_1 + Q_2 \cdot \delta q_2 + \dots + Q_s \cdot \delta q_s$.

Величина Q_k , $k = 1, 2, \dots, s$, равная коэффициенту при вариации δq_k обобщенной координаты, называется **обобщенной силой**, соответствующей данной обобщенной координате. Расчет обобщенных сил осуществляется путем последовательного придания системе возможных перемещений, при которых варьируется только одна из обобщенных координат, а вариации остальных координат равны нулю.

Для материальной системы с идеальными связями дифференциальные уравнения движения в обобщенных координатах – **уравнения Лагранжа II рода** – имеют вид: $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k$, $k = 1, 2, \dots, s$, где s – число степеней свободы системы; T – кинетическая энергия системы; $q_1, q_2, \dots, q_s$ – обобщенные координаты; $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s$ – обобщенные скорости.

Примеры решения задач на составление уравнений Лагранжа

Задача 71. В механизме домкрата (рис. 6.31) движение зубчатого колеса 1 передаётся шестерне 2, к которой соосно прикреплено зубчатое колесо 3, имеющее зацепление с зубчатой рейкой 4, на которой поднимается груз 5 массы $m_5 = 50$ кг.

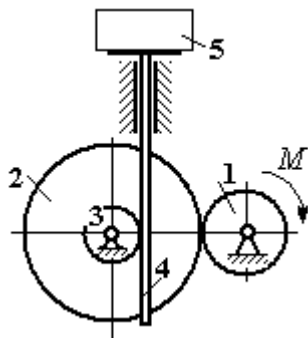


Рис. 6.31. Схема механизма домкрата

Радиусы зубчатых колёс $r_1 = 5$ см, $r_2 = 12$ см, $r_3 = 6$ см. Зубчатые колёса считать сплошными однородными дисками. Массы колёс $m_1 = 0,8$ кг,

$m_2 = 1,6$ кг, $m_3 = 0,6$ кг, масса зубчатой рейки $m_4 = 1$ кг.

Какой величины постоянный вращающий момент нужно приложить к колесу 1 для того, чтобы в момент времени $t = 2$ с груз 5 имел скорость $V_5 = 1$ м/с, если движение системы начинается из состояния покоя.

Решение

Домкрат является механической системой с одной степенью свободы. Выберем в качестве обобщённой координаты координату x , отмечающую положение груза 5 (рис. 6.32).

Уравнение Лагранжа для обобщённой координаты x имеет вид:

$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x$, где T – кинетическая энергия системы; $\dot{x}$ – обобщённая скорость; Q_x – обобщённая сила.

Кинетическая энергия колеса 1: $T_1 = \frac{J_1 \omega_1^2}{2}$, где ω_1 – угловая скорость колеса 1; J_1 – момент инерции колеса, $J_1 = \frac{m_1 r_1^2}{2}$.

Кинетические энергии шестерни 2 и зубчатого колеса 3, у которых угловые скорости одинаковы, соответственно:

$T_2 = \frac{J_2 \omega_2^2}{2}$, $T_3 = \frac{J_3 \omega_2^2}{2}$, где ω_2 – угловая скорость шестерни 2; J_2, J_3 – моменты инерции шестерни 2 и зубчатого колеса 3 относительно оси, проходящей через общий центр масс, $J_2 = \frac{m_2 r_2^2}{2}$,

$J_3 = \frac{m_3 r_3^2}{2}$. Скорость груза 5 равна скорости зубчатой линейки $V_5 = V_4$. Кинетическая энергия зубчатой линейки 4 и груза 5:

$T_4 = \frac{m_4 V_4^2}{2}$, $T_5 = \frac{m_5 V_4^2}{2}$.

Выразим угловые скорости колёс через скорость груза (зубчатой линейки).

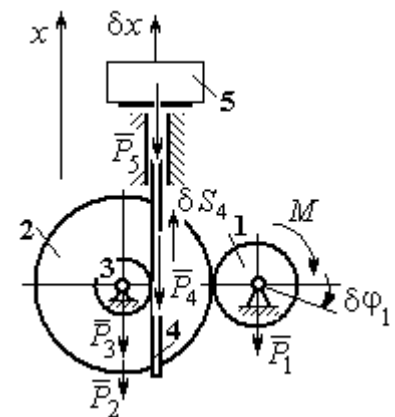


Рис. 6.32. Возможные перемещения звеньев механизма

Имеем: $\omega_2 = \omega_3 = \frac{V_4}{r_3}$ (см. рис. 6.32). Кроме того, из равенства $\omega_2 r_2 = \omega_1 r_1$

$$\text{следует } \omega_1 = \frac{\omega_2 r_2}{r_1} = \frac{V_4 r_2}{r_1 r_3}.$$

Подставляя полученные соотношения в выражения кинетических энергий тел и с учётом данных задачи, получим кинетическую энергию системы:

$$\begin{aligned} T &= T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 = \\ &= \frac{m_1 r_1^2}{4} \left(\frac{V_4 r_2}{r_1 r_3} \right)^2 + \frac{m_2 r_2^2}{4} \left(\frac{V_4}{r_3} \right)^2 + \frac{m_3 r_3^2}{4} \left(\frac{V_4}{r_3} \right)^2 + \frac{m_4 V_4^2}{2} + \frac{m_5 V_4^2}{2} = \\ &= \left[\frac{m_1 + m_2}{2} \left(\frac{r_2}{r_3} \right)^2 + \frac{m_3}{2} + m_4 + m_5 \right] \frac{V_4^2}{2} = 28,05 V_4^2 = 28,05 \dot{x}^2. \end{aligned}$$

Вычислим обобщённую силу.

Дадим возможное перемещение δx грузу 5. При этом линейка 4 переместится на расстояние δs_4 , а зубчатое колесо 1 повернётся на угол $\delta \varphi_1$. Найдём сумму работ всех сил, приложенных к системе, на этом возможном перемещении. Получим: $\delta A = -P_5 \delta x - P_4 \delta s_4 + M \delta \varphi_1$. Работа сил тяжести зубчатых колёс $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$ и $\vec{P}_3$ равна нулю, так как точки приложения этих сил неподвижны.

Из ранее полученных скоростных соотношений следуют равенства перемещений: $\delta s_4 = \delta x$, $\delta \varphi_1 = \frac{r_2}{r_1 r_3} \delta x$. В результате сумма работ сил на возможном

перемещении системы выражается в виде $\delta A = \left(-m_5 g - m_4 g + M \frac{r_2}{r_1 r_3} \right) \delta x$. От-

сюда обобщённая сила Q_x , соответствующая координате x :

$$Q_x = -(m_5 + m_4)g + M \frac{r_2}{r_1 r_3} = -500,31 + 40M.$$

Составим уравнение Лагранжа.

С учётом, что $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = 56,1 \ddot{x}$ и $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$, дифференциальное уравнение

движения имеет вид: $56,1 \ddot{x} = -500,31 + 40M$ или $\ddot{x} = -8,92 + 0,71M$.

Интегрируя это уравнение с нулевыми начальными условиями, получим закон изменения скорости груза 5: $V_5 = \dot{x} = (-8,92 + 0,71M)t$.

По условию задачи при $t = 2$ с $V_5 = 1$ м/с. Подставляя эти данные в уравнение, получим: $M = 13,27$ Н·м.

Задача 72. Механическая система состоит из ступенчатого блока 2, катка 3, соединённых невесомым брусом 1, и невесомой пружины жесткостью c . Радиусы ступеней блока r и $R = 1,5r$, радиус катка 3 равен r . Брус, лежащий на катке 3 и блоке 2, во время движения остаётся параллельным линии качения катка 3 (рис. 6.33). В центре катка 3 приложена сила $\vec{F}$, направленная вверх параллельно наклонной плоскости, а к блоку 2 – пара сил с моментом M . Качение катка

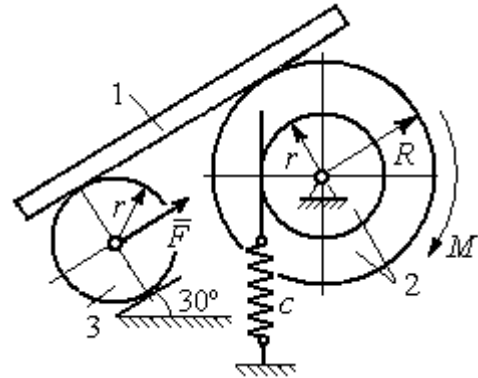


Рис. 6.33. Механическая система с одной степенью свободы

по неподвижной поверхности без скольжения. Проскальзывание между брусом 1 и дисками отсутствует. Передача движения пружины блоку 2 производится посредством невесомого жесткого вертикального стержня, прижатого к малой ступеньке блока без скольжения. Радиус инерции блока 2 относительно оси вращения $i_z = r\sqrt{2}$. Веса тел: $P_3 = P$, $P_2 = 2P$, приложенная сила $F = 2P$, момент $M = Pr$, жесткость пружины $c = P/r$.

Определить закон угловых колебаний блока 2 при $P = 10$ Н, $r = 0,2$ м, если в начальный момент пружина находилась в нерастянутом состоянии, а блоку 2 придали угловую скорость $\omega_0 = 0,5$ рад/с в сторону вращения, создаваемого заданным моментом.

Решение

Рассматриваемая механическая система (рис. 6.34) имеет одну степень свободы. В качестве обобщённой координаты q выберем перемещение x верхнего края пружины, отсчитываемого от уровня недеформируемой пружины (см. рис. 6.34). Обобщённая скорость $\dot{q} = \dot{x}$.

Уравнение Лагранжа II рода, описывающее движение системы, имеет вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x, \text{ где } T - \text{ кинетическая энергия системы; } Q_x - \text{ обобщенная}$$

сила, соответствующая обобщенной координате x .

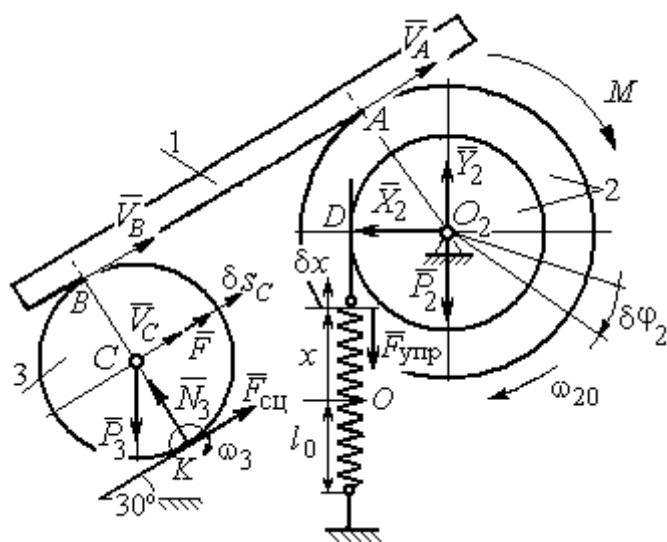


Рис. 6.34 Расчётная схема колебаний механической системы с одной степенью свободы

Вычислим кинетическую энергию системы. Энергия вращательного движения блока 2: $T_2 = \frac{1}{2} J_{2z} \omega_2^2$, где ω_2 – угловая скорость блока; J_{2z} – момент инерции блока 2 относительно оси z , $J_{2z} = m_2 i_z^2$. Каток 3 совершает плоскопараллельное движение. Его кинетическая

энергия $T_3 = \frac{1}{2}m_3V_C^2 + \frac{1}{2}J_{zC}\omega_3^2$, где V_C , ω_3 – скорость центра масс катка 3 и его угловая скорость; J_{zC} – момент инерции катка относительно оси, проходящей через его центр масс перпендикулярно плоскости движения, $J_{zC} = \frac{1}{2}m_3r^2$; r – радиус катка.

Выразим угловые скорости ω_2 , ω_3 , а также скорость V_C через обобщённую скорость $\dot{x}$.

Заметим, что скорость точки D блока 2 равна скорости движения верхнего края пружины: $V_D = \dot{x}$ (см. рис. 6.34). Угловая скорость блока 2: $\omega_2 = \frac{V_D}{r} = \frac{\dot{x}}{r}$. Скорость точки A блока 2: $V_A = \omega_2 R = \frac{\dot{x}R}{r}$.

Так как брус совершает поступательное движение, то скорости точек A и B равны: $V_B = V_A$. Угловая скорость катка 3 (точка K касания катка 3 с неподвижной поверхностью является его мгновенным центром скоростей): $\omega_3 = \frac{V_B}{2r} = \frac{V_A}{2r} = \frac{\dot{x}R}{2r^2}$. Скорость центра катка 3: $V_C = \frac{V_B}{2} = \frac{\dot{x}R}{2r}$.

Подставляя найденные кинематические соотношения с учётом исходных данных задачи, получим кинетическую энергию тел системы:

$$T_2 = \frac{1}{2} J_{2z} \omega_2^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2P}{g} (r\sqrt{2})^2 \left(\frac{\dot{x}}{r} \right)^2 = \frac{2P}{g} \dot{x}^2;$$

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 V_C^2 + \frac{1}{2} J_{zC} \omega_3^2 = \frac{1}{2} \frac{P}{g} \left(\frac{\dot{x}R}{2r} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{Pr^2}{2g} \left(\frac{\dot{x}R}{2r^2} \right)^2 = \frac{3P}{4g} \left(\frac{R}{2r} \right)^2 \dot{x}^2.$$

Полная кинетическая энергия системы:

$$T = T_2 + T_3 = \frac{P}{g} \left(2 + \frac{3}{4} \left(\frac{R}{2r} \right)^2 \right) \dot{x}^2.$$

Найдём обобщённую силу. Произвольное положение системы определяется обобщённой координатой x , показывающей растяжение пружины. Дадим пружине в произвольном положении возможное (бесконечно малое) перемещение δx в положительном направлении оси x (см. рис. 6.34). При этом блок 2 повернётся на угол $\delta\varphi_2 = \frac{\delta x}{r}$, центр масс катка 3 сдвинется на расстояние

$\delta s_C = \frac{R}{2r} \delta x$. На заданном перемещении системы работу совершают сила тяжести катка 3, пара сил с моментом M , сила $\vec{F}$ и сила упругости пружины.

Элементарная работа вращающего момента M : $\delta A(M) = M\delta\varphi_2 = M\frac{\delta x}{r}$.

Работа силы тяжести катка 3: $\delta A(\vec{P}_3) = P_3\delta s_C \cos 120^\circ = -P_3\frac{R}{4r}\delta x$.

Работа силы F : $\delta A(\vec{F}) = F\delta s_C = F\frac{R}{2r}\delta x$.

Модуль силы упругости пружины, растянутой из недеформированного положения на расстояние x : $F_{\text{упр}} = cx$. Сила упругости направлена в сторону, противоположную растяжению (см. рис. 6.34). Её работа при перемещении δx вычисляется по формуле $\delta A(\vec{F}_{\text{упр}}) = F_{\text{упр}}\delta x \cos 180^\circ = -cx\delta x$.

Сумма работ сил на рассматриваемом возможном перемещении системы с учётом данных задачи:

$$\delta A = M\frac{\delta x}{r} - P_3\frac{R}{4r}\delta x + F\frac{R}{2r}\delta x - cx\delta x = P\left(\frac{17}{8} - \frac{x}{r}\right)\delta x,$$

откуда обобщённая сила $Q_x = P\left(\frac{17}{8} - \frac{x}{r}\right)$.

Вычислим необходимые производные кинетической энергии:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{2P}{g}\left(2 + \frac{3}{4}\left(\frac{R}{2r}\right)^2\right)\ddot{x}, \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \text{ и, подставляя их в общий вид уравнений}$$

Лагранжа, получим дифференциальное уравнение колебаний верхнего края пружины:

$$\frac{2P}{g}\left(2 + \frac{3}{4}\left(\frac{R}{2r}\right)^2\right)\ddot{x} = P\left(\frac{17}{8} - \frac{x}{r}\right), \text{ или } \ddot{x} + 10,2x = 4,34 \text{ (здесь } g = 9,81 \text{ м/с}^2\text{)}.$$

Решение дифференциального уравнения представляется в виде суммы: $x = x_{\text{одн}} + x_{\text{частн}}$. Общее решение однородного уравнения имеет вид $x_{\text{одн}} = C_1 \sin kt + C_2 \cos kt$, где C_1, C_2 – произвольные постоянные; k – круговая частота собственных колебаний пружины, $k = \sqrt{10,2} = 3,19$ рад/с. Частное ре-

шение неоднородного уравнения ищется в виде константы $x_{\text{част}} = b$. Подставив его в уравнение колебаний, получим: $b = 0,42$. Таким образом, общее решение неоднородного уравнения имеет вид $x(t) = C_1 \sin 3,19t + C_2 \cos 3,19t + 0,42$.

Произвольные постоянные C_1, C_2 находятся из начальных условий. По условию задачи в начальный момент пружина была в нерастянутом состоянии. Тогда начальная координата пружины (её верхнего края) $x(0) = 0$. Подставляя значение начальной координаты в общее решение неоднородного уравнения при $t = 0$, получим $C_2 = -0,42$. Скорость верхнего края пружины в начальный момент времени $\dot{x}(0)$ равна начальной скорости $V_D(0)$ точки D блока 2. Поскольку в начальный момент времени блоку 2 сообщили угловую скорость $\omega_{20} = 0,5$ рад/с, то при $r = 0,2$ м $\dot{x}(0) = V_D(0) = \omega_{20}r = 0,1$ м/с.

Вычисляем скорость движения края пружины, взяв производную: $\dot{x}(t) = 3,19C_1 \cos 3,19t - 3,19C_2 \sin 3,19t$. Подставляя начальное значение скорости, получим $C_1 = 0,03$.

Окончательно уравнение движения верхнего края пружин: $x(t) = 0,03 \sin 3,19t - 0,42 \cos 3,19t + 0,42$ м. Уравнение колебательного движения

блока 2: $\varphi_2 = \frac{x}{r} = 0,15 \sin 3,19t - 2,1 \cos 3,19t + 2,1$ рад.

Задача 73. Прямоугольная призма 3 весом $2P$ лежит на катке 1 радиуса r и веса P и опирается на невесомый блок 2 (рис. 6.35). Каток 1 катится по неподвижной горизонтальной поверхности без скольжения. По наклонной поверхности призмы скатывается без скольжения каток 4 весом P и радиуса r . Угол наклона поверхности призмы к горизонту составляет

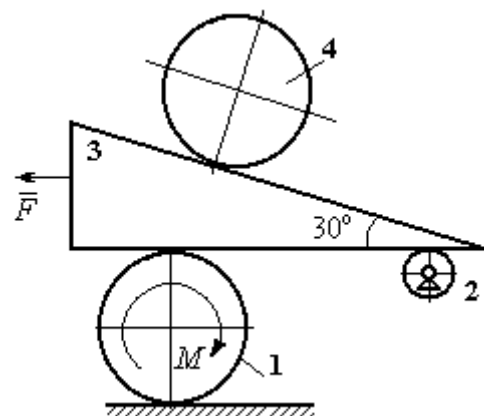


Рис. 6.35. Механическая система с двумя степенями свободы

30°. На каток 1 действует пара сил с постоянным моментом $M = 3Pr$, а на призму 3 – горизонтальная сила $\vec{F}$ с модулем $F = P$. Катки считать однородными дисками. Проскальзывание между катками 1, 4 и призмой отсутствует. В начальный момент система находилась в покое.

Определить закон движения призмы 3 и закон движения катка 4 относительно призмы.

Решение

Рассматриваемая механическая система – катки и призма имеет две степени свободы, так как перемещение катка 4 относительно призмы 3 не зависит от перемещения самой призмы и катка 1. За обобщенные координаты выберем перемещение x_4 центра масс катка 4 относительно края призмы и перемещение x_3 края призмы 3 относительно произвольной неподвижной вертикальной плоскости (рис. 6.36). Обобщенные скорости: $\dot{x}_4$, $\dot{x}_3$.

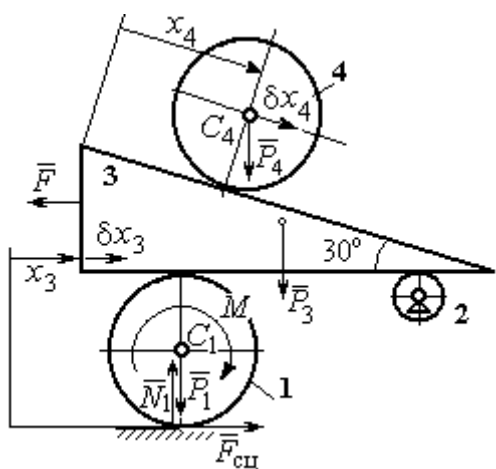


Рис. 6.36. Возможные перемещения механической системы

Уравнения Лагранжа II рода, описывающие движение системы в обобщенных координатах:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_4} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_4} = Q_{x_4};$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_3} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_3} = Q_{x_3},$$

где T – кинетическая энергия системы; Q_{x_4} , Q_{x_3} – обобщенные силы, соответствующие указанным обобщенным координатам.

Вычислим кинетическую энергию тел в системе.

Каток 1 совершает плоскопараллельное движение. Кинетическая энергия

катка $T_1 = \frac{1}{2} m_1 V_{C_1}^2 + \frac{1}{2} J_{C_1} \omega_1^2$, где V_{C_1} – скорость центра масс катка, $V_{C_1} = \frac{1}{2} \dot{x}_3$;

J_{C_1} – момент инерции катка относительно оси, проходящей через центр масс

перпендикулярно плоскости движения, $J_{C_1} = \frac{m_1 r^2}{2}$; ω_1 – угловая скорость катка 1, $\omega_1 = \frac{\dot{x}_3}{2r}$.

Призма 3 совершает поступательное движение со скоростью $V_3 = \dot{x}_3$. Её кинетическая энергия

$$T_3 = \frac{m_3 V_3^2}{2} = \frac{m_3 \dot{x}_3^2}{2}.$$

При расчёте кинетической энергии катка 4 по

формуле $T_4 = \frac{1}{2} m_4 V_4^2 + \frac{1}{2} J_{C_4} \omega_4^2$ необходимо учитывать, что каток 4 совершает сложное движение. Здесь относительное движение катка – его качение по наклонной поверхности призмы, переносное – поступательное перемещение вместе с призмой.

Вектор абсолютной скорости центра масс катка 4 $\vec{V}_4$ представляется в виде суммы $\vec{V}_4 = \vec{V}_{4e} + \vec{V}_{4r}$ (рис. 6.37), где $\vec{V}_{4e}$ – вектор переносной скорости катка, равный по модулю скорости призмы: $V_{4e} = \dot{x}_3$; $\vec{V}_{4r}$ – вектор относительной скорости центра масс катка, равный по величине $V_{4r} = \dot{x}_4$. Модуль абсолютной скорости центра масс катка 4 (по теореме косинусов):

$$V_4^2 = V_{4e}^2 + V_{4r}^2 - 2V_{4e}V_{4r}\cos 150^\circ = \dot{x}_3^2 + \dot{x}_4^2 + 2\dot{x}_3\dot{x}_4\cos 30^\circ.$$

Поскольку переносное движение катка 4 поступательное, угловая скорость катка ω_4 равна его угловой скорости в относительном движении

$$\omega_4 = \frac{V_{4r}}{r} = \frac{\dot{x}_4}{r}.$$

В результате выражение кинетической энергии системы, в обобщённых скоростях имеет вид:

$$T = \frac{1}{2} m_1 V_{C_1}^2 + \frac{1}{2} J_{C_1} \omega_1^2 + \frac{1}{2} m_3 V_3^2 + \frac{1}{2} m_4 V_4^2 + \frac{1}{2} J_{C_4} \omega_4^2 =$$

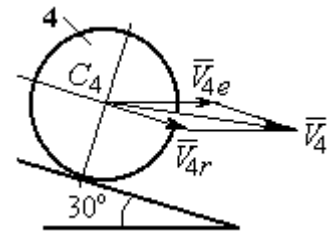


Рис. 6.37. Скорость центра масс катка 4

$$= \frac{P}{2g} \left(\frac{27}{8} \dot{x}_3^2 + \frac{3}{2} \dot{x}_4^2 + \dot{x}_3 \dot{x}_4 \sqrt{3} \right).$$

Дадим системе возможное перемещение по координате x_3 , оставляя координату x_4 без изменения: $\delta x_3 > 0, \delta x_4 = 0$. При таком движении системы каток 4 не скатывается по призме, а движется поступательно вместе с ней. В этом случае работа сил тяжести катков 1, 4 и призмы равна нулю, так как нет вертикального перемещения точек приложения этих сил. Работу на этом перемещении будет производить только сила $\vec{F}$ и пара сил с моментом M , приложенная к катку 1. Суммарная элементарная работа

$$\delta A = -F\delta x_3 + M\delta\varphi_1 = \left(-F + \frac{M}{2r} \right) \delta x_3.$$

Здесь учтено, что элементарный угол поворота катка 1 связан с перемещением призмы соотношением: $\delta\varphi_1 = \frac{\delta x_3}{2r}$. Отсюда обобщённая сила, соответствующая координате x_3 : $Q_{x_3} = -F + \frac{M}{2r} = \frac{1}{2}P$.

Дадим системе другое независимое перемещение – по координате x_4 , оставляя координату x_3 без изменения: $\delta x_4 > 0, \delta x_3 = 0$. При этом возможном перемещении вся система стоит, кроме катка 4, который скатывается по наклонной поверхности призмы. При таком движении системы работу совершает только сила тяжести катка 4. Выражая элементарную работу $\delta A = P_4 \delta x_4 \cos 60^\circ = \frac{1}{2}P \delta x_4$, найдём обобщённую силу, соответствующую координате x_4 : $Q_{x_4} = \frac{1}{2}P$.

Составим уравнения Лагранжа. С этой целью вычислим необходимые производные кинетической энергии

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_3} \right) = \frac{27P}{8g} \ddot{x}_3 + \frac{P\sqrt{3}}{2g} \ddot{x}_4; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_4} \right) = \frac{3P}{2g} \ddot{x}_4 + \frac{P\sqrt{3}}{2g} \ddot{x}_3; \quad \frac{\partial T}{\partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial x_4} = 0.$$

Подставляя результаты расчётов в общий вид уравнений Лагранжа, получим систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{27P}{8g}\ddot{x}_3 + \frac{P\sqrt{3}}{2g}\ddot{x}_4 = \frac{1}{2}P, \quad \frac{3P}{2g}\ddot{x}_4 + \frac{P\sqrt{3}}{2g}\ddot{x}_3 = \frac{1}{2}P$$

или

$$6,75\ddot{x}_3 + 1,73\ddot{x}_4 = g; \quad 3\ddot{x}_4 + 1,73\ddot{x}_3 = g.$$

Решаем данную систему как алгебраическую относительно ускорений $\ddot{x}_3$, $\ddot{x}_4$. Получим: $\ddot{x}_3 = 0,07g$, $\ddot{x}_4 = 0,29g$.

Интегрируя дважды эти уравнения с нулевыми начальными условиями, получим закон движения призмы ($x_3 = 0,035gt^2$) и центра масс катка 4 относительно призмы ($x_4 = 0,145gt^2$). Движение призмы и катка 4 относительно призмы происходит в положительном направлении осей.

Задача 74. Механическая система состоит из трёх тел – груза 1, катка 2 и блока 3 (рис. 6.38). Невесомый стержень, соединяющий каток 2 с блоком 3, параллелен горизонтальной плоскости качения катка 2. К центру катка 2 прикреплен горизонтальная пружина, другой конец которой соединён с грузом 1. Коэффициент жесткости пружины c . Груз 1 весом P_1 движется без трения по горизонтальной поверхности. Каток 2 весом P_2 катится по горизонтальной поверхности без скольжения. Радиус катка 2 равен r . Блок 3 считать однородным диском весом P_3 радиуса R . К блоку 3 приложена пара сил с моментом M . Движение катка 2 блоку 3 передаётся горизонтальным невесомым стержнем. Скольжение между стержнем и дисками отсутствует. В начальный момент система находилась в покое. При этом груз 1 находился в положении, при котором

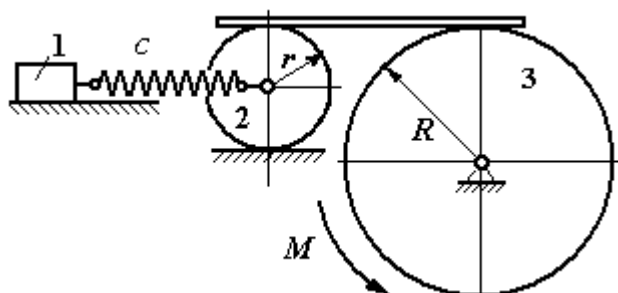


Рис. 6.38. Колебания механической системы с двумя степенями свободы

пружина была растянута относительно своего недеформированного состояния на величину Δl_0 .

Найти закон абсолютного движения груза 1, если известно $P_1 = 10 \text{ Н}$, $P_2 = 20 \text{ Н}$, $P_3 = 30 \text{ Н}$, $M = 5 \text{ Н} \cdot \text{м}$, $R = 24 \text{ см}$, $c = 207 \text{ Н/м}$, $\Delta l_0 = 5 \text{ см}$.

Решение

Рассматриваемая механическая система имеет две степени свободы. В качестве обобщенных координат выберем удлинение пружины x_1 относительно

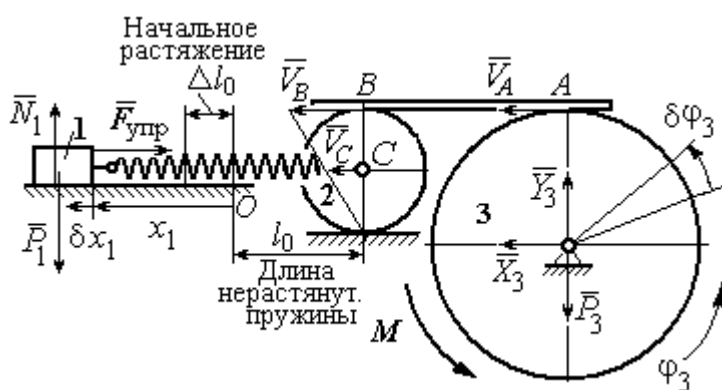


Рис. 6.39. Расчётная схема колебаний механической системы

но недеформированного состояния и угол φ_3 поворота блока 3 (рис. 6.39). При этом x_1 является относительной координатой движения груза, а φ_3 – абсолютной координатой вращения блока 3.

Рассмотрим сложное движение груза 1. Относительное движение груза – это его движение на пружине в предположении, что точка крепления пружины неподвижна. Относительная скорость $V_{1r} = \dot{x}_1$. Переносное движение – это перемещение груза вместе с фиксированной длиной пружины (иначе, заменяя пружину жестким стержнем). Переносная скорость груза 1 $V_{1e} = V_C$, где V_C – скорость центра масс катка 2.

На рис. 6.39 показано распределение скоростей точек катка 2, откуда следует: $V_C = \frac{1}{2}V_B$. Имеем: $V_B = V_A = \omega_3 R = \dot{\varphi}_3 R$ и $V_C = \frac{1}{2}\dot{\varphi}_3 R$.

Для того чтобы найти модуль абсолютной скорости груза 1, спроектируем векторное равенство теоремы сложения скоростей $\vec{V}_1 = \vec{V}_{1r} + \vec{V}_{1e}$ на горизон-

тальную ось. Полагая, что движение системы происходит в положительном направлении отсчета обобщённых координат, получим: $V_1 = \dot{x}_1 + \frac{1}{2}\dot{\phi}_3 R$.

Уравнения Лагранжа II рода, описывающие движение системы:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_1} = Q_x, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}_3}\right) - \frac{\partial T}{\partial \phi_3} = Q_\phi,$$

где T – кинетическая энергия системы; Q_x , Q_ϕ – обобщенные силы, соответствующие обобщенным координатам x_1 и ϕ_3 .

Вычислим кинетическую энергию системы и выразим её через обобщённые скорости.

Кинетическая энергия поступательного движения груза 1 определяется выражением $T_1 = \frac{1}{2}m_1 V_1^2$, где V_1 следует рассматривать как абсолютную скорость груза. Тогда $T_1 = \frac{1}{2}m_1 \left(\dot{x}_1 + \frac{1}{2}\dot{\phi}_3 R\right)^2$. Каток 2 совершает плоскопараллель-

ное движение. Кинетическая энергия катка $T_2 = \frac{3}{4}m_2 V_C^2$, причём $V_C = \frac{1}{2}\dot{\phi}_3 R$. Тогда $T_2 = \frac{3}{16}m_2 \dot{\phi}_3^2 R^2$. Кинетическая энергия вращающегося блока 3:

$T_3 = \frac{1}{2}J_{3z}\omega_3^2$, где J_{3z} – осевой момент инерции блока 3, $J_{3z} = \frac{m_3 R^2}{2}$. Оконча-

тельно $T_3 = \frac{1}{4}m_3 \dot{\phi}_3^2 R^2$.

Кинетическая энергия системы имеет вид:

$$\begin{aligned} T &= T_1 + T_2 + T_3 = \frac{1}{2}m_1 \left(\dot{x}_1 + \frac{1}{2}\dot{\phi}_3 R\right)^2 + \frac{3}{16}m_2 \dot{\phi}_3^2 R^2 + \frac{m_3 R^2}{4} \dot{\phi}_3^2 = \\ &= \frac{1}{2}m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_1 \dot{x}_1 \dot{\phi}_3 R + \left(\frac{1}{8}m_1 + \frac{3}{16}m_2 + \frac{1}{4}m_3\right) \dot{\phi}_3^2 R^2. \end{aligned}$$

Дадим системе возможное перемещение, при котором изменяется координата груза x_1 ($\delta x_1 > 0$), а другая координата – угол поворота блока 3 φ_3 остаётся постоянной ($\delta \varphi_3 = 0$). В этом случае груз 1 движется горизонтально, блок 3 и каток 2 – неподвижны. При таком движении работу будет производить только упругая сила пружины.

Модуль силы упругости пружины пропорционален её растяжению и в произвольном положении груза равен: $F_{\text{упр}} = c\Delta\ell = cx_1$. Направление силы упругости противоположно растяжению (см. рис. 6.39).

Сумма элементарных работ сил на заданном перемещении системы δx_1 : $\delta A = -F_{\text{упр}}\delta x_1 = -cx_1\delta x_1$. Отсюда обобщенная сила Q_x , соответствующая координате x_1 : $Q_x = -cx_1 = -207x_1$ Н.

Дадим системе другое возможное перемещение, при котором пружина не растягивается: $\delta x_1 = 0$, а блок 3 повернулся на угол $\delta \varphi_3$: $\delta \varphi_3 > 0$. В этом случае пружина рассматривается как жёсткий стержень, связывающий груз 1 с центром масс катка 2. В результате при повороте блока 3 груз 1 и точка С движутся одинаково в горизонтальном направлении. На этом перемещении системы работу совершает только пара сил с моментом M , приложенная к блоку 3. Имеем $\delta A = M\delta \varphi_3$, и, следовательно, обобщённая сила $Q_\varphi = M = 5$ Н·м.

Составим уравнения Лагранжа, для чего вычислим производные от кинетической энергии по обобщенным скоростям и координатам:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} = m_1 \dot{x}_1 + \frac{1}{2} m_1 R \dot{\varphi}_3; \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_3} = \frac{1}{2} m_1 R \dot{x}_1 + \left(\frac{1}{4} m_1 + \frac{3}{8} m_2 + \frac{1}{2} m_3 \right) \dot{\varphi}_3 R^2;$$

$$\frac{\partial T}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi_3} = 0.$$

Полные производные по времени:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} \right) = m_1 \ddot{x}_1 + \frac{1}{2} m_1 R \ddot{\varphi}_3; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_3} \right) = \frac{1}{2} m_1 R \ddot{x}_1 + \left(\frac{1}{4} m_1 + \frac{3}{8} m_2 + \frac{1}{2} m_3 \right) \ddot{\varphi}_3 R^2.$$

Приравнивая полные производные обобщённым силам, получим уравнения Лагранжа окончательно в виде системы алгебраических уравнений относительно ускорений $\ddot{x}_1$ и $\ddot{\phi}_3$:

$$1,02\ddot{x}_1 + 0,12\ddot{\phi}_3 = -207x_1; \quad 0,12\ddot{x}_1 + 0,15\ddot{\phi}_3 = 5.$$

Разрешая систему относительно ускорения $\ddot{x}_1$, получим уравнение относительно колебаний груза:

$$\ddot{x}_1 + 225x_1 = -4,35.$$

Решение линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами представляется в виде суммы общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного: $x_1 = x_{\text{одн}} + x_{\text{частн}}$.

Общее решение однородного уравнения $x_{\text{одн}} = C_1 \sin kt + C_2 \cos kt$, где C_1, C_2 – произвольные постоянные; k – круговая частота собственных колебаний груза 1, $k = \sqrt{225} = 15$ рад/с. Частное решение неоднородного уравнения ищется в виде константы $x_{\text{част}} = b$. Подставив его в уравнение колебаний, получим: $b = -0,02$.

Таким образом, общее решение неоднородного уравнения

$$x_1(t) = C_1 \sin 15t + C_2 \cos 15t - 0,02.$$

Начальная координата x_{01} груза 1 определяется из условия, что в начальный момент времени при $t = 0$ груз находился в положении, при котором пружина была растянута относительно своего недеформированного состояния на расстояние $\Delta l_0 = 0,05$ м. Следовательно, $x_{01} = 0,05$. Подставляя значение начальной координаты в общее решение неоднородного уравнения при $t = 0$, получим: $C_2 = 0,07$.

Относительная скорость груза 1 в любой момент времени: $\dot{x}_1(t) = C_1 15 \cos 15t - C_2 15 \sin 15t$. По условию задачи начальная скорость груза 1

$\dot{x}_1(0) = 0$. После подстановки начального условия в выражение для скорости груза 1 получим: $C_1 = 0$.

Окончательно уравнение относительного движения груза 1:

$$x_1(t) = 0,07\cos 15t - 0,02 \text{ м.}$$

Найдём уравнение вращательного движения блока 3. Для этого в дифференциальное уравнение $0,12\ddot{x}_1 + 0,15\ddot{\varphi}_3 = 5$ подставим значение второй производной решения относительных колебаний груза 1. Получим:

$\ddot{\varphi}_3 = 33,33 + 12,6\cos 15t$. Полагая $\ddot{\varphi}_3 = \frac{d\omega_3}{dt}$, получим дифференциальное урав-

нение первого порядка: $\frac{d\omega_3}{dt} = 33,33 + 12,6\cos 15t$, откуда найдём угловую скорость блока 3: $\omega_3 = 33,33t + 0,84\sin 15t + C_3$.

Аналогично, положив $\omega_3 = \frac{d\varphi_3}{dt}$, найдём закон вращательного движения

блока 3: $\varphi_3 = 16,665t^2 - 0,056\cos 15t + C_3t + C_4$.

Начальные условия движения блока: при $t = 0$, $\varphi_3(0) = 0$, $\omega_3(0) = 0$. Подставляя начальные условия в уравнения движения, получим: $C_4 = 0,056$, $C_3 = 0$.

Окончательно уравнение вращательного движения блока 3:

$$\varphi_3 = 16,665t^2 - 0,056\cos 15t + 0,056.$$

Абсолютное движение s_1 груза 1 представляется суммой относительного и переносного движений:

$$s_1 = x_1 + S_C = x_1 + \frac{1}{2}R\varphi_3 = 2t^2 - 0,06\cos 15t - 0,01.$$

Упражнения

Упражнение 6.6. Каток весом $P_1 = 2P$, радиуса r , движущийся без проскальзывания по вертикальной стене, удерживается вертикальной пружиной жесткостью $C = 4P/r$, прикрепленной одним концом к центру катка, другим – к неподвижной поверхности (рис. 6.40). К нити, намотанной на барабан катка, подвешен груз 2 весом $P_2 = P$. На груз действует сила $F = P$, к катку приложена пара сил с моментом $M = Pr$.

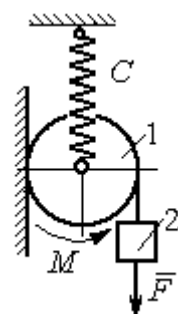


Рис. 6.40. Схема движения катка

Упражнение 6.7. Грузы 1 и 2 весом $P_1 = 20$ Н и $P_2 = 30$

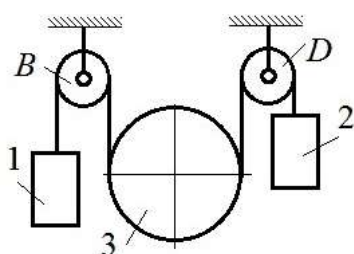


Рис. 6.41. Механическая система с двумя степенями свободы

Н привязаны к нерастяжимой нити. Нить переброшена через неподвижные блоки B и D и охватывает снизу подвижный блок 3 весом $P_3 = 40$ Н (рис. 6.41).

Определить ускорения грузов 1 и 2 и центра масс блока 3. Весом нити и неподвижных блоков B и D пренебречь.

Упражнение 6.8. Каток 1, радиуса r весом P катится по горизонтальной поверхности. К катку приложена пара сил с моментом $M = 2Pr$. Каток передает движение невесомой тележке (см. рис. 6.42). В кузове тележки находится каток 2 такого же радиуса r и веса P , который движется по горизонтальной поверхности кузова под действием силы $F = P$, приложенной в центре катка. Найти закон движения центра катка 2 относительно тележки, если движение системы началось из состояния покоя.

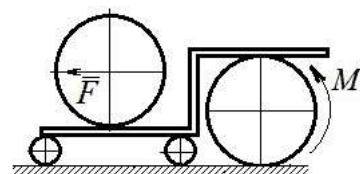


Рис. 6.42. Движение катка в кузове тележки

7. ОТВЕТЫ И КРАТКИЕ ПОЯСНЕНИЯ

7.1. Ответы к упражнениям главы 1

1.1

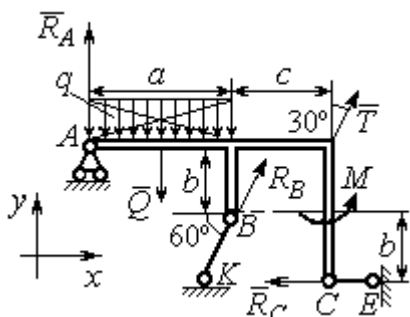


Рис. 7.1. Расчётная схема к упражнению 1.1

$$T = 15 \text{ кН}, Q = 15 \text{ кН}.$$

$$R_B \cos 60^\circ + T \cos 60^\circ - R_C = 0;$$

$$R_A - Q + R_B \cos 30^\circ + T \cos 30^\circ = 0;$$

$$-Q \cdot \frac{a}{2} + R_B \cos 30^\circ \cdot a + R_B \cos 60^\circ \cdot b + T \cos 30^\circ \cdot (a + c) + M - R_C \cdot 2b = 0.$$

$$R_B = -3,8 \text{ кН}, R_C = 5,6 \text{ кН}, R_A = 5,3 \text{ кН}.$$

1.2

$$Q = 9 \text{ кН}, T = 2 \text{ кН}.$$

$$X_A + T \cos 30^\circ + Q \cos 30^\circ = 0;$$

$$Y_A - Q \cos 60^\circ + R_B - T \cos 60^\circ - F = 0;$$

$$-Q \cdot \frac{c}{2} + R_B (b + c \cos 60^\circ) - F c \cos 60^\circ + M -$$

$$-T \cos 60^\circ (b + c \cos 60^\circ) - T \cos 30^\circ (a + c \sin 60^\circ) = 0.$$

$$R_B = 10,02 \text{ кН}, X_A = -9,53 \text{ кН}, Y_A = -0,52 \text{ кН}.$$

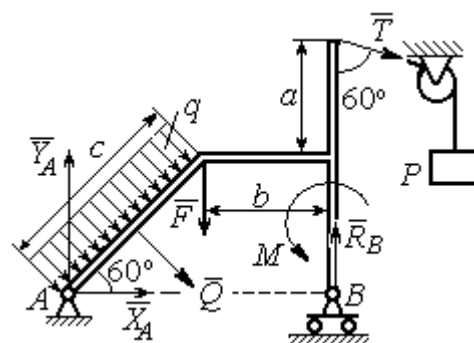


Рис. 7.2. Расчётная схема к упражнению 1.2

1.3

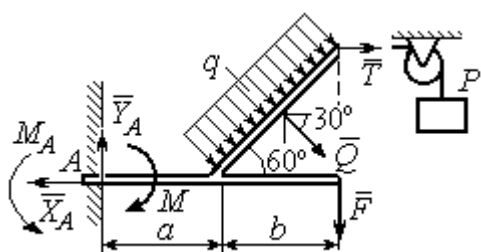


Рис. 7.3. Расчётная схема к упражнению 1.3

$$Q = 8 \text{ кН}, T = 3 \text{ кН}.$$

$$-X_A + T + Q \cos 30^\circ = 0;$$

$$Y_A - Q \cos 60^\circ - F = 0;$$

$$-T 2b \cos 30^\circ - F(a + b) + M_A - M -$$

$$-Q \cos 60^\circ \left(a + \frac{b}{2} \right) - Q \cos 30^\circ (b \cos 30^\circ) = 0.$$

$$M_A = 18,61 \text{ кН} \cdot \text{м}, X_A = 9,93 \text{ кН}, Y_A = 6 \text{ кН}.$$

1.4

$$Q = 6,93 \text{ кН}, T = 2 \text{ кН}.$$

$$-X_B - T + Q\cos 30^\circ + F\cos 60^\circ = 0;$$

$$R_A - Q\cos 60^\circ + Y_B - F\cos 30^\circ = 0;$$

$$-\frac{Qa}{2\cos 30^\circ} + Y_B\left(b + \frac{a}{2\cos 30^\circ}\right) + Ta - F\cos 60^\circ -$$

$$-F\cos 30^\circ\left(b + \frac{a}{2\cos 30^\circ}\right) + M = 0.$$

$$R_A = 0,72 \text{ кН}, X_B = -5,5 \text{ кН}, Y_B = 5,34 \text{ кН}.$$

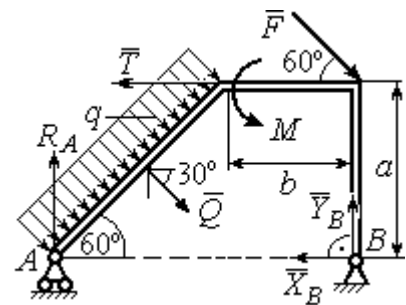


Рис.7.4. Расчётная схема к упражнению 1.4

1.5

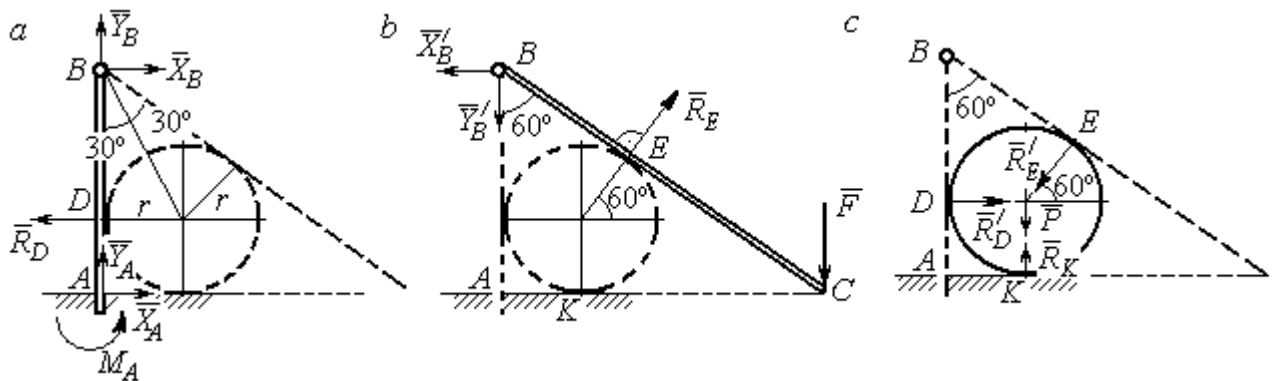


Рис. 7.5. Расчётные схемы к упражнению 1.5:
a – равновесие балки AB; b – равновесие балки BC; c – равновесие шара

$$X_B = X'_B, Y_B = Y'_B, R_D = R'_D, R_E = R'_E.$$

Балка AB. $AB = r + BD = r + r\operatorname{ctg} 30^\circ = 2,73 \text{ м}.$

$$X_A - R_D + X_B = 0, Y_A + Y_B = 0, M_A + R_D \cdot r - X_B \cdot AB = 0.$$

Балка BC. $BE = BD = 1,73 \text{ м}.$ $AC = BC\cos 30^\circ = 2AB\cos 30^\circ = 4,73 \text{ м}.$

$$R_E\cos 60^\circ - X'_B = 0, RE\sin 60^\circ - Y'_B - F = 0, R_E \cdot BE - F \cdot AC = 0.$$

Шар.

$$R'_D - R'_E\cos 60^\circ = 0, R_K - P - R'_E\cos 30^\circ = 0.$$

$$R_E = 21,87 \text{ кН}, Y_B = 10,94 \text{ кН}, X_B = 10,94 \text{ кН}, R_D = 10,94 \text{ кН};$$

$$R_K = 20,94 \text{ кН}, X_A = 0, Y_A = -10,94 \text{ кН}, M_A = 18,93 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

1.6

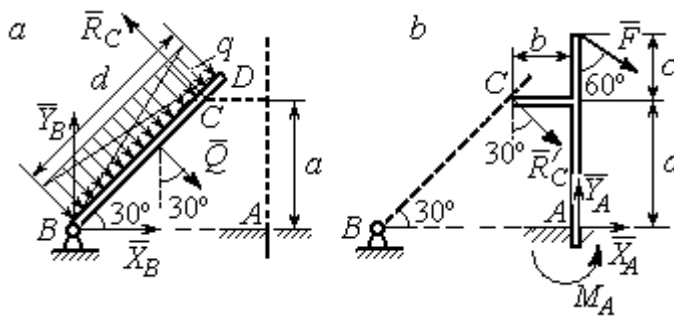


Рис. 7.6. Расчётные схемы к упражнению № 1.6:
а – равновесие балки BD ; б – равновесие балки AC

Балка BD . $Q = 15$ кН.

$$X_B + Q \cos 60^\circ - R_C \cos 30^\circ = 0;$$

$$Y_B - Q \cos 30^\circ + R_C \cos 60^\circ = 0;$$

$$-Q \frac{d}{2} + R_C 2a = 0.$$

Балка AC . $R_C = R'_C$.

$$X_A + R'_C \cos 60^\circ + F \cos 30^\circ = 0, \quad Y_A - R'_C \cos 30^\circ - F \cos 60^\circ = 0;$$

$$M_A - R'_C \cos 60^\circ \cdot a + R'_C \cos 30^\circ \cdot b - F \cos 30^\circ (a + c) = 0.$$

$$X_B = 0,61 \text{ кН}, \quad Y_B = 8,3 \text{ кН}, \quad R_C = 9,37 \text{ кН};$$

$$X_A = -8,15 \text{ кН}, \quad Y_A = 10,11 \text{ кН}, \quad M_A = 11,65 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

1.7

Балка AB . $Q_1 = 6$ кН.

$$T = P = 3 \text{ кН}.$$

$$X_A + R_B - T \cos 60^\circ + F = 0;$$

$$Y_A - Q_1 - T \cos 30^\circ = 0;$$

$$M_A - R_B(b + c) \cos 30^\circ + Q_1 \frac{a}{2} +$$

$$+ T \cos 30^\circ a + T \cos 60^\circ c \cos 30^\circ -$$

$$- F[c + (b + c) \cos 30^\circ] = 0.$$

Балка DB . $Q_2 = 3$ кН. $R'_B = R_B$.

$$X_D - R'_B - Q_2 \cos 30^\circ = 0, \quad Y_D - Q_2 \cos 60^\circ = 0, \quad M + R'_B(b + c) \cos 30^\circ + Q_2 \frac{c}{2} = 0.$$

$$X_A = -1,49 \text{ кН}, \quad Y_A = 8,6 \text{ кН}, \quad M_A = 8,86 \text{ кН} \cdot \text{м}, \quad R_B = -1,01 \text{ кН};$$

$$X_D = 1,59 \text{ кН}, \quad Y_D = 1,5 \text{ кН}.$$

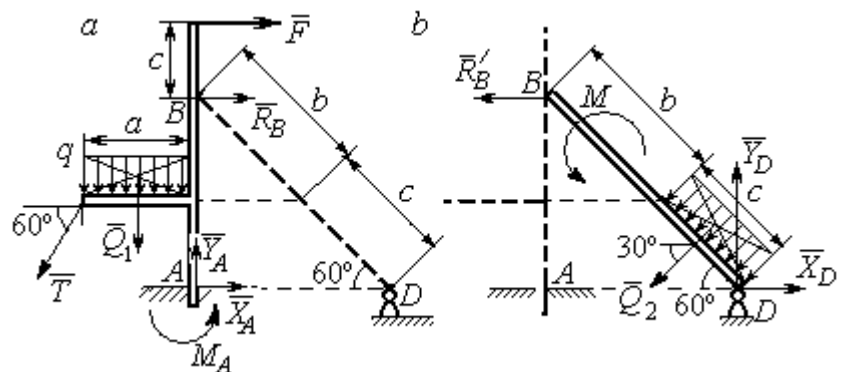


Рис. 7.7. Расчётные схемы к упражнению 1.7:
а – равновесие балки AB ; б – равновесие балки BD

1.8

Шар.

$$R_B \cos 60^\circ - R_D \cos 60^\circ = 0;$$

$$R_B \cos 30^\circ + R_D \cos 30^\circ - P = 0.$$

Балка AC. $R'_B = R_B$.

$$X_A - R'_B \cos 60^\circ = 0;$$

$$Y_A - R'_B \cos 30^\circ + F = 0;$$

$$M_A - R'_B AB + F \cdot AC \cos 30^\circ = 0.$$

$$X_A = 2,89 \text{ кН}, Y_A = 0 \text{ кН}, M_A = -11,55 \text{ кН} \cdot \text{м}, R_B = 5,77 \text{ кН}, R_D = 5,77 \text{ кН}.$$

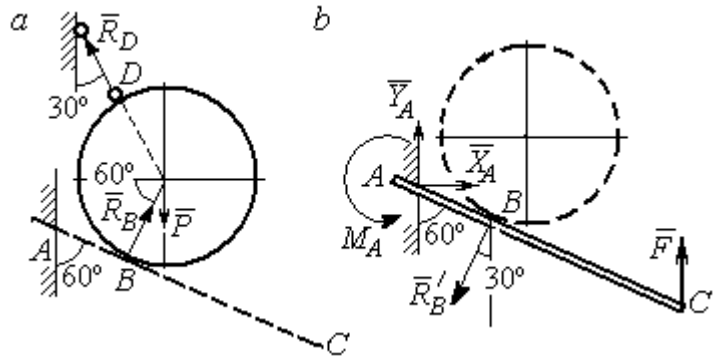


Рис. 7.8. Расчётные схемы к упражнению 1.8:
а – равновесие шара; б – равновесие балки AC

1.9

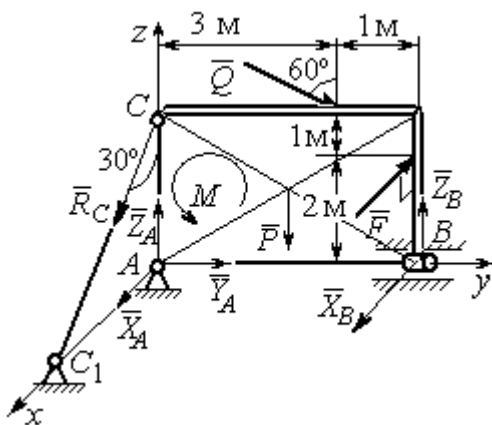


Рис. 7.9. Расчётная схема
к упражнению 1.9

$$X_A + R_C \cos 60^\circ + X_B - F = 0;$$

$$Y_A + Q \cos 30^\circ = 0;$$

$$Z_A - R_C \cos 30^\circ - Q \cos 60^\circ + Z_B - P = 0;$$

$$M - Q \cos 60^\circ \cdot 3 - Q \cos 30^\circ \cdot 3 + Z_B \cdot 4 - P \cdot 2 = 0;$$

$$R_C \cos 60^\circ \cdot 3 - F \cdot 2 = 0, -X_B \cdot 4 + F \cdot 4 = 0.$$

$$X_A = 5,34 \text{ кН}, Y_A = 2,6 \text{ кН};$$

$$Z_A = 8,92 \text{ кН}, R_C = 10,67 \text{ кН};$$

$$X_B = 8 \text{ кН}, Z_B = 3,82 \text{ кН}.$$

1.10

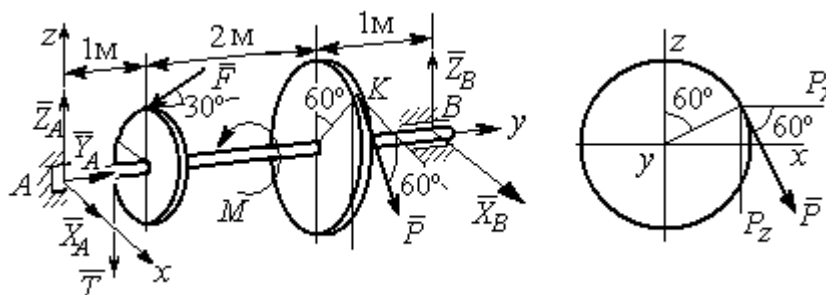


Рис. 7.10. Расчётные схемы к упражнению 1.10

$$T = Q = 3 \text{ кН.}$$

$$X_A + P\cos 60^\circ + X_B = 0, \quad Y_A - F\cos 30^\circ = 0;$$

$$Z_A - F\cos 60^\circ - P\cos 30^\circ - T + Z_B = 0.$$

$$-T \cdot 1 - F\cos 60^\circ \cdot 1 + F\cos 30^\circ \cdot r - P\cos 30^\circ \cdot 3 + Z_B \cdot 4 = 0;$$

$$-Tr + PR - M = 0, \quad -P\cos 60^\circ \cdot 3 + X_B \cdot 4 = 0.$$

$$X_A = 5,6 \text{ кН}, \quad Y_A = 3,46 \text{ кН}, \quad Z_A = 5,48 \text{ кН}, \quad P = 6,4 \text{ кН}, \quad X_B = 2,4 \text{ кН}, \quad Z_B = 5,06 \text{ кН}.$$

1.11

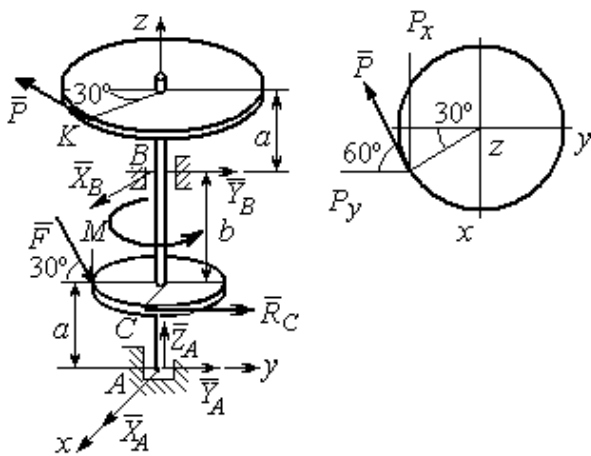


Рис. 7.11. Расчётные схемы к упражнению 1.11

$$R_C = Q = 3 \text{ кН.}$$

$$X_A + X_B - P\cos 30^\circ = 0;$$

$$Y_A + Y_B - P\cos 60^\circ + R_C + F\cos 30^\circ = 0;$$

$$Z_A - F\cos 60^\circ = 0;$$

$$-Y_B(a+b) + P\cos 60^\circ(2a+b) - R_C a -$$

$$F\cos 30^\circ \cdot a + F\cos 60^\circ \cdot r = 0;$$

$$X_B(a+b) - P\cos 30^\circ(2a+b) = 0;$$

$$-PR + R_C r + M = 0.$$

$$X_A = -1,85 \text{ кН}, \quad Y_A = -5,64 \text{ кН}, \quad Z_A = 2 \text{ кН}, \quad P = 6,4 \text{ кН}, \quad X_B = 7,39 \text{ кН}, \quad Y_B = 2,38 \text{ кН}.$$

1.12

$$T = Q = 3 \text{ кН.}$$

$$X_A + T + X_D = 0; \quad Y_A - F + P\cos 60^\circ = 0,$$

$$Z_A + Z_D + P\cos 30^\circ = 0;$$

$$F\sin 30^\circ + Z_D(b+2a) + P(2b+2a)\cos 30^\circ = 0;$$

$$T\sin 30^\circ - P\cos 30^\circ + M = 0;$$

$$-Ta - X_D(b+2a) + P\cos 60^\circ + F\cos 30^\circ = 0.$$

$$X_A = 0,8 \text{ кН}, \quad Y_A = 2,56 \text{ кН}, \quad Z_A = 1,3 \text{ кН};$$

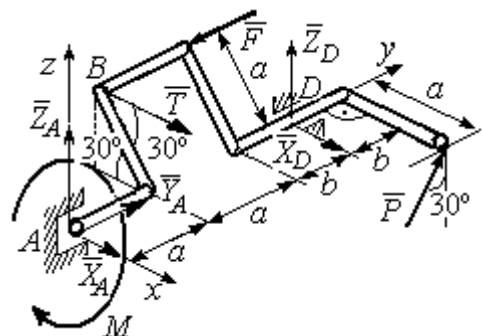


Рис. 7.12. Расчётная схема к упражнению 1.12

$$P = 2,89 \text{ кН}, X_D = 0,76 \text{ кН}, Z_D = -3,80 \text{ кН}.$$

1.13

Минимальный вес груза P :

$$T_{\min} + F_{\text{тр}A} - N_B = 0;$$

$$F_{\text{тр}B} + N_A - Q = 0;$$

$$F_{\text{тр}B} \cdot AB \sin 30^\circ + N_B \cdot AB \cos 30^\circ - Q \cdot AC \sin 30^\circ = 0$$

Максимальный вес груза P :

$$T_{\max} - F_{\text{тр}A} - N_B = 0;$$

$$-F_{\text{тр}B} + N_A - Q = 0;$$

$$-F_{\text{тр}B} \cdot AB \sin 30^\circ + N_B \cdot AB \cos 30^\circ - Q \cdot AC \sin 30^\circ = 0;$$

$$F_{\text{тр}A} = f N_A, F_{\text{тр}B} = f N_B.$$

$$T_{\min} = 31,77 \text{ Н} < P < T_{\max} = 130,51 \text{ Н}.$$

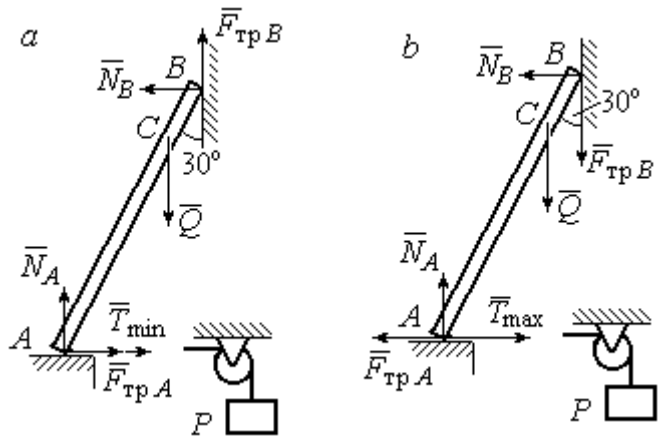


Рис. 7.13. Расчётные схемы к упражнению 1.13:
а – расчёт минимального веса груза;
б – расчёт максимального веса груза

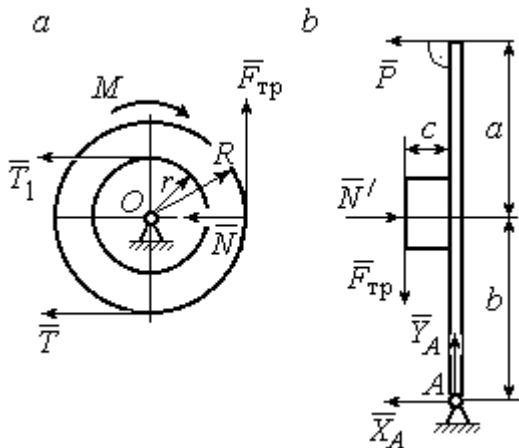


Рис. 7.14. Расчётные схемы
к упражнению 1.14:

а – равновесие шкива; б – равновесие рычага

1.14

Шкив. $T = T_1 = Q$.

$$T \cdot R - T_1 r + M - F_{\text{тр}} R = 0.$$

$$F_{\text{тр}} = 266,67 \text{ Н};$$

$$N = \frac{F_{\text{тр}}}{f} = 666,67 \text{ Н}.$$

Рычаг. $N = N' \cdot F_{\text{тр}} = F'_{\text{тр}} \cdot$

$$P(a + b) - N' \cdot b + F'_{\text{тр}} c = 0.$$

$$P = 320 \text{ Н}.$$

$$-X_A - P + N' = 0;$$

$$Y_A - F'_{\text{тр}} = 0.$$

$$X_A = 346,67 \text{ Н}, Y_A = 266,67 \text{ Н}.$$

7.2. Ответы к упражнениям главы 2

2.1

$$\omega_{1z} = \dot{\varphi}_1 = 3 + \pi \cos \frac{\pi t}{2}, \quad \omega_1(1) = |\omega_{1z}(1)| = 3 \text{ рад/с.}$$

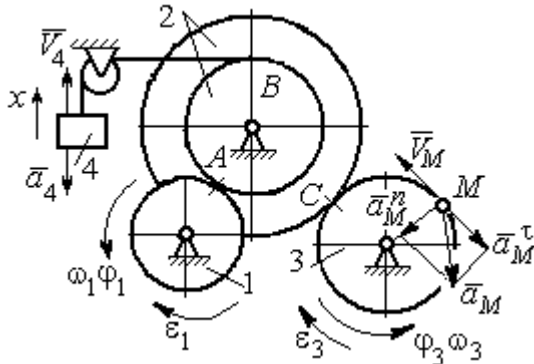


Рис. 7.15. Расчётная схема к упражнению 2.1

$$\omega_{3z} = \omega_{1z} \frac{R_1}{r_2} \frac{R_2}{R_3} = \left(3 + \pi \cos \frac{\pi t}{2} \right) \frac{4}{3};$$

$$\omega_3(1) = |\omega_{3z}(1)| = 4 \text{ рад/с.}$$

$$V_M(1) = \omega_3(1) R_3 = 40 \text{ см/с.}$$

$$\varepsilon_{3z} = \dot{\omega}_{3z} = -\frac{2\pi^2}{3} \sin \frac{\pi t}{2}, \quad \varepsilon_{3z}(1) = -\frac{2\pi^2}{3};$$

$$\varepsilon_3(1) = |\varepsilon_{3z}(1)| = \frac{2\pi^2}{3} = 6,58 \text{ рад/с}^2.$$

$$\bar{a}_M = \bar{a}_M^n + \bar{a}_M^\tau, \quad a_M^n(1) = \omega_3^2(1) R_3 = 160 \text{ см/с}^2, \quad a_M^\tau(1) = \varepsilon_3(1) R_3 = 65,8 \text{ см/с}^2.$$

$$a_M(1) = 173 \text{ см/с}^2.$$

$$V_{4x} = V_A = \omega_{1z} R_1 = \left(3 + \pi \cos \frac{\pi t}{2} \right) 8; \quad V_4(1) = |V_{4x}(1)| = 24 \text{ см/с.}$$

$$\dot{V}_{4x} = -4\pi^2 \sin \frac{\pi t}{2}, \quad \dot{V}_{4x}(1) = -4\pi^2; \quad a_4(1) = |\dot{V}_{4x}(1)| = 39,48 \text{ см/с}^2.$$

2.2

$$V_{4x} = \dot{x}_4 = 1 - \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi t}{3} - \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi t}{3};$$

$$V_{4x}(3) = 2,05 \text{ м/с}, \quad V_4 = |V_{4x}(3)|$$

$$\omega_{3z} = \frac{V_{4x}}{r_3} = \frac{1}{r_3} \left(1 - \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi t}{3} - \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi t}{3} \right);$$

$$\omega_{3z}(3) = 6,83 \text{ рад/с}; \quad \omega_3 = |\omega_{3z}(3)|.$$

$$\varepsilon_{3z} = \dot{\omega}_{3z} = \frac{1}{r_3} \left(\frac{\pi^2}{9} \sin \frac{\pi t}{3} - \frac{\pi^2}{9} \cos \frac{\pi t}{3} \right).$$

$$\varepsilon_{3z}(3) = 3,65 \text{ рад/с}^2; \quad \varepsilon_3 = |\varepsilon_{3z}(3)|.$$

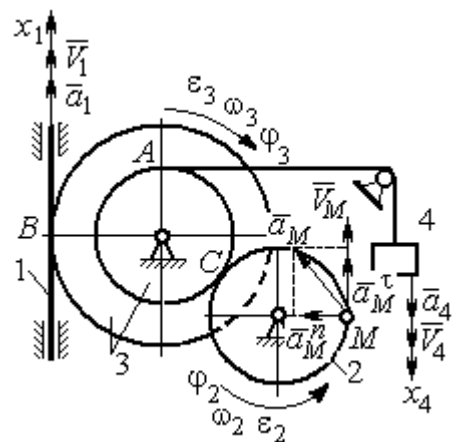


Рис. 7.16. Расчётная схема к упражнению 2.2

$$\frac{\omega_3}{\omega_2} = \frac{R_2}{r_3}; \quad \omega_2 = \omega_3 \frac{r_3}{R_2} = 10,25 \text{ рад/с}; \quad V_M = \omega_2 R_2 = 2,05 \text{ м/с}.$$

$$\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2} = \frac{R_2}{r_3}; \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_3 \frac{r_3}{R_2} = 5,47 \text{ рад/с}^2.$$

$$a_M^n = \omega_2^2 R_2 = 20,4 \text{ м/с}^2; \quad a_M^\tau = \varepsilon_2 R_2 = 1,09 \text{ м/с}^2.$$

$$a_M = \sqrt{(a_M^n)^2 + (a_M^\tau)^2} = 20,43 \text{ м/с}^2.$$

$$V_1 = \omega_3 R_3 = 2,73 \text{ м/с}; \quad a_1 = \dot{V}_1 = \dot{\omega}_3 R_3 = \varepsilon_3 R_3 = 2,19 \text{ м/с}^2.$$

2.3

$$BP_2 = BC \cos 30^\circ = 4,33 \text{ см}; \quad CP_2 = 2,5 \text{ см}.$$

$$\omega_{BC} = \frac{V_B}{BP_2} = 1,15 \text{ рад/с}; \quad V_C = \omega_{BC} CP_2 = 2,87 \text{ см/с};$$

$$\omega_1 = \frac{V_C}{CP_1} = 0,72 \text{ рад/с}; \quad EP_1 = 2R_1 \cos 30^\circ = 3,46 \text{ см};$$

$$V_E = \omega_1 EP_1 = 2,49 \text{ см/с}; \quad EP_3 = 2AE \cos 30^\circ = 10,39 \text{ см};$$

$$\omega_{AE} = \frac{V_E}{EP_3} = 0,24 \text{ рад/с}; \quad EA = AP_3;$$

$$V_A = \omega_{AE} AP_3 = 1,44 \text{ см/с}, \quad \omega_{AO} = \frac{V_A}{AO} = 0,24 \text{ рад/с}.$$

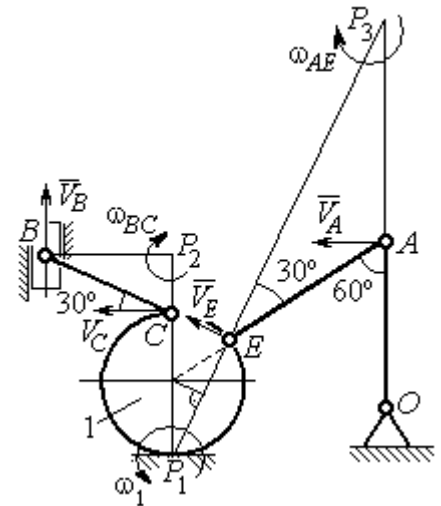


Рис. 7.17. Расчётная схема к упражнению 2.3

2.4

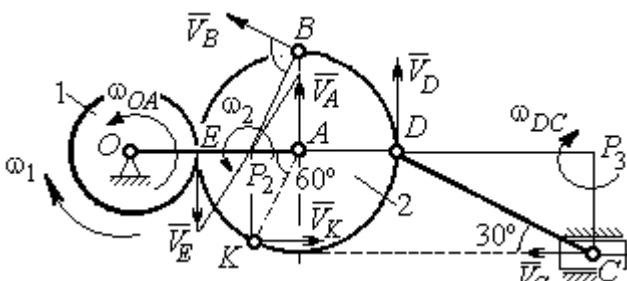


Рис. 7.18. Расчётная схема к упражнению 2.4

E – точка касания дисков.

$$V_E = \omega_1 r_1 = 18 \text{ см/с}.$$

$$V_A = \omega_{OA} (r_1 + r_2) = 18 \text{ см/с}.$$

$$EP_2 = P_2 A = 3 \text{ см}, \quad \omega_2 = \frac{V_E}{EP_2} = 6 \text{ рад/с}.$$

$$V_K = \omega_2 P_2 K = 31,18 \text{ см/с}.$$

$$V_B = \omega_2 P_2 B = 40,25 \text{ см/с}; \quad V_D = \omega_2 P_2 D = 54 \text{ см/с}.$$

$$DC = 2r_2, \omega_{DC} = \frac{V_D}{DP_3} = 5,197 \text{ рад/с}; V_C \cos 30^\circ = V_D \cos 60^\circ, V_C = 31,18 \text{ см/с}.$$

2.5

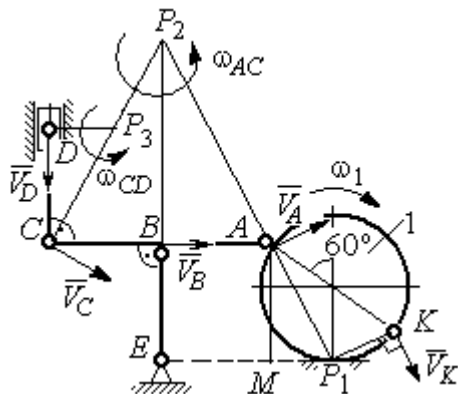


Рис. 7.19. Расчётная схема к упражнению 2.5.

$$BE = 1,5R_1; R_1 = 2,67 \text{ см}.$$

$$KP_1 = R_1; \omega_1 = \frac{V_K}{KP_1} = 0,75 \text{ рад/с}.$$

$$AP_1 = \frac{AM}{\cos 30^\circ} = 4,62 \text{ см}; V_A = \omega_1 P_1 A = 3,46 \text{ см/с}.$$

$$AP_2 = 2AB = 8 \text{ см}; \omega_{AC} = \frac{V_A}{AP_2} = 0,43 \text{ рад/с}.$$

$$V_B \cos 0^\circ = V_A \cos 30^\circ; V_B = 2,99 \text{ см/с}.$$

$$\omega_{BE} = \frac{V_B}{BE} = 0,75 \text{ рад/с}; V_C = V_A = 3,46 \text{ см/с}; CP_3 = \frac{DC}{\cos 30^\circ} = 4,62 \text{ см};$$

$$\omega_{CD} = \frac{V_C}{CP_3} = 0,75 \text{ рад/с}; V_D \cos 0^\circ = V_C \cos 60^\circ; V_D = 1,73 \text{ см/с}.$$

2.6

$$V_A = \omega_{OA} \cdot OA = 12 \text{ см/с}; \omega_{AD} = 0, V_D = V_A.$$

$$\omega_{O_1C} = \frac{V_D}{DO_1} = 3 \text{ рад/с};$$

$$V_C = \omega_{O_1C} \cdot O_1C = 48 \text{ см/с}.$$

$$CB = CP = 16 \text{ см}; \omega_{CB} = \omega_{CL} = \frac{V_C}{CP} = 3 \text{ рад/с}.$$

$$PL = \frac{CP}{\cos 30^\circ} = 18,48 \text{ см}; PB = 2BC \cos 30^\circ.$$

$$V_L = \omega_{CL} \cdot PL = 55,44 \text{ см/с};$$

$$V_B = \omega_{CB} \cdot PB = 83,13 \text{ см/с}.$$

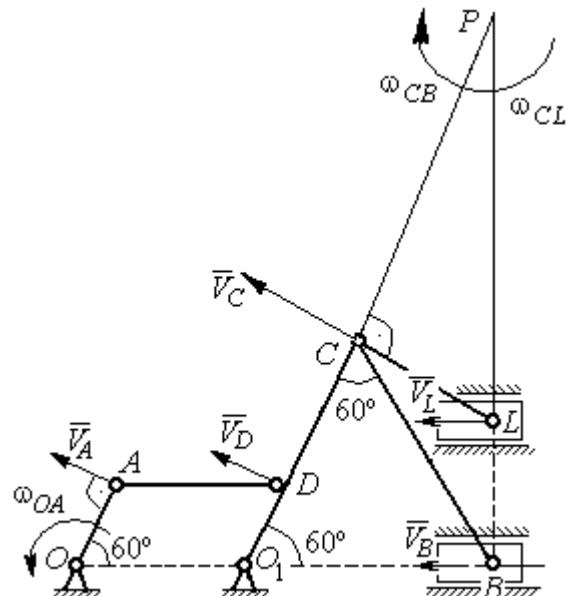


Рис. 7.20. Расчётная схема к упражнению 2.6.

2.7

$$V_D = \omega_1 R_1 = 30 \text{ cm/c}; \quad V_A = \omega_{OA} \cdot OA = 15 \text{ cm/c}.$$

$$\omega_2 = \frac{V_A}{AP_2} = 3 \text{ рад/с.}$$

$$V_B = \omega_2 \cdot P_2 B = 21,21 \text{ cm/c.}$$

$$V_C \cos 0^\circ = V_B \cos 45^\circ; V_C = 15 \text{ cm/c.}$$

$$CP_3 = CB; \omega_{BC} = \frac{V_C}{CP_3} = 1,87 \text{ рад/с.}$$

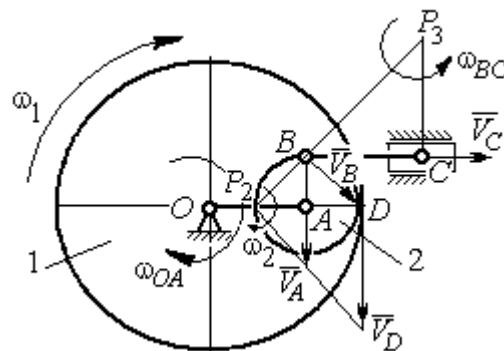


Рис. 7.21. Расчётная схема к упражнению 2.7

2.8

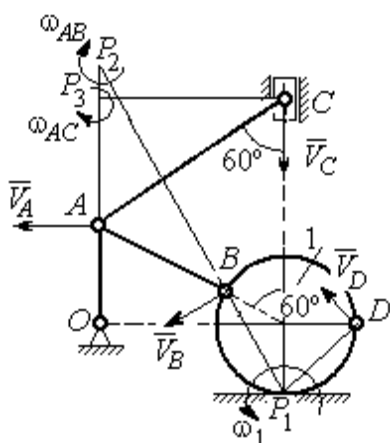


Рис. 7.22. Расчётная схема к упражнению 2.8

$$AC = AB + R_1 = 12 \text{ см}; CP_3 = AC \cos 30^\circ = 10,39 \text{ см}.$$

$$\omega_{AC} = \frac{V_C}{CP_3} = 0,48 \text{ рад/с}; V_A = \omega_{AC} \cdot AP_3 = 2,89 \text{ см/с}.$$

$$AB = AP_2; \quad \omega_{AB} = \frac{V_A}{AP_2} = 0,29 \text{ рад/с.}$$

$$BP_7 = 2AB\cos 30^\circ = 17,32 \text{ cm.}$$

$$V_B = \omega_{AB}BP_2 = 5,02 \text{ см/с.}$$

$$OA = (AB + R_1) \sin 30^\circ = 6 \text{ см}; \quad \omega_{OA} = \frac{V_A}{AO} = 0,48 \text{ рад/с}.$$

$$BP_1 = 2R_1 \cos 30^\circ = 3,46 \text{ см}; \quad \omega_1 = \frac{V_B}{BP_1} = 1,45 \text{ рад/с}.$$

$$DP_1 = R_1 \sqrt{2} = 2,82 \text{ см}; V_D = \omega_1 DP_1 = 4,09 \text{ см/с}.$$

2.9

$$V_A = \omega_{OA} OA = 12 \text{ cm/c}; \quad AP = 2AB = 2BC \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = 27,71 \text{ cm}.$$

$$\omega_{AB} = \frac{V_A}{AP} = 0,43 \text{ рад/с}; V_B \cos 0^\circ = V_A \cos 30^\circ; V_B = 10,38 \text{ см/с}.$$

$$\omega_{BC} = \frac{V_B}{BC} = 1,29 \text{ рад/с.}$$

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^\tau; \quad \bar{a}_B = \bar{a}_C + \bar{a}_{BC}^n + \bar{a}_{BC}^\tau, \quad a_C = 0.$$

$$\bar{a}_A = \bar{a}_O + \bar{a}_{AO}^n + \bar{a}_{AO}^\tau, a_O = 0.$$

$$\bar{a}_{BC}^n + \bar{a}_{BC}^\tau = \bar{a}_{AO}^n + \bar{a}_{AO}^\tau + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^\tau. \text{ Найти } a_{BC}^\tau$$

$$a_{AO}^n = \omega_{AO}^2 \cdot AO = 36 \text{ см/с}^2;$$

$$a_{AO}^\tau = \varepsilon_{AO} \cdot AO = 8 \text{ см/с}^2;$$

$$AB = BC \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = 13,86 \text{ см.}$$

$$a_{BA}^n = \omega_{AB}^2 \cdot AB = 2,56 \text{ см/с}^2; a_{AB}^\tau = \varepsilon_{AB} AB.$$

$$a_{BC}^n = \omega_{BC}^2 \cdot BC = 13,31 \text{ см/с}^2; a_{BC}^\tau = \varepsilon_{BC} BC.$$

Проекция на AB:

$$a_{BC}^\tau = -a_{AO}^n \cos 60^\circ + a_{AO}^\tau \cos 30^\circ - a_{BA}^n = 13,63 \text{ см/с}^2.$$

$$\varepsilon_{BC} = \frac{|a_{BC}^\tau|}{BC} = 1,7 \text{ рад/с}^2.$$

$$\bar{a}_D = \bar{a}_{DC}^n + \bar{a}_{DC}^\tau.$$

$$a_{DC}^n = \omega_{BC}^2 \cdot DC = 6,65 \text{ см/с}^2; a_{DC}^\tau = \varepsilon_{BC} \cdot DC = 6,8 \text{ см/с}^2.$$

$$a_D = \sqrt{(a_{DC}^n)^2 + (a_{DC}^\tau)^2} = 9,51 \text{ см/с}^2.$$

2.10

$$V_A = \omega_1 r_1 = 12 \text{ см/с}; P_2 A = \frac{1}{2} BC = 5 \text{ см.}$$

$$\omega_{AB} = \frac{V_A}{P_2 A} = 2,4 \text{ рад/с.}$$

$$V_B \cos 30^\circ = V_A \cos 60^\circ; V_B = 6,93 \text{ см/с.}$$

$$P_3 B = BC \cos 30^\circ = 8,66 \text{ см;}$$

$$\omega_{BC} = \frac{V_B}{P_3 B} = 0,8 \text{ рад/с.}$$

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^\tau. \text{ Найти } a_B.$$

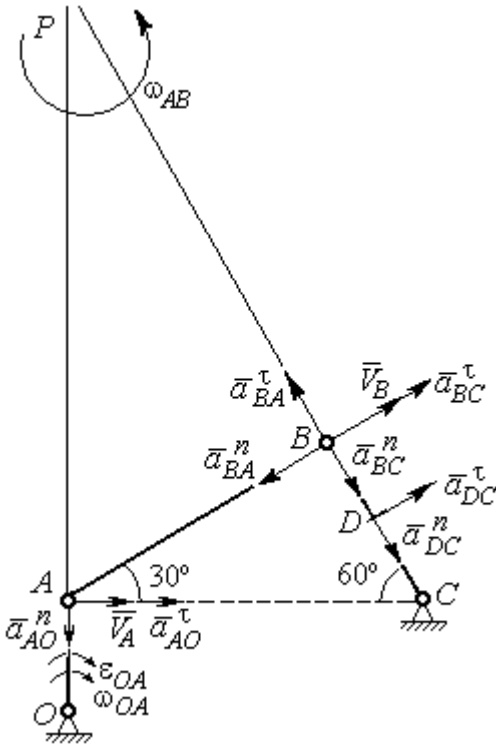


Рис. 7.23. Расчётная схема к упражнению 2.9

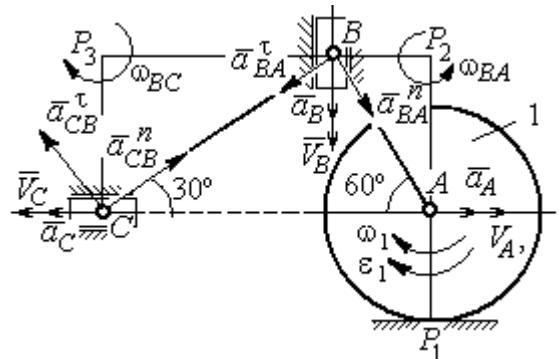


Рис. 7.24. Расчётная схема к упражнению 2.10

Проекция на BA : $a_B \cos 30^\circ = a_A \cos 60^\circ + a_{BA}^n$.

$$a_A = a_A^\tau = \varepsilon_1 r_1 = 8 \text{ cm/c}^2; AB = BC \operatorname{tg} 30^\circ = 5,77 \text{ cm.}$$

$$a_{BA}^n = \omega_{BA}^2 \cdot BA = 33,23 \text{ cm/c}^2; \quad a_B = 43,03 \text{ cm/c}^2.$$

$$\bar{a}_C = \bar{a}_B + \bar{a}_{CB}^n + \bar{a}_{CB}^\tau.$$

Проекция на BC : $a_C \cos 60^\circ = a_B \cos 60^\circ - a_{CB}^n$,

$$a_{CB}^n = \omega_{CB}^2 \cdot CB = 6,4 \text{ cm/c}^2; \quad a_C = a_B - 2a_{CB}^n = 30,23 \text{ cm/c}^2.$$

7.3. Ответы к упражнениям главы 3

3.1

$$CM_1 = S_r(1) = \frac{40}{3} \sin \frac{\pi}{3} = 11,55 \text{ cm.}$$

Так как $CM_1 \cos 30^\circ = 10 \text{ см} = R$, то точка M_1 лежит на вертикальном диаметре.

$$V_r = \dot{S}_r = \frac{40\pi}{9} \cos \frac{\pi t}{3}; \quad V_r(1) = 6,98 \text{ cm/c.}$$

$$\omega_e(1) = 0,5 \text{ рад/с}; OM_1 = R - \frac{1}{2}CM_1 = 4,23 \text{ см.}$$

$$V_\rho = \omega_\rho OM_1; \quad V_\rho(1) = 2,12 \text{ cm/c.}$$

$$\bar{V}_M = \bar{V}_e + \bar{V}_r.$$

$$V_{Mx} = V_e - V_r \cos 30^\circ = -3,93 \text{ m/c}; V_{My} = -V_r \cos 60^\circ = -3,49 \text{ m/c};$$

$$V_M = \sqrt{(V_{Mx})^2 + (V_{My})^2} = 5,26 \text{ cm/c.}$$

$$\bar{a}_M = \bar{a}_e + \bar{a}_r + \bar{a}_k.$$

$$\bar{a}_e = \bar{a}_e^n + \bar{a}_e^\tau, \quad a_e^n = \omega_e^2 OM_1; \quad a_e^n(1) = 1,06 \text{ cm/c}^2.$$

$$\dot{\omega}_e = -\frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi t}{3}, \quad \dot{\omega}_e(1) = -0,91 \text{ рад/с}^2; \quad \varepsilon_e = |\dot{\omega}_e(1)| = 0,91 \text{ рад/с}^2,$$

$$a_{\rho}^{\tau}(1)=\varepsilon_{\rho} \cdot OM_1 = 3,85 \text{ cm/c}^2.$$

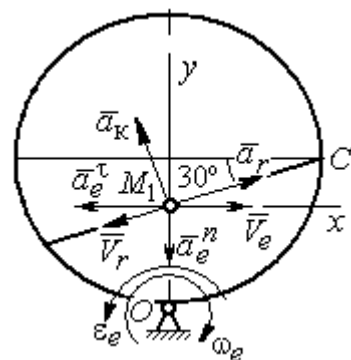


Рис. 7.25. Расчётная схема к упражнению 3.1

$$\dot{V}_r = -\frac{40\pi^2}{27} \sin \frac{\pi t}{3}, \quad \dot{V}_r(1) = -12,66; \quad a_r = |\dot{V}_r(1)| = 12,66 \text{ см/с}^2$$

$$a_k = 2|\omega_e| \cdot |V_r|; \quad a_k(1) = 6,98 \text{ см/с}^2.$$

$$\bar{a}_M = \bar{a}_e^n + \bar{a}_e^\tau + \bar{a}_r + \bar{a}_k.$$

$$a_{Mx} = -a_e^\tau + a_r \cos 30^\circ - a_k \cos 60^\circ = 3,62 \text{ см/с}^2;$$

$$a_{My} = -a_e^n + a_r \cos 60^\circ + a_k \cos 30^\circ = 11,31 \text{ см/с}^2.$$

$$a_M = \sqrt{(a_{Mx})^2 + (a_{My})^2} = 11,87 \text{ см/с}^2.$$

3.2

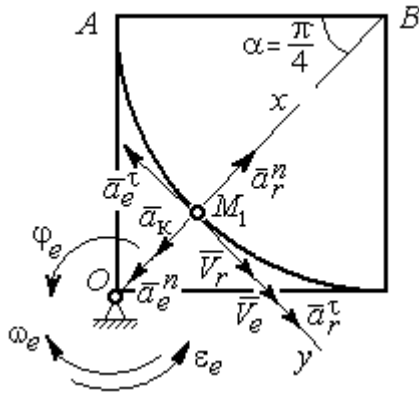


Рис. 7.26. Расчётная схема к упражнению 3.2

Положение M_1 :

$$\alpha = \frac{S_r(1)}{R} = \frac{\pi}{4}; \quad OM_1 = 8,28 \text{ см.}$$

$$\dot{S}_r = 10\pi t; \quad V_r = |\dot{S}_r(1)| = 31,42 \text{ см/с.}$$

$$\dot{\phi}_e = 2t - 5,$$

$$\dot{\phi}_e(1) = -3 \text{ рад/с}, \quad \omega_e = |\dot{\phi}_e(1)| = 3 \text{ рад/с.}$$

$$V_e = \omega_e \cdot OM_1 = 24,6 \text{ см/с.}$$

$$\bar{V}_M = \bar{V}_e + \bar{V}_r \cdot V_{Mx} = V_e + V_r = 56,02 \text{ см/с};$$

$$V_{My} = 0; \quad V_M = 56,02 \text{ см/с.}$$

$$\bar{a}_M = \bar{a}_e + \bar{a}_r + \bar{a}_k = \bar{a}_e^n + \bar{a}_e^\tau + \bar{a}_r^n + \bar{a}_r^\tau + \bar{a}_k.$$

$$\bar{a}_e = \bar{a}_e^n + \bar{a}_e^\tau \cdot a_e^n = \omega_e^2 \cdot OM_1 = 74,52 \text{ см/с}^2;$$

$$\dot{\omega}_e = 2 \text{ рад/с}^2; \quad \epsilon_e = |\dot{\omega}_e|; \quad a_e^\tau(1) = \epsilon_e OM_1 = 16,56 \text{ см/с}^2;$$

$$\bar{a}_r = \bar{a}_r^n + \bar{a}_r^\tau \cdot \dot{V}_r = 10\pi; \quad a_r^\tau = |\dot{V}_r| = 10\pi = 31,42 \text{ см/с}^2;$$

$$a_r^n(1) = \frac{V_r^2}{R} = 49,36 \text{ см/с}^2; \quad a_k = 2|\omega_e| \cdot |V_r|; \quad a_k(1) = 62,84 \text{ см/с}^2.$$

$$a_{Mx} = -a_e^n + a_r^n - a_k = -88 \text{ см/с}^2; \quad a_{My} = -a_e^\tau + a_r^\tau = 14,86 \text{ см/с}^2.$$

$$a_M = \sqrt{(a_{Mx})^2 + (a_{My})^2} = 89,24 \text{ см/с}^2.$$

7.4. Ответы к упражнениям главы 4

4.1

$$m\ddot{x} = F - P\cos 60^\circ - F_{\text{тр}}, \quad m\ddot{y} = N - P\cos 30^\circ = 0.$$

$$F_{\text{тр}} = fN = fmg\cos 30^\circ;$$

$$\ddot{x} = \frac{1}{2}kt - 3,4, \quad \dot{x} = \frac{1}{4}kt^2 - 3,4t + V_0;$$

$$x = \frac{1}{12}kt^3 - 1,7t^2 + V_0t.$$

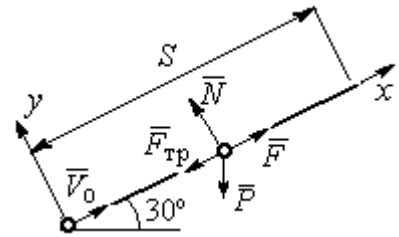


Рис. 7.27. Расчётная схема к упражнению 4.1

Конечные условия: $t = 2$ с; $x = S = 2$ м; $V = 2V_0$.

$$V_0 = k - 6,8; \quad 1 = \frac{1}{3}k - 3,4 + V_0.$$

$$k = 8,4; \quad V_0 = 1,6 \text{ м/с}.$$

4.2

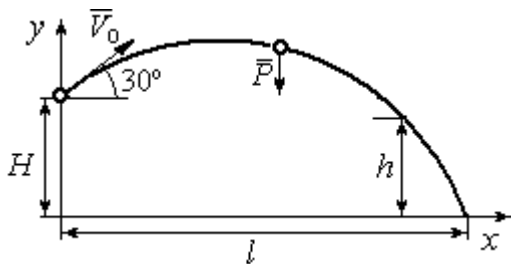


Рис. 7.28. Расчётная схема к упражнению 4.2

Уравнения движения точки:

$$m\ddot{x} = 0; \quad \dot{x} = V_0\cos 30^\circ; \quad x = V_0t\cos 30^\circ.$$

$$m\ddot{y} = -P; \quad \dot{y} = -gt + V_0\cos 60^\circ;$$

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + V_0t\cos 60^\circ + H.$$

Краевое условие пролёта высоты h :

$$t = 1 \text{ с}; \quad y = h = 7 \text{ м}.$$

Подставляя краевые условия в уравнение движения, находим: $V_0 = 3,81$ м/с.

Краевое условие падения точки:

$$t = t_{\text{пад}}; \quad x = l; \quad y = 0.$$

Подстановка в уравнения движения условия приводит к системе:

$$l = V_0t_{\text{пад}}\cos 30^\circ; \quad 0 = -\frac{1}{2}gt_{\text{пад}}^2 + V_0t_{\text{пад}}\cos 60^\circ + H.$$

$$\text{Находим: } t_{\text{пад}} = 1,64 \text{ с}; \quad l = 5,41 \text{ м}.$$

4.3

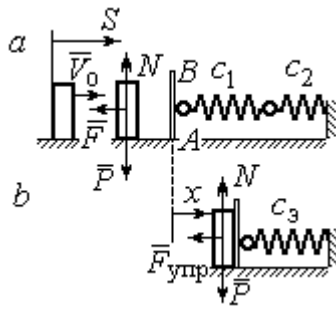


Рис. 7.29. Расчётная схема к упражнению 4.3:
а – движение груза до начала колебаний; б – колебания груза

Уравнение движения груза (рис. 7.29, а):

$$m\ddot{S} = -F = -k\dot{S}.$$

Начальные условия: $t = 0$; $S = 0$; $\dot{S} = V_0$.

Решение:
$$S = \frac{mV_0}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t} \right) = 6(1 - e^{-t}) \text{ м.}$$

Скорость груза: $\dot{S} = 6e^{-t}$.

Скорость груза в момент соединения с площадкой AB: $V_1 = \dot{S}(1) = 0,21 \text{ м/с.}$

Уравнение колебаний груза на эквивалентной пружине (рис. 7.29, б):

$$m\ddot{x} = -F_{\text{упр}} = -c_3 x; \quad c_3 = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2} = 30 \text{ Н/м.}$$

Начальные условия движения: $t = 0$; $x = 0$; $\dot{x} = V_1$.

Общий вид решения: $x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$; $\omega = \sqrt{\frac{c_3}{m}} = 7,75 \text{ рад/с,}$

где константы: $C_1 = 0$; $C_2 = \frac{V_1}{\omega} = 0,28 \text{ м.}$ Закон движения груза $x = 0,28 \sin 7,75 t$.

Максимальное сжатие 0,28 м.

4.4

Жесткость эквивалентной пружины

$$c_3 = \frac{c \cdot 2c}{c + 2c} = \frac{2}{3}c.$$

Уравнение колебаний:

$$m\ddot{x} = P - F_{\text{упр}} = P - c_3(\lambda_{\text{ст}} + x) = -c_3 x.$$

Общее решение:

$$x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t; \quad \omega = \sqrt{\frac{c_3}{m}} = 10,33 \text{ рад/с.}$$

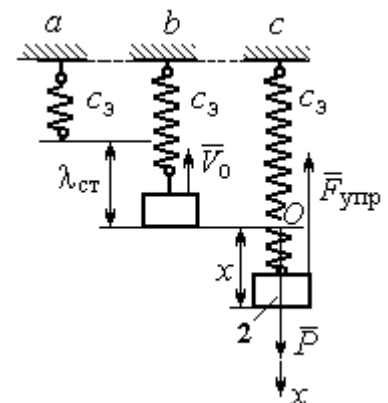


Рис. 7.30. Расчётная схема к упражнению 4.4:
а – нерастянутая пружина;
б – положение статического равновесия; с – произвольное положение груза

Начальные условия: $t = 0$; $x = 0$; $\dot{x} = -V_0$.

Находим константы интегрирования: $C_1 = 0$; $C_2 = \frac{V_0}{\omega} = 0,39$ м.

Закон движения груза: $x = 0,39 \sin 10,33 t$.

Амплитуда $A = 0,39$ м, частота $\omega = 10,33$ рад/с.

4.5

Скорость человека, находящегося в самолёте, в нижней точке траектории (точка C):

$$\frac{mV_C^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = mg[l \sin \varphi + r(1 - \cos \varphi)].$$

Откуда $V_C^2 = V_0^2 + 2g[l \sin \varphi + r(1 - \cos \varphi)]$.

Уравнение движения человека,двигающегося

вместе с самолётом, в проекции на нормаль в точке C: $\frac{mV_C^2}{r} = N - P$, где N – реакция корпуса самолёта. Сила давления человека на корпус самолёта по величине равна реакции, но направлена в противоположную сторону.

Из условия $N \leq 3P$ следует неравенство: $V_C^2 \leq 2gr$, или

$$V_0^2 + 2g[l \sin \varphi + r(1 - \cos \varphi)] \leq 2gr. \text{ Откуда } r \geq \frac{V_0^2 + 2gl \sin \varphi}{2g \cos \varphi}.$$

4.6

Из уравнения теоремы об изменении кинетической энергии шарика в точке B с учётом, что $V_A = 0$, найдём:

$$\frac{mV_B^2}{2} = \frac{ca^2}{2} + mg[R + R \cos 60^\circ - a \cos 30^\circ].$$

Составим уравнение теоремы об изменении кинетической энергии точки на участке BD:

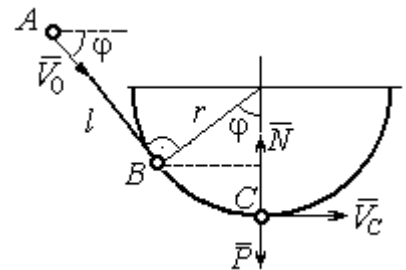


Рис. 7.31. Расчётная схема к упражнению 4.5

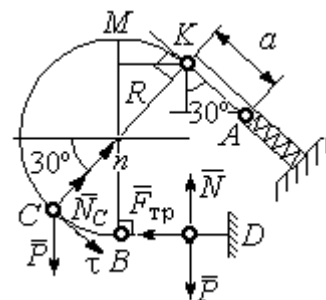


Рис. 7.32. Расчётная схема к упражнению 4.6

$-\frac{mV_B^2}{2} = -fNs$, где s – путь точки до остановки. С учётом данных задачи, получим: $s = 5,39$ м.

Уравнение движения шарика в проекции на нормальную ось в точке C

$$\frac{mV_C^2}{R} = N_C - P\cos 60^\circ.$$

Для вычисления реакции опоры шарика на трубу имеем равенство

$$N_C = \frac{mV_C^2}{R} + P\cos 60^\circ = \frac{1}{R} \left[mV_B^2 - 2mgR(1 - \cos 60^\circ) \right] + mg\cos 60^\circ, \text{ где кинетическая}$$

энергия шарика в точке B : $mV_B^2 = ca^2 + 2mgR \left[(1 + \cos 60^\circ) - \frac{a}{R} \cos 30^\circ \right]$. Получим:

$N_C = 18,71$ Н. Давление шарика на трубку равно реакции опоры и направлено в противоположную сторону.

7.5. Ответы к упражнениям главы 5

5.1

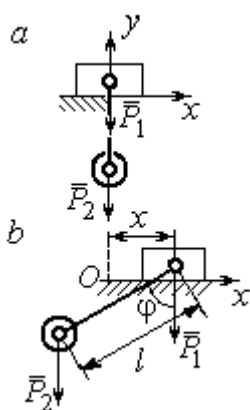


Рис. 7.33. Расчётная схема к упражнению 5.1:

a – начальное положение системы;
 b – произвольное положение

x_0 – координата центра тяжести системы в начальном положении, $x_0 = 0$ (см. рис.7.33);
 x – текущая координата центра тележки; x_1 – координата центра тяжести системы в её произвольном положении: $x_1 = \frac{m_1x - m_2(l\sin\varphi - x)}{m_1 + m_2}$.

Уравнение закона сохранения движения центра масс системы: $x_1 = x_0$, или

$$m_1x - m_2(l\sin\varphi - x) = 0.$$

Отсюда зависимость координаты движения тележки от положения гру-

за 2:
$$x = \frac{m_2l}{m_1 + m_2} \sin\varphi.$$

5.2

Теорема об изменении кинетического момента системы относительно

оси z : $\frac{dL_z}{dt} = \sum M_z(\vec{F}_k^e)$.

Кинетический момент системы:

$$L_z = L_z^{\text{бар}} + L_z^{\text{гр}} = \frac{m_2 r^2}{2} \omega + m_1 V_1 r = \left(m_1 + \frac{m_2}{2} \right) \omega r^2.$$

Суммарный момент внешних сил относительно

оси z : $\sum M_z(\vec{F}_k^e) = M_{\text{вр}} - P_1 r = kt - m_1 gr$.

Дифференциальное уравнение вращения барабана:

$$\left(m_1 + \frac{m_2}{2} \right) r^2 \frac{d\omega}{dt} = kt - m_1 gr.$$

При нулевых начальных условиях $\omega = \frac{kt^2 - 2m_1 grt}{(2m_1 + m_2)r^2}$.

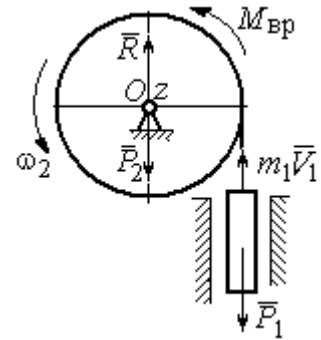


Рис. 7.34. Расчётная схема к упражнению 5.2

5.3

Уравнение теоремы об изменении кинетической энергии для неизменяемых систем на конечном перемещении: $T - T_0 = \sum A(F_k)$, $T_0 = 0$.

Кинетическая энергия груза 1: $T_1 = \frac{m_1 V_1^2}{2}$.

Энергия вращательного движения блока 2:

$$T_2 = \frac{1}{2} J_O \omega_2^2, \text{ где осевой момент инерции блока:}$$

$$J_O = \frac{m_2 r^2}{2}, \text{ угловая скорость блока } \omega_2 = \frac{V_1}{r}. \text{ Кинетическая энергия катка 3:}$$

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 V_C^2 + \frac{1}{2} J_C \omega_3^2, \text{ где момент инерции катка относительно оси, проходя-$$

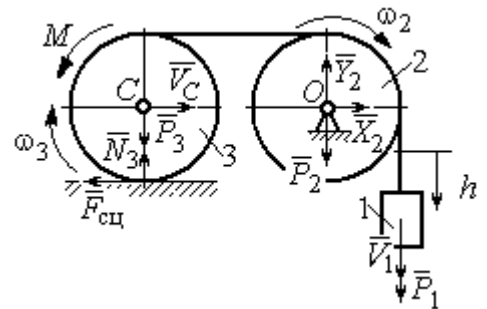


Рис. 7.35. Расчётная схема к упражнению 5.3

щей через центр масс перпендикулярно плоскости диска, $J_C = \frac{m_3 r^2}{2}$, угловая

скорость катка и скорость его центра масс $\omega_3 = \frac{V_1}{2r}$, $V_C = \frac{V_1}{2}$.

Энергия системы: $T = T_1 + T_2 + T_3 = (8m_1 + 4m_2 + 3m_3) \frac{V_1^2}{16}$.

Суммарная работа внешних сил на перемещении h : $\sum A(F_k) = P_1 h - M \frac{h}{2r}$.

Уравнение теоремы об изменении кинетической энергии:

$$(8m_1 + 4m_2 + 3m_3) \frac{V_1^2}{16} = \left(m_1 g - \frac{M}{2r} \right) h.$$

$$\text{Скорость груза на высоте } h: V_1 = 4 \sqrt{\frac{\left(m_1 g - \frac{M}{2r} \right) h}{8m_1 + 4m_2 + 3m_3}}.$$

5.4

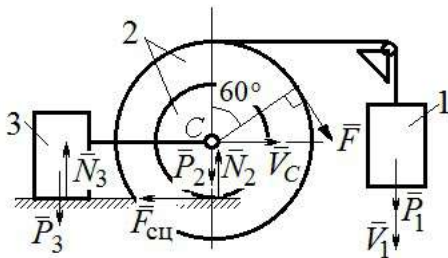


Рис. 7.36. Расчётная схема к упражнению 5.4

Для решения задачи используется теорема об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме: $\frac{dT}{dt} = \sum N(\vec{F}_k^e)$, где T – энергия системы в её текущем положении; $\sum N(\vec{F}_k^e)$ – суммарная мощность внешних сил.

Допустим, груз 1 движется вниз со скоростью V_1 . Скорость центра масс катка V_C .

Кинетическая энергия катка 2: $T_2 = \frac{1}{2} m_2 V_C^2 + \frac{1}{2} J_{zC} \omega_2^2$. Здесь $m_2 = \frac{2P}{g}$,

$J_{zC} = m_2 i_z^2$, $\omega_2 = \frac{V_C}{r}$. В результате кинетическая энергия катка $T_2 = \frac{3P}{g} V_C^2$.

Скорость груза 3 $V_3 = V_C$. Кинетическая энергия груза 3 $T_3 = \frac{P}{g} V_C^2$.

Скорость груза 1 $V_1 = \omega_2 3r = 3V_C$. Кинетическая энергия груза 1:

$$T_1 = \frac{9P}{2g} V_C^2.$$

Суммарная кинетическая энергия (энергия системы):

$$T = T_1 + T_2 + T_3 = \frac{17P}{2g} V_C^2. \text{ Производная } \frac{dT}{dt} = \frac{17P}{g} V_C \frac{dV_C}{dt} = \frac{17}{g} V_C a_C.$$

Мощности сил $\vec{P}_2, \vec{N}_2, \vec{F}_{\text{сц}}, \vec{P}_3, \vec{N}_3$ равны нулю.

Мощность силы $\vec{F}$, приложенной к колесу, определяется по формуле:

$$N(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{V}_C + \vec{M}_C(\vec{F}) \cdot \vec{\omega}_2 = FV_C \cos 60^\circ + FR\omega_2. \quad \text{Мощность силы } \vec{P}_1$$

$$N(\vec{P}_1) = P_1 V_1. \text{ Суммарная мощность внешних сил: } \sum N(F^e) = 7PV_C.$$

Составляем уравнение теоремы об изменении кинетической энергии си-

$$\text{стемы: } \frac{17P}{g} V_C a_C = 7PV_C, \text{ откуда } a_C = \frac{7}{17} g \text{ м/с}^2.$$

5.5

Рассмотрим движение катков отдельно, заменив невесомый стержень реакцией. Предположим, катки движутся направо (см. рис. 7.37). Уравнения движения катков:

$$m_1 a_O = Q - F_{\text{сц}1}, \quad J_{1O} \varepsilon_1 = F_{\text{сц}1} r - M;$$

$$m_2 a_C = -Q' - F_{\text{сц}2} + F \cos 30^\circ;$$

$$J_{2C} \varepsilon_2 = F_{\text{сц}2} 3r - Q' r.$$

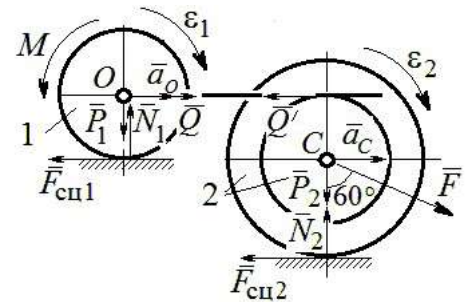


Рис. 7.37. Расчётная схема к упражнению 5.5

Здесь $\vec{Q}$ – реакция невесомого стержня, $|\vec{Q}| = |\vec{Q}'|$; $\vec{F}_{\text{сц}1}, \vec{F}_{\text{сц}2}$ – силы сцепления

катков с поверхностями качения; моменты инерции катков $J_{1O} = \frac{m_1 r^2}{2}$,

$$J_{2C} = m_2 i_2^2. \text{ Подставляя кинематические соотношения } \varepsilon_2 = \frac{a_C}{3r}; \quad a_O = \frac{4}{3} a_C;$$

$$\varepsilon_1 = \frac{4a_C}{3r}, \text{ с учётом данных задачи, получим систему уравнений:}$$

$$\frac{4P}{3g}a_C = Q - F_{\text{сц1}}; \quad \frac{2P}{3g}a_C = F_{\text{сц1}} - 4P;$$

$$\frac{2P}{g}a_C = -Q - F_{\text{сц2}} + P\sqrt{3}; \quad \frac{4P}{3g}a_C = 3F_{\text{сц2}} - Q.$$

Находим ускорение центра катка 2: $a_C = \frac{3(3\sqrt{3}-16)g}{46} \approx -0,7g$. Каток

движется в противоположную сторону. Реакция стержня $Q = 2,6P$.

5.6

Выделяем звенья механизма, заменяя действия нитей их реакциями. До-

пустим, направления движений тел в системе соответствуют подъёму груза 1.

Уравнения движения тел:

$$m_3 a_3 = F - Q_3, \quad m_2 a_C = Q'_3 + Q_2 - P_2 - Q_1;$$

$$J_{2C} \varepsilon_2 = Q'_3 r - Q_2 r, \quad m_1 a_1 = Q'_1 - P_1.$$

С учётом, что $|\vec{Q}_3| = |\vec{Q}'_3|$, $|\vec{Q}_1| = |\vec{Q}'_1|$ и

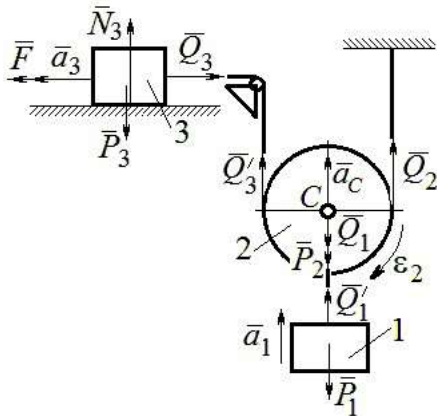


Рис. 7.38. Расчётная схема к упражнению 5.6

$$a_C = a_1, \quad a_3 = 2a_1, \quad \varepsilon_2 = \frac{a_1}{r}, \quad J_{2C} = \frac{m_2 r^2}{2}, \quad \text{под-}$$

ставляя данные задачи, получим систему уравнений:

$$2ma_1 = 2,5mg - Q_3; \quad ma_1 = Q_3 + Q_2 - mg - Q_1;$$

$$\frac{ma_1}{2} = Q_3 - Q_2; \quad m_1 a_1 = Q_1 - P_1.$$

Решая систему, находим: $a_1 = \frac{2}{17}g \approx 0,12g$; $Q_3 = 2,26mg$; $Q_2 = 2,15mg$.

5.7

Заменяем действия нитей реакциями.

Предположим, груз 1 спускается по наклонной плоскости. Уравнения движения тел:

$$m_1 a_1 = P_1 \cos 30^\circ - Q_1; \quad m_3 a_3 = Q_3;$$

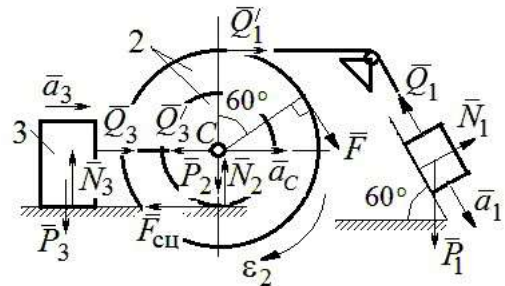


Рис. 7.39. Расчётная схема к упражнению 5.7

$$m_2 a_C = Q'_1 - Q'_3 - F_{\text{сц}} + F \cos 60^\circ; J_{2C} \varepsilon_2 = Q'_1 R + FR + F_{\text{сц}} r, J_{2C} = m_2 i_2^2.$$

Соотношения ускорений: $\varepsilon_2 = \frac{a_1}{R+r}$, $a_C = \frac{a_1 r}{R+r}$, $a_3 = a_C$. Подставляя

данные задачи, с учётом, что модули сил $Q'_1 = Q_1$ и $Q'_3 = Q_3$, получим систему уравнений:

$$ma_1 = mg \frac{\sqrt{3}}{2} - Q_1; \quad \frac{2}{3} ma_1 = Q_3;$$

$$ma_1 = Q_1 - Q_3 - F_{\text{сц}} + \frac{1}{2} mg; \quad 3ma_1 = 2Q_1 + 2mg + F_{\text{сц}}.$$

Находим $a_1 = \frac{3}{46} (5 + 3\sqrt{3})g \approx 0,44g$; $Q_1 = 0,21mg$; $Q_3 = 0,44mg$.

7.6. Ответы к упражнениям главы 6

6.1

Внешние силы, действующие на систему: силы тяжести — $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$ и реакции опор $\vec{N}_3$, $\vec{R}_3$. Приложим к телам системы, силы инерции $\vec{R}_1^{\text{ин}}$, $\vec{R}_2^{\text{ин}}$ (рис. 7.40, а). В соответствии с принципом Даламбера, полученная система сил находится в равновесии. Составляем условие равновесия системы сил в проекциях на горизонтальную и вертикальную оси:

$$R_3 - R_1^{\text{ин}} = 0, \quad N_3 - P_3 - P_1 - P_2 + R_2^{\text{ин}} = 0.$$

Для вычисления сил инерции рассмотрим отдельно грузы 1 и 2, заменяя действие соединяющей их нити реакцией (рис. 7.40, б, в). Присоединим к грузам силы инерции и, применив принцип Даламбера, составим уравнения равновесия систем сил — для груза 1 в проекции на горизонтальную ось, для груза 2 — на вертикальную:

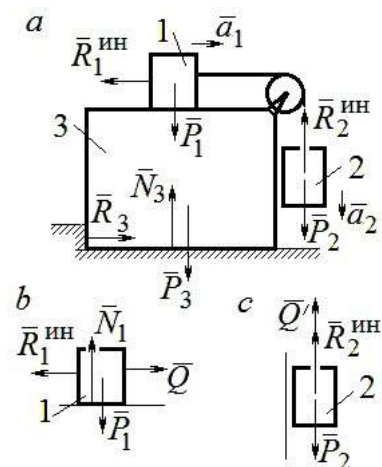


Рис. 7.40. Расчётная схема к упражнению 6.1

$$Q - R_1^{\text{ин}} = 0; P_2 - Q' - R_2^{\text{ин}} = 0,$$

где $R_1^{\text{ин}} = m_1 a_1$, $R_2^{\text{ин}} = m_2 a_2$.

Решая полученную систему с учётом равенства модулей сил $Q = Q'$ и ускорений грузов $a_1 = a_2$, находим ускорение грузов: $a_1 = a_2 = 0,5g$. Тогда давление призмы на горизонтальную поверхность: $N_3 = 2,5mg$.

6.2

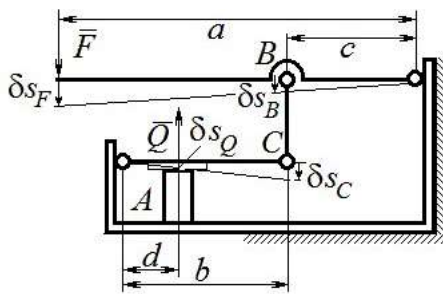


Рис. 7.41. Расчётная схема к упражнению 6.2

Активными силами в системе являются силы $\vec{F}$ и $\vec{Q}$. Для равновесия системы необходимо и достаточно выполнения условия: $\delta A(\vec{F}) + \delta A(\vec{Q}) = 0$ или $F\delta s_F - Q\delta s_Q = 0$, где δs_F и δs_Q – возможные перемещения точек приложения сил $\vec{F}$ и $\vec{Q}$.

Имеем соотношения: $\frac{\delta s_F}{\delta s_B} = \frac{a}{c}$, $\frac{\delta s_C}{\delta s_Q} = \frac{b}{d}$, где δs_B и δs_C – возможные перемещения точек B и C, причём $\delta s_B = \delta s_C$. Тогда $\delta s_Q = \frac{cd}{ab}\delta s_F$ и сила, сжимающая деталь A под прессом, равна $Q = \frac{ab}{cd}F$.

6.3

Активными силами, совершающими работу при движении системы, являются силы тяжести $\vec{P}_3$, $\vec{P}_4$ и пары сил с моментами M_1 и M_2 . Связи идеальные.

Для равновесия системы необходимо и достаточно выполнения условия:

$$\delta A(\vec{P}_3) + \delta A(\vec{P}_4) + \delta A(M_1) + \delta A(M_2) = 0 \text{ или}$$

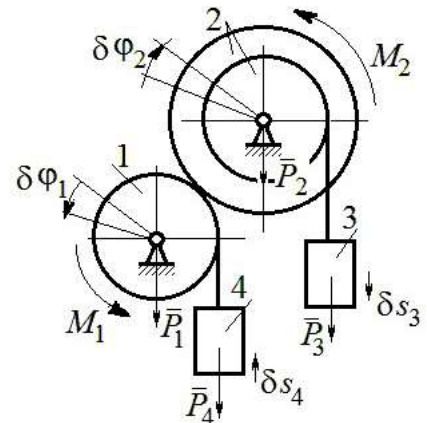


Рис. 7.42. Расчётная схема к упражнению 6.3

$$P_3 \delta s_3 - P_4 \delta s_4 + M_1 \delta \varphi_1 - M_2 \delta \varphi_2 = 0,$$

где $\delta s_3, \delta s_4$ – элементарные перемещения грузов 3, 4; $\delta \varphi_1, \delta \varphi_2$ – элементарные повороты валов 1 и 2. Выразим все перемещения через угол поворота вала 2: $\delta s_3 = \delta \varphi_2 r$, $\delta \varphi_1 = 3 \delta \varphi_2$, $\delta s_4 = 3r \delta \varphi_2$ и подставим в уравнение равновесия. Получим: $M_2 = 4Pr$.

6.4

Система с идеальными связями. Активными силами являются силы тяжести $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3$ и пара сил с моментом $M_{вр}$ (рис. 7.43).

Направления поворотов дисков и их угловые ускорения показаны на рис. 7.43 дуговыми стрелками $\delta \varphi_1, \varepsilon_1$ и $\delta \varphi_2, \varepsilon_2$. Направления движения центра масс катка 2, груза 3 и их ускорения обозначены: $\delta s_C, a_C$ и $\delta s_3, a_3$.

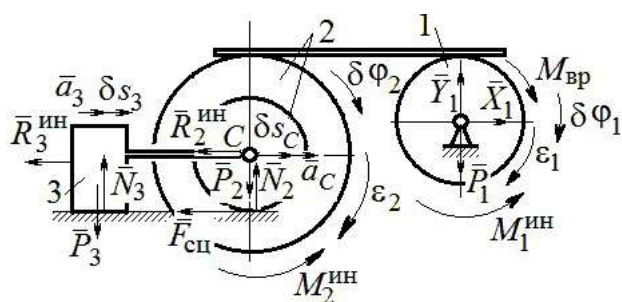


Рис. 7.43. Расчётная схема к упражнению 6.4

Кинематические соотношения между перемещениями и ускорениями:

$$\delta s_C = \delta s_3, \quad a_C = a_3, \quad \delta \varphi_2 = \frac{\delta s_3}{r}, \quad \varepsilon_2 = \frac{a_3}{r}, \quad \delta \varphi_1 = \frac{3\delta s_3}{r}, \quad \varepsilon_1 = \frac{3a_3}{r}.$$

Присоединим к телам системы силы инерции.

Модули главных векторов сил инерции: $R_3^{ин} = m_3 a_3 = m a_3$;

$$R_2^{ин} = m_2 a_C = 2m a_3; \quad M_2^{ин} = m_2 i_2^2 \varepsilon_2 = 4,5 m r a_3; \quad M_1^{ин} = \frac{m_1 R_1^2}{2} \varepsilon_1 = 1,5 m r a_3.$$

Элементарные работы активных сил:

$$\sum \delta A(\vec{F}_k^{акт}) = M_{вр} \delta \varphi_1 = (m g \sin \omega t) 3 \delta s_3.$$

Элементарные работы сил инерции:

$$\begin{aligned} \sum \delta A(\vec{R}_k^{ин}) &= -R_3^{ин} \delta s_3 - R_2^{ин} \delta s_C - M_2^{ин} \delta \varphi_2 - M_1^{ин} \delta \varphi_1 = \\ &= -m a_3 \delta s_3 - 2m a_3 \delta s_3 - 4,5 m a_3 \delta s_3 - 1,5 m a_3 3 \delta s_3 = -12 m a_3 \delta s_3. \end{aligned}$$

Общее уравнение динамики имеет вид:

$$\sum \delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}}) + \sum \delta A(\vec{R}_k^{\text{ин}}) = m(3g \sin \omega t - 12a_3) \delta s_3 = 0.$$

Ускорение груза 3: $a_3 = 0,25g \sin \omega t$, или $\ddot{s}_3 = 0,25g \sin \omega t$. Интегрируя дифференциальное уравнение с нулевыми начальными условиями, получим закон движения груза: $s_3 = \frac{0,25g}{\omega} \left(t - \frac{1}{\omega} \sin \omega t \right)$.

6.5

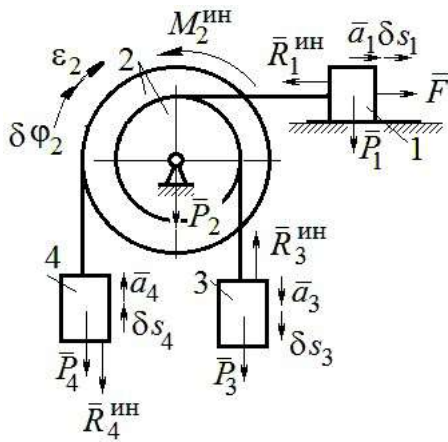


Рис. 7.44. Расчётная схема к упражнению 6.5

Система с идеальными связями. Активные силы и главные вектора сил инерции показаны на рис. 7.44.

Элементарные работы активных сил:

$$\sum \delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}}) = F \delta s_1 + P_3 \delta s_3 - P_4 \delta s_4 \text{ и сил инерции}$$

$$\sum \delta A(\vec{R}_k^{\text{ин}}) = -R_1^{\text{ин}} \delta s_1 - R_3^{\text{ин}} \delta s_3 - R_4^{\text{ин}} \delta s_4 - M_2^{\text{ин}} \delta \varphi_2,$$

где модули сил инерции: $R_1^{\text{ин}} = \frac{P_1}{g} a_1$, $R_3^{\text{ин}} = \frac{P_3}{g} a_3$,

$$R_4^{\text{ин}} = \frac{P_1}{g} a_4, \quad M_2^{\text{ин}} = \frac{P_2}{g} i_2^2 \varepsilon_2.$$

Кинематические соотношения: $\delta s_3 = \delta s_1$, $a_3 = a_1$, $\delta s_4 = 2\delta s_1$, $a_4 = 2a_1$,

$\delta \varphi_2 = \frac{\delta s_1}{r}$, $\varepsilon_2 = \frac{a_1}{r}$. Общее уравнение динамики:

$$\begin{aligned} \sum \delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}}) + \sum \delta A(\vec{R}_k^{\text{ин}}) &= P(t+1) \delta s_1 + P \delta s_1 - 2P \delta s_1 - \\ &- \left(\frac{P}{g} a_1 \delta s_1 + \frac{P}{g} a_1 \delta s_1 + \frac{2P}{g} 2a_1 2\delta s_1 + \frac{2P}{g} 2r^2 \frac{a_1}{r} \frac{\delta s_1}{r} \right) = P \left(t - \frac{14a_1}{g} \right) \delta s_1 = 0. \end{aligned}$$

Находим уравнение движения груза 3: $a_3 = a_1 = \frac{1}{14} g t$, или $\ddot{x}_3 = \frac{1}{14} g t$.

Проинтегрировав дифференциальное уравнение с нулевыми начальными условиями, получим закон движения груза 3: $x_3 = \frac{1}{84} g t^3 \approx 0,012 g t^3$.

6.6

Рассматриваемая механическая система (рис. 7.45) имеет одну степень свободы. Уравнение Лагранжа: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x$, где T – кинетическая энергия системы: Q_x – обобщенная сила.

В качестве обобщённой координаты x выберем положение точки C относительно недеформированной пружины, отмеченной на рис. 7.45 величиной l_0 . Обобщённая скорость $\dot{x}$.

Кинетическая энергия катка:

$$T_1 = \frac{1}{2}m_1V_C^2 + \frac{1}{2}J_{zC}\omega_1^2, \text{ где } \omega_1, V_C - \text{угловая}$$

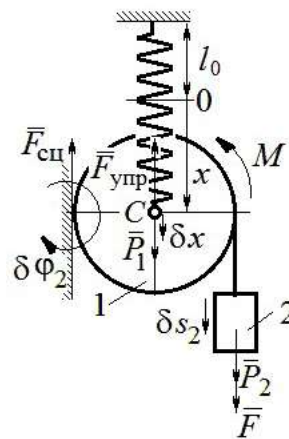


Рис. 7.45. Расчётная схема к упражнению 6.6

скорость катка и скорость его центра масс, $V_C = \dot{x}$, $\omega_1 = \frac{V_C}{r} = \frac{\dot{x}}{r}$; момент инерции $J_{zC} = \frac{1}{2}m_1r^2$. Кинетическая энергия груза 2: $T_2 = \frac{1}{2}m_2V_2^2$, где V_2 – скорость груза 2, $V_2 = 2V_C = 2\dot{x}$. Кинетическая энергия системы, выраженная через обобщённую скорость: $T = T_1 + T_2 = \frac{7P}{2g}\dot{x}^2$.

В произвольном положении системы, определяемом координатой x , дадим центру масс катка возможное перемещение δx (см. рис. 7.45). Элементарная работа активных сил $\sum \delta A(F_k) = P_1\delta x - F_{\text{упр}}\delta x + (P_2 + F)\delta s_2 - M\delta\phi_1$. Полагая перемещения $\delta s_2 = 2\delta x$, $\delta\phi_1 = \frac{\delta x}{r}$, модуль силы упругости $F_{\text{упр}} = cx$ и с учётом данных задачи, получим $\sum \delta A(F_k) = (3P - cx)\delta x$. Обобщённая сила $Q_x = 3P - cx$.

$$\text{Уравнение Лагранжа } \frac{7P}{g}\ddot{x} = 3P - cx, \text{ или } \ddot{x} + \frac{4g}{7r}x = \frac{3g}{7}.$$

Решение уравнения (с нулевыми начальными условиями):

$$x = \frac{3}{4}r(1 - \cos\omega t). \text{ Закон движения груза: } s_2 = 2x = \frac{3}{2}r(1 - \cos\omega t).$$

6.7

Рассматриваемая система имеет две степени свободы. Обобщённые координаты – расстояния x_1 , x_2 соответственно до грузов 1 и 2, отсчитываемые

от неподвижных центров блоков B и D (рис.

7.46, a). Обобщённые скорости $\dot{x}_1$, $\dot{x}_2$. Кинетическая энергия грузов и блока 3:

$$T_1 = \frac{P_1 \dot{x}_1^2}{2g}, \quad T_2 = \frac{P_2 \dot{x}_2^2}{2g};$$

$$T_3 = \frac{P_3}{2g} \left(\frac{\dot{x}_1 + \dot{x}_2}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{P_3 r^2}{2g} \left(\frac{\dot{x}_2 - \dot{x}_1}{2r} \right)^2.$$

Здесь учтено (см. рис. 7.46, a): что

$$V_C = \frac{V_N + V_M}{2} = \frac{\dot{x}_2 + \dot{x}_1}{2};$$

$$\omega_2 = \frac{V_N - V_M}{2r} = \frac{\dot{x}_2 - \dot{x}_1}{2r}.$$

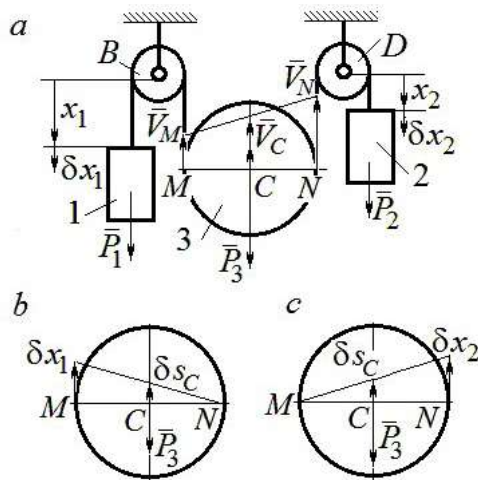


Рис. 7.46. Расчётная схема к упражнению 6.7:

a – кинематика механизма;

b, c – возможные перемещения блока 3 при вычислении обобщённых сил

Дадим системе возможное перемещение по координате x_1 , оставляя координату x_2 постоянной: $\delta x_1 \neq 0$, $\delta x_2 = 0$. На этом перемещении сумма элементарных работ внешних сил (см. рис. 7.46, a, b):

$$\sum \delta A(F_k) = P_1 \delta x_1 - P_3 \delta s_C = \left(P_1 - \frac{1}{2} P_3 \right) \delta x_1.$$

$$\text{Обобщённая сила } Q_{x_1} = P_1 - \frac{1}{2} P_3.$$

Дадим системе другое независимое возможное перемещение – по координате x_2 , так, что $\delta x_1 = 0$, $\delta x_2 \neq 0$. При этом перемещении сумма элементарных работ внешних сил (см. рис. 7.46, a, c):

$$\sum \delta A(F_K) = P_2 \delta x_2 - P_3 \delta s_C = \left(P_2 - \frac{1}{2} P_3 \right) \delta x_2.$$

Обобщённая сила $Q_{x_2} = P_2 - \frac{1}{2} P_3$.

Уравнения Лагранжа

$$\left(P_1 + \frac{3}{8} P_3 \right) \frac{\ddot{x}_1}{g} + \frac{1}{8} P_3 \frac{\ddot{x}_2}{g} = P_1 - \frac{1}{2} P_3, \quad \frac{1}{8} P_3 \frac{\ddot{x}_1}{g} + \left(P_2 + \frac{3}{8} P_3 \right) \frac{\ddot{x}_2}{g} = P_2 - \frac{1}{2} P_3 \quad \text{или}$$

$$7\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 = 0, \quad \ddot{x}_1 + 9\ddot{x}_2 = 2g.$$

Ускорения грузов: $\ddot{x}_1 = -\frac{1}{31}g$, $\ddot{x}_2 = \frac{7}{31}g$. Ускорение центра масс блока

$\ddot{x}_C = \frac{\ddot{x}_2 + \ddot{x}_1}{2} = \frac{6}{31}g$. Груз 1 и центр блока 3 движутся вверх, груз 2 – вниз. (Сравнить с задачей 70.)

6.8

Система с двумя степенями свободы.

Обобщённые координаты: x_1 – положение центра масс катка 1 (точки C_1) относительно неподвижной вертикальной стены; x_2 – положение центра масс катка 2 (точки C_2) относительно подвижного края платформы.

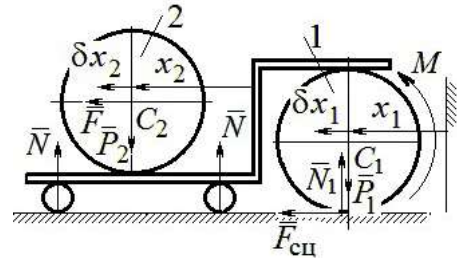


Рис. 7.47. Расчётная схема к упражнению 6.8

Кинетическая энергия системы

$$T = \frac{3}{4} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} \left[m_2 (\dot{x}_2 + 2\dot{x}_1)^2 + \frac{m_2 r^2}{2} \left(\frac{\dot{x}_2}{r} \right)^2 \right] = \frac{P}{g} \left(\frac{11}{4} \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + 2\dot{x}_1 \dot{x}_2 \right).$$

Дадим системе возможное перемещение по координате x_1 ($\delta x_1 \neq 0$), оставляя другую координату x_2 неизменной ($\delta x_2 = 0$). Работу совершают момент M и сила $\bar{F}$. Суммарная работа

$$\sum \delta A(F_K) = M \delta \varphi_1 + F \delta s_{C_2} = M \frac{\delta x_1}{r} + F 2 \delta x_1 = 4P \delta x_1.$$

Обобщённая сила $Q_{x_1} = 4P$.

При другом независимом возможном перемещении $\delta x_1 = 0$, $\delta x_2 \neq 0$ суммарная работа внешних сил $\sum \delta A(F_k) = F\delta x_2$ и обобщённая сила, соответствующая координате x_2 , равна $Q_{x_2} = P$.

Уравнения Лагранжа

$$\frac{P}{g} \left(\frac{11}{2} \ddot{x}_1 + 2\ddot{x}_2 \right) = 4P, \quad \frac{P}{g} (2\ddot{x}_2 + 2\ddot{x}_1) = P, \text{ или}$$
$$11\ddot{x}_1 + 4\ddot{x}_2 = 8g, \quad 2\ddot{x}_2 + 2\ddot{x}_1 = g$$

Ускорение центра катка 1 $\ddot{x}_1 = \frac{6}{7}g$. Тележка катится в направлении оси

x_1 . Ускорение центра катка 2 относительно тележки $\ddot{x}_2 = -\frac{5}{14}g$. Закон относительного движения центра катка 2 при нулевых начальных условиях: $x_2 = -\frac{5}{28}gt^2$. Каток катится к правому борту тележки.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Бать М. И., Джанелидзе Г. Ю., Кельзон А. С. Теоретическая механика в примерах и задачах: Т. 1–2. – СПб.: Лань, 2010.

Бутенин Н. В., Луиц Я. Л., Меркин Д. Р. Курс теоретической механики: В 2-х томах. – М.: Наука, 2009.

Вебер Г. Э., Ляицев, С. А. Лекции по теоретической механике. – Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2008.

Тарг С. М. Краткий курс теоретической механики: учебник для втузов. – М.: Высшая школа, 2010.

Учебное издание

Валерий Григорьевич Брагин
Евгений Борисович Волков
Юрий Михайлович Казаков

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Учебное пособие

Редактор *Л.В. Устьянцева*

Компьютерная версия

Подписано в печать 26.10.2018 г.

Бумага писчая. Формат бумаги 60×84 1/16.

Гарнитура Times New Roman. Печать на ризографе.

Печ. л. 15,625. Уч. изд. л. 10,5. Тираж экз. Заказ №

Издательство УГГУ

620144, г. Екатеринбург, ул. Куйбышева, 30

Уральский государственный горный университет

Отпечатано с оригинал-макета

в лаборатории множительной техники УГГУ



Министерство образования и науки РФ
ФГБОУ ВО
«Уральский государственный
горный университет»

Е. Б. Волков, Ю. М. Казаков

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

*Учебно-методическое пособие
для самостоятельной работы студентов*

**Екатеринбург
2017**

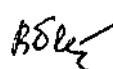


Министерство образования и науки РФ
ФГБОУ ВО
«Уральский государственный горный университет»

ОДОБРЕНО

Методической комиссией
горно-механического факультета
«15» декабря 2017 г.

Председатель комиссии

 проф. В. П. Барановский

Е. Б. Волков, Ю. М. Казаков

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

*Учебно-методическое пособие
для самостоятельной работы студентов*

Рецензент: *Н. М. Суслов*, д-р техн. наук, заведующий кафедрой ГМК
Уральского государственного горного университета

Учебно-методическое пособие рассмотрено на заседании кафедры технической механики от 19.12.2016 г. (протокол № 2) и рекомендовано для издания в УГГУ.

Печатается по решению Редакционно-издательского совета Уральского государственного горного университета.

Волков Е. Б., Казаков Ю. М.

В67 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА: Учебно-методическое пособие для самостоятельной работы студентов. / Е. Б. Волков, Ю. М. Казаков, Уральский государственный горный университет. Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2017. 156 с.

Учебно-методическое пособие для самостоятельной работы студентов содержит краткие методические указания, контрольные задания и примеры выполнения заданий по темам: «Статика твердого тела. Равновесие произвольной плоской и пространственной систем сил», «Кинематика вращательного и плоскопараллельного движений твердого тела. Определение скоростей и ускорений точек твёрдого тела», «Сложное движение точки», «Динамика точки. Дифференциальные уравнения движения точки. Гармонические и вынужденные колебания точки. Применение теоремы об изменении кинетической энергии при исследовании движения точки», «Применение общих теорем динамики к исследованию движения механической системы», «Принципы механики. Применение общего уравнения динамики к исследованию движения механической системы», «Уравнения Лагранжа II рода».

Учебно-методическое пособие для студентов всех специальностей очной формы обучения.

© Волков Е. Б., Казаков Ю. М., 2017

©Уральский государственный горный
университет, 2017

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. СТАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА.....	4
1.1. Основные виды связей и их реакции.....	4
1.2. Моменты силы относительно центра и относительно оси. Пара сил. Момент пары.....	5
1.3. Условия равновесия систем сил.....	7
1.4. Задание С1. Равновесие произвольной плоской системы сил. Равновесие системы тел.....	8
1.5. Задание С2. Равновесие пространственной системы сил.....	17
2. КИНЕМАТИКА ТОЧКИ И ТВЕРДОГО ТЕЛА.....	26
2.1. Кинематика точки. Основные параметры движения точки.....	26
2.2. Вращение тела вокруг неподвижной оси.....	28
2.3. Плоскопараллельное движение твёрдого тела.....	29
2.4. Задание К1. Определение скоростей и ускорений точек твердого тела при поступательном и вращательном движениях.....	32
2.5. Задание К2. Определение скоростей точек твёрдого тела при плоскопараллельном движении.....	38
2.6. Задание К3. Определение ускорений точек твёрдого тела при плоскопараллельном движении.....	46
3. СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ.....	57
3.1. Основные понятия сложного движения точки.....	57
3.2. Задание К4. Определение скорости и ускорения точки при сложном движении.....	60
4. ДИНАМИКА ТОЧКИ.....	73
4.1. Дифференциальные уравнения движения точки.....	73
4.2. Задание Д1. Интегрирование дифференциальных уравнений движения точки ...	73
4.3. Колебания материальной точки.....	80
4.4. Задание Д2. Исследование колебаний точки.....	84
4.5. Теорема об изменении кинетической энергии точки.	95
4.6. Задание Д3. Исследование движения точки с применением теоремы об изменении кинетической энергии.....	96
5. ДИНАМИКА МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ.....	103
5.1. Описание движений твёрдых тел на основе общих теорем динамики системы.....	103
5.2. Задание Д4. Динамический расчет механической системы.....	104
5.3. Теорема об изменении кинетической энергии системы.....	112
5.4. Задание Д5. Исследование движения механической системы с применением теоремы об изменении кинетической энергии.....	114
6. АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА.....	124
6.1. Принципы механики. Общее уравнение динамики.....	124
6.2. Задание Д6. Исследование механической системы с применением общего уравнения динамики.....	126
6.3. Уравнения Лагранжа II рода.....	136
6.4. Задание Д7. Исследование механической системы с одной степенью свободы с применением уравнений Лагранжа.....	137
6.5. Задание Д8. Исследование механической системы с двумя степенями свободы.....	145
СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ.....	155

1. СТАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

Статика представляет раздел теоретической механики, в котором изучаются условия равновесия твердых тел под действием системы сил.

1.1. Основные виды связей и их реакции

Опора тела на гладкую плоскость (поверхность) без трения. Реакция приложена в точке касания и направлена перпендикулярно к общей касательной соприкасающихся поверхностей. При опоре углом, или на угол (рис. 1.1, *a*), реакция направлена по нормали к одной из поверхностей.

Гибкая связь. Если на тело наложена связь в виде гибкой нерастяжимой нити (каната, троса), то реакция связи $\vec{T}$, равная натяжению нити, приложена к телу и направлена вдоль нити (рис. 1.1, *b*).

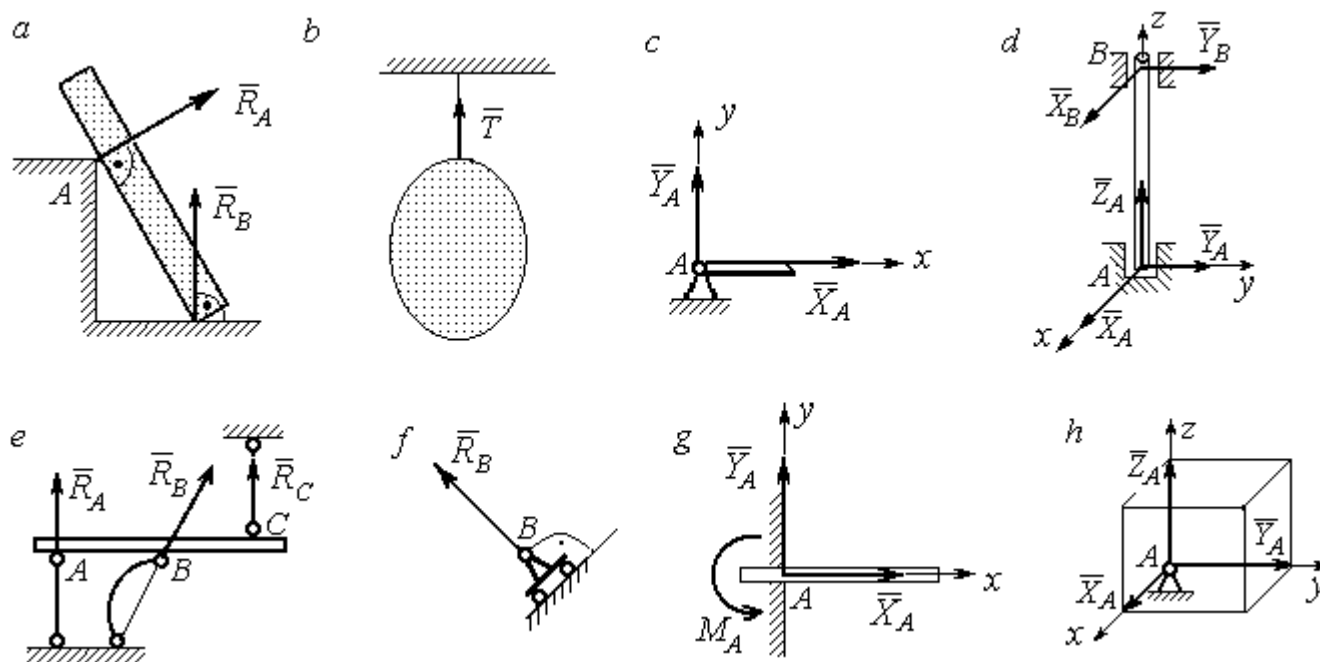


Рис. 1.1. Виды связей и их реакции:

- a* – реакция опоры тела на гладкую поверхность без трения; *b* – реакция связи гибкой нерастяжимой нити; *c* – реакция цилиндрического шарнира; *d* – реакция подшипника и подпятника; *e* – реакция невесомого стержня; *f* – реакция подвижной опоры; *g* – реакция жесткой заделки; *h* – реакция пространственного шарнира

Цилиндрический шарнир (подшипник) создает соединение, при котором одно тело может вращаться по отношению к другому. Реакция цилиндрического шарнира лежит в плоскости, перпендикулярной оси шарнира. При решении задач реакцию цилиндрического шарнира $\vec{R}_A$ изображают ее составляющими $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$, взятыми по направлениям координатных осей (рис. 1.1, *с*). Реакция подшипника $\vec{R}_B$ (рис. 1.1, *д*) также изображается своими составляющими $\vec{X}_B$ и $\vec{Y}_B$, взятыми по направлениям координатных осей в плоскости, перпендикулярной оси вращения подшипника. Величина реакции определяется по формуле: $R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2}$. **Реакция прямолинейного невесомого стержня с шарнирными соединениями на краях** направлена вдоль самого стержня, а криволинейного – вдоль линии, соединяющей точки крепления стержня (рис. 1.1, *е*). **Реакция подвижной опоры** $\vec{R}_B$ (рис. 1.1, *ф*) направлена по нормали к поверхности, на которую опираются катки опоры. **Жесткая заделка** (рис. 1.1, *г*) препятствует не только линейным перемещениям тела, но и повороту. Реакция заделки состоит из силы реакции $\vec{R}_A$ и пары сил с моментом M_A . При решении задач силу реакции жесткой заделки $\vec{R}_A$ изображают ее составляющими $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$, взятыми по направлениям координатных осей. Модуль реакции определяется по формуле $R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2}$. Виды связей и их реакции показаны на рис. 1.1.

1.2. Моменты силы относительно центра и относительно оси. Пара сил. Момент пары

Алгебраическим моментом силы F относительно центра O $M_O(\vec{F})$, или просто **моментом силы** $\vec{F}$ относительно центра O , называют взятое с соответствующим знаком произведение модуля силы $\vec{F}$ на кратчайшее расстояние h от центра O до линии действия силы: $M_O(\vec{F}) = \pm Fh$ (рис. 1.2, *а*).

Величину h называют **плечом силы**. Момент силы относительно центра считается положительным, если сила стремится повернуть тело вокруг центра против хода часовой стрелки, и отрицательным – в обратном случае.

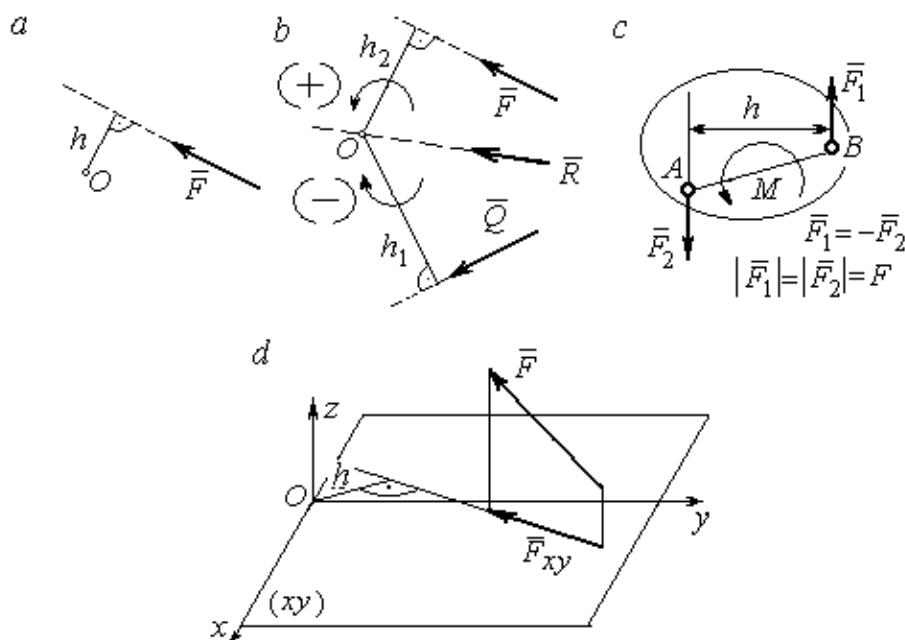


Рис. 1.2. Схемы для вычисления моментов сил:
 a, b – момент силы относительно центра; c – момент пары сил;
 d – момент силы относительно оси

На рис. 1.2, b показано, что момент силы $\vec{F}$ относительно центра O положительный, а момент силы $\vec{Q}$ относительно того же центра – отрицательный. Момент силы $\vec{R}$ относительно центра O равен нулю, так как линия действия этой силы проходит через центр O и плечо силы равно нулю.

Парой сил, или просто парой (рис.1.2, c), называют систему двух равных по модулю сил, параллельных, направленных в противоположные стороны и не лежащих на одной прямой. Алгебраическим моментом пары сил, или **моментом пары**, называют взятое со знаком плюс или минус произведение модуля одной из сил пары на плечо пары – кратчайшее расстояние между линиями действия ее сил. Правило знаков такое же, как и для момента силы. На рисунках пару часто изображают дуговой стрелкой, показывающей направление поворота твердого тела под действием пары (см. M на рис. 1.2, c).

Моментом силы относительно оси называют момент проекции этой силы на плоскость, перпендикулярную оси, относительно точки пересечения оси с этой плоскостью. На рис. 1.2, *d* показано вычисление момента силы F относительно оси z : $M_z(\vec{F}) = F_{xy}h$, где F_{xy} – проекция силы $\vec{F}$ на плоскость $xу$, перпендикулярную оси z , h – плечо проекции F_{xy} относительно центра O – точки пересечения оси z и плоскости xOy .

1.3. Условия равновесия систем сил

Плоской системой сил называется система сил, расположенных в одной плоскости.

Основная форма условий равновесия плоской системы сил. Для равновесия плоской системы сил, приложенных к твердому телу, необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на каждую из двух осей прямоугольной системы координат, расположенной в плоскости действия сил, были равны нулю и сумма моментов сил относительно любого центра, находящегося в плоскости действия сил, также была равна нулю:

$$\sum F_{kx} = 0, \quad \sum F_{ky} = 0, \quad \sum M_A(\vec{F}_k) = 0,$$

где F_{kx}, F_{ky} – проекции всех сил на координатные оси; $M_A(\vec{F}_k)$ – моменты всех сил относительно произвольно выбранного центра A .

Пространственной системой сил называется система сил, расположенных произвольно в пространстве.

Для равновесия пространственной системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на оси прямоугольной системы координат были равны нулю и суммы моментов всех сил относительно тех же осей также были равны нулю:

$$\sum F_{kx} = 0, \quad \sum F_{ky} = 0, \quad \sum F_{kz} = 0,$$

$$\sum M_x(\vec{F}_k)=0, \sum M_y(\vec{F}_k)=0, \sum M_z(\vec{F}_k)=0,$$

где F_{kx}, F_{ky}, F_{kz} – проекции всех сил на координатные оси x, y, z ; $M_x(\vec{F}_k), M_y(\vec{F}_k), M_z(\vec{F}_k)$ – моменты всех сил относительно выбранных осей.

Равновесие систем тел

Связи, соединяющие части конструкции, называют **внутренними**, в отличие от **внешних** связей, скрепляющих конструкцию с внешними телами, не входящими в данную конструкцию. Одним из способов решения задач на равновесие сил, действующих на сочленённую конструкцию с внутренними связями, является **разбиение конструкции на отдельные тела** и составление уравнений равновесия для каждого из тел, входящих в конструкцию. При этом в уравнения равновесия должны входить только силы, непосредственно приложенные к тому телу, равновесие которого рассматривается.

1.4. Задание С1. Равновесие произвольной плоской системы сил. Равновесие системы тел

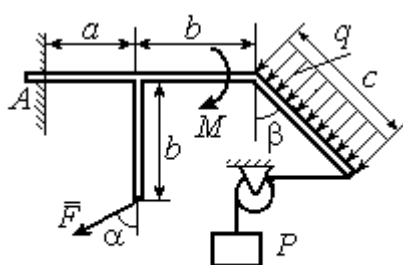
Каждый вариант задания включает две задачи по темам: «Равновесие произвольной плоской системы сил» и «Равновесие системы тел».

В задачах требуется определить реакции связей конструкции исходя из условия равновесия произвольной плоской системы сил. Весом стержневых подпорок, поддерживающих балочные конструкции, и блоков, через которые перекинуты невесомые нити, пренебречь.

Варианты заданий даны на рис. 1.3 – 1.6. Исходные данные приведены в табл. 1.1. Из таблицы исходных данных выбираются значения тех параметров, которые указаны на схемах.

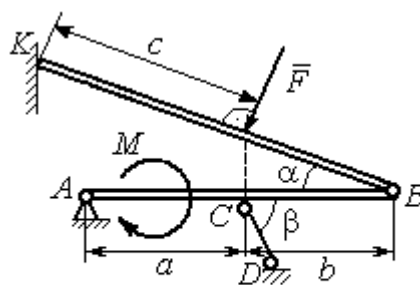
Варианты № 1, 11, 21

Задача 1



Найти реакцию жесткой заделки в точке A

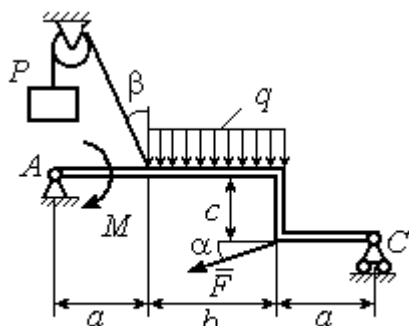
Задача 2



Найти реакции шарниров A, B , реакцию стержня CD и реакцию опоры в точке K

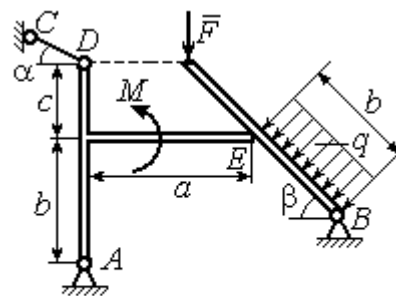
Варианты № 2, 12, 22

Задача 1



Найти реакции шарниров A и C

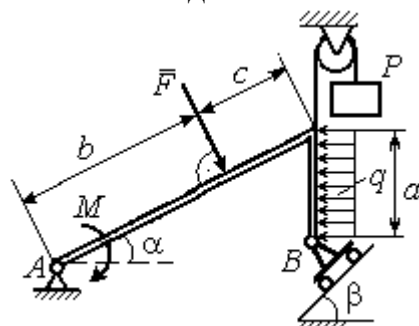
Задача 2



Найти реакции шарниров A, B , реакцию опоры в точке E и реакцию стержня CD

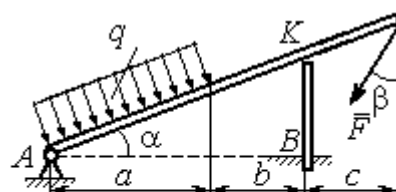
Варианты № 3, 13, 23

Задача 1



Найти реакции шарниров A и B

Задача 2

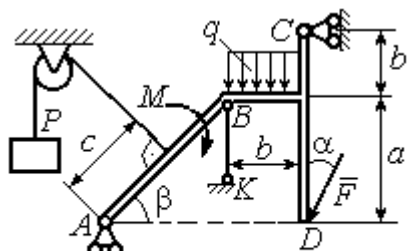


Найти реакцию шарнира A , реакцию опоры в точке K и реакцию жесткой заделки в точке B

Рис. 1.3. Задание С1. Равновесие произвольной плоской системы сил.
Равновесие системы тел. Номера вариантов задания 1 – 3, 11 – 13, 21 – 23

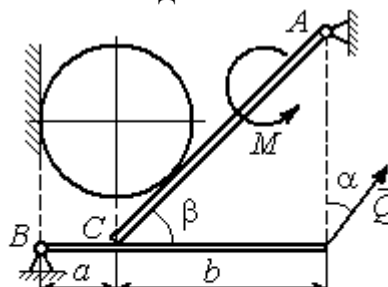
Варианты № 4, 14, 24

Задача 1



Найти усилие в стержне BK и реакцию шарниров A, C

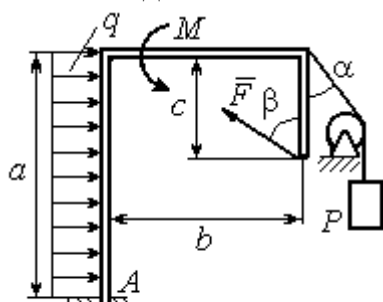
Задача 2



Вес шара P . Найти реакцию шарниров A, B , давление шара на балку и стенку, реакцию опоры балки в точке C и уравновешивающую силу Q

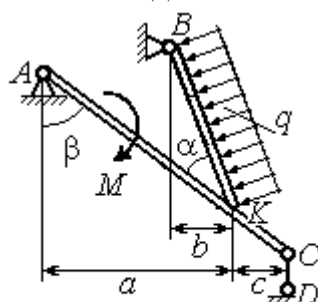
Варианты № 5, 15, 25

Задача 1



Найти реакцию жесткой заделки в точке A

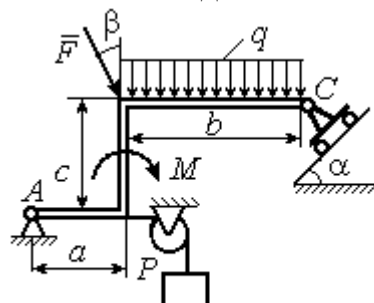
Задача 2



Найти реакцию шарниров A, B , реакцию стержня CD и реакцию опоры в точке K

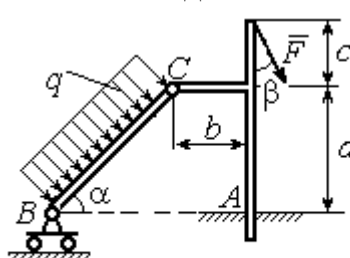
Варианты № 6, 16, 26

Задача 1



Найти реакции шарниров A и C

Задача 2

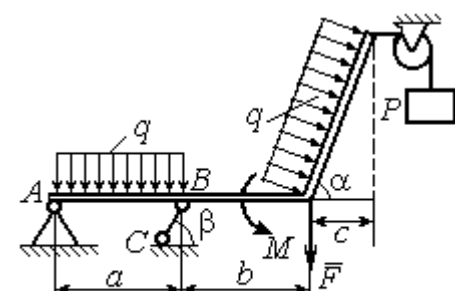


Найти реакцию жесткой заделки в точке A и реакции шарниров B и C

Рис. 1.4. Задание С1. Равновесие произвольной плоской системы сил. Равновесие системы тел. Номера вариантов задания 4 – 6, 14 – 16, 24 – 26

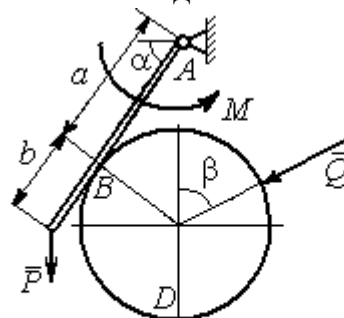
Варианты № 7, 17, 27

Задача 1



Найти реакцию стержня BC и реакцию шарнира A

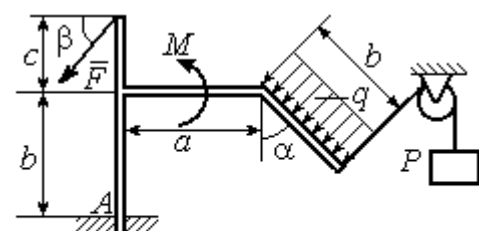
Задача 2



Найти реакцию шарнира A , давление балки на шар, реакцию опоры шара в точке D и уравновешивающую силу Q

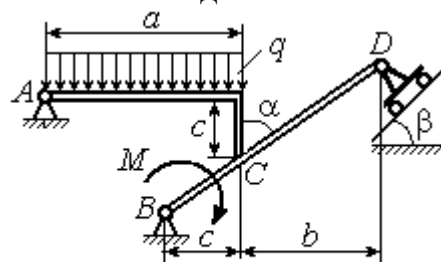
Варианты № 8, 18, 28

Задача 1



Найти реакцию жесткой заделки в точке A

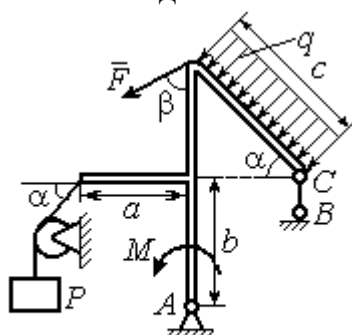
Задача 2



Найти реакцию шарниров A, B и D и реакцию опоры в точке C

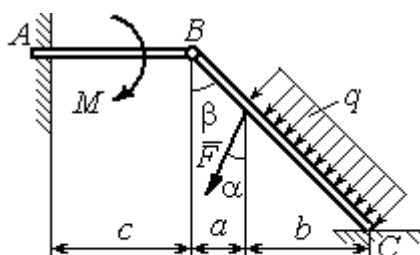
Варианты № 9, 19, 29

Задача 1



Найти реакцию стержня BC и реакцию шарнира A

Задача 2



Найти реакцию жесткой заделки в точке A , реакцию шарнира B и реакцию опоры в точке C

Рис. 1.5. Задание С1. Равновесие произвольной плоской системы сил. Равновесие системы тел. Номера вариантов задания 7 – 9, 17 – 19, 27 – 29

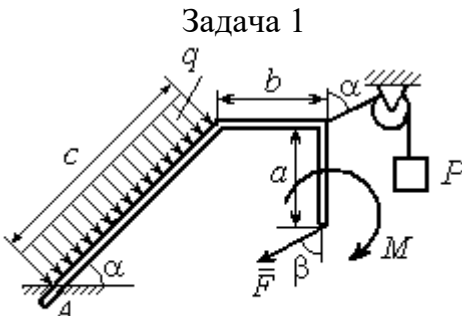
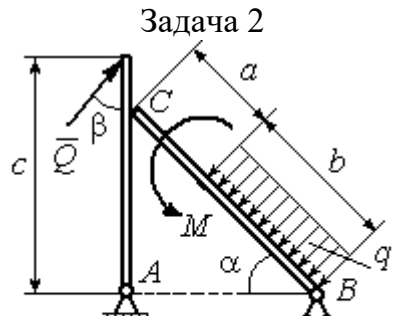
Варианты № 10, 20, 30	
Задача 1  Найти реакцию жесткой заделки в точке А	Задача 2  Найти реакцию шарниров А, В, реакцию опоры в точке С и уравновешивающую силу Q

Рис. 1.6. Задание С1. Равновесие произвольной плоской системы сил.
Равновесие системы тел. Номера вариантов задания 10, 20, 30

Таблица 1.1

**Исходные данные задания С1. Равновесие произвольной плоской системы сил.
Равновесие системы тел.**

Номер варианта задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
P , кН	6	5	6	12	6	6	10	3	8	5	10	4	8	10	8
F , кН	12	6	10	5	12	8	6	5	6	2	12	8	12	6	10
q , кН/м	5	4	2	3	6	3	5	2	2	4	6	2	3	4	5
M , кН·м	12	8	6	8	12	5	12	8	4	6	8	12	10	6	10
α , град	45	60	30	60	30	30	45	60	30	30	45	30	60	45	60
β , град	60	30	45	30	60	90	60	60	30	45	30	45	30	60	30
a , м	3	4	3	4	3	4	3	4	1	2	2	3	2	3	4
b , м	3	3	4	3	2	4	3	3	2	3	3	3	4	3	2
c , м	4	2	2	2	3	2	2	1	5	4	4	2	1	2	2

Номер варианта задания	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
P , кН	10	8	10	6	4	6	12	10	5	6	8	6	8	4	6
F , кН	6	12	12	8	3	14	10	8	15	10	12	8	10	10	2
q , кН/м	5	3	4	3	2	3	2	5	4	2	3	4	5	2	4
M , кН·м	10	6	8	6	5	12	4	6	8	10	12	10	6	4	8
α , град	60	60	30	45	60	30	60	45	30	60	45	30	30	30	45
β , град	45	30	30	60	60	45	30	60	30	45	90	30	60	45	30
a , м	3	4	3	1	2	2	4	1	4	3	4	3	2	1	2
b , м	2	4	3	3	4	1	4	3	2	2	2	2	2	2	2
c , м	3	2	2	4	5	4	2	2	1	1	1	2	1	3	5

Пример выполнения задания С1. Равновесие произвольной плоской системы сил. Равновесие системы тел.

Задача 1. Рама ACE (рис. 1.7) в точке A закреплена на цилиндрической шарнирной опоре, а в точке B поддерживается вертикальным невесомым стержнем BK . На раму действуют: пара с моментом $M = 8$ Нм, сила $F = 10$ Н, приложенная в точке D под углом 60° к раме, и равномерно распределенная нагрузка интенсивностью $q = 2$ Н/м, приложенная на отрезке AB . В точке E под прямым углом к участку балки CE прикреплен трос, несущий груз $P = 20$ Н. Пренебрегая весом балки, определить реакцию шарнира A и реакцию стержневой опоры BK , если $a = 2$ м.

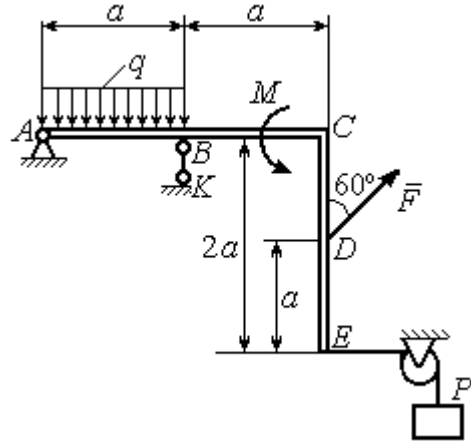


Рис. 1.7. Конструкция рамы

Решение

Выбираем систему координат xAy , например, как показано на рис. 1.8. Заменяем действие связей их реакциями. Изображаем реакцию шарнира A двумя

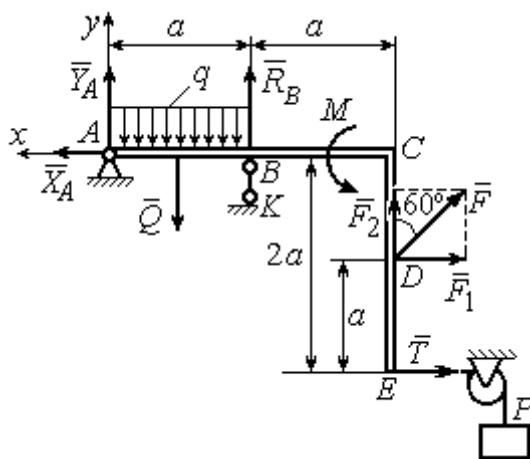


Рис. 1.8. Силы и реакции связей, действующие на раму при её равновесии

её составляющими $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$, направленными вдоль горизонтальной и вертикальной осей (см. рис. 1.8). Реакция $\vec{R}_B$ невесомой стержневой опоры BK приложена в точке B и направлена вдоль стержня BK . Заменяем распределенную нагрузку её равнодействующей $\vec{Q}$. Сила $\vec{Q}$ приложена в середине отрезка AB и по модулю равна $Q = qa = 4$ Н. Действие груза P на раму изображается реакцией $\vec{T}$, равной по величине весу груза.

При равновесии рамы действующие на неё силы составляют уравновешенную произвольную плоскую систему. Условия равновесия системы сил имеют вид: $\sum F_{kx} = 0$, $\sum F_{ky} = 0$, $\sum M_A(\vec{F}_k) = 0$. Вычисляя проекции сил на оси x , y , и моменты сил относительно центра A , уравнения равновесия получим в виде:

$$\sum F_{kx} = X_A - F \cos 30^\circ - T = 0, \quad \sum F_{ky} = Y_A - Q + R_B + F \cos 60^\circ = 0.$$

$$\sum M_A(\vec{F}_k) = -Q \frac{a}{2} + R_B a + M + F \cos 60^\circ \cdot 2a + F \cos 30^\circ \cdot a + T 2a = 0.$$

Здесь для вычисления момента силы $\vec{F}$ относительно центра A использована теорема Вариньона: $M_A(\vec{F}) = M_A(\vec{F}_1) + M_A(\vec{F}_2) = F_1 \cdot a + F_2 \cdot 2a$, где $F_1 = F \cos 30^\circ$, $F_2 = F \cos 60^\circ$ (см. рис. 1.8).

Подставляя в уравнения равновесия исходные данные задачи, получим систему уравнений относительно неизвестных X_A, Y_A, R_B :

$$X_A - 28,66 = 0, \quad Y_A + R_B + 1 = 0, \quad R_B \cdot 2 + 121,32 = 0.$$

Решая систему, найдем $X_A = 28,66$ Н, $Y_A = 59,66$ Н, $R_B = -60,66$ Н.

Отрицательное значение величины R_B означает, что фактическое направление реакции R_B стержневой опоры BK противоположно направлению, показанному на рис. 1.8. Численное значение реакции шарнира

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = \sqrt{28,66^2 + 59,66^2} = 66,18 \text{ Н}.$$

Задача 2. Балка $ABLC$ с вертикальной частью AB и горизонтальной переключиной LC закреплена в точке A с помощью жесткой заделки (рис. 1.9). Наклонная балка EC с углом наклона к горизонту 60° в точке C шарнирно прикреплена к горизонтальной переключине CL , а в точке E закреплена на шарнирно-подвижной опоре, установленной на горизонтальной поверхности. На конструкцию действуют равномерно распределенная на отрезках BL и DE нагрузка с одинаковой интенсивностью $q = 2$ кН/м, сила $\vec{F}$, приложенная в точке D перпендикулярно балке EC и равная по величине $F = 10$ кН, и пара сил

с моментом $M = 5 \text{ кН} \cdot \text{м}$. Определить реакцию жесткой заделки A и реакции шарниров C и E , если $a = 2 \text{ м}$.

Решение

Разделяем систему на две части по шарниру C и рассмотрим равновесие балок $ABLC$ и EC отдельно. Изобразим обе балки и расставим внешние силы и реакции связей (рис. 1.10). Рассмотрим балку $ABLC$ (рис. 1.10, a). Заменяем распределенную нагрузку эквивалентной силой $\bar{Q}_1$, приложенной в середине отрезка BL , направленной в сторону действия нагрузки и равной $Q_1 = q \cdot a = 4$

кН. Кроме силы $\bar{Q}_1$ и пары сил с моментом M на балку действуют реакция

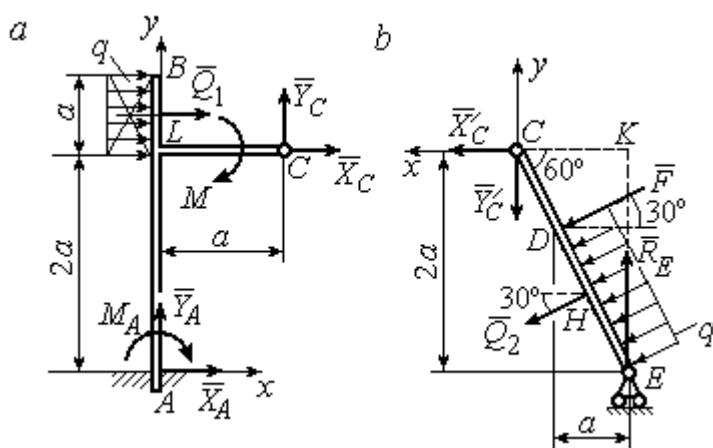


Рис. 1.10. Равновесие частей конструкции:
 a - силы и реакции связей, действующие на балку $ABLC$;
 b - силы и реакции связей, действующие на балку CE

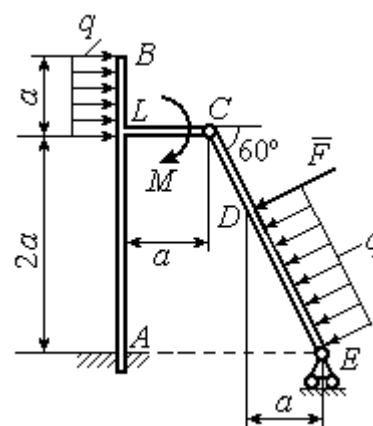


Рис. 1.9. Равновесие конструкции двух балок, соединённых шарниром

жёсткой заделки в точке A , имеющая своими составляющими силы $\bar{X}_A$, $\bar{Y}_A$ и пару сил с моментом M_A , а также реакция шарнира C , разложенная на составляющие $\bar{X}_C$, $\bar{Y}_C$ (см. рис. 1.10, a). Действующие на раму силы составляют уравновешенную плоскую систему сил. Выберем систему координат xAy , как показано на рис. 1.10, a , и составим уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx} = X_A + Q_1 + X_C = 0, \quad \sum F_{ky} = Y_A + Y_C = 0,$$

$$\sum M_A(\vec{F}_k) = -M_A - Q_1 \cdot \left(2a + \frac{a}{2}\right) - M + Y_C a - X_C 2a = 0.$$

Рассмотрим равновесие балки EC . Заменим равномерную нагрузку эквивалентной силой $\vec{Q}_2$, приложенной в середине отрезка ED , направленной в сторону действия нагрузки и равной по модулю $Q_2 = q \cdot 2a = 8 \text{ кН}$. На балку кроме сил $\vec{Q}_2$, $\vec{F}$ действуют реакции связей: $\vec{R}_E$ – реакция шарнирно-подвижной опоры в точке E и $\vec{X}'_C$, $\vec{Y}'_C$ – составляющие реакции шарнира C . Силы $\vec{X}'_C$, $\vec{Y}'_C$ направлены противоположно силам $\vec{X}_C$, $\vec{Y}_C$ и равны им по модулю $X_C = X'_C$, $Y_C = Y'_C$ (см. рис. 1.10, a , b). Действующие на балку EC силы образуют плоскую уравновешенную систему сил. Выберем систему координат xCy , как показано на рис. 1.10, b , и составим уравнения равновесия. При этом центром, относительно которого будем считать моменты сил, выберем точку C . Получим:

$$\sum F_{kx} = Q_2 \sin 60^\circ + F \cos 30^\circ + \vec{X}'_C = 0, \quad \sum F_{ky} = R_E - Q_2 \cos 60^\circ - F \sin 30^\circ - Y'_C = 0, \\ \sum M_C(\vec{F}_k) = -F \cdot CD - Q_2 \cdot CH + R_E \cdot CK = 0.$$

Здесь плечи сил: $CD = \frac{2a}{\cos 30^\circ} - 2a$, $CH = \frac{2a}{\cos 30^\circ} - a$, $CK = 2a \tan 30^\circ$. Заменяя в уравнениях величины X'_C на X_C , а Y'_C на Y_C и подставляя исходные данные, получим систему уравнений:

$$X_A + X_C + 4 = 0, \quad Y_A + Y_C = 0, \quad -M_A - 4X_C + 2Y_C - 25 = 0, \\ X_C + 15,59 = 0, \quad -Y_C + R_E - 9 = 0, \quad 2,31R_E - 27,14 = 0,$$

откуда найдём величины реакции жесткой заделки и реакции шарниров:

$$X_A = 11,59 \text{ кН}, \quad Y_A = -2,76 \text{ кН}, \quad M_A = 42,87 \text{ кН} \cdot \text{м}, \\ X_C = -15,59 \text{ кН}, \quad Y_C = 2,76 \text{ кН}, \quad R_E = 11,76 \text{ кН}.$$

Модули реакций жесткой заделки A и шарнира C :

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = 11,91 \text{ кН}, \quad R_C = \sqrt{X_C^2 + Y_C^2} = 15,83 \text{ кН}.$$

1.5. Задание С2. Равновесие пространственной системы сил

В заданиях рассматривается равновесие однородной плиты или вала (прямого или с «ломаной» осью) с насаженным на него шкивом.

Вал закреплен подпятником и подшипником и удерживается в равновесии. На вал действуют сила $\vec{F}$, пара сил с моментом M и сила $\vec{P}$. На шкив вала намотана нить, к свободному концу которой, перекинутому через невесомый блок, подвешен груз весом Q . Для вала определить реакции подшипника и подпятника и величину уравнивающей силы Q (или момента M).

Плита весом P закреплена пространственным шарниром, подшипником и удерживается в заданном положении невесомым стержнем. На плиту действуют силы $\vec{F}$, $\vec{Q}$ и пара сил с моментом M . Для плиты найти реакции сферического и цилиндрического шарниров и реакцию стержня.

Варианты задания даны на рис. 1.11 – 1.13. Исходные данные для выполнения задания приведены в табл. 1.2.

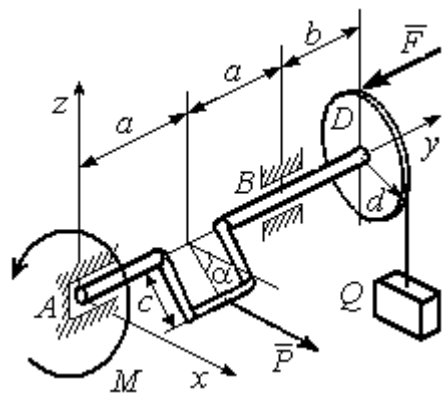
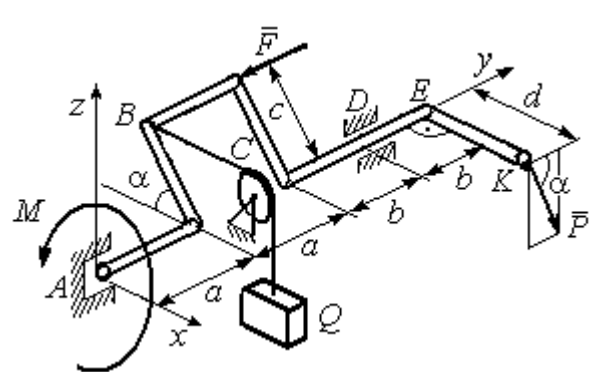
Варианты № 1, 11, 21	Варианты № 2, 12, 22
 Сила $\vec{F}$ параллельна оси Ay; сила $\vec{P}$ параллельна оси Ax; нить, удерживающая груз, сходит со шкива вертикально. Найти реакции подпятника и подшипника в точках A и B и величину уравнивающего груза Q	 Сила $\vec{F}$ параллельна оси Ay; сила $\vec{P}$ лежит в плоскости, параллельной zAy; отрезок нити BC параллелен оси Ax; рукоятка вала EK параллельна оси Ax. Найти реакции подпятника и подшипника в точках A и D и величину уравнивающего момента M

Рис. 1.11. Задание С2. Равновесие пространственной системы сил.

Номера вариантов задания 1 – 2, 11 – 12, 21 – 22

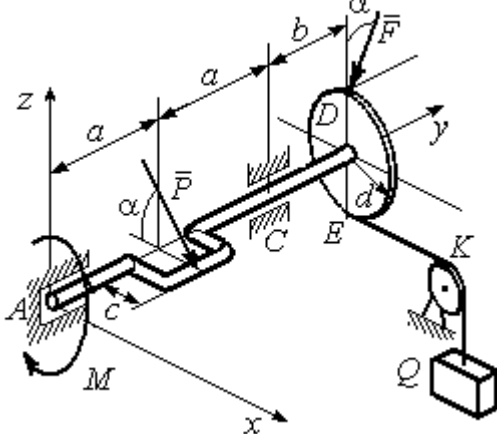
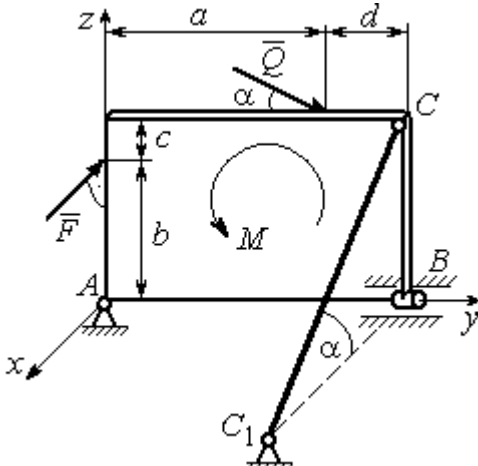
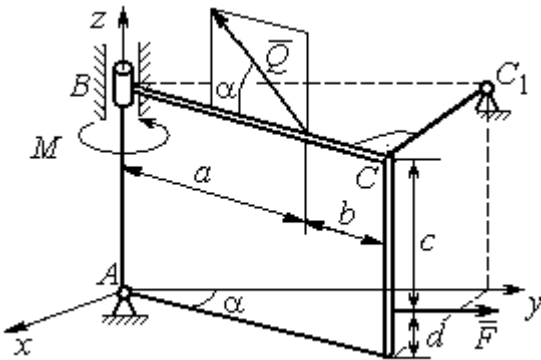
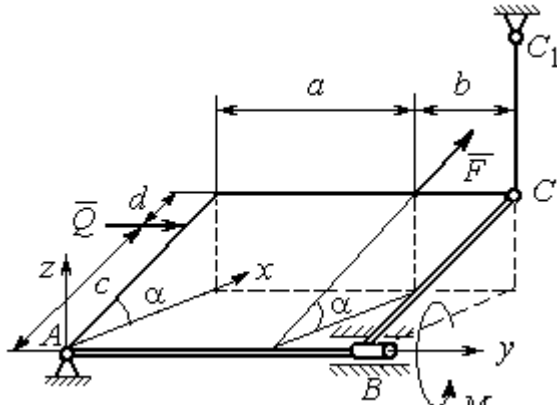
Варианты № 3, 13, 23	Варианты № 4, 14, 24
 Сила $\vec{F}$, лежит в плоскости zAy; сила $\vec{P}$ лежит в плоскости, параллельной zAx, отрезок нити EK параллелен оси Ax. Найти реакции подпятника и подшипника в точках A и C, а также величину уравновешивающего груза Q	 Плита весом P расположена в плоскости zAy; пара сил с моментом M действует в плоскости плиты; стержень CC_1 расположен в плоскости, параллельной zAx; сила $\vec{Q}$ действует в плоскости плиты; сила $\vec{F}$ перпендикулярна плоскости плиты. Найти реакции сферического и цилиндрического шарниров в точках A и B и реакцию стержня CC_1
 Плита весом P отклонена на угол α от вертикальной плоскости zAy; сила $\vec{Q}$ лежит в плоскости плиты; сила $\vec{F}$ параллельна оси Ay; стержень CC_1 перпендикулярен плоскости плиты. Найти реакции сферического и цилиндрического шарниров в точках A и B и реакцию стержня CC_1	 Плита весом P отклонена на угол α от горизонтальной плоскости xAy; сила $\vec{Q}$ перпендикулярна боковой стенке плиты и параллельна оси Ay; сила $\vec{F}$ расположена в плоскости плиты и параллельна её боковым стенкам; стержень CC_1 параллелен оси Az. Найти реакции сферического и цилиндрического шарниров в точках A и B и реакцию стержня CC_1

Рис. 1.12. Задание С2. Равновесие пространственной системы сил.

Номера вариантов задания 3 – 6, 13 – 16, 23 – 26

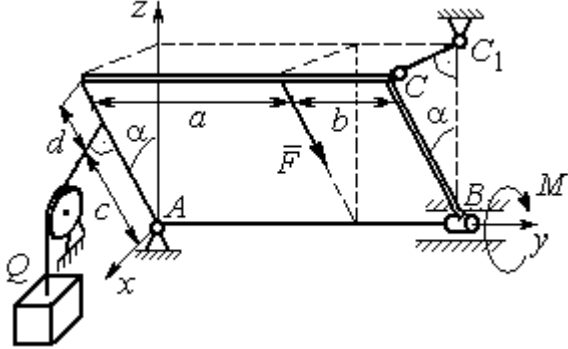
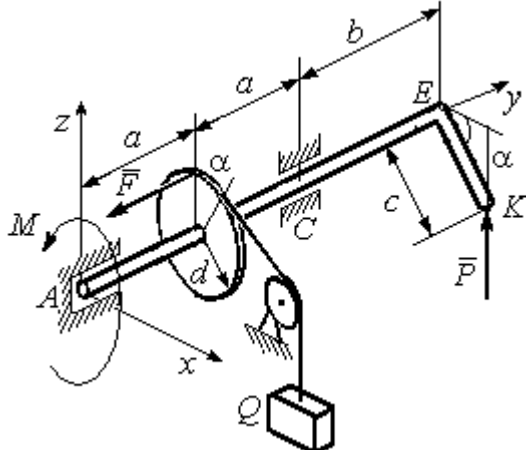
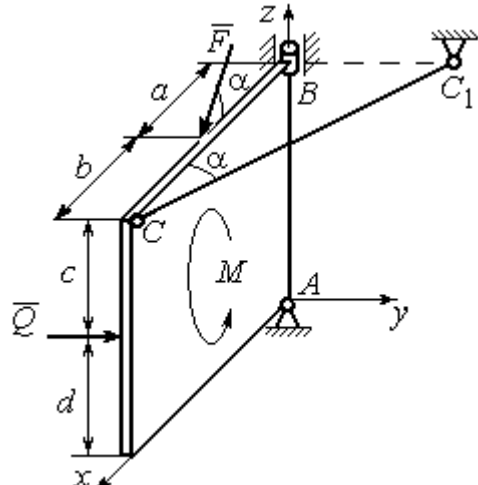
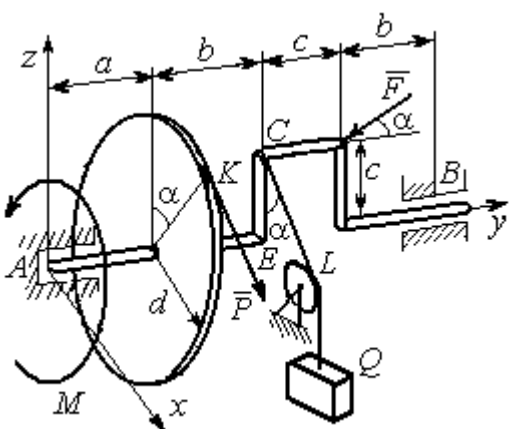
Варианты № 7, 17, 27	Варианты № 8, 18, 28
 Плита весом P отклонена на угол α от вертикальной плоскости zAy; нить, удерживающая груз Q, находится в плоскости zAx, прикреплена к боковой стенке плиты и перпендикулярна ей; сила $\vec{F}$ параллельна боковым стенкам плиты; стержень CC_1 перпендикулярен плоскости zAy. Найти реакции сферического и цилиндрического шарниров в точках A и B и реакцию стержня CC_1	 Рукоять EK перпендикулярна оси вала и наклонена под углом α к горизонтальной плоскости xAy; сила $\vec{P}$ параллельна оси Az; сила $\vec{F}$ параллельна оси Ay; нить, удерживающая груз Q, сходит со шкива по касательной. Найти реакции подпятника A, подшипника C, и величину уравнивающего груза Q
Варианты № 9, 19, 29	Варианты № 10, 20, 30
 Плита весом P находится в вертикальной плоскости zAx; стержень CC_1 расположен в плоскости, параллельной xAy; пара сил с моментом M действует в плоскости плиты; сила $\vec{Q}$ перпендикулярна плоскости плиты; сила $\vec{F}$ лежит в плоскости плиты. Найти реакции сферического и цилиндрического шарниров в точках A и B и реакцию стержня CC_1	 Сила $\vec{F}$ находится в плоскости zAy; стойка CE находится в плоскости zAy; отрезок CL нити, удерживающей груз, находится в плоскости параллельной xAz; сила $\vec{P}$ находится в плоскости шкива и направлена по касательной к ободу в точке K. Найти реакции подпятника A, подшипника B и величину уравнивающего момента M

Рис. 1.13. Задание С2. Равновесие пространственной системы сил.

Номера вариантов задания 7 – 10, 17 – 20, 27 – 30

Исходные данные для задания С2.
Равновесие пространственной системы сил

Номер варианта задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P , кН	5	4	6	10	16	15	12	10	15	14
F , кН	8	6	12	6	10	10	8	12	12	10
Q , кН	—	12	—	12	8	12	10	—	10	12
M , кН·м	12	—	10	8	12	6	8	6	8	—
α , град	60	30	30	30	60	60	60	30	30	60
a , м	1,2	0,8	1,4	0,6	1,2	0,9	1,4	0,4	0,8	0,8
b , м	1,0	0,6	1,1	0,4	0,8	0,4	0,6	1,2	0,2	0,6
c , м	0,8	0,5	0,8	0,3	1,4	0,8	1,2	0,8	0,4	0,4
d , м	0,4	0,4	0,6	0,2	0,4	0,2	0,4	0,6	0,6	0,6

Номер варианта задания	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
P , кН	8	10	10	15	14	10	16	9	10	12
F , кН	6	12	16	8	12	14	10	15	8	10
Q , кН	—	14	—	10	10	12	14	—	12	14
M , кН·м	10	—	12	12	12	8	10	10	10	—
α , град	30	60	60	60	30	30	30	60	60	30
a , м	0,8	1,3	0,9	0,5	1,3	1,2	1,6	0,6	0,9	1,2
b , м	0,6	1,1	0,6	0,4	0,9	0,6	0,8	1,2	0,3	0,8
c , м	0,4	0,8	0,5	0,2	1,5	0,9	1,2	0,4	0,6	0,6
d , м	0,2	0,4	0,4	0,1	0,5	0,4	0,6	0,2	0,2	0,8

Номер варианта задания	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
P , кН	10	12	5	8	10	14	18	12	14	10
F , кН	12	8	15	10	12	8	10	15	9	8
Q , кН	—	10	—	12	14	10	16	—	12	6
M , кН·м	12	—	16	14	8	10	8	12	10	—
α , град	90	30	60	30	45	30	30	60	60	30
a , м	0,6	0,8	1,1	1,2	1,5	0,8	1,0	0,8	1,2	0,9
b , м	0,8	0,6	0,9	1,0	0,9	0,6	0,8	1,4	0,6	0,4
c , м	0,4	1,2	0,8	0,6	1,5	0,9	1,1	0,5	0,8	0,6
d , м	0,4	1,5	0,5	0,2	0,4	0,3	0,3	0,4	0,6	0,5

Примеры решения задания С2. Равновесие пространственной системы сил

Задача 1. Горизонтальный вал (рис. 1.14) закреплен в подпятнике C и подшипнике K . Вал имеет шкив I радиуса R и шкив II радиуса r , перпендикулярные оси вала. Рукоять AE параллельна оси Cx . Нить, удерживающая груз Q , сходит со шкива I по касательной вертикально вниз. На вал действуют силы $\vec{F}$, $\vec{P}$ и пара сил с моментом M , закручивающая вал

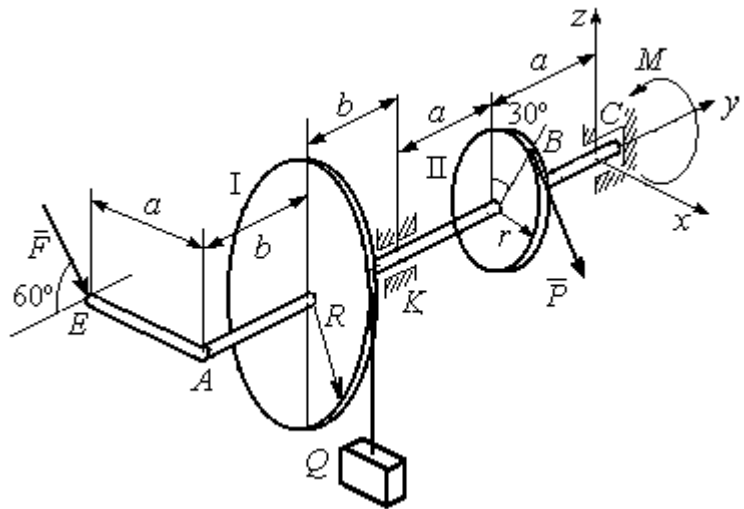


Рис. 1.14. Схема вала и его нагрузка

вокруг оси Cy . Сила $\vec{F}$ находится в плоскости, параллельной zCy , и составляет угол 60° с направлением оси Cy . Сила $\vec{P}$ приложена в точке B шкива II, определяемой центральным углом 30° , и направлена по касательной. Определить величину уравнивающего момента M и реакции подшипника и подпятника, если $P = 4$ кН, $F = 2$ кН, $Q = 3$ кН, $R = 0,6$ м, $r = 0,3$ м, $a = 0,8$ м, $b = 0,4$ м.

Решение

Рассмотрим равновесие вала. На вал действуют внешние силы $\vec{F}$, $\vec{P}$, пара сил с моментом M и реакции связей. Связями являются нить, натянутая грузом Q , подпятник C и подшипник K .

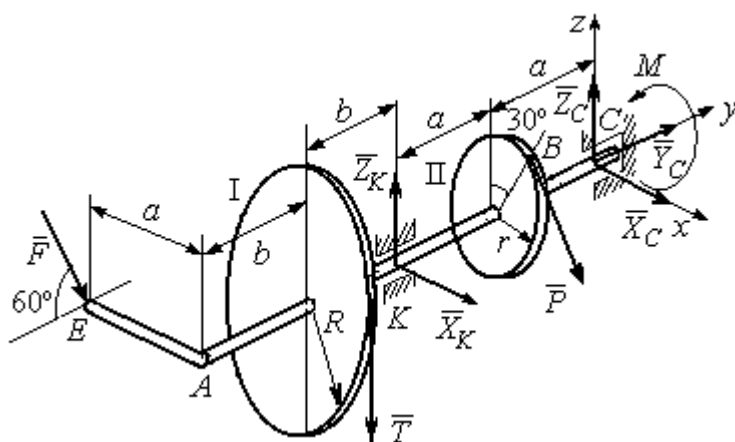


Рис. 1.15. Внешние силы и реакции связей вала

Освобождаем вал от связей, заменяя их действие реакциями. Реакцию подпятника C раскладываем на три со-

ставляющие: $\vec{X}_C$, $\vec{Y}_C$, $\vec{Z}_C$, направленные вдоль координатных осей. Реакция подшипника K лежит в плоскости, перпендикулярной оси вала, и ее составляющими будут вектора $\vec{X}_K$, $\vec{Z}_K$, направленные вдоль координатных осей x , z . Реакция нити $\vec{T}$ направлена вдоль нити от точки K и по модулю равна весу груза. Действие на вал внешних сил и реакций связи показано на рис. 1.15.

Внешние силы, действующие на вал, и реакции связей составляют произвольную пространственную систему сил, эквивалентную нулю $(\vec{P}, \vec{F}, \vec{X}_K, \vec{Z}_K, \vec{T}, \vec{X}_C, \vec{Y}_C, \vec{Z}_C, M) \propto 0$, для которой уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx} = 0, \sum F_{ky} = 0, \sum F_{kz} = 0,$$

$$\sum M_x(\vec{F}_k) = 0, \sum M_y(\vec{F}_k) = 0, \sum M_z(\vec{F}_k) = 0.$$

Для удобства при составлении уравнений равновесия изобразим вал вместе с действующими на него силами в проекциях на координатные плоскости (рис. 1.16)

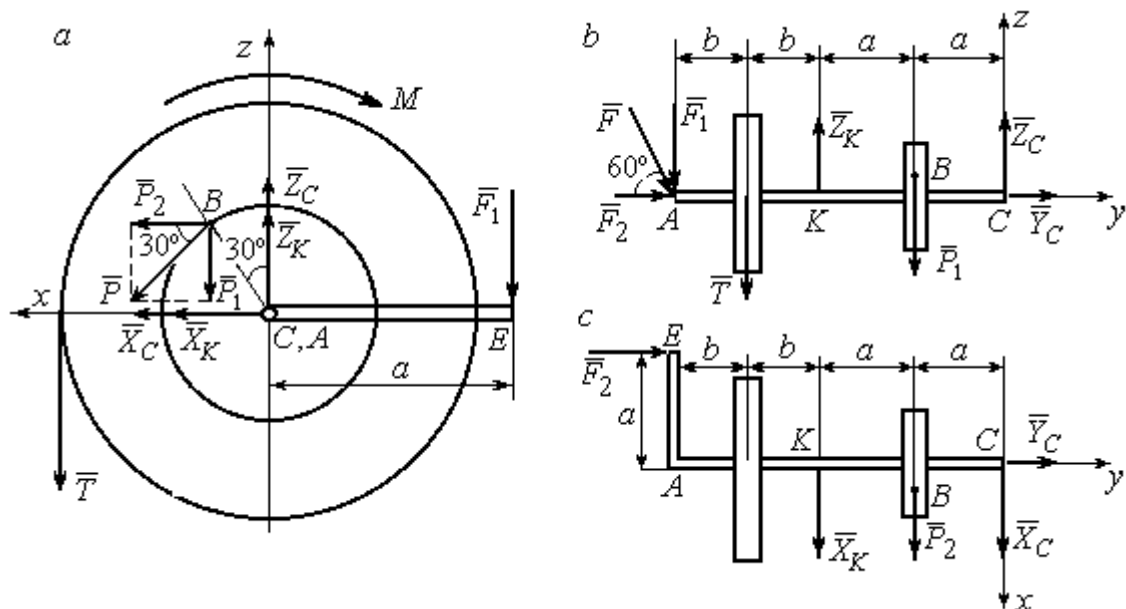


Рис. 1.16. Вал и действующие на него силы в проекциях на координатные плоскости:

- a – вид вала в проекции на плоскость zCx с положительного конца оси y ;
- b – вид вала в проекции на плоскость zCy с положительного конца оси x ;
- c – вид вала в проекции на плоскость xCy с положительного конца оси z .

На рис. 1.16, *a* показаны проекции всех сил на плоскость zCx . Вычисляя моменты проекций этих сил относительно точки C , получим значения моментов исходных сил относительно оси y .

Для вычисления моментов сил относительно оси x достаточно найти моменты проекций сил на плоскость zCy относительно точки C (см. рис. 1.16, *b*), а вычисляя моменты проекций сил на плоскость xCy относительно точки C , получим значения моментов сил относительно оси z .

Составляем уравнения равновесия:

$$\begin{aligned}\sum F_{kx} &= P_2 + X_K + X_C = 0, \quad \sum F_{ky} = F_2 + Y_C = 0, \\ \sum F_{kz} &= -P_1 + Z_K - T + Z_C - F_1 = 0, \\ \sum M_x(\vec{F}_k) &= P_1 a - Z_K 2a - T(2a + b) + F_1(2a + 2b) = 0, \\ \sum M_y(\vec{F}_k) &= -F_1 a + TR + Pr - M = 0, \\ \sum M_z(\vec{F}_k) &= P_2 a + X_K 2a - F_2 a = 0.\end{aligned}$$

Подставляя исходные данные задачи, с учётом того, что

$$P_1 = P \cos 60^\circ = 0,5P, \quad P_2 = P \cos 30^\circ = 0,87P,$$

$$F_1 = F \cos 30^\circ = 0,87F, \quad F_2 = F \cos 60^\circ = 0,5F \quad (\text{см. рис. 1.16 } a, b),$$

получим систему уравнений:

$$\begin{aligned}0,87 \cdot 4 + X_K + X_C &= 0, \quad 2 \cdot 0,5 + Y_C = 0, \quad -4 \cdot 0,5 + Z_K - 3 + Z_C - 2 \cdot 0,87 = 0, \\ 0,5 \cdot 4 \cdot 0,8 - 1,6Z_K - 3 \cdot 0,87(2 \cdot 0,8 + 0,4) &+ 2 \cdot 0,87(2 \cdot 0,8 + 2 \cdot 0,4) = 0, \\ -0,87 \cdot 0,8 + 3 \cdot 0,6 + 4 \cdot 0,3 - M &= 0, \quad 0,87 \cdot 4 \cdot 0,8 + 1,6 \cdot X_K - 2 \cdot 0,5 \cdot 0,8 = 0.\end{aligned}$$

Решая систему, найдём: $X_C = -2,24$ кН, $Y_C = -1$ кН, $Z_C = 6,39$ кН, $X_K = -1,24$ кН, $Z_K = 0,35$ кН, $M = 2,3$ кН·м.

Окончательно, реакция подпятника $R_C = \sqrt{X_C^2 + Y_C^2 + Z_C^2} = 6,84$ кН,

реакция подшипника $R_K = \sqrt{X_K^2 + Z_K^2} = 1,29$ кН.

Задача 2. Плита весом P расположена в вертикальной плоскости zAy . В точке A плита закреплена пространственным шарниром, а в точке B на оси y

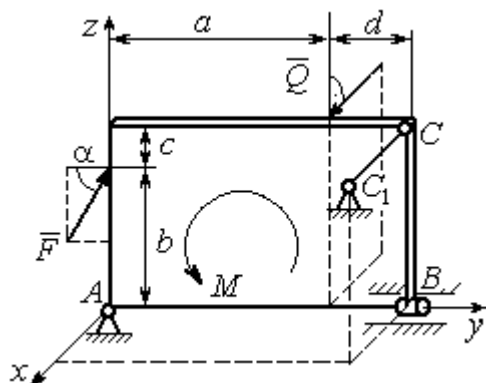


Рис. 1.17. Равновесие плиты

опирается на цилиндрический шарнир (подшипник). Плита удерживается в равновесии при помощи невесомого стержня CC_1 , прикрепленного шарниром к плите в её верхнем углу, в точке C перпендикулярно плоскости плиты (рис. 1.17).

На плиту действует сила $\bar{Q}$, приложенная на краю плиты перпендикулярно

её плоскости, и сила $\bar{F}$, лежащая в плоскости плиты и направленная под углом α к горизонту (см. рис. 1.17). Кроме того, в плоскости плиты на неё действует пара сил с моментом M . Найти реакции шарниров A и B и усилие в стержневой подпорке CC_1 при равновесии плиты, если параметры нагрузки: $P = 1$ кН, $Q = 500$ Н, $F = 400$ Н, $M = 300$ Н·м, $\alpha = 35^\circ$, $a = 2$ м, $b = 1,5$ м, $c = 0,2$ м, $d = 0,4$ м.

Решение

Заменим связи плиты их реакциями. Реакция шарнира A раскладывается на три составляющие: $\bar{X}_A$, $\bar{Y}_A$, $\bar{Z}_A$ по направлениям координатных осей. Направления координатных осей показаны на рис. 1.17. Реакция подшипника B лежит в плоскости, перпендикулярной оси подшипника, и ее составляющими будут вектора $\bar{X}_B$, $\bar{Z}_B$,

направленные вдоль координатных осей x , z . Реакция стержня $\bar{T}$ направлена вдоль стержня. Действие сил и реакций показано на рис.1.18.

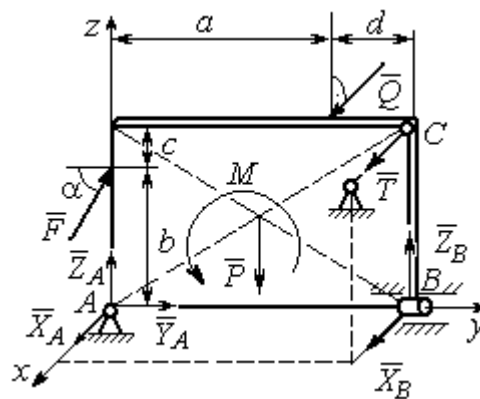


Рис. 1.18. Действие сил и реакций при равновесии плиты

Пространственная система сил, действующих на плиту, является уравновешенной: $(\vec{P}, \vec{F}, \vec{X}_B, \vec{Z}_B, \vec{T}, \vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Z}_A, M) \infty 0$. Уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx} = 0, \sum F_{ky} = 0, \sum F_{kz} = 0,$$

$$\sum M_x(\vec{F}_k) = 0, \sum M_y(\vec{F}_k) = 0, \sum M_z(\vec{F}_k) = 0.$$

В вычислениях моментов сил относительно осей будем считать момент положительным, если при взгляде со стороны положительного направления оси, сила вращает тело (плиту) против хода часовой стрелки. Получим:

$$\sum F_{kx} = 0, X_A + Q + X_B + T = 0,$$

$$\sum F_{ky} = 0, Y_A + F \cos \alpha = 0,$$

$$\sum F_{kz} = 0, Z_A + F \sin \alpha - P + Z_B = 0$$

$$\sum M_x(\vec{F}_k) = 0, -F \cos \alpha \cdot b - P \cdot 0,5(a + d) + Z_B(a + d) + M = 0,$$

$$\sum M_y(\vec{F}_k) = 0, Q \cdot (b + c) + T \cdot (b + c) = 0,$$

$$\sum M_z(\vec{F}_k) = 0, -Q \cdot a - T \cdot (a + d) - X_B \cdot (a + d) = 0.$$

Подставив исходные данные задачи, получим систему уравнений:

$$X_A + 500 + X_B + T = 0, Y_A + 400 \cdot 0,82 = 0, Z_A + 400 \cdot 0,57 - 1000 + Z_B = 0,$$

$$-400 \cdot 0,82 \cdot 1,5 - 1000 \cdot 0,5 \cdot 2,4 + Z_B \cdot 2,4 + 300 = 0,$$

$$500 \cdot 1,7 + T \cdot 1,7 = 0, -500 \cdot 2 - T \cdot 2,4 - X_B \cdot 2,4 = 0,$$

откуда находим значения составляющих реакций:

$$T = -500 \text{ Н}, X_B = 83,33 \text{ Н}, Z_B = 580 \text{ Н},$$

$$X_A = -83,33 \text{ Н}, Y_A = -328 \text{ Н}, Z_A = 192 \text{ Н}.$$

Полные реакции пространственного шарнира A:

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2 + Z_A^2} = 389,09 \text{ Н},$$

цилиндрического шарнира B: $R_B = \sqrt{X_B^2 + Z_B^2} = 585,95 \text{ Н}.$

2. КИНЕМАТИКА ТОЧКИ И ТВЕРДОГО ТЕЛА

Кинематикой называется раздел механики, в котором изучаются свойства движения материальных тел без учета их масс и действующих на них сил.

2.1. Кинематика точки. Основные параметры движения точки

Кривая, которую описывает движущаяся точка, называется **траекторией** точки. Движение точки может быть задано **векторным, координатным** или **естественным** способами.

Векторный способ основан на определении положения точки ее радиусом-вектором в виде векторного уравнения $\vec{r} = \vec{r}(t)$. При **координатном способе** задания движения точки положение точки определяется ее координатами, заданными для каждого момента времени: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$. **Естественный способ** задания движения используется, если заранее известна траектория движения точки. Тогда положение точки однозначно определяется длиной дуги $OM = S(t)$, отсчитываемой от некоторой фиксированной точки O , принятой за начало отсчета.

Мгновенная скорость, или скорость точки в данный момент времени, является векторной величиной и определяется как производная по времени от радиуса-вектора точки: $\vec{V} = \dot{\vec{r}}$. Вектор скорости точки $\vec{V}$ всегда направлен по касательной к траектории в сторону движения точки.

При координатном способе задания движения величины проекций вектора скорости $\vec{V}$ на координатные оси определяются как производные по времени от соответствующих координат: $V_x = \dot{x}$, $V_y = \dot{y}$, $V_z = \dot{z}$. Модуль вектора скорости: $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$. При естественном способе задания движения вектор скорости точки определяется равенством: $\vec{V} = \dot{S}\vec{\tau}$, где $S = S(t)$ – закон измене-

ния длины дуги, $\vec{\tau}$ –единичный вектор касательной к траектории движения, направленный в сторону возрастающих расстояний.

Величина $V = |\dot{S}|$ называется алгебраической скоростью точки. При $\dot{S} > 0$ вектор скорости $\vec{V}$ направлен по единичному вектору $\vec{\tau}$ – в сторону возрастающих расстояний. При $\dot{S} < 0$ он имеет направление, противоположное единичному вектору $\vec{\tau}$, т. е. в сторону убывающих расстояний.

Мгновенное ускорение, или ускорение точки в данный момент времени, является векторной величиной и определяется как производная по времени от вектора скорости точки или как вторая производная от радиус-вектора точки:

$\vec{a} = \dot{\vec{V}} = \ddot{\vec{r}}$. При координатном способе проекции вектора ускорения $\vec{a}$ на координатные оси – величины a_x, a_y, a_z – определяются равенствами: $a_x = \dot{V}_x = \ddot{x}$, $a_y = \dot{V}_y = \ddot{y}$, $a_z = \dot{V}_z = \ddot{z}$. Модуль вектора ускорения равен: $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

При естественном способе задания движения вектор ускорения точки $\vec{a}$ раскладывается на две взаимно перпендикулярные составляющие $\vec{a}_n$ и $\vec{a}_\tau$, параллельные осям n и τ естественной системы координат, и представляется в виде равенства $\vec{a} = a_\tau \vec{\tau} + a_n \vec{n}$, или $\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$, где $\vec{\tau}$ – единичный направляющий вектор оси, касательной к траектории (касательная ось); $\vec{n}$ – единичный направляющий вектор главной нормали траектории. Величина a_n называется

нормальным ускорением точки и вычисляется по формуле: $a_n = \frac{V^2}{\rho}$, где ρ –

радиус кривизны траектории. (У окружности радиус кривизны равен её радиусу, у прямой линии – бесконечности.) Вектор $\vec{a}_n$ нормальной составляющей ускорения всегда направлен к центру кривизны траектории. При движении по окружности радиус кривизны траектории равен радиусу окружности, а центр кривизны траектории совпадает с центром окружности. Величина a_τ называется **касательным ускорением** и равна модулю второй производной от заданно-

го закона изменения длины дуги: $a_\tau = |\ddot{S}|$, где $S = S(t)$ – закон изменения длины дуги. Направление вектора касательного ускорения $\vec{a}_\tau$ зависит от знака второй производной $\ddot{S}$. При $\ddot{S} > 0$ вектор $\vec{a}_\tau$ направлен в сторону возрастающих расстояний, по направлению единичного вектора $\vec{\tau}$, при $\ddot{S} < 0$ – в сторону убывающих расстояний (противоположно единичному вектору $\vec{\tau}$). Вектор полного ускорения $\vec{a}$ направлен по диагонали прямоугольника, построенного на векторах $\vec{a}_n$ и $\vec{a}_\tau$. Модуль вектора ускорения: $a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}$.

2.2. Вращение тела вокруг неподвижной оси

Движение тела, при котором все точки некоторой его прямой остаются неподвижными, называется **вращательным**, а указанная прямая называется осью вращения. Вращение тела задается углом поворота $\varphi = \varphi(t)$ подвижной плоскости, связанной с телом, относительно некоторого ее начального положения. Направление вращения с возрастанием угла поворота считается положительным.

Величина **угловой скорости** вращения тела равна модулю производной от угла поворота тела по времени: $\omega = |\dot{\varphi}|$. Направление угловой скорости вращения тела зависит от знака производной $\dot{\varphi}$. При $\dot{\varphi} > 0$ вращение происходит в положительном направлении, в сторону возрастания угла поворота, при $\dot{\varphi} < 0$ – в отрицательном. Направление угловой скорости обычно показывают дуговой стрелкой вокруг оси вращения. Вектор угловой скорости $\vec{\omega}$ направлен вдоль оси вращения в сторону, откуда вращение тела видно против хода часовой стрелки.

Величина **углового ускорения** при вращении тела равна модулю второй производной от угла поворота тела по времени: $\varepsilon = |\ddot{\varphi}|$. Если $\ddot{\varphi}$ одного знака с

$\dot{\varphi}$, то угловое ускорение ускоряет вращение тела, если разных знаков, то угловое ускорение замедляет вращение.

При вращательном движении тела все его точки движутся по окружностям, радиусы которых равны расстояниям от выбранной точки до неподвижной оси. **Скорость точки вращающегося твердого тела** (в отличие от угловой скорости тела) называют **линейной**, или **окружной скоростью** точки. Величина скорости рассчитывается по формуле: $V = \omega h$, где ω – величина угловой скорости тела; h – расстояние от точки до оси вращения. Вектор скорости точки лежит в плоскости описываемой точкой окружности и направлен по касательной к ней в сторону вращения тела. Отношение скоростей двух точек вращающегося тела равно отношению расстояний от этих точек до оси: $\frac{V_{M1}}{V_{M2}} = \frac{h_1}{h_2}$.

Ускорение точки вращающегося твердого тела рассчитывается как ускорение точки при естественном способе задания движения в виде суммы векторов касательного и нормального ускорений: $\vec{a}_M = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$. Величины касательного, нормального и полного ускорений точки вращающегося тела, соответственно: $a_\tau = \varepsilon h$, $a_n = \omega^2 h$, $a_M = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$, где ω , ε – угловая скорость и угловое ускорение тела; h – расстояние от точки до оси вращения.

2.3. Плоскопараллельное движение твёрдого тела

Плоскопараллельным, или плоским движением твердого тела, называется такое движение, при котором все точки тела движутся параллельно некоторой неподвижной плоскости. Плоское движение представляется в виде суммы мгновенного поступательного движения, при котором все точки плоской фигуры движутся со скоростью выбранной точки-полюса, и мгновенного вращательного движения вокруг этого полюса.

Скорость любой точки M плоской фигуры равна векторной сумме вектора скорости точки-полюса и вектора скорости точки M при вращении тела вокруг этого полюса: $\vec{V}_M = \vec{V}_A + \vec{V}_{MA}$, где $\vec{V}_M$ – скорость точки M ; $\vec{V}_A$ – скорость полюса A ; $\vec{V}_{MA}$ – вектор скорости точки M при вращении тела вокруг полюса A , модуль скорости $V_{MA} = \omega \cdot MA$, где ω – угловая скорость мгновенного вращательного движения тела вокруг полюса; MA – расстояние между полюсом A и точкой M .

Мгновенным центром скоростей называется такая точка P плоской фигуры, скорость которой в данный момент времени равна нулю. Выбрав в качестве полюса мгновенный центр скоростей, скорость любой точки плоской фигуры находят так, как если бы мгновенное движение фигуры было вращательным вокруг мгновенного центра скоростей.

Способы построения мгновенного центра скоростей

1. Если известны направления скоростей $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$ каких-нибудь двух точек A и B плоской фигуры, то мгновенный центр скоростей находится в точке пересечения перпендикуляров, восстановленных из этих точек к векторам скоростей (рис. 2.1, *a*).

2. Если скорости $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$ двух точек A и B плоской фигуры известны и параллельны друг другу, а линия AB перпендикулярна $\vec{V}_A$ (и, конечно, $\vec{V}_B$), то мгновенный центр скоростей определяется как точка пересечения линий, проведенных через основания и вершины векторов скоростей (построение показано на рис. 2.1, *b, c*).

3. Если скорости $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$ двух точек A и B параллельны друг другу, но линия AB , соединяющая эти точки, не перпендикулярна векторам скоростей (рис. 2.1, *d*), то мгновенная угловая скорость тела равна нулю и движение тела

в данный момент времени является мгновенным поступательным. В этом случае скорости всех точек равны по величине и направлению.

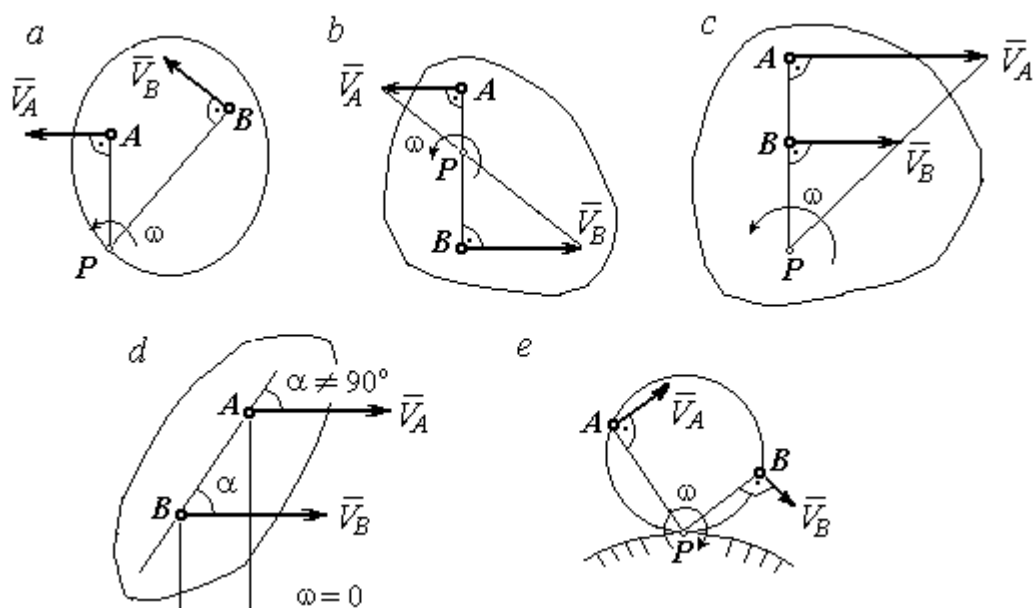


Рис. 2.1. Способы построения мгновенного центра скоростей

4. Если плоскопараллельное движение осуществляется путем качения без скольжения одного тела по неподвижной поверхности другого, то мгновенный центр скоростей расположен в точке касания катящегося тела с неподвижной поверхностью (рис. 2.1, e).

Ускорение любой точки M плоской фигуры при плоскопараллельном движении твердого тела представляется как сумма векторов – ускорения полюса и ускорения точки M при вращении фигуры вокруг полюса. Учитывая, что ускорение точки вращающегося тела представляется как сумма нормального и касательного ускорений, получим:

$$\vec{a}_M = \vec{a}_A + \vec{a}_{MA}^{\tau} + \vec{a}_{MA}^n,$$

где $\vec{a}_A$ – ускорение полюса A ; $\vec{a}_{MA}^{\tau}$, $\vec{a}_{MA}^n$ – касательная и нормальная составляющие ускорения точки M при вращении фигуры вокруг полюса A .

Вектор нормального ускорения $\vec{a}_{MA}^n$ всегда направлен от точки M к полюсу A . Вектор касательного ускорения $\vec{a}_{MA}^\tau$ направлен перпендикулярно отрезку AM в сторону вращения, если оно ускоренное (рис. 2.2, *a*), и против вращения, если оно замедленное (рис. 2.2, *b*). Численно величины касательного и

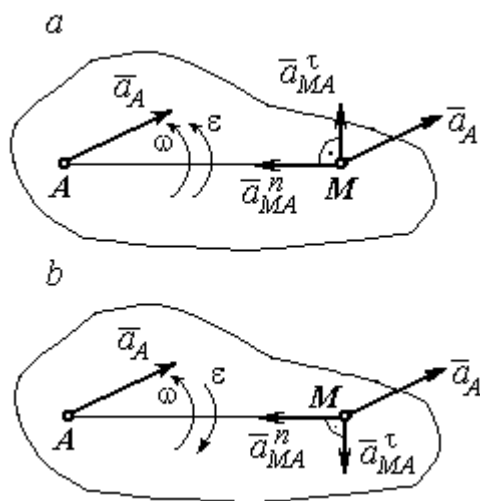


Рис. 2.2. Ускорение точки плоской фигуры:

a – ускоренное движение;
b – замедленное движение

нормального составляющих ускорения точки M определяются по формулам:

$$a_{MA}^\tau = \varepsilon \cdot AM, \quad a_{MA}^n = \omega^2 \cdot AM,$$

где ω , ε – угловая скорость и угловое ускорение тела (плоской фигуры); AM – расстояние от точки M до полюса A (см. рис. 2.2).

Если при движении плоской фигуры известны траектории движения полюса A и точки M , то для определения ускорения точки M используется векторное равенство

$$\vec{a}_M^\tau + \vec{a}_M^n = \vec{a}_A^\tau + \vec{a}_A^n + \vec{a}_{MA}^\tau + \vec{a}_{MA}^n,$$

где $\vec{a}_M^\tau$, $\vec{a}_M^n$, $\vec{a}_A^\tau$, $\vec{a}_A^n$ – касательная и нормальная составляющие ускорения точки M и полюса A при движении их по заданным траекториям.

2.4. Задание К1. Определение скоростей и ускорений точек твердого тела при поступательном и вращательном движениях

По заданному движению одного из звеньев механизма $x_1 = x_1(t)$ (варианты 1, 3, 5, 7, 9) или $\varphi_1 = \varphi_1(t)$ (варианты 2, 4, 6, 8, 10) найти в момент времени t_1 скорость, касательное, нормальное и полное ускорения точки M звена механизма, совершающего вращательное движение, а также скорость и ускорение звена 4, совершающего поступательное движение.

Варианты заданий даны на рис. 2.3, 2.4. Исходные данные представлены в табл. 2.1.

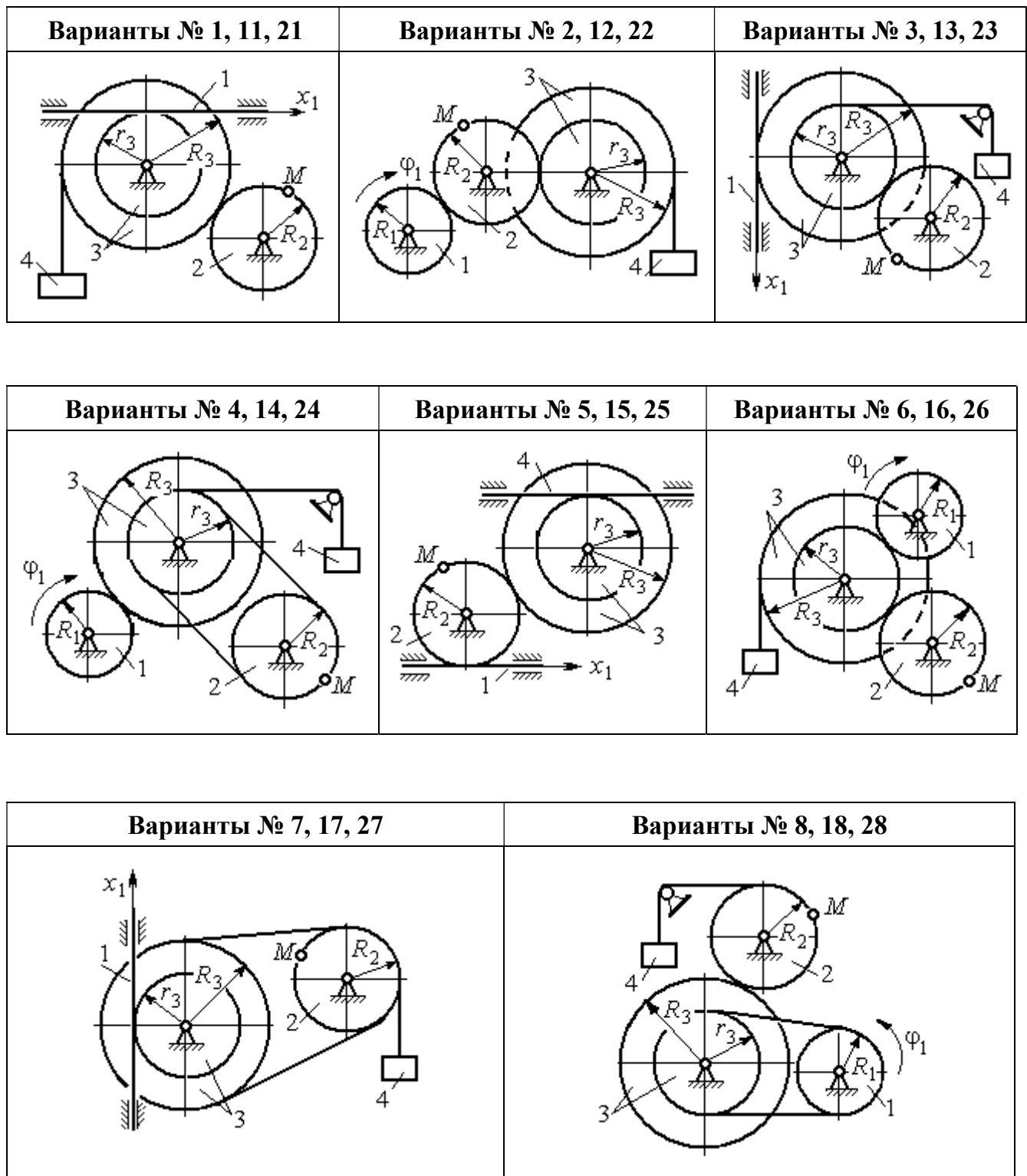


Рис. 2.3. Задание К1. Определение скоростей и ускорений точек при поступательном и вращательном движениях твёрдого тела.

Номера вариантов задания 1 – 8, 11 – 18, 21 – 28

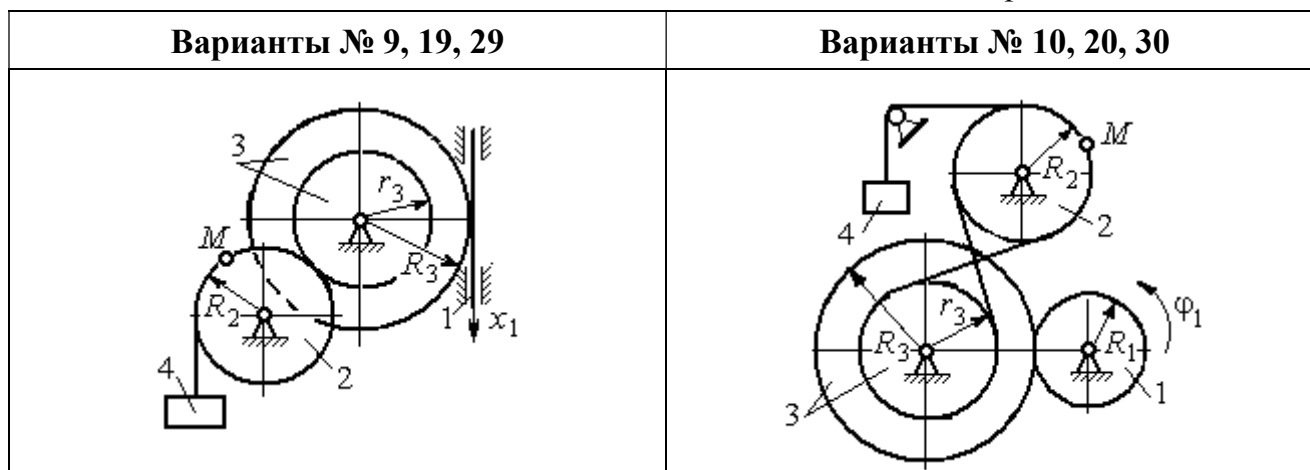


Рис. 2.4. Задание К1. Определение скоростей и ускорений точек при поступательном и вращательном движениях твёрдого тела.
Номера вариантов задания 9 – 10, 19 – 20, 29 – 30

Таблица 2.1

Исходные данные вариантов задания К1. Определение скоростей и ускорений точек при поступательном и вращательном движениях твёрдого тела

Номер варианта задания	R_1 , см	R_2 , см	R_3 , см	r_3 , см	$x_1(t)$, см $\varphi_1(t)$, рад	t_1 , с
1	—	40	45	35	$x_1(t) = (3t - 1)^2$	2
2	10	20	38	18	$\varphi_1(t) = t^2 + 6\cos(\pi t/6)$	3
3	—	30	42	18	$x_1(t) = 5t^2 - 2\cos(\pi t/2)$	1
4	15	30	45	20	$\varphi_1(t) = 5t^2 + \cos(\pi t/2)$	2
5	—	30	40	20	$x_1(t) = 6t - \cos(\pi t/3)$	3
6	10	20	30	10	$\varphi_1(t) = t^3 - \cos(\pi t/2)$	1
7	—	30	40	30	$x_1(t) = 2\sin(\pi t/2) + \cos(\pi t/2)$	2
8	8	10	30	25	$\varphi_1(t) = 5t + \cos(\pi t/2)$	2
9	—	18	30	18	$x_1(t) = 5t + \cos(\pi t/3)$	3
10	15	30	50	20	$\varphi_1(t) = 2t^2 + \sin(\pi t/4)$	2
11	—	30	40	25	$x_1(t) = (t^2 - 3t)$	2
12	12	20	40	28	$\varphi_1(t) = 3t^2 + 6\sin(\pi t/6)$	3
13	—	25	60	42	$x_1(t) = 2t^2 + \cos(\pi t/2)$	1
14	10	30	45	30	$\varphi_1(t) = 3t^2 + 2\cos(\pi t/2)$	2

Номер варианта задания	R_1 , см	R_2 , см	R_3 , см	r_3 , см	$x_1(t)$, см $\varphi_1(t)$, рад	t_1 , с
15	—	20	30	20	$x_1(t) = 3t^2 - \cos(\pi t/3)$	3
16	12	18	40	20	$\varphi_1(t) = 2t^3 + \cos(\pi t/2)$	1
17	—	20	35	15	$x_1(t) = 2 \sin(\pi t/2) - \cos(\pi t/2)$	2
18	15	18	40	25	$\varphi_1(t) = 5t + \cos(\pi t/2)$	1
19	—	22	50	18	$x_1(t) = t^2 + \cos(\pi t/3)$	3
20	10	20	45	10	$\varphi_1(t) = 2t^2 + \sin(\pi t/4)$	4
21	—	20	40	20	$x_1(t) = t + (3t - 4)^2$	2
22	8	18	42	18	$\varphi_1(t) = 2t^2 + 12 \cos(\pi t/6)$	3
23	—	45	60	40	$x_1(t) = 4t^2 + \sin(\pi t/2)$	1
24	5	15	30	20	$\varphi_1(t) = 2t^2 + 4 \cos(\pi t/2)$	2
25	—	15	35	25	$x_1(t) = 2t^2 + \cos(\pi t/3)$	3
26	18	20	35	20	$\varphi_1(t) = 2t^3 + \sin(\pi t/2)$	1
27	—	15	35	15	$x_1(t) = 2 \sin(\pi t/2) - \cos(\pi t/2)$	1
28	10	12	40	25	$\varphi_1(t) = 2t^2 + \cos(\pi t/2)$	1
29	—	35	50	10	$x_1(t) = t^3 - \cos(\pi t/2)$	1
30	10	20	40	10	$\varphi_1(t) = 2t^2 + \cos(\pi t/4)$	4

Пример выполнения задания К1. Определение скоростей и ускорений точек при поступательном и вращательном движениях твёрдого тела

По заданному уравнению движения звена 1 механизма (рис. 2.5, а) определить скорость, нормальное, касательное и полное ускорения точки M на момент времени t_1 , а также скорость и ускорение звена 4, если значения радиусов колес механизма и закон движения звена 1: $R_2 = 20$ см, $r_2 = 5$ см, $R_3 = 8$ см, $r_3 = 4$ см, $x_1 = 2t^2 - 5t$ см, $t_1 = 1$ с.

Решение

Отметим на схеме положительные направления отсчета углов поворота дисков 2 и 3, соответствующие заданному положительному направлению движения звена 1.

Направления показаны на рис 2.5, *b* дуговыми стрелками φ_2 , φ_3 , а положительное направление движения звена 4 – направлением оси x_4 .

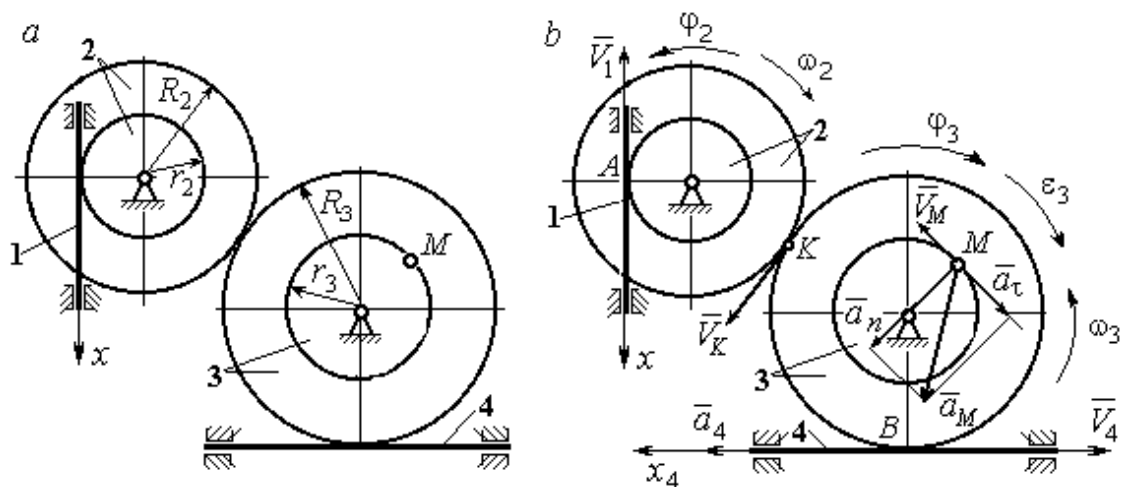


Рис. 2.5. Кинематика вращательного движения твердого тела:
a – схема механизма; *b* – расчетная схема для определения скоростей и ускорений точек механизма

Звено 1 движется поступательно. Движение задано координатным способом в виде закона изменения координаты x . Дифференцируем по времени уравнение движения: $\dot{x} = 4t - 5$ см/с. В момент времени $t_1 = 1$ с значение производной: $\dot{x}(1) = -1$ см/с. Отрицательное значение производной $\dot{x}$ показывает, что в данный момент времени звено 1 движется в отрицательном направлении оси x . Скорость звена 1 равна модулю производной: $V_1 = |\dot{x}|$. На рис. 2.5, *b* направление движения звена 1 в момент времени $t_1 = 1$ с показано вектором скорости $\vec{V}_1$, направленным в сторону, противоположную положительному направлению оси x . Эту же скорость будет иметь точка A – точка контакта звена 1 с диском 2, лежащая на расстоянии r_2 от оси вращения диска. Следовательно, $V_1 = V_A = \omega_2 r_2$, где ω_2 – угловая скорость диска 2. Отсюда угловая скорость диска: $\omega_2 = \frac{V_A}{r_2} = \frac{|4t - 5|}{5} = |\dot{\varphi}_2|$ рад/с. При $t_1 = 1$ с значение производной отрицательно: $\dot{\varphi}_2(1) = -0,2$ рад/с. Это означает, что в заданный момент времени вращение диска 2 с угловой скоростью $\omega_2(1) = |\dot{\varphi}_2(1)| = 0,2$ рад/с происходит

в отрицательном для диска 2 направлении. На рис. 2.5, *b* направление вращения диска 2 показано дуговой стрелкой ω_2 в сторону, противоположную положительному направлению отсчета угла φ_2 . При передаче вращения диска 2 диску 3 величины угловых скоростей дисков обратно пропорциональны радиусам дисков, которым принадлежит точка контакта: $\frac{\omega_2}{\omega_3} = \frac{R_3}{R_2}$. Тогда, угловая скорость диска 3 $\omega_3 = \omega_2 \frac{R_2}{R_3} = |2t - 2,5| = |\dot{\varphi}_3|$ рад/с.

В момент времени $t_1 = 1$ с значение производной $\dot{\varphi}_3$ отрицательно: $\dot{\varphi}_3(1) = -0,5$ рад/с, и, следовательно, вращение диска 3 в данный момент времени с угловой скоростью $\omega_3(1) = |\dot{\varphi}_3(1)| = 0,5$ рад/с происходит в сторону, противоположную положительному направлению отсчета угла φ_3 , как показано на рис. 2.5, *b*. Величина (модуль) скорости точки M рассчитывается по формуле: $V_M = \omega_3 r_3$. В момент времени $t_1 = 1$ с модуль скорости $V_M(1) = 2$ см/с. Вектор скорости $\vec{V}_M$ расположен по касательной к траектории движения точки M (окружности) и направлен в сторону вращения диска 3 (см. рис. 2.5, *b*).

Звено 4 движется поступательно. Скорость звена 4 равна скорости точки касания его с диском 3: $V_4 = V_B = \omega_3 R_3 = |2t - 2,5| \cdot 8 = |\dot{x}_4|$. В момент времени $t_1 = 1$ с значение производной от координаты движения звена 4 отрицательно: $\dot{x}_4(1) = -4$ см/с. В результате, вектор скорости $\vec{V}_4(1)$, равный по модулю $V_4(1) = 4$ см/с, направлен вдоль оси x_4 в сторону, противоположную ее положительному направлению (см. рис. 2.5, *b*).

Угловое ускорение диска 3: $\varepsilon_3(t) = |\dot{\omega}_3| = |\ddot{\varphi}_3| = 2$ рад/с². Из того, что угловая скорость ω_3 и угловое ускорение $\dot{\omega}_3$ диска 3 имеют разные знаки, следует, что вращение диска 3 замедленное. Угловое ускорение диска направлено в сторону положительного направления отсчета угла поворота φ_3 , диска 3 (см. рис. 2.5, *b*).

Касательное ускорение a_τ точки M рассчитывается по формуле $a_\tau = \varepsilon_3 r_3$ и в момент времени $t_1 = 1$ с: $a_\tau = 8$ см/с². Так как вращение диска 3 замедленное, вектор касательного ускорения точки M $\vec{a}_\tau(t)$ направлен в сторону, противоположную вектору скорости $\vec{V}_M(1)$ (см. рис. 2.5, b). Нормальное ускорение a_n точки M рассчитывается как $a_n = \omega_3^2 r_3$. В момент времени $t_1 = 1$ с величина нормального ускорения: $a_n(1) = 1$ см/с². Вектор нормального ускорения $\vec{a}_n(1)$ направлен по радиусу к центру диска 3 (см. рис. 2.5, b). Полное ускорение точки M в заданный момент времени: $a_M(1) = \sqrt{a_\tau^2(1) + a_n^2(1)} = 8,06$ см/с². Вектор полного ускорения $\vec{a}_M$ направлен по диагонали прямоугольника, построенного на векторах $\vec{a}_n$ и $\vec{a}_\tau$.

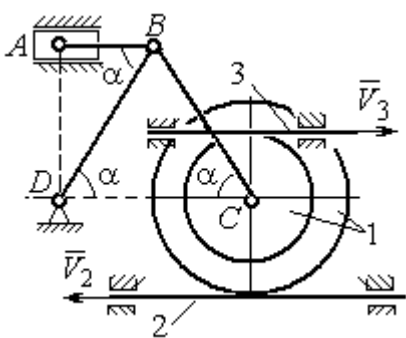
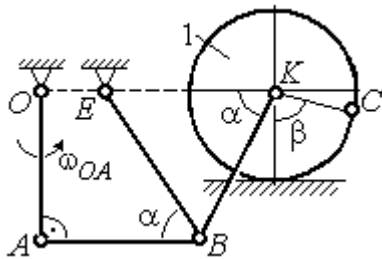
Ускорение a_4 звена 4 находится из условия, что звено 4 движется поступательно и прямолинейно. При прямолинейном движении нормальная составляющая ускорения равна нулю. Тогда $a_4 = a_{4\tau} = \dot{V}_4 = \dot{V}_B = |\dot{\omega}_3| R_3 = \varepsilon_3 R_3$.

Так как угловое ускорение диска 3 является постоянной величиной, ускорение a_4 не зависит от времени: $a_4 = 16$ см/с². Вектор ускорения $\vec{a}_4$ направлен вдоль оси x_4 в сторону положительных значений.

2.5. Задание К2. Определение скоростей точек твёрдого тела при плоскопараллельном движении

Для заданного положения плоского механизма определить скорости точек и угловые скорости звеньев механизма.

Варианты заданий показаны на рис. 2.6 – 2.8. Исходные данные вариантов заданий выбираются из таблиц, приведённых на рисунках схем механизмов.

Варианты № 1, 11, 21							Варианты № 2, 12, 22						
 Найти: $V_A, V_B, V_C, \omega_{AB}, \omega_{BC}, \omega_1, \omega_{BD}$							 Найти: $V_A, V_B, V_K, \omega_1, \omega_{AB}, \omega_{OA}, \omega_{BE}, \omega_{BK}$						
Номер варианта задания	R_1 , см	r_1 , см	AD , см	α , град	V_2 , см/с	V_3 , см/с	Номер варианта задания	R_1 , см	OA , см	OE , см	α , град	β , град	V_C , см/с
1	10	5	20	30	8	10	2	3	5	4	30	60	10
11	12	8	25	45	10	4	12	4	8	6	45	90	8
21	10	6	15	60	5	5	22	5	12	2	60	120	12

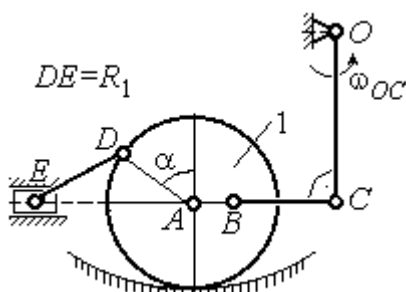
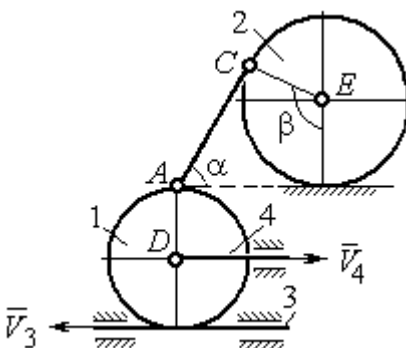
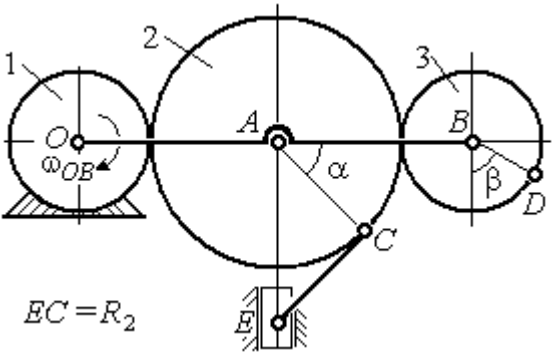
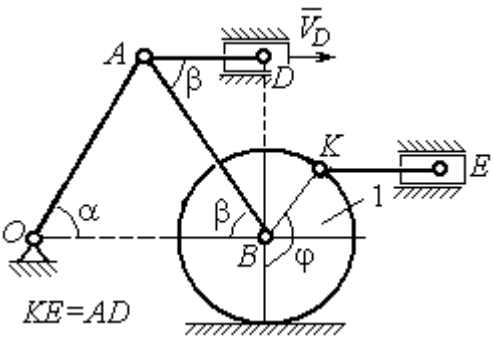
Варианты № 3, 13, 23							Варианты № 4, 14, 24						
 Найти: $V_A, V_B, V_C, V_D, V_E, \omega_{BC}, \omega_1, \omega_{DE}$							 Найти: $V_A, V_C, V_E, \omega_1, \omega_2, \omega_{AC}$						
Номер варианта задания	R_1 , см	OC , см	AB , см	BC , см	α , град	ω_{OC} , рад/с	Номер варианта задания	R_1 , см	R_2 , см	α , град	β , град	V_3 , см/с	V_4 , см/с
3	12	18	10	35	60	4	4	10	15	30	60	8	4
13	10	15	10	25	90	8	14	6	10	45	90	4	6
23	15	20	5	20	120	6	24	10	12	60	120	3	3

Рис. 2.6. Задание К2. Определение скоростей точек тела при плоскопараллельном движении. Номера вариантов задания 1 – 4, 11 – 14, 21 – 24

Варианты № 5, 15, 25							Варианты № 6, 16, 26						
 Найти: $V_A, V_B, V_C, V_D, V_E, \omega_2, \omega_3, \omega_{EC}$							 Найти: $V_A, V_B, V_K, V_E, \omega_1, \omega_{OA}, \omega_{AB}, \omega_{AD}, \omega_{KE}$						
Номер варианта задания	R_1 , см	R_2 , см	R_3 , см	α , град	β , град	ω_{OB} , рад/с	Номер варианта задания	R_1 , см	OA , см	α , град	β , град	φ , град	V_D , см/с
5	10	20	12	60	0	6	6	10	20	30	60	60	12
15	6	18	10	90	90	8	16	12	26	30	30	90	8
25	20	25	15	120	180	4	26	15	30	60	60	120	15

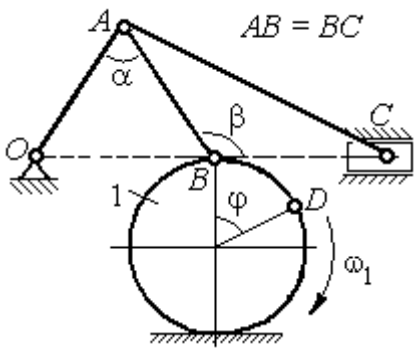
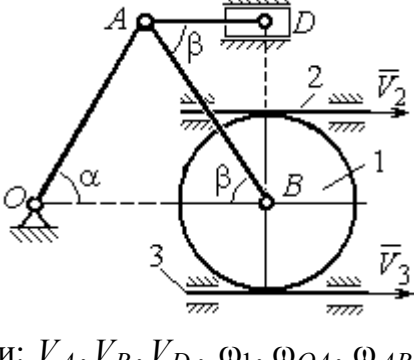
Варианты № 7, 17, 27							Варианты № 8, 18, 29						
 Найти: $V_A, V_B, V_C, \omega_1, \omega_{OA}, \omega_{AB}, \omega_{AC}$							 Найти: $V_A, V_B, V_D, \omega_1, \omega_{OA}, \omega_{AB}, \omega_{AD}$						
Номер варианта задания	R_1 , см	AB , см	α , град	β , град	φ , град	V_D , см/с	Номер варианта задания	R_1 , см	OA , см	α , град	β , град	V_2 , см/с	V_3 , см/с
7	10	20	30	60	60	12	8	10	20	30	60	12	4
17	12	25	60	120	90	16	18	12	26	30	30	8	2
27	8	16	30	60	120	10	28	15	30	60	60	6	3

Рис. 2.7. Задание K2. Определение скоростей точек тела при плоскопараллельном движении. Номера вариантов задания 5 – 8, 15 – 18, 25 – 28

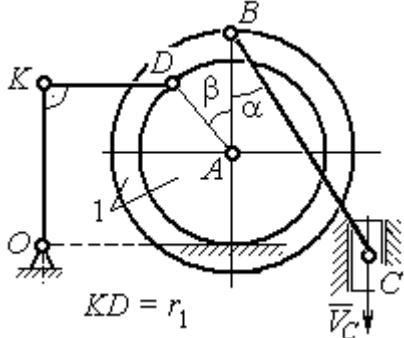
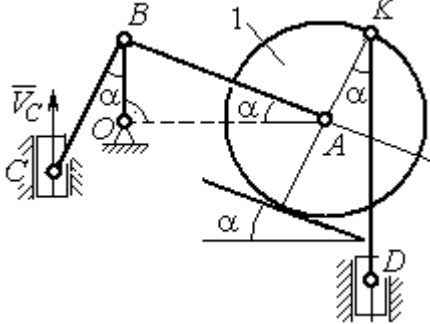
Варианты № 9, 19, 29							Варианты № 10, 20, 30						
 Найти: ω_{OK}, ω_{KD}, ω_{BC}, ω_1, V_A, V_B, V_K, V_D							 Найти: V_A, V_B, V_D, V_K, ω_{CB}, ω_1, ω_{OB}, ω_{AB}, ω_{KD}						
Номер вари- анта задания	R_1 , см	r_1 , см	α , град	β , град	BC , см	V_C , см/с	Номер вари- анта задания	R_1 , см	CB , см	OB , см	KD , см	α , град	V_C , см/с
9	20	12	45	60	60	8	10	10	20	30	60	30	4
19	24	16	60	90	50	4	20	12	26	30	50	45	2
29	16	10	30	120	40	6	30	15	30	60	60	60	3

Рис. 2.8. Задание К2. Определение скоростей точек тела при плоскопараллельном движении. Номера вариантов задания 9 – 10, 19 – 20, 29 – 30

Пример выполнения задания К2. Определение скоростей точек твёрдого тела при плоскопараллельном движении

Задача 1. Плоский механизм (рис. 2.9) состоит из стержня OC и подвижных дисков 2 и 3 радиусами r_2 , r_3 , шарнирно закрепленными на стержне, соответственно, в точках A и C . Стержень OC вращается вокруг неподвижного центра O с угловой скоростью ω_{OC} . Диск 2, увлекаемый стержнем OC , катится без проскальзывания по неподвижной поверхности диска 1 радиусом r_1 . Диск 3, также увлекаемый стержнем OC , катится без проскальзыва-

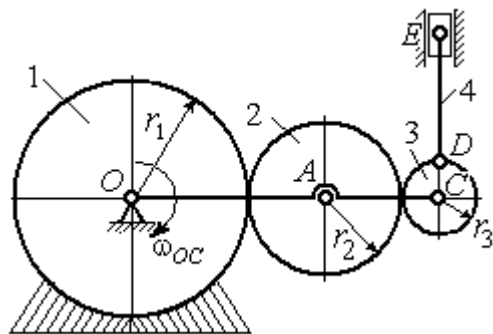


Рис. 2.9. Схема плоского механизма

ния по подвижному диску 2. В точке D , расположенной на краю диска 3, шарнирно прикреплен стержень 4, к которому в точке E шарнирно прикреплен поршень E , способный совершать только вертикальное перемещение. Для заданного положения механизма (см. рис. 2.9), когда стержень OC горизонтален, стержень DE направлен по линии вертикального диаметра диска 3, найти скорости точек A , C , D , E , угловые скорости дисков 2, 3 и стержня 4, если: $r_1 = 6$ см, $r_2 = 4$ см, $r_3 = 2$ см, $DE = 10$ см, $\omega_{OC} = 1$ рад/с.

Решение

Определим скорость точки A , общей для стержня OC и диска 2: $V_A = \omega_{OC}(r_1 + r_2) = 10$ см/с. Вектор скорости $\vec{V}_A$ перпендикулярен стержню OC

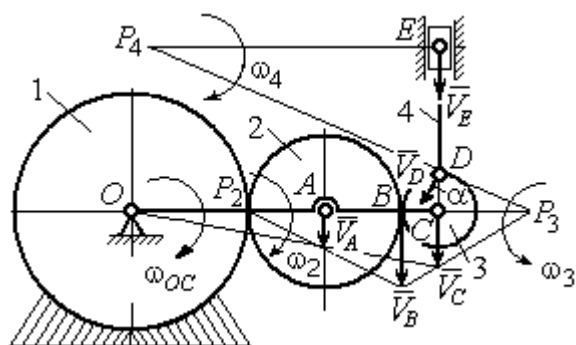


Рис. 2.10. Расчетная схема для определения скоростей точек механизма и угловых скоростей его звеньев

и направлен в сторону его вращения (рис. 2.10).

Диск 2 катится по неподвижной поверхности диска 1. Точка касания диска 2 с неподвижным диском 1 является мгновенным центром скоростей диска 2. На рис. 2.10 центр скоростей диска 2 обозначен точкой P_2 . В этом случае скорость точки A может быть

определена через угловую скорость диска ω_2 следующим образом:

$V_A = \omega_2 \cdot AP_2 = 4\omega_2$. Так как $V_A = 10$ см/с, получим $\omega_2 = 2,5$ рад/с.

Для того чтобы найти угловую скорость диска 3, необходимо определить положение его мгновенного центра скоростей. С этой целью вычислим скорости точек B и C . Скорость точки B может быть найдена через угловую скорость диска 2: $V_B = \omega_2 \cdot BP_2 = 20$ см/с. Вектор скорости $\vec{V}_B$ перпендикулярен отрезку BP_2 и направлен в сторону мгновенного вращения диска 2 вокруг своего центра скоростей P_2 .

Скорость точки C определяется через угловую скорость стержня OC : $V_C = \omega_{OC}(r_1 + 2r_2 + r_3) = 16$ см/с. Вектор скорости $\vec{V}_C$ перпендикулярен стержню OC и направлен в сторону его вращения (см. рис. 2.10).

Построение мгновенного центра скоростей P_3 диска 3 по известным скоростям $\vec{V}_B$ и $\vec{V}_C$ показано на рис. 2.10. Его положение определяется из условия, что отношение скоростей двух точек тела, совершающего плоскопараллельное движение, равно отношению расстояний от этих точек до мгновенного центра скоростей: $\frac{V_B}{V_C} = \frac{r_3 + CP_3}{CP_3}$. Разрешая пропорцию относительно неизвестной величины CP_3 , получим: $CP_3 = 8$ см. Скорость точки C выражается через угловую скорость диска 3 $V_C = \omega_3 \cdot CP_3$. Отсюда величина угловой скорости диска 3: $\omega_3 = \frac{V_C}{CP_3} = 2$ рад/с. Направление мгновенного вращения диска 3 вокруг своего центра скоростей определяется известными направлениями скоростей точек C и B , принадлежащих диску 3 (см. рис. 2.10). Скорость точки D $V_D = \omega_3 \cdot DP_3 = 2 \cdot \sqrt{2^2 + 8^2} = 16,5$ см/с. Вектор скорости $\vec{V}_D$ перпендикулярен отрезку DP_3 и направлен в сторону мгновенного вращения диска 3 вокруг центра P_3 .

Для определения скорости поршня E воспользуемся теоремой о проекциях скоростей точек плоской фигуры, согласно которой проекции скоростей двух точек плоской фигуры на ось, проходящую через эти точки, равны между собой. Проведем ось через точки D и E . По построению, угол α между вектором $\vec{V}_D$ и осью DE равен углу $\angle DP_3C$ (см. рис. 2.10). Тогда, $\cos \alpha = \frac{CP_3}{DP_3} = \frac{8}{\sqrt{2^2 + 8^2}} = 0,97$, откуда $\alpha = 14^\circ$. На основании теоремы о проекциях скоростей точек плоской фигуры имеем равенство: $V_D \cos \alpha = V_E \cos 0$, откуда скорость точки E : $V_E = 16$ см/с.

Мгновенный центр скоростей стержня 4 – точка P_4 – определяется как точка пересечения перпендикуляров к векторам скоростей $\vec{V}_D$ и $\vec{V}_E$, восстановленных, соответственно, из точек D и E (см. рис. 2.10). Угловая скорость стержня 4, совершающего мгновенный поворот вокруг своего центра скоростей, равна: $\omega_4 = \frac{V_E}{EP_4}$, где EP_4 – расстояние от точки E до мгновенного центра скоростей звена 4, $EP_4 = DE \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 40$ см. В результате, $\omega_4 = 0,4$ рад/с. Направление мгновенного вращения звена 4 вокруг своего центра скоростей определяется направлением скорости точки D .

Задача 2. В плоском стержневом механизме (рис. 2.11) кривошипы OA и ED вращаются вокруг неподвижных центров O и E . В крайней точке D кривошипа ED к нему прикреплен шатун DB , второй конец которого в точке B прикреплен к кривошипу OA . Шатун AC прикреплен в точке A к кривошипу AO , а другим своим концом – к ползуну C , способному совершать только вертикальное движение. Все соединения шарнирные. В заданном положении механизма кривошип OA вертикален, шатун DB расположен горизонтально, кривошип ED наклонен под углом 60° к горизонтали, а шатун AC отклонен на угол 30° от вертикального положения кривошипа AO . Найти скорости всех отмеченных на схеме точек и угловые скорости всех звеньев, если линейные размеры звеньев механизма $AC = 6$ см, $AB = 2$ см, $BO = 8$ см, $DB = 10$ см и скорость ползуна в данный момент $V_C = 4$ см/с.

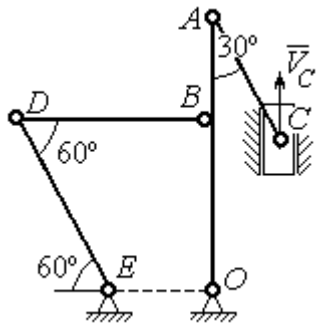


Рис. 2.11. Стержневой механизм

В заданном положении механизма кривошип OA вертикален, шатун DB расположен горизонтально, кривошип ED наклонен под углом 60° к горизонтали, а шатун AC отклонен на угол 30° от вертикального положения кривошипа AO . Найти скорости всех отмеченных на схеме точек и угловые скорости всех звеньев, если линейные размеры звеньев механизма $AC = 6$ см, $AB = 2$ см, $BO = 8$ см, $DB = 10$ см и скорость ползуна в данный момент $V_C = 4$ см/с.

Решение

Кривошипы OA и ED совершают вращательные движения вокруг неподвижных центров. Скорости $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$ точек A и B перпендикулярны кривоши-

пу OA , а скорость $\vec{V}_D$ точки D перпендикулярна кривошипу ED . Направления векторов скоростей точек показаны на рис. 2.12.

Шатун AC совершает плоскопараллельное движение. Его мгновенный центр скоростей P_1 находится как точка пересечения перпендикуляров к скоростям $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_C$. Угловая скорость звена AC равна

$$\omega_{AC} = \frac{V_C}{P_1C} = \frac{V_C}{AC \cdot \sin 30^\circ} = \frac{4}{3} \text{ рад/с.}$$

Далее, по-

лагая, что точка A принадлежит шатуну AC , найдем её скорость:

$$V_A = \omega_{AC} \cdot P_1A = \frac{4}{3} AC \cdot \cos 30^\circ = 4\sqrt{3} \text{ см/с.}$$

Теперь, исходя из того, что точка A принадлежит как шатуну AC , так и кривошипу OA , найдём его угловую скорость: $\omega_{AO} = \frac{V_A}{AO} = 0,4\sqrt{3} \text{ рад/с.}$ Скорость точки B кривошипа $V_B = \omega_{AO} \cdot OB = 3,2\sqrt{3} \text{ см/с.}$

Шатун DB совершает плоскопараллельное движение. Зная направления скоростей точек B и D , построим мгновенный центр скоростей P_2 звена DB как точку пересечения перпендикуляров к скоростям $\vec{V}_B$ и $\vec{V}_D$ (см. рис. 2.12). Тогда, угловая скорость шатуна DB

$$\omega_{DB} = \frac{V_B}{P_2B} = \frac{3,2\sqrt{3}}{DB \cdot \tan 60^\circ} = 0,32 \text{ рад/с.}$$

Скорость

$$\text{точки } D \quad V_D = \omega_{DB} \cdot P_2D = 0,32 \frac{DB}{\sin 30^\circ} = 6,4 \text{ см/с.}$$

Угловая скорость кривошипа

$$DE \quad \omega_{DE} = \frac{V_D}{DE} = \frac{6,4}{(OB / \sin 60^\circ)} = 0,69 \text{ рад/с.}$$

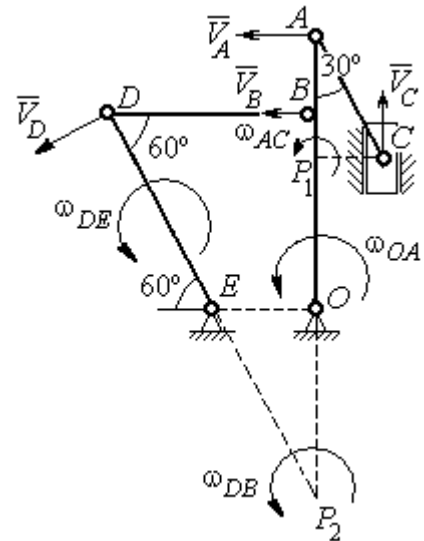
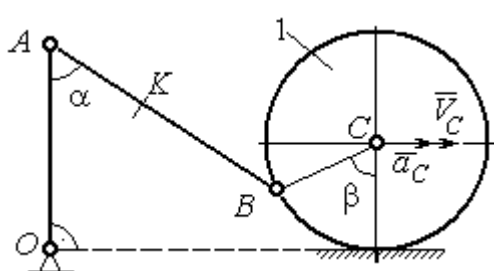
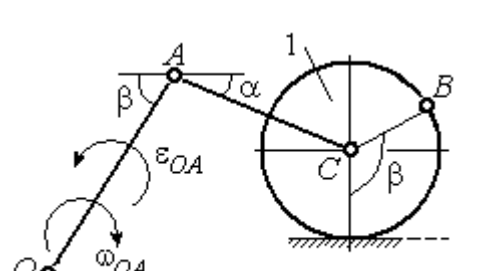


Рис. 2.12. Расчётная схема определения скоростей точек механизма и угловых скоростей его звеньев

2.6. Задание К3. Определение ускорений точек твёрдого тела при плоскопараллельном движении

Для заданного положения плоского механизма определить ускорения точек звеньев механизма и угловые ускорения звеньев. Варианты заданий и исходные данные приведены на рис. 2.13 – 2.15.

Варианты № 1, 11, 21								Варианты № 2, 12, 22							
 Найти: $a_A, a_K, \varepsilon_{AB}$								 Найти: $a_C, a_B, \varepsilon_{AC}$							
Номер вари- анта задания	AB, см	AK, см	α , град	β , град	R_1 , см	V_C , см/с	a_C , см/с ²	Номер вари- анта задания	R_1 , см	OA, см	AC, см	α , град	β , град	ω_{OA} , рад/с	ε_{OA} , рад/с ²
1	16	10	60	120	10	12	6	2	5	10	12	30	60	2	4
11	20	16	30	60	8	10	8	12	8	24	20	30	120	1	2
21	18	10	60	180	6	8	4	22	6	12	15	60	90	2	3

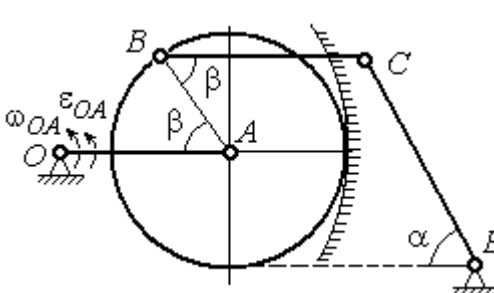
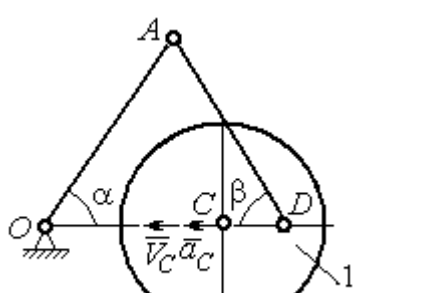
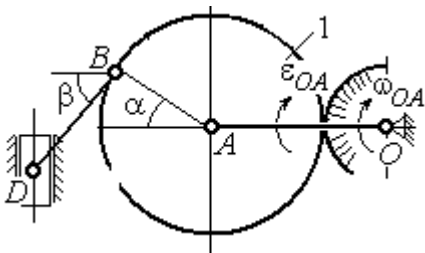
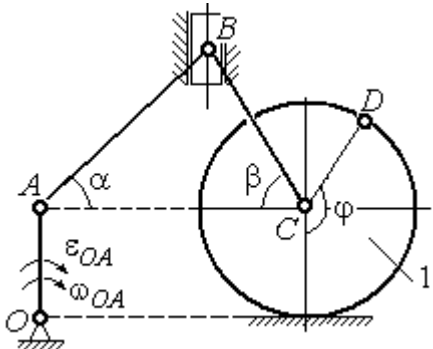
Варианты № 3, 13, 23								Варианты № 4, 14, 24							
 Найти: $a_C, a_B, \varepsilon_{BC}$								 Найти: $a_A, a_D, \varepsilon_{DA}$							
Номер вари- анта задания	BC, см	AO, см	α , град	β , град	R_1 , см	ω_{OA} , рад/с	ε_{OA} , рад/с ²	Номер вари- анта задания	R_1 , см	OA, см	DC, см	α , град	β , град	V_C , см/с	a_C , см/с ²
3	16	15	60	90	10	2	3	4	10	28	5,78	60	30	10	2
13	18	12	90	60	8	3	2	14	8	24	4,62	30	90	8	3
23	14	12	30	120	10	2	4	24	6	20	6	45	45	12	2

Рис. 2.13. Задание К3. Определение ускорений точек тела при плоскопараллельном движении. Номера вариантов задания 1 – 4, 11 – 14, 21 – 24

Варианты № 5, 15, 25								Варианты № 6, 16, 26							
 Найти: a_D, a_B, ϵ_{BD}								 Найти: a_B, a_D, ϵ_{BC}							
Номер вари- анта задания	OA , см	BD , см	α , град	β , град	R_1 , см	ω_{OA} , рад/с	ϵ_{OA} , рад/с ²	Номер вари- анта задания	R_1 , см	AB , см	φ , град	α , град	β , град	ω_{OA} , рад/с	ϵ_{OA} , рад/с ²
5	16	10	60	30	10	4	3	6	6	18	60	30	30	2	3
15	18	8	90	45	12	2	4	16	8	20	90	60	30	2	4
25	14	12	30	60	8	3	2	26	5	16	120	30	60	3	4

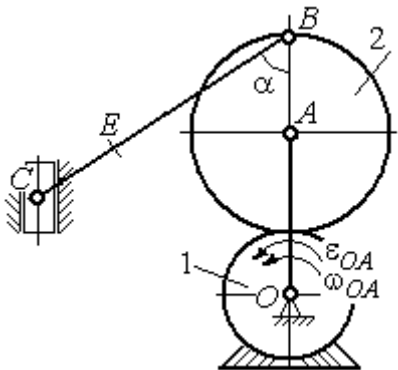
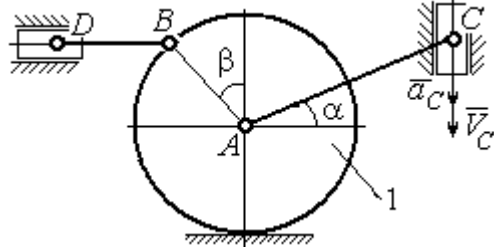
Варианты № 7, 17, 27								Варианты № 8, 18, 28							
 Найти: a_E, a_C, ϵ_{BC}								 Найти: a_D, a_B, ϵ_{BD}							
Номер вари- анта задания	BC , см	BE , см	α , град	R_1 , см	R_2 , см	ω_{OA} , рад/с	ϵ_{OA} , рад/с ²	Номер вари- анта задания	R_1 , см	BD , см	AC , см	α , град	β , град	V_C , см/с	a_C , см/с ²
7	22	10	60	2	10	2	3	8	4	5	12	60	60	12	5
17	28	15	30	3	6	3	4	18	6	10	16	45	90	10	8
27	20	8	45	4	8	2	2	28	8	8	16	30	120	8	6

Рис. 2.14. Задание КЗ. Определение ускорений точек тела при плоскопараллельном движении. Номера вариантов задания 5 – 8, 15 – 18, 25 – 28

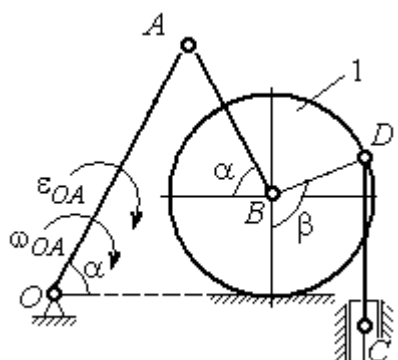
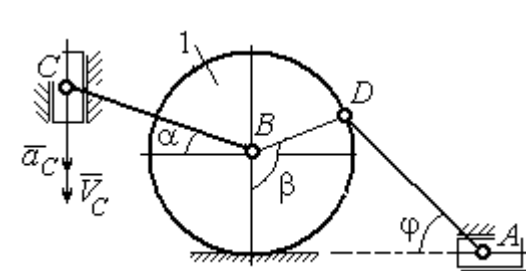
Варианты № 9, 19, 29								Варианты № 10, 20, 30							
 Найти: a_C, a_B, ϵ_{AB}								 Найти: a_A, a_B, ϵ_{CB}							
Номер вари- анта задания	OA , см	DC , см	α , град	β , град	R_1 , см	ω_{OA} , рад/ с	ϵ_{OA} , рад/с ²	Номер вари- анта задания	R_1 , см	BC , см	φ , град	α , град	β , град	V_C , см/с	a_C , см/с ²
9	18	10	30	120	4	2	3	10	6	14	60	30	120	15	3
19	20	12	60	60	6	3	4	20	5	18	45	60	90	10	5
29	18	8	60	90	4	2	3	30	4	16	30	45	60	12	4

Рис. 2.15. Задание К3. Определение ускорений точек тела при плоскопараллельном движении. Номера вариантов задания 9 – 10, 19 – 20, 29 – 30

Примеры решения задания К3. Определение ускорений точек тела при плоскопараллельном движении

Задача 1. Ступенчатый барабан 1 с радиусами ступенек $R = 0,5$ м и $r = 0,3$ м катится окружностью малой ступеньки по горизонтальной поверхности без скольжения (рис. 2.16). Барабан приводится в движение шатуном AC , один конец которого соединён с центром барабана в точке A , а другой – с ползуном C , перемещающимся вертикально.

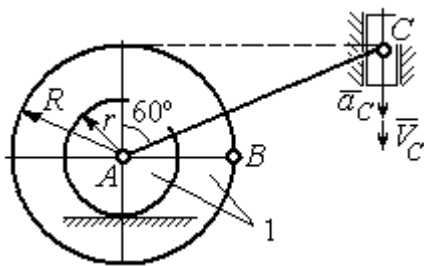


Рис. 2.16. Схема движения плоского механизма

В положении механизма, когда шатун AC отклонён от вертикали на угол 60° , найти ускорение точки B барабана, лежащей на его горизонтальном диаметре, если заданы скорость и ускорение ползуна C : $V_C = 9$ м/с, $a_C = 4$ м/с².

В положении механизма, когда шатун AC отклонён от вертикали на угол 60° , найти ускорение точки B барабана, лежащей на его горизонтальном диаметре, если заданы скорость и ускорение ползуна C : $V_C = 9$ м/с, $a_C = 4$ м/с².

Решение

Найдём угловые скорости ω_{AC} , ω_1 шатуна AC и барабана 1. Шатун совершает плоское движение. Его мгновенный центр скоростей P_2 находится на пересечении перпендикуляров к скоростям $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_C$ (рис. 2.17). По условию, скорость точки C направлена вертикально вниз. Точка A принадлежит как шатуну AC , так и барабану 1. При качении барабана по горизонтальной поверхности скорость его центра – точки A параллельна поверхности качения барабана.

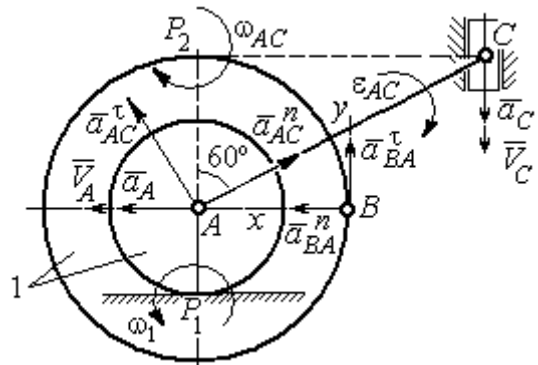


Рис. 2.17. Расчётная схема определения скоростей и ускорений точек механизма

Угловая скорость шатуна

$$\omega_{AC} = \frac{V_C}{CP_2} = \frac{9}{R \operatorname{tg} 60^\circ} = 6\sqrt{3} \text{ рад/с.}$$

Скорость точки A шатуна

$$V_A = \omega_{AC} \cdot AP_2 = 3\sqrt{3} \text{ м/с. Угловая скорость барабана 1 } \omega_1 = \frac{V_A}{AP_1} = 10\sqrt{3} \text{ рад/с.}$$

При расчёте угловой скорости барабана учтено, что качение барабана по неподвижной поверхности представляет собой плоское движение, при котором мгновенный центр скоростей находится в точке касания с поверхностью (в точке P_1 на рис. 2.17).

Выразим ускорение $\vec{a}_A$ точки A через полюс C на основании векторного равенства: $\vec{a}_A = \vec{a}_C + \vec{a}_{AC}^{\tau} + \vec{a}_{AC}^n$, где $\vec{a}_C$ – ускорение точки C , выбранной в качестве полюса; $\vec{a}_{AC}^{\tau}$, $\vec{a}_{AC}^n$ – касательная и нормальная составляющие ускорения точки A при вращении шатуна AC вокруг полюса C . Вектор нормального ускорения $\vec{a}_{AC}^n$ направлен вдоль шатуна AC от точки A к полюсу C и равен по величине $a_{AC}^n = \omega_{AC}^2 \cdot AC = (6\sqrt{3})^2 \cdot 2R = 108 \text{ м/с}^2$. Вектор касательного ускорения

$\vec{a}_{AC}^{\tau}$, модуль которого вычисляется по формуле $a_{AC}^{\tau} = \varepsilon_{AC} \cdot AC$, направлен перпендикулярно отрезку AC .

На данном этапе величина вектора касательного ускорения не может быть вычислена, поскольку угловое ускорение шатуна AC ε_{AC} неизвестно. На рис. 2.17 направление вектора касательного ускорения $\vec{a}_{AC}^{\tau}$ выбрано из предположения, что вращение шатуна ускоренное и направление углового ускорения совпадает с направлением его угловой скорости.

Направление вектора $\vec{a}_A$ ускорения точки A определяется из того, что центр барабана движется по прямой, параллельной горизонтальной поверхности качения. На рис. 2.17 направление вектора ускорения $\vec{a}_A$ выбрано из предположения, что качение барабана ускоренное.

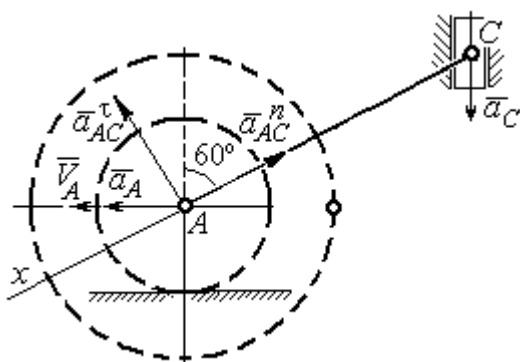


Рис. 2.18. Схема для определения ускорения центра барабана

Выберем ось x вдоль линии AC (рис. 2.18) и спроектируем векторное равенство $\vec{a}_A = \vec{a}_C + \vec{a}_{AC}^{\tau} + \vec{a}_{AC}^n$ на эту ось. При таком выборе оси проекция неизвестного ускорения $\vec{a}_{AC}^{\tau}$ обращается в нуль. Получим $a_A \cos 30^\circ = a_C \cos 60^\circ - a_{AC}^n$. Отсюда найдём ускорение центра барабана

$$a_A = \frac{1}{\cos 30^\circ} (a_C \cos 60^\circ - a_{AC}^n) = -122,4 \text{ м/с}^2. \text{ Отрицательное значение ускорения}$$

точки A означает, что на рис. 2.17, 2.18 вектор ускорения $\vec{a}_A$ должен иметь противоположное направление. Таким образом, вектор ускорения $\vec{a}_A$ направлен в сторону, противоположную вектору скорости $\vec{V}_A$, и движение барабана замедленное.

Для того чтобы найти ускорение точки B , выразим его через полюс A на основании векторного равенства $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^{\tau} + \vec{a}_{BA}^n$, где $\vec{a}_A$ – ускорение

точки A , выбранной в качестве полюса; $\vec{a}_{BA}^\tau$, $\vec{a}_{BA}^n$ – касательная и нормальная составляющие ускорения точки B при вращении барабана вокруг полюса A .

Модуль вектора нормального ускорения $\vec{a}_{BA}^n$ равен по величине $a_{BA}^n = \omega_1^2 \cdot BA = (10\sqrt{3})^2 \cdot R = 150 \text{ м/с}^2$. Вектор направлен вдоль радиуса барабана от точки B к полюсу A (см. рис. 2.17).

Модуль вектора касательного ускорения $\vec{a}_{BA}^\tau$ вычисляется по формуле $a_{BA}^\tau = \varepsilon_1 \cdot BA$, где ε_1 – угловое ускорение барабана. Значение углового ускорения катящегося барабана (в отличие от углового ускорения ε_{AC} шатуна AC) может быть найдено. Расчёт основан на том, что при движении барабана расстояние AP_1 от точки A до центра скоростей барабана P_1 остаётся постоянным, равным r . Тогда выражение $V_A = \omega_1 \cdot AP_1 = \omega_1 \cdot r$ для расчёта скорости точки A можно продифференцировать. Получим $\frac{dV_A}{dt} = \frac{d\omega_1}{dt} \cdot r$. Так как точка A движется по прямой, производная от скорости точки равна её полному ускорению, а производная от угловой скорости барабана равна его угловому ускорению. Тогда имеем: $a_A = \varepsilon_1 \cdot r$, откуда находим угловое ускорение $\varepsilon_1 = \frac{a_A}{r} = 40,8 \text{ рад/с}^2$, а затем и модуль вектора касательного ускорения $a_{BA}^\tau = \varepsilon_1 \cdot BA = 20,4 \text{ м/с}^2$.

Заметим, что для вычисления углового ускорения ε_{AC} шатуна AC подобные рассуждения неприменимы. Формулу $V_A = \omega_{AC} \cdot AP_2$ невозможно продифференцировать, так как при движении механизма расстояние AP_2 от точки A до центра скоростей P_2 шатуна AC является неизвестной функцией времени.

Выберем систему координат xBy как показано на рис. 2.17, и спроецируем на эти оси векторное равенство $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^\tau + \vec{a}_{BA}^n$. Полагая, что движение барабана ускоренное (т. е. вектора ускорений $\vec{a}_A$ и $\vec{a}_{BA}^\tau$ направлены, как показано на рис. 2.17), получим значения составляющих ускорения точки B :

$a_{Bx} = a_A + a_{BA}^n$, $a_{By} = a_{BA}^\tau$. Подставляя значения ускорений, найдём $a_{By} = 20,4 \text{ м/с}^2$, $a_{Bx} = -122,4 + 150 = 27,6 \text{ м/с}^2$. Вектор полного ускорения точки B направлен по диагонали прямоугольника, построенного на векторах $\vec{a}_{Bx}$, $\vec{a}_{By}$. Величина ускорения точки B : $a_B = \sqrt{a_{Bx}^2 + a_{By}^2} = 34,32 \text{ м/с}^2$.

Задача 2. В плоском механизме (рис. 2.19) кривошип OA вращается вокруг оси O с угловой скоростью ω_{OA} и угловым ускорением ε_{OA} . Диск 2, шарнирно присоединённый к кривошипу в точке A , катится без проскальзывания по неподвижному диску 1. Радиусы дисков R_1 и R_2 . На краю диска 2 в точке B шарнирно прикреплен стержень BC , соединенный с центром C диска 3. Радиус диска 3 равен радиусу диска 2:

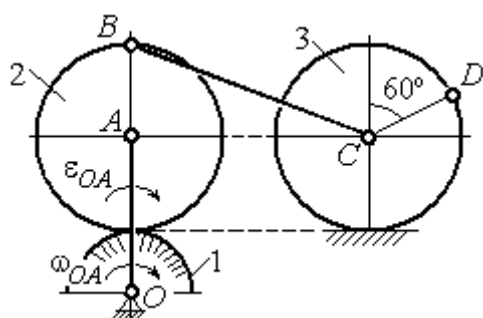


Рис. 2.19. Схема движения плоского механизма

Радиус диска 3 равен радиусу диска 2: $R_3 = R_2$. Диск 3 катится без скольжения по горизонтальной поверхности, по прямой. Для положения механизма, изображенного на рис. 2.19, определить ускорение точки D и угловое ускорение стержня BC , если $\omega_{OA} = 4 \text{ рад/с}$, $\varepsilon_{OA} = 2 \text{ рад/с}^2$, $R_1 = 4 \text{ см}$, $R_2 = 8 \text{ см}$. Длина стержня $BC = 20 \text{ см}$.

Решение

Определение угловых скоростей звеньев механизма.

Рассмотрим вращательное движение кривошипа OA . Скорость точки A : $V_A = \omega_{OA} \cdot OA = 48 \text{ см/с}$. Вектор скорости $\vec{V}_A$ направлен перпендикулярно кривошипу OA в сторону движения кривошипа (рис. 2.20).

При движении диска 2 точка P_2 соприкосновения второго диска с неподвижным первым является мгновенным центром скоростей диска 2. Угловая скорость диска 2: $\omega_2 = \frac{V_A}{AP_2} = \frac{48}{8} = 6 \text{ рад/с}$.

Скорость точки B диска 2: $V_B = \omega_2 BP_2 = 6 \cdot 16 = 96 \text{ см/с}$.

Для определения угловой скорости стержня BC заметим, что скорости двух точек стержня $\vec{V}_B$ и $\vec{V}_C$ параллельны, но точки B и C не лежат на общем перпендикуляре к скоростям. В этом случае мгновенный центр скоростей стержня BC отсутствует (бесконечно удалён), угловая скорость стержня равна нулю: $\omega_{BC} = 0$, а стержень совершает мгновенное поступательное движение. В результате имеем: $V_C = V_B = 96 \text{ см/с}$.

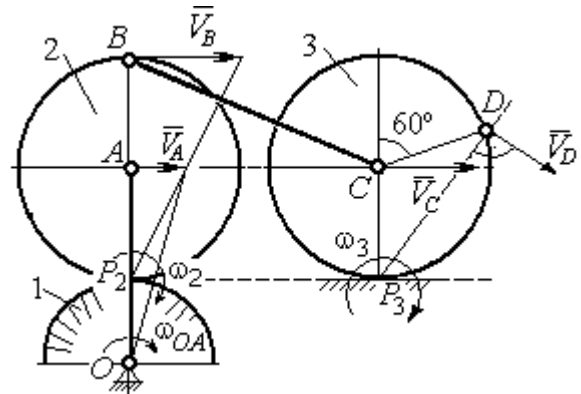


Рис. 2.20. Расчетная схема для определения угловых скоростей звеньев механизма

При качении диска 3 по неподвижной поверхности без проскальзывания точка P_3 касания его с поверхностью является мгновенным центром скоростей.

Тогда угловая скорость диска 3: $\omega_3 = \frac{V_C}{CP_3} = 12 \text{ рад/с}$. Скорость точки D диска 3:

$V_D = \omega_3 \cdot DP_3$. Величину DP_3 находим из треугольника P_3DC . В результате $DP_3 = 2R_3 \cos 30^\circ = 13,8 \text{ см}$ и $V_D = 165,6 \text{ см/с}$. Вектор скорости $\vec{V}_D$ направлен в сторону движения диска 3 перпендикулярно линии DP_3 и (см. рис. 2.20).

Определение ускорений точек механизма.

Представим ускорение $\vec{a}_C$ точки C векторной суммой $\vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{a}_{CB}^n + \vec{a}_{CB}^\tau$, где $\vec{a}_B$ – ускорение точки B , выбранной в качестве полюса; $\vec{a}_{CB}^n$, $\vec{a}_{CB}^\tau$ – нормальная и касательная составляющие ускорения точки C при вращении стержня BC вокруг полюса B , $a_{CB}^n = \omega_{CB}^2 \cdot CB$, $a_{CB}^\tau = \varepsilon_{CB} \cdot CB$.

Нормальная составляющая ускорения точки C $a_{CB}^n = 0$, так как стержень CB совершает мгновенное поступательное движение и $\omega_{BC} = 0$.

Направление касательной составляющей $\vec{a}_{CB}^{\tau}$ неизвестно, так как неизвестно направление углового ускорения стержня ε_{CB} . Для определённости выберем направление углового ускорения стержня BC в сторону против хода часовой стрелки. На рис. 2.21 это направление показано дуговой стрелкой ε_{CB} .

В соответствии с выбранным направлением углового ускорения вектор $\vec{a}_{CB}^{\tau}$ строится перпендикулярно линии стержня BC в сторону углового ускорения ε_{CB} (см. рис. 2.21).

Выразим ускорение точки B через полюс A : $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^{\tau}$, где

$\vec{a}_A$ – ускорение полюса A ; $\vec{a}_{BA}^n$, $\vec{a}_{BA}^{\tau}$ – нормальная и касательная составляющие ускорения точки B при вращении диска 2 вокруг полюса A . Величина нормальной составляющей ускорения точки B $a_{BA}^n = \omega_2^2 \cdot BA = 288 \text{ см/с}^2$. Вектор $\vec{a}_{BA}^n$ направлен вдоль радиуса BA от точки B к полюсу A (см. рис. 2.21). Касательное ускорение точки B при вращении диска 2 вокруг полюса A вычисляется по формуле $a_{BA}^{\tau} = \varepsilon_2 \cdot BA$. Для определения углового ускорения ε_2 диска 2 заметим, что во время движения диска 2 расстояние AP_2 остается постоянным, равным R_2 . Дифференцируя равенство $V_A = \omega_2 \cdot AP_2 = \omega_2 R_2$, получим:

$$\frac{dV_A}{dt} = \frac{d\omega_2}{dt} R_2, \text{ или } a_A^{\tau} = \varepsilon_2 R_2, \text{ откуда } \varepsilon_2 = \frac{a_A^{\tau}}{R_2}.$$

Для того чтобы найти величину a_A^{τ} , рассмотрим вращательное движение кривошипа OA вокруг неподвижной оси O . Ускорение точки A представляется в виде векторного равенства $\vec{a}_A = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^{\tau}$, где $\vec{a}_A^n$ и $\vec{a}_A^{\tau}$ – известные

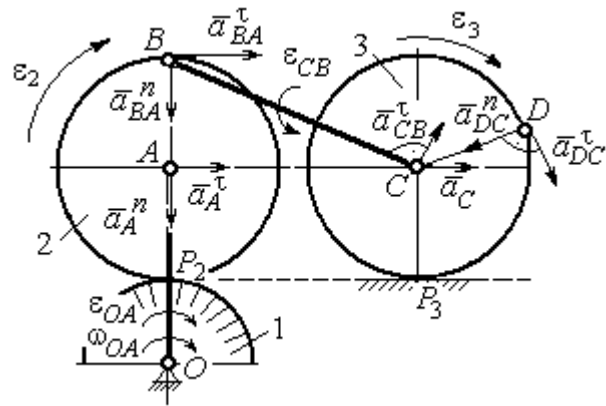


Рис. 2.21. Расчетная схема для определения ускорений точек механизма и угловых ускорений его звеньев

нормальная и касательная составляющие ускорения точки A кривошипа OA :
 $a_A^n = \omega_{OA}^2 \cdot OA = 192 \text{ см/с}^2$, $a_A^\tau = \varepsilon_{OA} \cdot OA = 24 \text{ см/с}^2$. Направления векторов нормального ускорения $\vec{a}_A^n$ и касательного ускорения $\vec{a}_A^\tau$ показаны на рис. 2.21.

Теперь найдём величину углового ускорения диска 2 и модуль касательного ускорения a_{BA}^τ точки B при вращении диска 2 вокруг полюса A : $\varepsilon_2 = \frac{a_A^\tau}{R_2} = 3 \text{ рад/с}^2$, $a_{BA}^\tau = \varepsilon_2 \cdot BA = 24 \text{ см/с}^2$.

Для определения ускорения точки C имеем векторное равенство $\vec{a}_C = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^\tau + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^\tau + \vec{a}_{CB}^\tau$. Выберем оси Cx , Cy , как показано на рис. 2.22, – вдоль отрезка BC и перпендикулярно ему и спроецируем на них имеющееся векторное равенство. Получим:

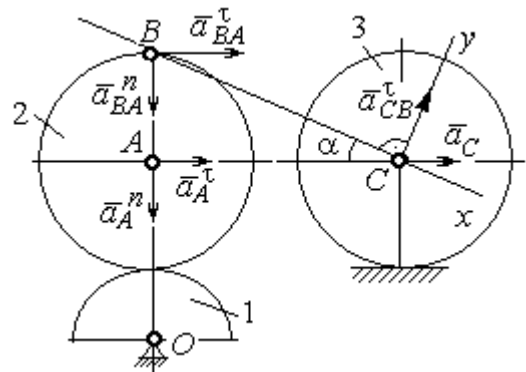


Рис. 2.22. Расчетная схема для вычисления ускорения точки C

$$a_C \cos \alpha = a_A^n \sin \alpha + a_A^\tau \cos \alpha + a_{BA}^n \sin \alpha + a_{BA}^\tau \cos \alpha;$$

$$a_C \sin \alpha = a_A^n \cos \alpha + a_A^\tau \sin \alpha + a_{BA}^n \cos \alpha + a_{BA}^\tau \sin \alpha + a_{CB}^\tau,$$

где α – угол между стержнем BC и линией центров AC ; $\sin \alpha = \frac{AB}{BC} = 0,4$;

$\cos \alpha = 0,92$. Решая систему, найдём: $a_C = 256,7 \text{ см/с}^2$, $a_{CB}^\tau = -358,12 \text{ см/с}^2$.

Модуль углового ускорения стержня BC : $\varepsilon_{CB} = \frac{|a_{CB}^\tau|}{BC} = 17,9 \text{ рад/с}^2$.

Знак «минус» величины a_{CB}^τ означает, что вектор касательного ускорения $\vec{a}_{CB}^\tau$ на рис. 2.21 – 2.22 следует направить в противоположную сторону. Направление углового ускорения стержня BC , показанное на рис. 2.21 дуговой стрелкой ε_{CB} , также следует заменить на противоположное.

Выразим ускорение точки D через полюс C : $\vec{a}_D = \vec{a}_C + \vec{a}_{DC}^n + \vec{a}_{DC}^\tau$, где $\vec{a}_C$ – известное ускорение точки C ; $\vec{a}_{DC}^n$, $\vec{a}_{DC}^\tau$ – нормальное и касательное составляющие ускорения точки D при вращении диска 3 вокруг полюса C . Величина нормального ускорения точки D : $a_{DC}^n = \omega_3^2 \cdot DC = 1152 \text{ см/с}^2$. Вектор ускорения $\vec{a}_{DC}^n$ направлен по радиусу от точки D к полюсу C (рис. 2.23).

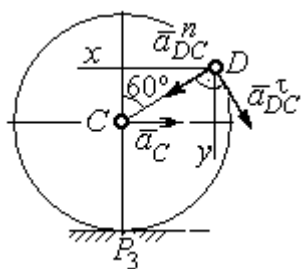


Рис.2.23. Расчетная схема для определения ускорения точки D

Для расчёта касательной составляющей a_{DC}^τ ускорения точки D найдём угловое ускорение диска 3. Продифференцируем по времени равенство

$$V_C = \omega_3 \cdot CP_3 = \omega_3 R_3. \quad \text{Получим:}$$

$$\frac{dV_C}{dt} = \frac{d\omega_3}{dt} R_3, \text{ или } a_C = \varepsilon_3 R_3. \quad \text{Угловое ускорение}$$

$$\text{диска 3: } \varepsilon_3 = \frac{a_C}{R_3} = 32,09 \text{ рад/с}^2. \quad \text{Тогда величина}$$

касательной составляющей ускорения точки D : $a_{DC}^\tau = \varepsilon_3 \cdot DC = 256,7 \text{ см/с}^2$.

Направление вектора $\vec{a}_{DC}^\tau$ соответствует ускоренному движению диска 3.

Проведём оси Dx и Dy , как показано на рис. 2.23, и спроецируем векторное равенство ускорения точки D на оси:

$$a_{Dx} = -a_C + a_{DC}^n \cos 30^\circ - a_{DC}^\tau \cos 60^\circ, \quad a_{Dy} = a_{DC}^n \cos 60^\circ + a_{DC}^\tau \cos 30^\circ.$$

Решая систему, находим значения проекций модуля ускорения $a_{Dx} = 612,5 \text{ см/с}^2$, $a_{Dy} = 798,3 \text{ см/с}^2$. Величина ускорения точки D :

$$a_D = \sqrt{a_{Dx}^2 + a_{Dy}^2} = 1006,2 \text{ см/с}^2.$$

3. СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

3.1. Основные понятия сложного движения точки

В неподвижной системе координат рассматривается подвижное твердое тело и точка, перемещающаяся относительно тела.

Траектория точки в её движении относительно тела называется **относительной траекторией**. Скорость точки в этом движении называют **относительной скоростью**, ускорение – **относительным ускорением**.

Траектория точки, перемещающейся вместе с телом, называется переносной траекторией точки, скорость точки при таком её движении – **переносной скоростью**, а ускорение – **переносным ускорением**.

Суммарное движение точки вместе с телом и относительно тела называется **сложным движением**. Траектория точки относительно неподвижной системы координат называется **абсолютной траекторией точки**, скорость и ускорение – **абсолютной скоростью и абсолютным ускорением**.

При вычислении абсолютной скорости используется теорема о сложении скоростей: **при сложном движении абсолютная скорость точки равна геометрической сумме относительной и переносной скоростей**: $\vec{V} = \vec{V}_e + \vec{V}_r$, где $\vec{V}$, $\vec{V}_e$, $\vec{V}_r$ – вектора абсолютной, переносной и относительной скоростей точки.

В случае, когда относительное движение точки задается естественным способом в виде закона изменения пути $S = S(t)$, величина относительной скорости точки равна модулю производной: $V_r = |\dot{S}_r|$. Если переносное движение точки есть вращение тела вокруг неподвижной оси, скорость точки в переносном движении будет: $V_e = \omega_e h_e$, где ω_e – величина угловой скорости вращения тела; h_e – кратчайшее расстояние от места положения точки на теле до оси вращения тела.

При вычислении абсолютного ускорения используется теорема Кориолиса о сложении ускорений: **при сложном движении абсолютное ускорение точки равно геометрической сумме трех ускорений – относительного, переносного и ускорения Кориолиса**

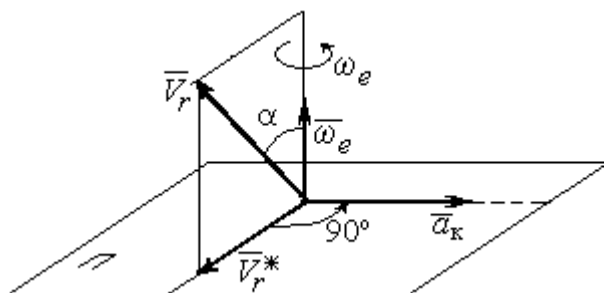


Рис. 3.1. Определение направления ускорения Кориолиса по правилу Жуковского

реносного и ускорения Кориолиса

$\vec{a} = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_k$, где $\vec{a}$ – вектор абсолютного ускорения точки; $\vec{a}_e, \vec{a}_r$ – вектора соответственно переносного и относительного ускорений точки; $\vec{a}_k$ – вектор ускорения Кориолиса.

(Иногда его называют поворотным ускорением.)

Вектор ускорения Кориолиса определяется векторным произведением $\vec{a}_k = 2(\vec{\omega}_e \times \vec{V}_r)$, где $\vec{\omega}_e$ – вектор угловой скорости переносного движения; $\vec{V}_r$ – вектор относительной скорости точки. Модуль ускорения Кориолиса: $|\vec{a}_k| = 2|\vec{\omega}_e| \cdot |\vec{V}_r| \sin \alpha$, где α – угол между вектором угловой скорости переносного движения и вектором относительной скорости точки (см. рис. 3.1). Направление вектора ускорения Кориолиса может быть получено по правилу построения вектора векторного произведения.

На рис. 3.1 показана последовательность выбора направления вектора ускорения Кориолиса по правилу Н. Е. Жуковского. Правило состоит в следующем: пусть имеется точка, движущаяся с относительной скоростью $\vec{V}_r$. Построим плоскость Π , перпендикулярную вектору переносной угловой скорости $\vec{\omega}_e$, и спроецируем вектор $\vec{V}_r$ на эту плоскость. Проекцию обозначим $\vec{V}_r^*$ (см. рис. 3.1). Чтобы получить направление ускорения Кориолиса, следует вектор проекции относительной скорости $\vec{V}_r^*$ повернуть на 90° в плоскости Π вокруг оси переносного вращения в направлении этого вращения.

Если сложное движение точки происходит в плоскости, перпендикулярной оси переносного вращения, направление ускорения Кориолиса можно получить простым поворотом вектора относительной скорости на угол 90° вокруг оси переносного вращения в направлении этого вращения.

Относительное ускорение $\vec{a}_r$ представляется как сумма векторов относительного касательного $\vec{a}_r^\tau$ и относительного нормального $\vec{a}_r^n$ ускорений: $\vec{a}_r = \vec{a}_r^\tau + \vec{a}_r^n$. Переносное ускорение точки $\vec{a}_e$ тела имеет своими составляющими переносное касательное $\vec{a}_e^\tau$ и переносное нормальное $\vec{a}_e^n$ ускорения так, что $\vec{a}_e = \vec{a}_e^\tau + \vec{a}_e^n$.

Таким образом, абсолютное ускорение точки в сложном движении можно представить в виде векторного равенства

$$\vec{a} = \vec{a}_r^\tau + \vec{a}_r^n + \vec{a}_e^\tau + \vec{a}_e^n + \vec{a}_k.$$

Модули относительного касательного и относительного нормального ускорений при естественном способе задания относительного движения точки

равны: $a_r^\tau = |\dot{V}_r|$, $a_r^n = \frac{V_r^2}{\rho}$, где ρ – радиус кривизны относительной траектории.

При движении точки по окружности радиус кривизны равен радиусу окружности, при движении по прямой – бесконечности, и в этом случае $a_r^n = 0$.

При вращательном переносном движении точки значения переносного касательного и нормального ускорений вычисляются по формулам: $a_e^\tau = \varepsilon_e h_e$, $a_e^n = \omega_e^2 h_e$, где ε_e – угловое ускорение вращательного переносного движения, $\varepsilon_e = |\dot{\omega}_e|$; h_e – расстояние от точки до оси вращения тела; ω_e – величина угловой скорости вращения тела.

Вектора ускорений строятся по общим правилам построения векторов нормального и касательного ускорений.

При поступательном переносном движении ускорение Кориолиса и переносное нормальное ускорение равны нулю: $a_k = 0$, $a_e^n = 0$. Абсолютное ускорение точки при поступательном переносном движении можно представить в виде векторного равенства $\vec{a} = \vec{a}_r^\tau + \vec{a}_r^n + \vec{a}_e^\tau$.

3.2. Задание К4. Определение скорости и ускорения точки при сложном движении

Задание включает две задачи с вращательным и поступательным видами переносного движения точки.

Задача 1. Вращение тела относительно неподвижной оси задается законом изменения угла поворота: $\varphi_e = \varphi_e(t)$ или законом изменения его угловой скорости: $\omega_e = \omega_e(t)$. Движение точки относительно тела отсчитывается от её начального положения в точке C и задается законом изменения длины дуги окружности или отрезка прямой линии: $CM = S_r = S_r(t)$.

Определить абсолютные скорость и ускорение точки в заданный момент времени t_1 .

Задача 2. Поступательное движение тела, несущего точку, задается законом изменения координаты $x_e = x_e(t)$. Движение точки относительно тела отсчитывается от её начального положения в точке C и задается законом изменения длины дуги окружности или отрезка прямой линии: $CM = y_r = y_r(t)$.

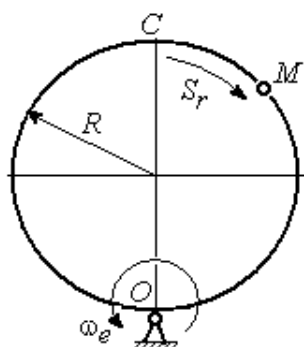
Определить абсолютные скорость и ускорение точки в момент времени t_2 , который либо задаётся в исходных данных задачи, либо на схеме описаны условия, из которых он находится.

Номера вариантов заданий даны на рис. 3.2 – 3.5.

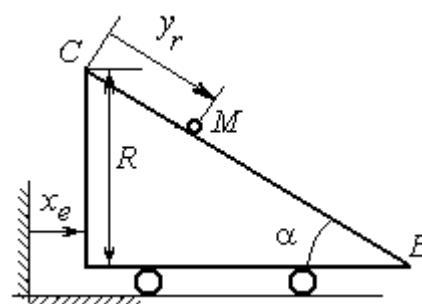
Варианты исходных данных приведены в табл. 3.1.

Варианты № 1, 11, 21

Задача 1



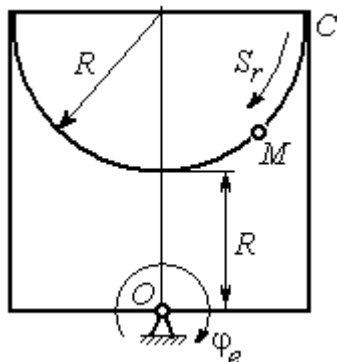
Задача 2



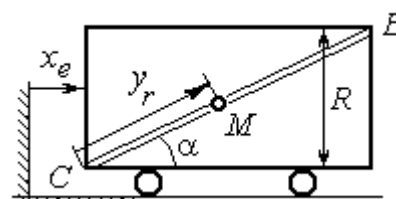
В момент $t = t_2$ точка M прошла половину пути CB

Варианты № 2, 12, 22

Задача 1



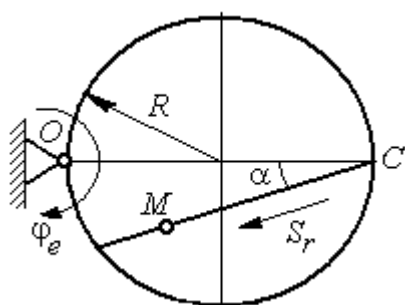
Задача 2



В момент $t = t_2$ точка M прошла $2/3$ пути CB

Варианты № 3, 13, 23

Задача 1



Задача 2

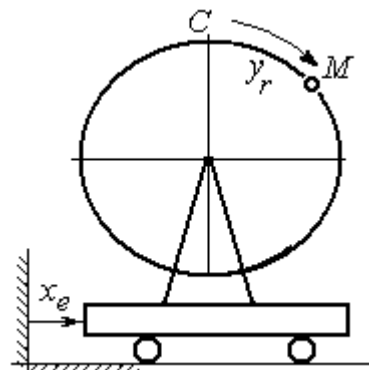
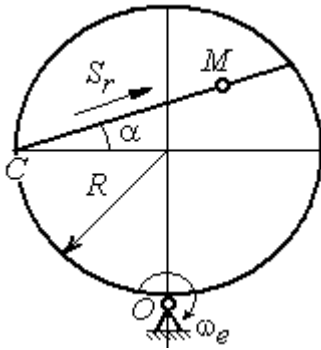


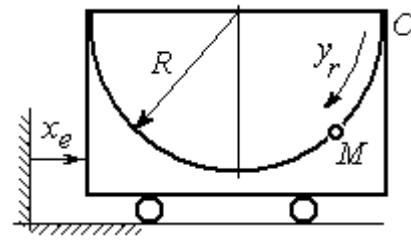
Рис. 3.2. Задание К4. Сложное движение точки.
Номера вариантов задания 1 – 3, 11 – 13, 21 – 23

Варианты № 4, 14, 24

Задача 1

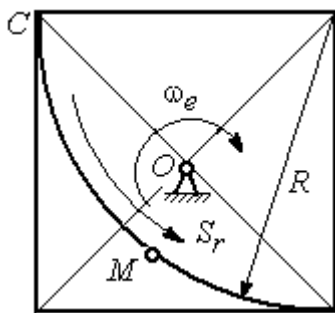


Задача 2

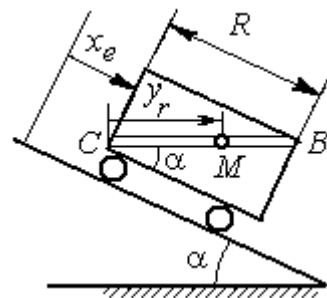


Варианты № 5, 15, 25

Задача 1



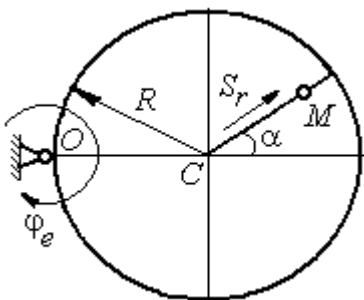
Задача 2



В момент $t = t_2$ точка M прошла путь CB

Варианты № 6, 16, 26

Задача 1



Задача 2

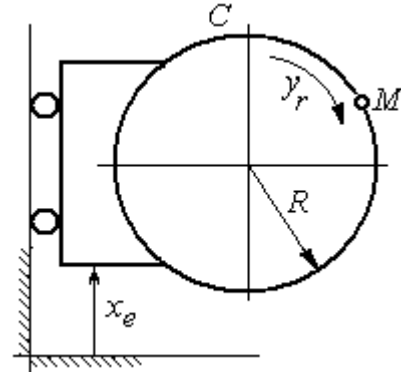
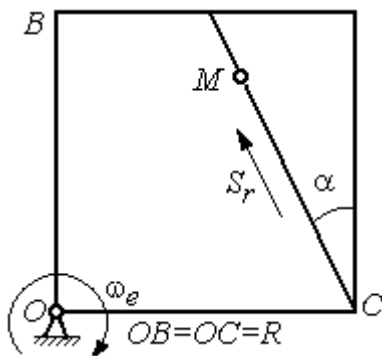


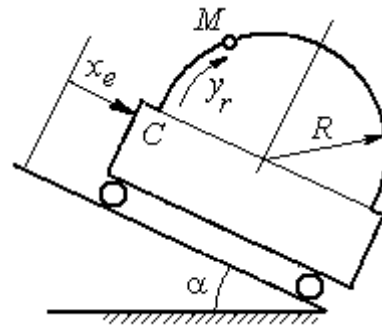
Рис. 3.3. Задание K4. Сложное движение точки.
Номера вариантов задания 4 – 6, 14 – 16, 24 – 26

Варианты № 7, 17, 27

Задача 1

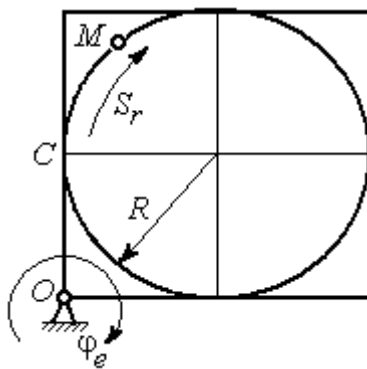


Задача 2

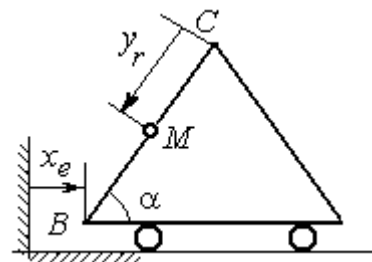


Варианты № 8, 18, 28

Задача 1



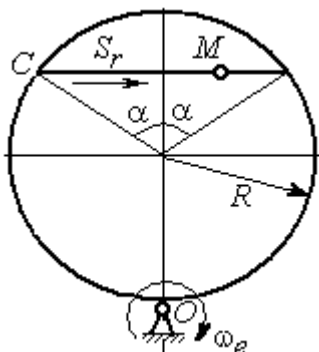
Задача 2



В момент $t = t_2$ точка M прошла половину пути $CB = R$

Варианты № 9, 19, 29

Задача 1



Задача 2

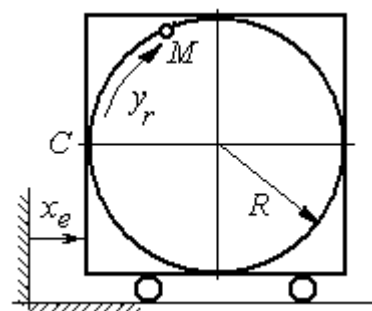


Рис. 3.4. Задание К4. Сложное движение точки.
Номера вариантов задания 7 – 9, 17 – 19, 27 – 29

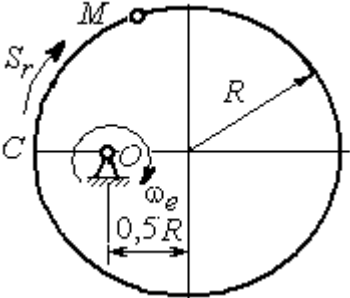
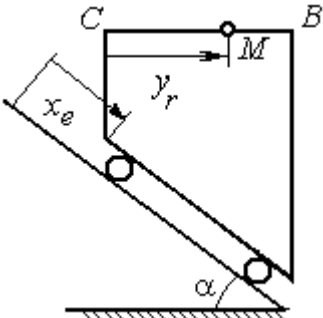
Варианты № 10, 20, 30	
Задача 1 	Задача 2  В момент $t = t_2$ точка M прошла половину пути $CB = R$

Рис. 3.5. Задание К4. Сложное движение точки.
Номера вариантов задания 10, 20, 30

Таблица 3.1

Исходные данные для заданий по сложному движению точки

Номер варианта задания	Номер задачи	R , см	α , град	$\vec{CM} = S_r(t)$, см $\vec{CM} = y_r(t)$, см	$\varphi_e(t)$, рад; $\omega_e(t)$, рад/с $x_e(t)$, см	t_1 , с t_2 , с
1	1	3	—	$S_r = 2\pi \sin(\pi t/6)$	$\omega_e = 4t^2$	1
	2	4	30	$y_r = 4t^2$	$x_e = 2\cos(\pi t/6)$	—
2	1	2	—	$S_r = 4\pi \sin^2(\pi t/6)$	$\varphi_e = 6\cos(\pi t/3)$	1
	2	3	60	$y_r = t^2 + t$	$x_e = 1 + \cos(\pi t)$	—
3	1	4	30	$S_r = 2\sqrt{3}[t + \sin(\pi t/2)]$	$\varphi_e = 4t - t^2$	1
	2	6	—	$y_r = \pi[2t + \sin \pi t]$	$x_e = 5t - t^2$	1
4	1	4	60	$S_r = 2(t^3 + t)$	$\omega_e = 6\cos(\pi t/6)$	1
	2	3	—	$y_r = \pi[2t + \cos(\pi t/2)]$	$x_e = t^3 - 4t$	1
5	1	6	—	$S_r = 4\pi \sin^2(\pi t/6)$	$\omega_e = 6\cos(\pi t/3)$	1
	2	2	30	$y_r = t^2 + 2t$	$x_e = t^2 - 4t$	—
6	1	6	60	$S_r = t + 10\sin(\pi t/6)$	$\varphi_e = 2t^2 - 5t$	1
	2	3	—	$y_r = 4\pi \sin(\pi t/6)$	$x_e = [1 - \cos(\pi t/4)]$	1
7	1	8	30	$S_r = 2(t^3 + 3t)$	$\omega_e = 6\cos(\pi t/6)$	1
	2	4	30	$y_r = 2\pi t^2$	$x_e = t^3 - 5t$	1

Продолжение табл. 3.1

Номер варианта задания	Номер задачи	R , см	α , град	$\bar{CM} = S_r(t)$, см $\bar{CM} = y_r(t)$, см	$\varphi_e(t)$, рад; $\omega_e(t)$, рад/с $x_e(t)$, см	t_1 , с t_2 , с
8	1	8	—	$S_r = 2\pi[t^2 + \sin\pi t]$	$\varphi_e = t^2 - 5t$	2
	2	6	30	$y_r = t(t+1)$	$x_e = \cos\pi t$	—
9	1	8	30	$S_r = 2t^2$	$\omega_e = \cos(\pi t/8)$	2
	2	3	—	$y_r = 4\pi\sin^2(\pi t/4)$	$x_e = (3-2t)^2$	1
10	1	6	—	$S_r = \pi(2t^3 + \sin\pi t)$	$\omega_e = 5t - 2t^3$	1
	2	4	30	$y_r = t^2 + 2t$	$x_e = 1 + \cos\pi t$	—
11	1	6	—	$S_r = 8\pi\sin(\pi t/12)$	$\omega_e = 2 + \cos(\pi t/4)$	2
	2	6	60	$y_r = 4\sin\pi t$	$x_e = t^2 - 2t$	—
12	1	18	—	$S_r = \pi(2t^2 + 2t)$	$\varphi_e(t) = 3t - t^2$	2
	2	6	30	$y_r = 2t^2 + t$	$x_e = 1 + \cos(\pi t)$	—
13	1	10	60	$S_r = t^3 + t$	$\varphi_e = 6\cos(\pi t/6)$	2
	2	6	—	$y_r = 6\pi\cos(\pi t/3)$	$x_e = t(t+1)$	1
14	1	4	30	$S_r = 8\sqrt{3}\sin(\pi t/12)$	$\omega_e = (3-2t)^2$	2
	2	3	—	$y_r = 2\pi\sin(\pi t/6)$	$x_e = 2t^2 - 5t$	1
15	1	8	—	$S_r = 4\pi\sin^2(\pi t/4)$	$\omega_e = 2 + \cos(\pi t/4)$	1
	2	5	60	$y_r = 5t + t^2$	$x_e = \cos(\pi t/6)$	—
16	1	12	90	$S_r = 3[t + \sin(\pi t/2)]$	$\varphi_e = 2t - 3t^2$	1
	2	15	—	$y_r = \pi(4t + t^2)$	$x_e = 6\sin(\pi t/3)$	1
17	1	6	45	$S_r = 3\sqrt{2}[t^2 + 2\sin\pi t]$	$\omega_e(t) = 4t^2 - 6$	1
	2	6	60	$y_r = 8\pi\sin(\pi t/12)$	$x_e = \sqrt{2}\sin(\pi t/8)$	2
18	1	8	—	$S_r = 4\pi\sqrt{2}\sin(\pi t/8)$	$\varphi_e = 18t - 4t^2$	2
	2	8	60	$y_r = 3t + 2t^2$	$x_e = \sin\pi t$	—
19	1	8	60	$S_r = 2\sqrt{3}[t + \sin(\pi t/2)]$	$\omega_e = 5t - t^2$	1
	2	9	—	$y_r = 6\pi\cos(\pi t/3)$	$x_e = \cos(\pi t/6)$	1
20	1	4	—	$S_r = 4\pi\sin(\pi t/6)$	$\omega_e = 3t - 5$	1
	2	6	60	$y_r = 3t + 2t^2$	$x_e = \pi\sin\pi t$	—
21	1	3	—	$S_r = 4\pi\sqrt{2}\sin(\pi t/8)$	$\omega_e = 6t - 14$	2
	2	8	45	$y_r = (t^2 + 3t)$	$x_e = t + 2\sin\pi t$	—

Номер варианта задания	Номер задачи	R , см	α , град	$\vec{CM} = S_r(t)$, см $\vec{CM} = y_r(t)$, см	$\varphi_e(t)$, рад; $\omega_e(t)$, рад/с $x_e(t)$, см	t_1 , с t_2 , с
22	1	4	—	$S_r = 2\pi(t^2 + 2t)$	$\varphi_e = 6\cos(\pi t/6)$	1
	2	9	60	$y_r = 8\sin\pi t$	$x_e = 5t - t^2$	—
23	1	6	45	$S_r = 12\sin(\pi t/8)$	$\varphi_e = t^2 + \cos(\pi t/4)$	2
	2	6	—	$y_r = 6\pi[t + \sin(\pi t/6)]$	$x_e = 5t - t^2$	1
24	1	6	45	$S_r = 12\sin(\pi t/8)$	$\omega_e = t + 4\cos(\pi t/4)$	2
	2	6	—	$y_r = \pi(t^2 + 2t)$	$x_e = 6\cos(\pi t/6)$	1
25	1	6	—	$S_r = 2\pi t^2$	$\omega_e = 3\sin(\pi t/3)$	1
	2	4	45	$y_r = 2t(t + 3t)$	$x_e = 2(t^3 - 3t)$	—
26	1	6	120	$S_r = t^2 + t$	$\varphi_e = 12\cos(\pi t/12)$	2
	2	9	—	$y_r = \pi\sqrt{3}\sin(\pi t/3)$	$x_e = 2(t^2 - 3t)$	1
27	1	10	60	$S_r = \sqrt{3}(t^2 + t)$	$\omega_e = 6\cos(\pi t/6)$	2
	2	9	30	$y_r = \sqrt{3}\pi\sin(\pi t/3)$	$x_e = t + 4\cos(\pi t/4)$	1
28	1	2	—	$S_r = 6\pi\sin(\pi t/6)$	$\varphi_e = 2t + \cos(\pi t/2)$	1
	2	6		$y_r = 2t + 3t^2$	$x_e = t + \sin\pi t$	—
29	1	8	30	$S_r = (t^2 + 2t)$	$\omega_e = 6\sin(\pi t/12)$	2
	2	3	—	$y_r = 2\pi\sqrt{3}\sin(\pi t/3)$	$x_e = 5t - t^2$	1
30	1	2	—	$\pi(t^2 + 2t)$	$\omega_e(t) = 6\cos(\pi t/6)$	1
	2	3	60	$y_r = t + t^2$	$x_e = t + \sin\pi t$	—

Пример выполнения задания К4. Сложное движение точки

Задача 1. Фигура, состоящая из половины диска и равнобедренного тре-

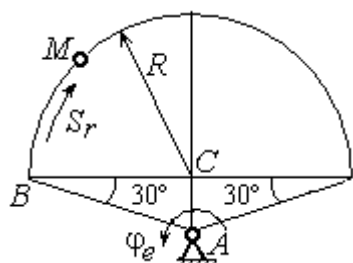


Рис. 3.6. Схема сложного движения точки

угольника (рис. 3.6), вращается вокруг оси, перпендикулярной плоскости фигуры и проходящей через вершину A треугольника. Вращательное движение задается законом изменения угла поворота фигуры $\varphi_e = 5t - 2t^2$ рад.

расстояние от точки M_1 до оси вращения фигуры $h_e = AM_1 = \frac{R}{\cos 30^\circ} = 6\sqrt{3}$ см.

Тогда $V_e(1) = 6\sqrt{3}$ см/с.

Вектор скорости переносного движения точки $\vec{V}_e$ перпендикулярен линии AM_1 и направлен в сторону вращения фигуры (см. рис. 3.7).

Относительное движение точки задано естественным способом, как закон изменения длины дуги BM . В этом случае **скорость относительного движения** точки $V_r = |\dot{S}_r| = |18\pi t|$. При $t_1 = 1$ с $V_r(1) = |\dot{S}_r(1)| = 18\pi = 56,5$ см/с. Положительное значение производной $\dot{S}_r(1)$ указывает, что относительное движение точки в положении M_1 происходит в положительном направлении, указанном на рис. 3.7 дуговой стрелкой S_r . Вектор $\vec{V}_r$ относительной скорости точки в положении M_1 направлен по касательной к траектории относительного движения в сторону положительного направления движения (см. рис. 3.7).

Абсолютную скорость точки находим по теореме сложения скоростей $\vec{V} = \vec{V}_e + \vec{V}_r$. Направление вектора абсолютной скорости, полученное по правилу сложения векторов, показано на рис. 3.5. Для определения величины абсолютной скорости выбираем прямоугольные оси координат $M_1|x y$ (см. рис. 3.7) и проецируем обе части векторного равенства теоремы сложения скоростей на эти оси. Получим:

$$V_x = V_e \cos 60^\circ = 3\sqrt{3} = 5,2 \text{ см/с};$$

$$V_y = -V_e \cos 30^\circ + V_r = -6\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 56,5 = 29,5 \text{ см/с}.$$

Модуль абсолютной скорости: $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{5,2^2 + 29,5^2} = 29,95 \text{ см/с}.$

Абсолютное ускорение точки определяем по теореме Кориолиса, которая при вращательном переносном движении имеет вид:

$$\vec{a} = \vec{a}_r^\tau + \vec{a}_r^n + \vec{a}_e^\tau + \vec{a}_e^n + \vec{a}_k.$$

Относительное касательное ускорение a_r^τ вычисляется по формуле: $a_r^\tau = |\ddot{S}_r|$. По условию задачи вторая производная $\ddot{S}_r = 18\pi = 56,5 \text{ см/с}^2$ – постоянная величина. Так как значение второй производной $\ddot{S}_r$ положительно, вектор ускорения $\vec{a}_r^\tau$ направлен по касательной к траектории относительного движения в точке M_1 в сторону положительного направления относительного движения, отмеченного дуговой стрелкой S_r .

Относительное нормальное ускорение точки вычисляется по формуле

$$a_r^n = \frac{V_r^2}{R} \text{ и в момент } t_1 = 1 \text{ с равно:}$$

$$a_r^n(1) = \frac{V_r^2(1)}{R} = \frac{(18\pi)^2}{9} = 355,3 \text{ см/с}^2. \text{ Вектор}$$

ускорения $\vec{a}_r^n$ направлен по радиусу диска к центру C (см. рис. 3.8).

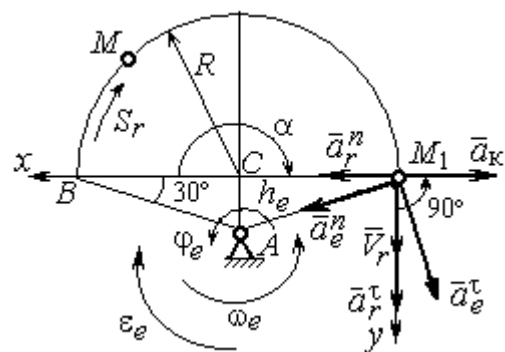


Рис. 3.8. Расчетная схема для определения абсолютного ускорения точки

Переносное касательное ускорение вычисляется по формуле: $a_e^\tau = \varepsilon_e h_e$, где угловое ускорение $\varepsilon_e = |\ddot{\phi}_e|$. Вычислим производную $\ddot{\phi}_e = -4 \text{ рад/с}^2$. Угловое ускорение $\varepsilon_e = |\ddot{\phi}_e| = 4 \text{ рад/с}^2$ постоянно и не зависит от времени.

Отрицательное значение производной $\ddot{\phi}_e < 0$ при условии, что расчетная величина угловой скорости положительна: $\dot{\phi}_e > 0$, означает, что вращательное движение замедленное и переносное угловое ускорение ε_e направлено в сторону, противоположную направлению вращения.

Вектор $\vec{a}_e^\tau$ переносного касательного ускорения точки в её положении M_1 перпендикулярен линии AM_1 и направлен противоположно вектору переносной скорости $\vec{V}_e$ (см. рис. 3.8). Модуль переносного касательного ускорения: $a_e^\tau = a_e^\tau = \varepsilon_e h_e = 24\sqrt{3} = 41,6 \text{ см/с}^2$.

Переносное нормальное ускорение a_e^n рассчитывается по формуле:

$a_e^n = \omega_e^2 h_e$ и в момент времени $t_1 = 1$ с $a_e^n(1) = \omega_e^2(1) h_e = 6\sqrt{3} = 10,4$ см/с². Вектор переносного нормального ускорения $\vec{a}_e^n$ направлен по линии AM_1 к оси вращения (см. рис. 3.8).

По условию задачи вектор скорости относительного движения точки $\vec{V}_r$ лежит в плоскости, перпендикулярной оси переносного вращения, то есть перпендикулярен вектору угловой скорости переносного движения $\vec{\omega}_e$. Тогда модуль **ускорения Кориолиса** при $t_1 = 1$ с $a_k = 2\omega_e V_r = 2 \cdot 1 \cdot 18\pi = 113,1$ см/с².

Так как вектор относительной скорости точки $\vec{V}_r \perp \vec{\omega}_e$, то по правилу Жуковского для определения направления ускорения Кориолиса достаточно повернуть вектор относительной скорости точки $\vec{V}_r$ на 90° в сторону переносного движения вокруг оси, параллельной оси вращения и проходящей через точку M_1 (см. рис. 3.8). Для определения абсолютного ускорения спроецируем на прямоугольные оси xM_1y (см. рис. 3.8) векторное равенство $\vec{a} = \vec{a}_r^\tau + \vec{a}_r^n + \vec{a}_e^\tau + \vec{a}_e^n + \vec{a}_k$. Получим: $a_y = a_e^\tau \cos 30^\circ + a_e^n \cos 60^\circ + a_r^\tau = 97,9$ см/с², $a_x = -a_e^\tau \cos 60^\circ + a_e^n \cos 30^\circ + a_r^n - a_k = 228,4$ см/с². Модуль абсолютного ускоре-

ния: $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 248,5$ см/с².

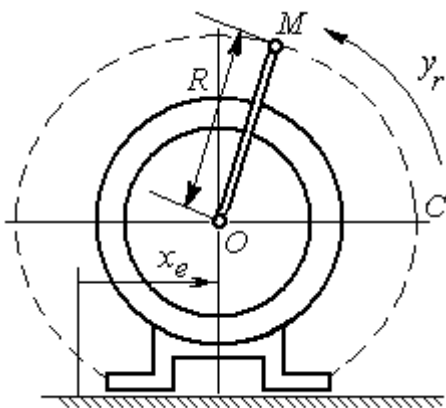


Рис. 3.9. Схема движения точки стержня, укрепленного на электромоторе

Задача 2. К вращающемуся валу электромотора прикреплён стержень OM длины $R = 6$ см. Во время работы электромотора точка M стержня из начального положения C перемещается по дуге окружности согласно уравнению $CM = y_r = \pi t^2$ см. При этом электромотор, установленный без креплений, совершает горизонтальные гармонические колебания на фундаменте по закону

$x_e = 5\sin(\pi t / 3)$ см. Определить абсолютное ускорение точки M в момент времени $t_1 = 1$ с.

Решение

Точка M совершает сложное движение – относительно электромотора и вместе с ним. Относительным движением точки будет её движение по дуге окружности радиуса R , переносным – поступательное горизонтальное, прямолинейное движение электромотора.

Найдём положение точки относительно электродвигателя в заданный момент времени. Угол α , отсчитываемый стержнем OM от начального положения OC , в момент времени $t_1 = 1$ с составляет $\alpha = \frac{y_r(t_1)}{R} = \frac{\pi}{6} = 30^\circ$. Положение точки в момент времени $t_1 = 1$ с отмечено на рис. 3.10 буквой M_1 .

Относительное движение точки задано естественным способом, как закон изменения длины дуги. Относительная скорость $V_r = \dot{y}_r = 2\pi t$. В момент времени $t_1 = 1$ с $V_r = 6,28$ см/с. Вектор $\vec{V}_r$ относительной скорости направлен перпендикулярно стержню OM_1 .

Скорость точки в переносном движении – это скорость горизонтального движения электродвигателя:

$$V_e = \dot{x}_e = \frac{5\pi}{3} \cos(\pi t / 3).$$

В момент времени $t_1 = 1$ с $V_e = \frac{5\pi}{3} \cos 60^\circ = 2,62$ см/с. Вектор $\vec{V}_e$ пе-

реносной скорости точки M направлен параллельно линии движения электродвигателя (см. рис. 3.10).

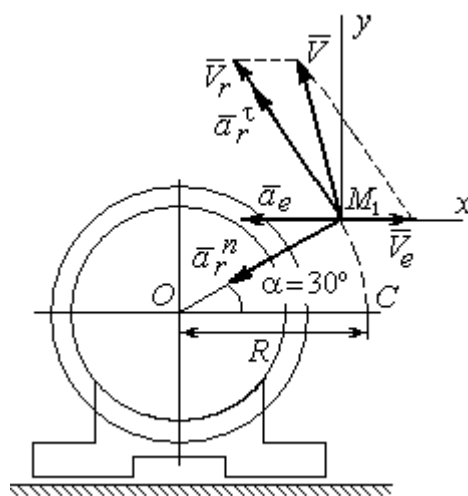


Рис. 3.10. Расчётная схема вычисления абсолютной скорости и абсолютного ускорения точки

Абсолютная скорость точки определяется на основании теоремы сложения скоростей при сложном движении: $\vec{V}_M = \vec{V}_e + \vec{V}_r$. Для того чтобы найти величину абсолютной скорости, выберем оси xM_1y , как показано на рис. 3.10, и спроецируем векторное равенство сложения скоростей на эти оси. Получим: $V_{Mx} = V_e - V_r \cos 60^\circ = -0,52$ см/с (проекция направлена в отрицательную сторону оси x), $V_{My} = V_r \cos 30^\circ = 5,44$ см/с. Модуль абсолютной скорости $V_M = \sqrt{V_{Mx}^2 + V_{My}^2} = 5,46$ см/с. Вектор абсолютной скорости направлен по диагонали параллелограмма, построенного на векторах $\vec{V}_e$ и $\vec{V}_r$.

При поступательном переносном движении точки $\omega_e = 0$ и потому $a_k = 0$. Относительное ускорение точки при движении по окружности раскладывается на две составляющие $\vec{a}_r = \vec{a}_r^\tau + \vec{a}_r^n$, направленные вдоль стержня OM и перпендикулярно ему. Кроме того, при прямолинейном относительном движении $a_e^n = 0$. В результате, теорема о сложении ускорений принимает вид $\vec{a}_M = \vec{a}_r^\tau + \vec{a}_r^n + \vec{a}_e$, где модули векторов вычисляются по формулам $a_r^\tau = \dot{V}_r$, $a_r^n = \frac{V_r^2}{R}$, $a_e = a_e^\tau = \dot{V}_e = -\frac{5\pi^2}{9} \sin(\pi t/3)$ и в момент времени $t_1 = 1$ с равны $a_r^\tau = 6,28$ см/с², $a_r^n = 6,57$ см/с², $a_e = -4,75$ см/с². Направления векторов ускорений показаны на рис. 3.10. Для вычисления модуля абсолютного ускорения точки спроецируем векторное равенство сложения ускорений на оси выбранной ранее системы координат xM_1y . Получим:

$$a_{Mx} = -a_r^\tau \cos 60^\circ - a_r^n \cos 30^\circ - a_e = -4,08 \text{ см/с}^2;$$

$$a_{My} = a_r^\tau \cos 30^\circ - a_r^n \cos 60^\circ = 2,15 \text{ см/с}^2.$$

$$\text{Величина абсолютного ускорения } a_M = \sqrt{a_{Mx}^2 + a_{My}^2} = 4,61 \text{ см/с}^2.$$

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»



Проректор по учебно-методическому комплексу
И. А. Упоров

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

по выполнению контрольной работы по дисциплине

Б1.О.17 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Специальность
21.05.04 Горное дело

Направленность (профиль) подготовки
Горные машины и оборудование

Форма обучения: **очная, заочная**

Год набора: **2022**

Автор: Волков Е. Б., доцент, к. т. н.

Одобрены на заседании кафедры

Технической механики

(название кафедры)

Зав. кафедрой

(подпись)

Волков Е. Б.

(Фамилия И. О.)

Протокол № 1 от 17.09.2021

(Дата)

Рассмотрены методической комиссией
факультета

Горно-механического

(название факультета)

Председатель

(подпись)

Осипов П. А.

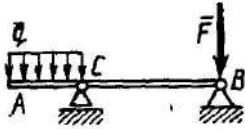
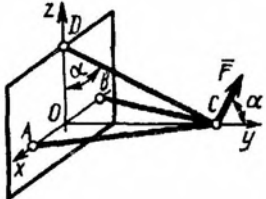
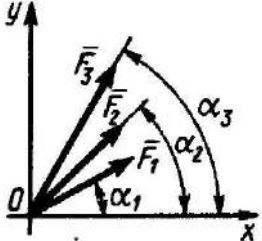
(Фамилия И. О.)

Протокол № 2 от 12.10.2021

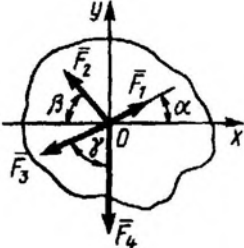
(Дата)

Екатеринбург

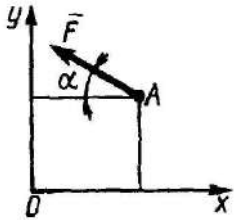
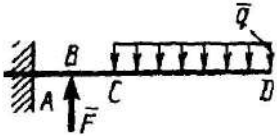
Контрольная № 1 (Статика)

	На балку АВ действуют вертикальная сила $F = 5$ кН и распределенная нагрузка интенсивностью $q = 4$ кН/м. Определить в кН реакцию опоры В, если длины $AC = 3$ м, $BC = 6$ м.
	Три стержня AC, BC и DC соединены шарнирно в точке С. Определить усилие в стержне DC, если заданы сила $F = 50$ Н и угол $\alpha = 60^\circ$. Сила F находится в плоскости Oyz.
	Определить модуль равнодействующей сходящихся сил $F_1 = 10$ Н, $F_2 = 15$ Н и $F_3 = 20$ Н, если известны углы, образованные векторами этих сил с осью Ox: $\alpha_1 = 30^\circ$, $\alpha_2 = 45^\circ$ и $\alpha_3 = 60^\circ$.

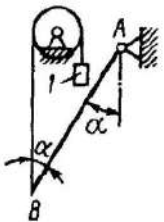
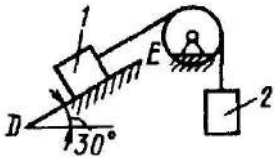
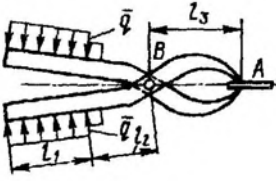
Вариант 1

	На твердое тело в точке О действует плоская система сходящихся сил $F_1 = 1$ Н, $F_2 = 2$ Н, $F_3 = 3$ Н, $F_4 = 4$ Н. Определить сумму проекций заданных сил на ось Oy, если заданы углы $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 45^\circ$, $\gamma = 60^\circ$.

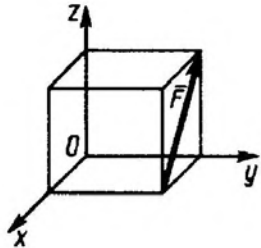
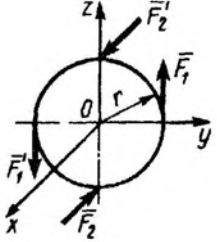
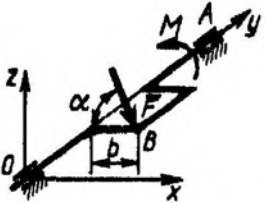
Вариант 2

	Сила $F = 420 \text{ Н}$, приложенная к точке А, лежит в плоскости Oxy. Определить момент силы относительно точки O, если координаты $x_A = 0,2 \text{ м}$, $y_A = 0,3 \text{ м}$ и угол $\alpha = 30^\circ$.
	Определить вертикальную силу F_1 при которой момент в заделке А равен $240 \text{ Н}\cdot\text{м}$, если интенсивность распределенной нагрузки $q = 40 \text{ Н/м}$, а размеры $CD = 3 \text{ м}$, $AB = BC = 1 \text{ м}$.

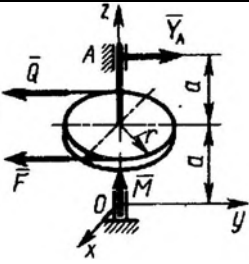
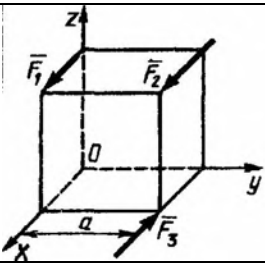
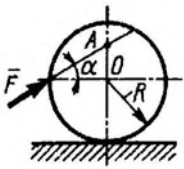
Вариант 3

	Вес однородной балки АВ равен 140 Н. Определить вес груза 1, необходимый для того, чтобы балка АВ находилась в равновесии в указанном положении.
	Определить наименьший вес тела 1, при котором оно скользит вниз по плоскости DE, если вес груза 2 равен 320 Н, коэффициент трения скольжения между телом 1 и плоскостью DE равен 0,2.
	К щипцам приложена равномерно распределенная нагрузка интенсивностью $q = 5 \text{ кН/м}$. Определить вертикальную составляющую силы в кН, действующей на сжимаемый предмет, если размеры $l_1 = 6 \text{ см}$, $l_2 = 10 \text{ см}$, $l_3 = 2 \text{ см}$.

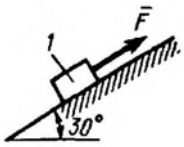
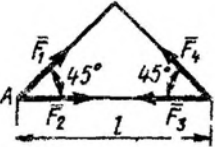
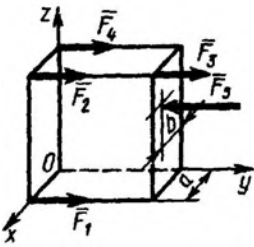
Вариант 4

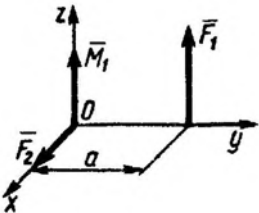
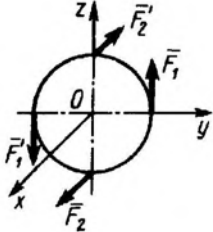
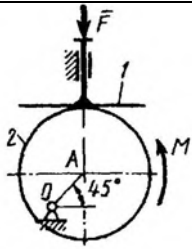
	Определить момент силы F относительно оси Oz, если значение ее равно 5 Н, а ребро куба равно 0,2 м.
	На диск радиуса $r = 0,5 \text{ м}$ действуют пары сил (F_1, F'_1) и (F_2, F'_2). Причем $F_1 \parallel Oz$, $F_2 \parallel Ox$. Модули всех сил равны 2 Н. Определить модуль момента равнодействующей пары сил.
	К коленчатому валу OA в точке B под углом $\alpha = 60^\circ$ к горизонту приложена сила $F = 10 \text{ Н}$, которая уравнивается парой сил с моментом M. Определить модуль момента, если сила $F \parallel Oxz$ и $b = 0,9 \text{ м}$.

Вариант 5

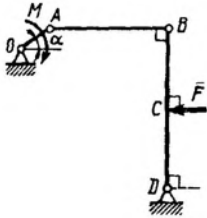
	Сила $F = 2Q = 120$ Н, приложенная к шкиву, уравновешивается парой сил с моментом $M = 18$ Н·м. Составив уравнение моментов сил относительно оси Ox, определить реакцию Y_A подшипника А, если радиус шкива $r = 0,3$ м, $a = 0,3$ м и сила $F \parallel Q \parallel Oy$.
	Определить модуль силы F_3, при которой система сил, приложенная к кубу, приводится к паре сил, если дано $F_2 = 2F_1 = 10$ Н, $a = 1$ м.
	Определить наименьшую силу F_1 необходимую для качения катка радиуса $R = 0,3$ м, если предельный момент трения качения равен $3,46$ Н·м, угол $\alpha = 30^\circ$, расстояние $OA = 0,2$ м.

Вариант 6

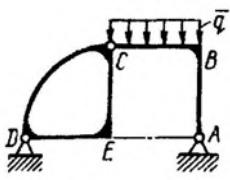
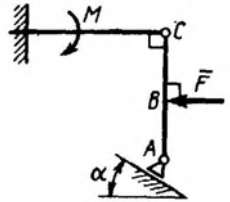
	Каким должен быть вес тела 1, для того чтобы началось скольжение вверх по наклонной плоскости, если сила $F = 90$ Н, а коэффициент трения скольжения $f = 0,3$?
	На каком кратчайшем расстоянии от точки А проходит линия действия равнодействующей системы четырех сил, если $F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = 1$ Н, расстояние $l = 0,1$ м?
	К параллелепипеду параллельно оси Oy приложена уравновешенная система сил $F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = 10$ Н и $F_5 = 40$ Н. Определить расстояние b силы F_5 от плоскости Oyz, если ребро $a = 0,4$ м.

	Определить угол между главным вектором и моментом данной системы сил, принимая за центр приведения точку O, если расстояние $a = 1$ м, момент пары сил $M_1 = 1$ Н·м, сила $F_1 = F_2 = 1$ Н.
	На диск действуют пары сил (F_1, F_1') и (F_2, F_2'), причем $F_1 \parallel Oz$, $F_2 \parallel Ox$. Модули всех сил равны. Определить, какой угол в градусах образует вектор момента равнодействующей пары сил с осью Ox.
	На толкатель 1 кулачкового механизма действует сила $F = 100$ Н. При каком моменте M пары сил, приложенных к кулачку 2, возможно равновесие механизма, если расстояние $OA = 10$ см.

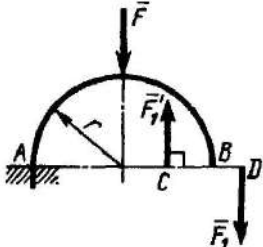
Вариант 7

	Шарнирный четырехзвенник, весом которого можно пренебречь, находится в равновесии. Определить силу F, если к кривошипу OA приложена пара сил с моментом $M = 10$ Н·м, а размеры $OA = 10$ см, $BC = CD$, угол $\alpha = 30^\circ$.

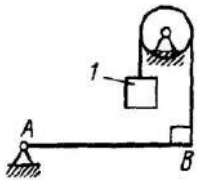
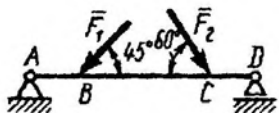
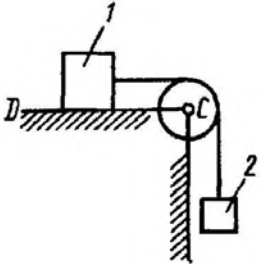
Вариант 8

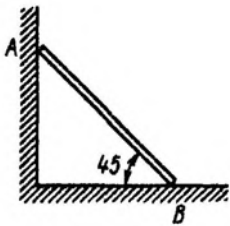
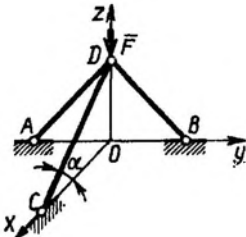
	Определить длину BC, для того чтобы вертикальная составляющая реакции шарнира D равнялась 6 кН, если интенсивность распределенной нагрузки $q = 6 \text{ кН/м}$ и размеры $DE = AE = CE = BC$.
	Определить реакцию опоры A в кН, если сила $F = 3 \text{ кН}$, угол $\alpha = 30^\circ$, размеры $AB = BC$.

Вариант 9

	Вес однородной горизонтальной балки АВ равен 180 Н. Задан угол $\alpha = 45^\circ$. Определить реакцию шарнира А.
	На арку АВ действуют пара сил (F_1, F'_1) и сила F. Определить сумму их моментов относительно точки А, если силы $F = 4$ Н, $F_1 = 2$ Н, радиус $r = 2$ м, плечо $CD = 1,5$ м.
	На однородную балку АВ, вес которой $G = 20$ кН, действует распределенная нагрузка интенсивностью $q = 0,5$ кН/м. Определить в кН реакцию опоры А, если длины $AB = 6$ м, $AC = BC$.

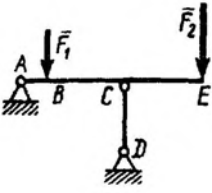
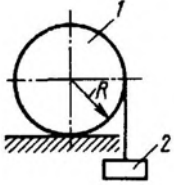
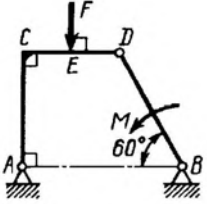
Вариант 10

	Определить вес груза 1, необходимый для того, чтобы однородная балка АВ весом 340 Н в положении равновесия была горизонтальна.
	Определить реакцию опоры D если силы $F_1 = 84,6$ Н, $F_2 = 208$ Н, размеры $AB = 1$ м, $BC = 3$ м, $CD = 2$ м.
	Определить наименьший коэффициент трения скольжения между грузом 1 весом 400 Н и плоскостью DC, при котором груз 1 останется в покое, если вес груза 2 равен 96 Н.

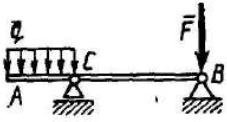
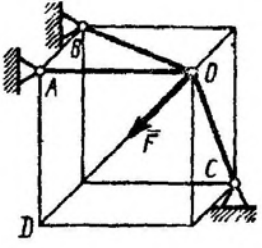
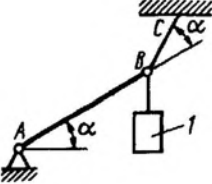
	Однородный брус AB опирается в точке A на гладкую стену, а в точке B на негладкий пол. Определить наименьший коэффициент трения скольжения между брусом и полом, при котором брус останется в указанном положении в покое.
	Определив интенсивность нагрузки q, при которой момент в заделке A равен $400 \text{ Н}\cdot\text{м}$, если размеры $AB = 2 \text{ м}$, $BC = 4 \text{ м}$
	Три стержня AD, BD и CD соединены в точке D шарнирно. Определить усилие в стержне CD, если сила $F = 8 \text{ Н}$ находится в плоскости Oyz и угол $\alpha = 20^\circ$.

Вариант 11

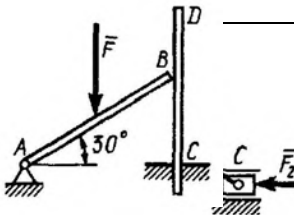
Вариант 12

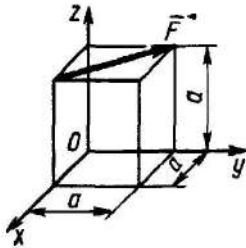
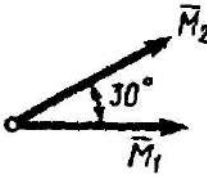
	Балка АЕ шарнирно закреплена в точке А и опирается на вертикальный стержень CD. Определить в кН усилие в стержне CD, если длина $AB = 1$ м, $BC = CE = 2$ м, а силы $F_1 = 2$ кН и $F_2 = 4$ кН вертикальны.
	К катку 1 с помощью нерастяжимой нити подвешен груз 2. Определить наибольший вес этого груза, при котором каток 1 весом 3,2 кН останется в покое, если коэффициент трения качения $\delta = 0,004$ м, радиус $R = 32,4$ см.
	Определить в кН силу F, при которой вертикальная составляющая реакции в шарнире А равна 9 кН, если размеры $AB = BD = 1$ м, $CE = DE$, момент пары сил $M = 6$ кН·м.

Вариант 13

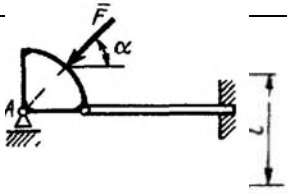
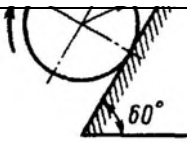
	На балку АВ действуют вертикальная сила $F = 5$ кН и распределенная нагрузка интенсивностью $q = 4$ кН/м. Определить в кН реакцию опоры В, если длины $AC = 3$ м, $BC = 6$ м.
	Три стержня АО, ВО и СО соединены в шарнире О. Определить реакцию стержня СО, возникающую под действием силы $F = 12$ Н, приложенной к шарниру О, если расстояния $AB=AO=AD$.
	Один конец стержня АВ закреплён шарнирно в точке А. К другому концу В привязан груз 1 весом 50 Н. Стержень удерживается в равновесии веревкой ВС. Определить реакцию веревки ВС, если угол $\alpha = 30^\circ$.

Вариант 14

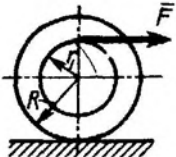
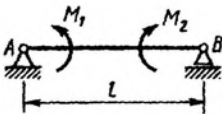
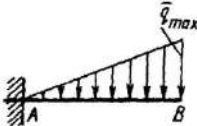
	Кривошипно-ползунный механизм находится в состоянии равновесия под действием пары сил с моментом M, сил $F_1 = 200 \text{ Н}$ и $F_2 = 500 \text{ Н}$. Определить силу воздействия поршня C на направляющую, если расстояния $AB = BC = 30 \text{ см}$.

	Стержень AB концом B свободно опирается на вертикальный стержень CD, один конец которого заделан в основание. К середине стержня AB приложена вертикальная сила $F = 2 \text{ кН}$. Определить в кН реакцию в точке B.
	Определить момент силы F относительно оси Ox, если ее значение $F = 16 \text{ Н}$, ребро куба $a = 0,75 \text{ м}$.
	Определить модуль главного момента двух пар сил, заданных векторами моментов, модули которых $M_1 = 29 \text{ Н}\cdot\text{м}$ и $M_2 = 14 \text{ Н}\cdot\text{м}$.

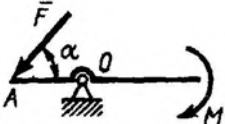
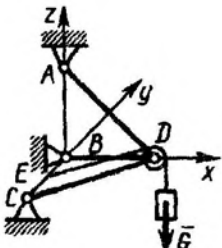
Вариант 15

	Пренебрегая весом конструкции, определить реакцию опоры А, если сила $F = 400 \text{ Н}$, угол $\alpha = 45^\circ$. При какой интенсивности распределенной нагрузки q момент пары, возникающей в заделке, $M_A = 200 \text{ Н}\cdot\text{м}$, если расстояние $l = 1 \text{ м}$?
	К однородному катку радиуса $R = 0,4 \text{ м}$ приложена пара сил с моментом $M = 210 \text{ Н}\cdot\text{м}$. Каким должен быть наибольший вес катка, для того чтобы он мог катиться вверх по наклонной плоскости, если коэффициент трения качения $\delta = 0,006 \text{ м}$?

Вариант 16

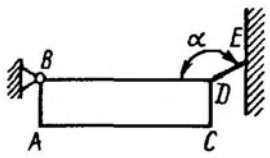
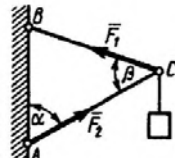
	На конец кабеля, намотанного на барабан, действует сила $F = 20 \text{ Н}$. Барабан катится равномерно по горизонтальной плоскости без скольжения. Определить в кН вес барабана, если его радиусы $r = 0,5 \text{ м}$ и $R = 1 \text{ м}$. Коэффициент трения качения барабана $\delta = 0,01 \text{ м}$.
	На балку, длина которой $l = 3 \text{ м}$, действуют пары сил с моментами $M_1 = 2 \text{ кН}\cdot\text{м}$ и $M_2 = 8 \text{ кН}\cdot\text{м}$. Определить в кН модуль реакции опоры В.
	Определить момент в заделке А, если интенсивность распределенной нагрузки $q_{\max} = 100 \text{ Н/м}$, а длина бруса АВ равна 3 м.

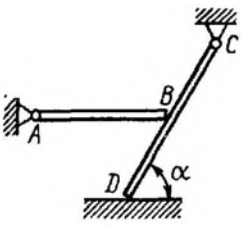
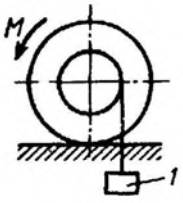
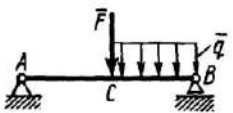
Вариант 17

	На рычаг с неподвижной осью О действуют пара сил с моментом $M = 3 \text{ Н} \cdot \text{м}$ и сила F. Определить модуль силы F, при которой рычаг находится в равновесии, если угол $\alpha = 45^\circ$, длина $AO = 0,3 \text{ м}$.
	Определить усилие в невесомом стержне CD, если дан вес груза $G = 200 \text{ Н}$. Известны длины сторон шарнирно-стержневой конструкции $CE = BE = 2 \text{ м}$ и $AB = BD = 4 \text{ м}$.

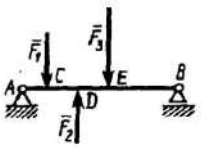
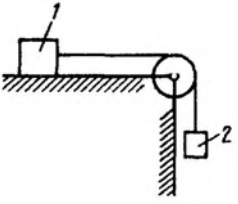
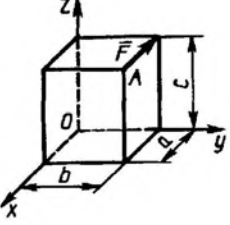
Вариант 18

Вариант 19

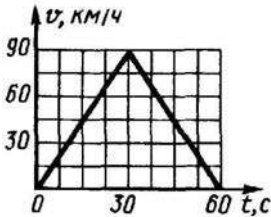
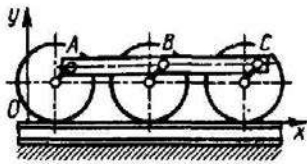
	Горизонтальный брус весом 200 Н удерживается в равновесии с помощью шарнира В и веревки DE, образующей угол $\alpha = 150^\circ$ со стороной BD. Определить реакцию шарнира В, если известно соотношение линейных размеров $4AB = AC$.
	Шарнирный трехзвенник ABC удерживает в равновесии груз, подвешенный к шарнирному болту С. Под действием груза стержень AC сжат силой $F_2 = 25 \text{ Н}$. Заданы углы $\alpha = 60^\circ$ и $\beta = 45^\circ$. Считая стержни AC и BC невесомыми, определить усилие в стержне BC.
	На брус BC, закрепленный в шарнире А, действуют вертикальные силы $F_1 = 4 \text{ кН}$ и F_2. Определить силу F_2 в кН, необходимую для того, чтобы брус в положении равновесия был горизонтальным, если расстояния $AC = 2 \text{ м}$, $AB = 6 \text{ м}$.

	Однородная горизонтальная балка АВ, вес которой 3 кН, в точке В свободно опирается на балку CD. Определить в кН силу воздействия балки CD на основание в точке D, если расстояние $BD = BC$, угол $\alpha = 60^\circ$. Весом балки CD пренебречь.
	К однородному катку, малый радиус которого 0,2 м, подвешен груз 1 весом 200 Н и приложена пара сил с моментом $M = 57,6 \text{ Н}\cdot\text{м}$. Определить в кН наибольший вес катка, при котором он будет катиться влево, если коэффициент трения качения $\delta = 0,008 \text{ м}$.
	На балку АВ действуют силы $F = 9 \text{ Н}$ и распределенная нагрузка интенсивностью $q = 3 \text{ кН/м}$. Определить реакцию опоры В, если длины $AB = 5 \text{ м}$, $BC = 2 \text{ м}$.

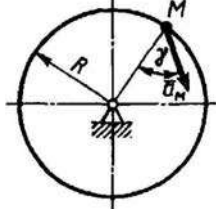
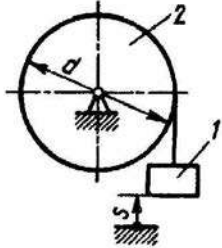
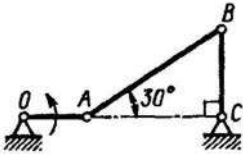
Вариант 20

	На балку АВ действуют вертикальные силы $F_1 = 1 \text{ кН}$, $F_2 = 2 \text{ кН}$ и $F_3 = 3 \text{ кН}$. Определить в кН реакцию опоры В, если расстояния $AC = CD = DE = 1 \text{ м}$, $BE = 2 \text{ м}$.
	Каким должен быть наименьший вес тела 2, для того чтобы тело 1 весом 200 Н начало скользить по горизонтальной плоскости, если коэффициент трения скольжения $f = 0,2$.
	К точке А прямоугольного параллелепипеда приложена сила $F = 4 \text{ кН}$. Определить момент этой силы относительно оси Oy, если размеры $a = 10 \text{ м}$, $b = 6 \text{ м}$, $c = 20 \text{ м}$.

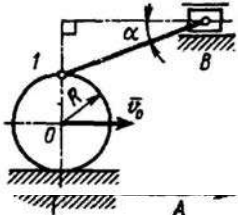
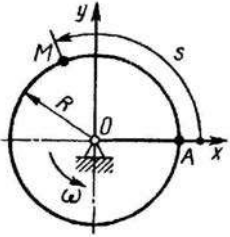
Вариант 1

	Дан график скорости движения точки $v = f(t)$. Определить пройденный путь в момент времени $t = 60$ с.
Задан закон движения точки в прямоугольной системе координат: $x = 2\sin t$, $y = 2\cos t$. Определить криволинейную координату s точки в момент времени $t = 5$ с, если при $t_0 = 0$ $s_0 = 0$ и точка движется в положительном направлении координаты s.	
	На прямолинейном участке пути центр В спарника теплового движется по закону $x_B = 15t - 0,25\cos 30t$, $y_B = 0,5 - 0,25\sin 30t$. В момент времени (с) $t = \pi$ определить скорость точки С спарника, если $BC = 1,5$ м.

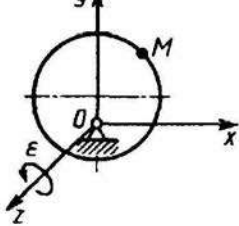
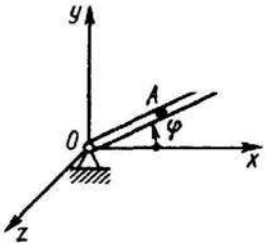
Вариант 2

	Ускорение точки М диска, вращающегося вокруг неподвижной оси, равно 4 м/с^2. Определить угловую скорость этого диска, если его радиус $R = 0,5$ м, а угол $\gamma = 60^\circ$.
	Груз 1 поднимается с помощью лебедки 2. Закон движения груза имеет вид: $s = 7 + 5t^2$, где s - в см. Определить угловую скорость барабана в момент времени $t = 3$ с, если его диаметр $d = 50$ см.
	Для заданного положения шарнирного четырехзвенника определить скорость точки В, если точка А имеет скорость 1 м/с.

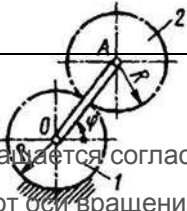
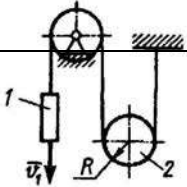
Вариант 3

	Стержень АВ движется в вертикальной плоскости так, что для данного положения механизма определить ускорение его конца А, если конец А скользит по горизонтальной прямой со скоростью $0,2 \text{ м/с}$, а в точке В скользит по диску радиуса r. Определить скорость точки С стержня в положении, когда угол $\alpha = 45^\circ$.
Определить проекцию на неподвижную ось Ох скорости точки А свободного тела, если в момент времени $t = 1 \text{ с}$ ее радиус-вектор относительно полюса $OA = 2i + j + 2k$, мгновенная угловая скорость $\omega = 2i - j + k$, уравнения движения полюса $x_0 = 2t$, $y_0 = 8t$, $z_0 = 5t^2$.	
	Точка М движется по диску радиуса $R = 0,5 \text{ м}$ согласно уравнению $AM = 2t^2$. Диск вращается с постоянной угловой скоростью $\omega = 2 \text{ рад/с}$. Определить дуговую координату s точки М в момент времени $t = 0,5 \text{ с}$, если в начальный момент точка находилась на оси Ох.

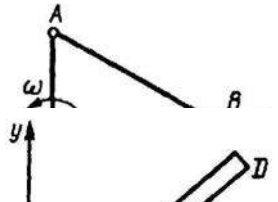
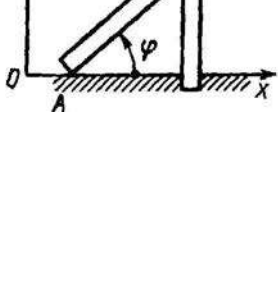
Вариант 4

	Подъем груза 1 осуществляется со скоростью $v_1 = 0,4 \text{ м/с}$. Тележка 2 козлового крана движется со скоростью $v_2 = 0,3 \text{ м/с}$, а скорость крана $v_3 = 0,2 \text{ м/с}$. Определить абсолютную скорость груза 1.
	Диск-эксцентрик вращается равноускоренно из состояния покоя с угловым ускорением $\epsilon = 3 \text{ рад/с}^2$ вокруг оси Oz. По его ободу равномерно движется точка М со скоростью $0,1 \text{ м/с}$. Определить ускорение Кориолиса точки М в момент времени $t = 3 \text{ с}$.
	В трубке, вращающейся по закону $\varphi = 4t$ вокруг оси Oz, движется шарик по закону $OA = 5t^2$. Определить координату x_A шарика в момент времени $t = 0,25 \text{ с}$.

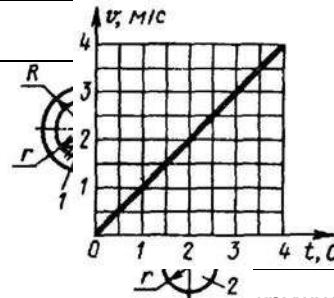
Вариант 5

 Тело вращается согласно закону $\varphi = 1 + 4t$. Определить ускорение точки тела на расстоянии $r = 0,2$ м от оси вращения.	Кривошип OA вращается согласно закону $\varphi = 0,5t^2$. Определить угловое ускорение колеса 2.
	Скорость груза 1 $v = 0,5$ м/с. Определить угловую скорость подвижного блока 2, если его радиус $R = 0,1$ м.

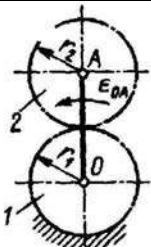
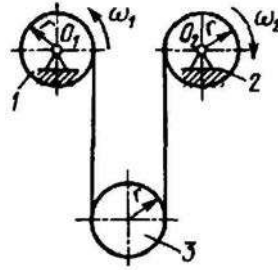
Вариант 6

	Определить ускорение ползуна B кривошипно-ползунного механизма в данном положении, если угловая скорость кривошипа $\omega = 1$ рад/с = const; длины звеньев OA = 0,3 м; AB = 0,5 м.
	Балка AD движется согласно уравнениям $x_A = t^2$, $y_A = 0$, $\varphi = \arcsin\{2/[4+(3,5-t^2)^2]^{0,5}\}$. Определить абсциссу точки A в положении балки, когда ее угол поворота $\varphi = 38^\circ$.
В данный момент времени ротор электродвигателя вращается с угловой скоростью $\omega = 3\pi$ и угловым ускорением $\varepsilon = 8\pi$. Определить ускорение точки ротора на расстоянии 0,04 м от оси вращения.	

Вариант 7

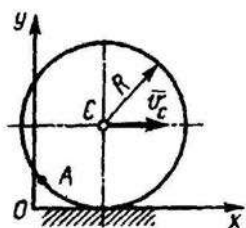
	Дан график скорости $v = v(t)$ движения точки по окружности радиуса 8 м. Определить полное ускорение в момент времени $t = 4$ с. Барабан лебедки 1 вращается с угловой скоростью $\omega = 6$ рад/с. Определить угловую скорость поднимаемой трубы 2, если отношение радиусов $r/R = 2/3$.
Точка движется по окружности радиуса $R = 7$ м согласно уравнению $s = 0,7t^2$. Определить координату s точки в момент времени, когда ее нормальное ускорение $a_n = 3$ м/с².	

Вариант 8

Угловая скорость тела изменяется по закону $\omega = 2t^3$. Определить касательное ускорение точки этого тела на расстоянии $r = 0,2$ м от оси вращения в момент времени $t = 2$ с.	
	Кривошип OA начал равномерно вращаться из состояния покоя с угловым ускорением $\epsilon_{OA} = 0,1\pi$. Определить, сколько оборотов совершит шестерня 2 по истечении 10 с. Радиусы шестерен $r_1 = r_2 = 10$ см.
	Блоки 1 и 2 вращаются вокруг неподвижных осей O_1 и O_2 с угловыми скоростями $\omega_1 = 4$ рад/с и $\omega_2 = 8$ рад/с. Определить угловую скорость подвижного блока 3. Радиусы блоков одинаковы и равны $r = 10$ см.

Вариант 9

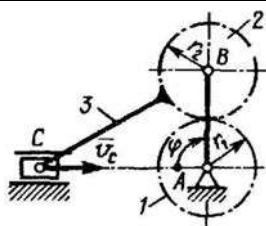
Маховое колесо в данный момент времени вращается с угловым ускорением $\varepsilon = 20\pi$, а его точка на расстоянии от оси вращения 5 см имеет ускорение $a = 8\pi$. Определить нормальное ускорение указанной точки.



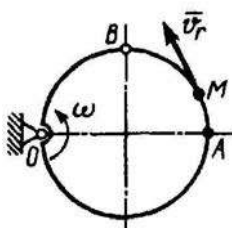
Вследствие удара колесо радиуса $R = 0,2$ м катится с постоянной скоростью центра $v_C = 0,1$ м/с. Определить абсциссу точки A в момент времени $t_1 = 1$ с, если в момент $t_0 = 0$ точка A находилась в начале координат.

Вариант 10

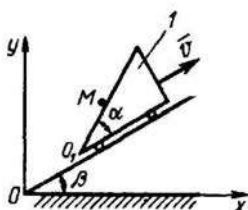
Вариант 11



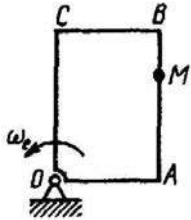
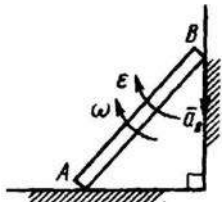
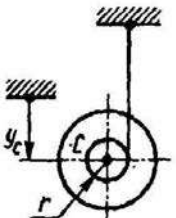
На ось A независимо друг от друга насажены шестерня 1 и кривошип АВ длиной 30 см. На оси В кривошипа установлена шестерня 2 радиуса $r_2 = 15$ см, к которой прикреплен шатун 5. Определить угловую скорость шестерни 1, когда угол $\varphi = 90^\circ$ и скорость v_C точки С ползуна равна 0,3 м/с.



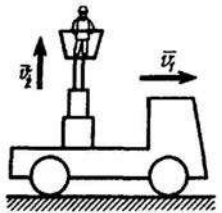
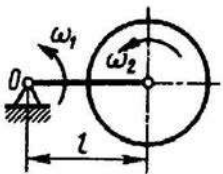
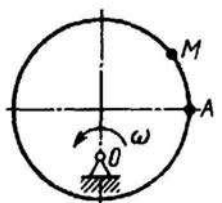
По ободу диска, вращающегося в плоскости чертежа с угловой скоростью $\omega = 2$ рад/с, движется точка М с относительной скоростью $v_r = 0,2$ м/с. Изменится ли модуль ускорения Кориолиса точки М при переходе ее из А в В?



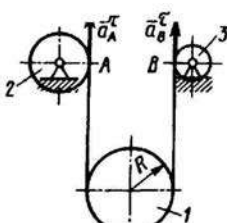
Тело 1 движется по наклонной плоскости равномерно со скоростью $v = 2$ м/с. Точка М относительно тела 1 движется согласно уравнению $O_1M = 0,5t$. Определить координату x_M точки М в момент времени $t = 1$ с, если при $t = 0$ $x_M = 0$, $\alpha = \beta = 30^\circ$.

	Почему в блоке 10 угловой скорости вращения в плоскости, вращаясь, движется точка $A = 10 \text{ м/с}^2$ закону 10 м/с^2 (определить). Определить ускорение по скорости пластины, если момент времени $0,5 \text{ с}$, если ускорение Кориолиса в точке M в этот момент равно 4 м/с^2.
	Конец A балки скользит вдоль пола, а конец B - вдоль стены. В данный момент времени балка имеет угловую скорость $\omega = 0,6 \text{ рад/с}$ и угловое ускорение $\varepsilon = 0,36 \text{ рад/с}^2$. Определить в рад угол между вектором ускорения a_B и отрезком, соединяющим точку B с мгновенным центром ускорений.
	Центр C барабана, разматывающего нить, движется вертикально вниз по закону $y_C = 0,33t^2$. Определить угловое ускорение барабана, если радиус $r = 0,066 \text{ м}$.

Вариант 12

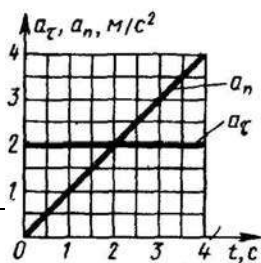
	Автомобиль движется со скоростью $v_1 = 3,6 \text{ км/ч}$, а монтажная вышка поднимается со скоростью $v_2 = 0,5 \text{ м/с}$. Определить абсолютную скорость рабочего, который стоит на вышке неподвижно.
	Стержень длиной $l = 0,5 \text{ м}$ вращается с угловой скоростью $\omega_1 = 4 \text{ рад/с}$, а диск относительно стержня - с угловой скоростью $\omega_2 = 2 \text{ рад/с}$. На каком расстоянии от мгновенной оси вращения диска находится точка O?
	Диск-эксцентрик равномерно вращается в плоскости чертежа. По его ободу движется точка M по закону $AM = 4t^2$. Чему должна равняться угловая скорость диска ω, для того чтобы ускорение Кориолиса точки M в момент времени $t = 1 \text{ с}$ было равно 24 м/с^2?

Вариант 13



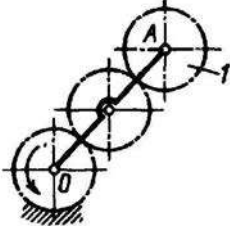
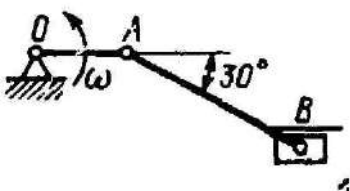
При пуске ротор электродвигателя вращается согласно закону $\varphi = \pi t + \pi e^{-t}$. Определить угловую скорость ротора в момент времени $t = 2$ с.	
	Угловая скорость тела изменяется по закону $\omega = 1 + t$. Определить ускорение точки этого тела на расстоянии $r = 0,2$ м от оси вращения в момент времени $t = 1$ с. Угловая скорость зубчатого колеса 1 изменяется по закону $\omega_1 = 2t^2$. Определить ускорение груза 3 в момент времени $t = 2$ с, если радиусы шестерен $R_1 = 1$ м, $R_2 = 0,8$ м и радиус барабана $r = 0,4$ м.

Вариант 14



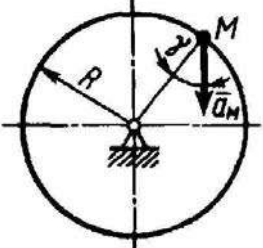
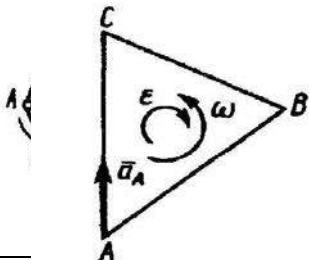
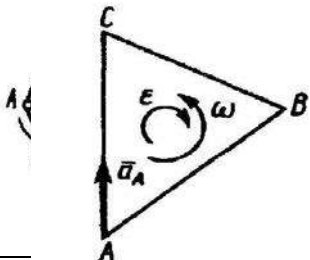
Угловое ускорение тела изменяется согласно закону $\varepsilon = 2t$. Определить угловую скорость тела в момент времени $t = 4$ с, если при $t_0 = 0$ угловая скорость равна нулю.	
	Даны графики ускорения $a_t = a_t(t)$ и $a_n = a_n(t)$. Определить, какой угол в градусах образует полное ускорение с направлением скорости в момент времени $t = 3$ с.
Точка движется по криволинейной траектории с касательным ускорением $a_t = 1,4$ м/с². Определить нормальное ускорение точки в момент времени, когда ее полное ускорение $a = 2,6$ м/с².	

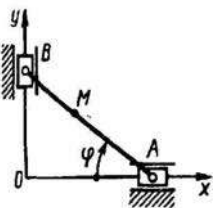
Вариант 15

	Кривошип OA вращается по закону $\varphi = 0,5t$. Определить угловую скорость колеса 1 планетарного механизма, если длина звена OA = 0,2 м и радиусы всех колес одинаковы.
	Определить угловую скорость шатуна AB кривошипно-ползунного механизма в указанном положении, если точка A имеет скорость $v_A = 3$ м/с, а длина шатуна AB = 3 м.

Вариант 16

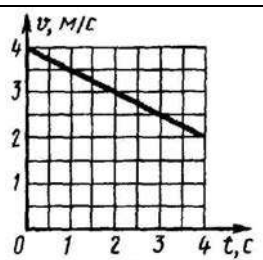
Вариант 17

	Ускорение точки M диска, вращающегося вокруг неподвижной оси, равно 8 м/с^2. Определить угловое ускорение этого диска, если его радиус $R = 0,4$ м, а угол $\gamma = 30^\circ$.
	Шкив 1 радиуса $r_1 = 0,2$ м и диск 2 радиуса $r_2 = 0,5$ м шарнирно соединены штангой AB. Для положения, показанного на рисунке, определить расстояние от точки B до мгновенного центра скоростей штанги.
	Треугольник ABC совершает плоскопараллельное движение. Определить расстояние от вершины A до мгновенного центра ускорений, если ускорение $a_A = 10 \text{ м/с}^2$, угловая скорость в данный момент $\omega = 2 \text{ рад/с}$ и угловое ускорение $\epsilon = 3 \text{ рад/с}^2$.



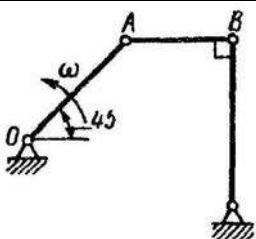
Положение линейки АВ определяется углом $\varphi = 0,2t$. Определить в см/с^2 проекцию ускорения точки М на ось Оу в момент времени $t = 3$ с, если расстояние $AM = 50$ см.

Угловое ускорение тела изменяется согласно закону $\varepsilon = 3t^2$. Определить угловую скорость тела в момент времени $t = 2$ с, если при $t_0 = 0$ угловая скорость $\omega_0 = 2$ рад/с.



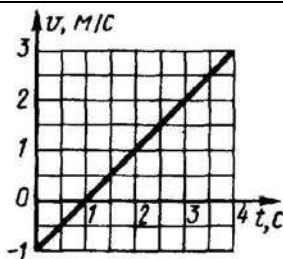
Дан график скорости $v = v(t)$ движения точки по окружности радиуса 5 м. Определить нормальное ускорение точки в момент времени 3 с.

Вариант 18



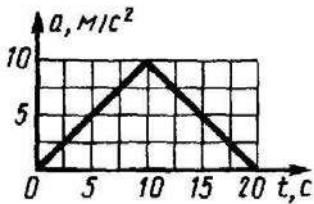
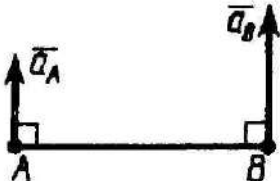
Для изображенного положения механизма определить расстояние от точки А до мгновенного центра скоростей стержня АВ, если кривошип ОА вращается с угловой скоростью $\omega_0 = 10$ рад/с, а длина $AB = 0,6$ м.

При вращении ротора угловая скорость меняется согласно закону $\omega = 6\pi(4t + e^{-0,01t}\sin\pi t)$ Определить угловое ускорение при $t = 100$ с.

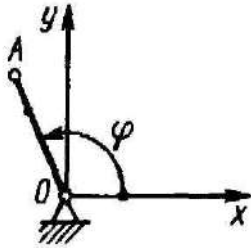
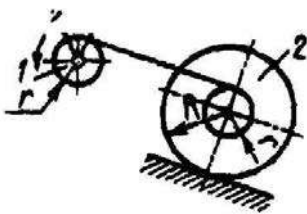


Дан график скорости $v = v(t)$ движения точки по окружности радиуса 8 м. Определить момент времени t , когда нормальное ускорение точки $a_n = 0,5$ м/с.

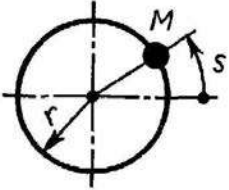
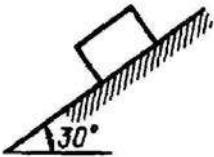
Вариант 19

	Дан график ускорения $a = f(t)$ прямолинейно движущейся точки. Определить скорость точки в момент времени $t = 20$ с, если при $t_0 = 0$ скорость $v_0 = 0$.
Даны уравнения движения точки: $x = 8 - t^2$, $y = t^2 - \cos t$. Определить проекцию ускорения a_y в момент времени, когда координата $x = 0$.	
	Стержень АВ длиной 80 см движется в плоскости чертежа. В некоторый момент времени точки А и В стержня имеют ускорения $a_A = 5 \text{ м/с}^2$, $a_B = 10 \text{ м/с}^2$. Определить угловое ускорение стержня.

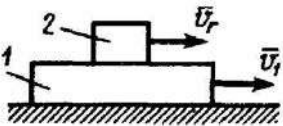
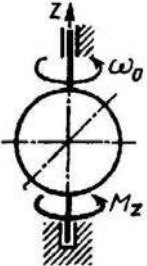
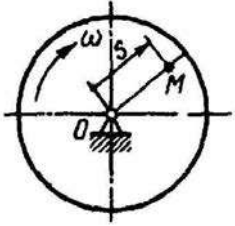
Вариант 20

	Положение кривошипа ОА определяется углом $\varphi = 2t$. Определить проекцию ускорения a_x точки А в момент времени $t = 1$ с, если длина $OA = 1$ м.
Точка движется по прямой Ох с ускорением $a_x = 0,7t$. Определить координату x точки в момент времени $t = 5$ с, если при $t_0 = 0$ скорость $v_0 = 0$ и координата $x_0 = 0$.	
	Барабан 1 вращается согласно закону $\varphi = 0,5t^2$, а ступенчатое колесо 2 катится по наклонной плоскости. Определить угловое ускорение колеса 2, если радиусы $r = 0,1$ м, $R = 0,3$ м.

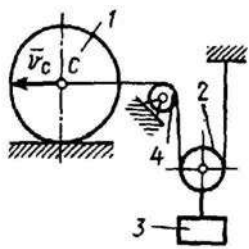
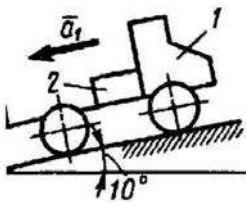
Контрольная № 3 (Динамика)
Вариант 1

	Материальная точка М массой 1,2 кг движется по окружности радиуса $r = 0,6$ м согласно уравнению $s = 2,4t$. Определить модуль равнодействующей сил, приложенных к материальной точке.
Материальная точка массой $m = 12$ кг движется из состояния покоя по направляющей радиуса R, расположенной в горизонтальной плоскости. Определить скорость точки в момент времени $t = 4$ с после начала движения, если на нее действует сила $F = 22$ Н, которая образует постоянный угол 40° с касательной к траектории точки.	
	По наклонной плоскости спускается без начальной скорости тело массой $m = 1$ кг. Определить кинетическую энергию тела в момент времени, когда оно прошло путь, равный 3 м, если коэффициент трения скольжения между телом и наклонной плоскостью $f = 0,2$.

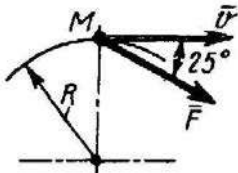
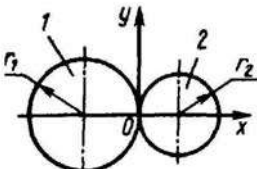
Вариант 2

	Пластина 1 массой 40 кг движется поступательно и прямолинейно со скоростью $v_1 = 1$ м/с. Тело 2 массой 10 кг движется по отношению к пластине поступательно со скоростью $v_r = 0,4$ м/с. Определить кинетическую энергию системы тел, если векторы v_1 и v_r параллельны.
	Однородный шар с моментом инерции $I_z = 4$ кг·м² вращается с угловой скоростью $\omega_0 = 4,5$ рад/с. Определить, за какое время под действием вращающего момента $M_z = 1,2$ Н·м угловая скорость шара удвоится.
	Диск вращается с угловой скоростью $\omega = 8$ рад/с. По радиусу диска движется точка М массой $m = 1$ кг по закону $s = 0,2t$. Определить модуль количества движений этой механической системы в момент времени $t = 0,5$ с.

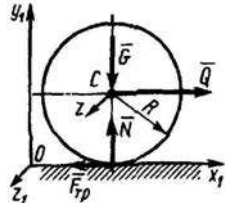
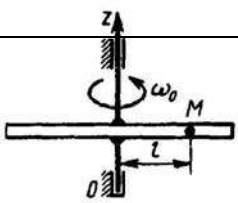
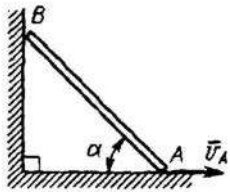
Вариант 3

	Определить модуль количества движения механической системы, если центр масс C цилиндра 1 движется со скоростью $v_C = 4$ м/с, а массы тел 1, 2 и 3 равны соответственно $m_1 = 40$ кг, $m_2 = 10$ кг, $m_3 = 12$ кг. Тела 2 и 4 - однородные диски.
Материальная точка массой $m = 14$ кг движется из состояния покоя по гладкой направляющей радиуса R, расположенной в горизонтальной плоскости. Определить путь, пройденный точкой за время $t = 5$ с после начала движения, если на нее действует сила $F = 24$ Н, которая образует постоянный угол 45° с касательной к траектории точки.	
	Грузовой автомобиль 1 движется на подъеме с постоянным замедлением $a_1 = 2$ м/с². Определить силу давления груза 2 массой 200 кг на переднюю стенку кузова автомобиля.

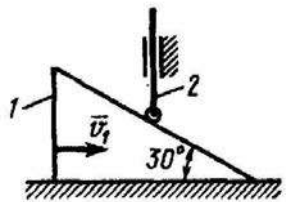
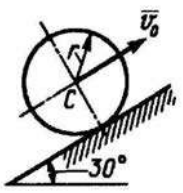
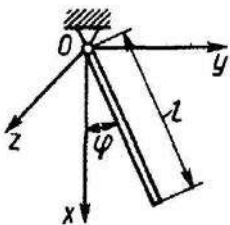
Вариант 4

Материальная точка массой $m = 18$ кг движется по окружности радиуса $R = 8$ м согласно уравнению $s = e^{0,3t}$. Определить проекцию равнодействующей сил, приложенных к точке, на касательную к траектории в момент времени $t = 10$ с.	
	Материальная точка M массой $m = 1,6$ кг движется из состояния покоя в горизонтальной плоскости по окружности радиуса $R = 12$ м под действием силы $F = 0,2t$. Определить скорость точки в момент времени $t = 18$ с, если сила образует постоянный угол 25° с вектором скорости.
	Механическая система состоит из двух тонких однородных сферических оболочек 1 и 2 радиуса $r_1 = 0,6$ м и $r_2 = 0,4$ м. Определить момент инерции этой системы относительно оси Oy, если массы оболочек $m_1 = 80$ кг, $m_2 = 40$ кг.

Вариант 5

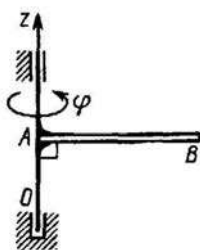
	Цилиндр 1 вращается с угловой скоростью $\omega = 20$ рад/с. Его момент инерции относительно горизонтальной оси 2 $I_{Cz} = 0,9$ кг·м². Радиус $R = 0,1$ м. Сила трения $F_{тр} = 1$ Н. Определить кинетический момент механической системы относительно оси вращения $I_{Cz} = 0,9$ кг·м².
	Трубка вращается вокруг вертикальной оси Oz, ее момент инерции $I_z = 0,075$ кг·м². По трубке под действием внутренних сил системы движется шарик M массой $m = 0,1$ кг. Когда шарик находится на оси Oz, угловая скорость $\omega_0 = 4$ рад/с. При каком расстоянии l угловая скорость равна 3 рад/с?
	Однородный стержень AB длиной 2 м и массой $m = 6$ кг при своем движении скользит концами A и B по горизонтальной и вертикальной плоскостям. Определить кинетическую энергию стержня в момент времени, когда угол $\alpha = 45^\circ$ и скорость точки A равна $v_A = 1$ м/с.

Вариант 6

	Призма 1 массой $m_1 = 5$ кг движется по горизонтальной плоскости со скоростью $v_1 = 1$ м/с. Масса толкателя 2 равна 1 кг. Определить кинетическую энергию механизма.
	Однородный диск массой m и радиуса r катится без скольжения по наклонной плоскости вверх. В начальный момент времени скорость центра диска $v_0 = 4$ м/с. Определить путь, пройденный центром C диска до остановки.
	Однородный стержень массой m и длиной $l = 1$ м может вращаться вокруг горизонтальной оси Oz. Стержень отклонили от положения равновесия на малый угол φ и отпустили без начальной угловой скорости. Определить угловую частоту малых колебаний стержня.

Вариант 7

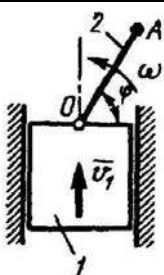
Ротору массой $m = 314$ кг и радиусом инерции относительно оси вращения, равным 1 м, сообщена угловая скорость $\omega_0 = 10$ рад/с. Предоставленный самому себе, он остановился, сделав 100 оборотов. Определить момент трения в подшипниках, считая его постоянным.



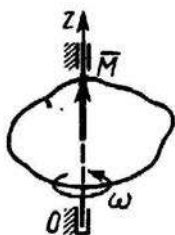
Однородный стержень, масса которого $m = 3$ кг и длина $AB = 1$ м, вращается вокруг оси Oz по закону $\varphi = 2t^3$. Определить кинетическую энергию стержня в момент времени $t = 1$ с.

Вариант 8

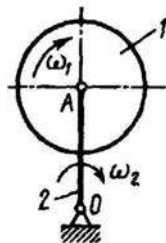
Вариант 9



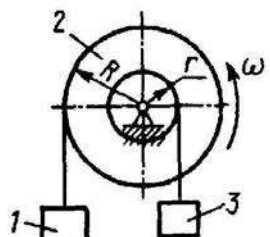
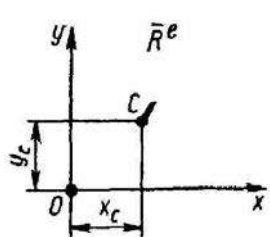
Тело 1 движется вертикально вверх со скоростью $v_1 = 1$ м/с. К стержню 2 длиной $OA = 0,2$ м, который вращается вокруг горизонтальной оси O с постоянной угловой скоростью $\omega = 10$ рад/с, прикреплен точечный груз A массой $0,1$ кг. Определить кинетическую энергию груза при $\varphi = 60^\circ$.



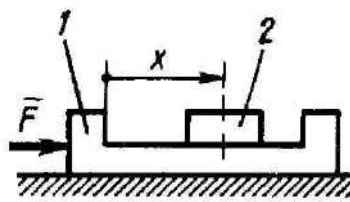
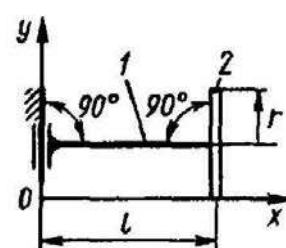
Тело вращается вокруг вертикальной оси Oz под действием пары сил с моментом $M = 16t$. Определить момент инерции тела относительно оси Oz , если известно, что в момент времени $t = 3$ с угловая скорость $\omega = 2$ рад/с. При $t = 0$ тело находилось в покое.



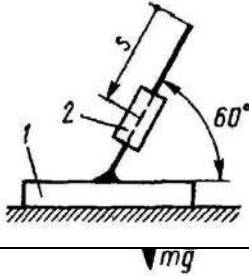
Кривошип 2 длиной $OA = 1$ м вращается с угловой скоростью $\omega_2 = 10$ рад/с. Относительно кривошипа вращается однородный диск 1 массой $m_1 = 10$ кг с угловой скоростью ω_1 . Определить модуль количества движения системы, считая кривошип 2 однородным стержнем массой $m_2 = 5$ кг.

	На барабан 2, момент инерции которого относительно оси вращения $I = 0,05 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, намотаны нити, к которым прикреплены грузы 1 и 3 массой $m_1 = 2m_3 = 2 \text{ кг}$. Определить максимальную высоту подъема h в км, если в начальный момент скорости точек $v_0 = 600 \text{ м/с}$. Найти, если угловая скорость $\omega = 8 \text{ рад/с}$, радиусы $R = 2r = 20 \text{ см}$.
Точка M движется по оси Ox под действием силы $F_x = 6m \sin 2t$. В начальный момент времени скорость точки $v_{0x} = 3 \text{ м/с}$. Определить постоянную интегрирования в уравнении скорости.	
	Определить проекцию ускорения центра масс C механической системы на ось Oy в момент времени, когда координата $y_c = 0,8 \text{ м}$, если масса системы $m = 10 \text{ кг}$, а главный вектор приложенных внешних сил $\vec{R}^e = 3\vec{i} + 6t\vec{j}$. В начальный момент времени центр масс системы находился в точке O в покое.

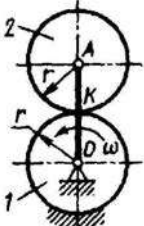
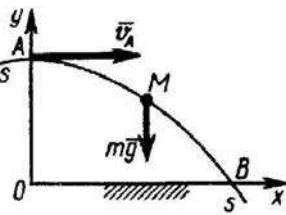
Вариант 10

Материальная точка массой $m = 18 \text{ кг}$ движется по окружности радиуса $R = 8 \text{ м}$ согласно уравнению $s = e^{0,3t}$. Определить проекцию равнодействующей сил, приложенных к точке, на касательную к траектории в момент времени $t = 10 \text{ с}$.	
	На тело 1 действует постоянная сила $F = 10 \text{ Н}$. Определить ускорение этого тела в момент времени $t = 0,5 \text{ с}$, если относительно него под действием внутренних сил системы движется тело 2 согласно уравнению $x = \cos \pi t$. Массы тел: $m_1 = 4 \text{ кг}$, $m_2 = 1 \text{ кг}$. Тела движутся поступательно.
	Механическая система состоит из однородного тонкого стержня 1 массой $m_1 = 0,4 \text{ кг}$ и однородного тонкого диска 2 массой $m_2 = 2 \text{ кг}$. Определить момент инерции этой системы относительно оси Oy, если радиус $r = 0,1 \text{ м}$, а длина $l = 0,3 \text{ м}$.

Вариант 11

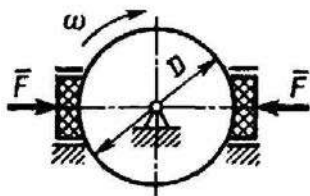
Материальная точка массой $m = 20$ кг движется по окружности радиуса $R = 6$ м согласно уравнению $s = \int t dt$. Определить проекцию равнодействующей сил, приложенных к точке, на нормаль	
мент времени $t = 0,5$ с.	
	Тело 1 массой $m_1 = 0,7$ кг может двигаться по горизонтальной направляющей. Определить модуль ускорения тела 1 в момент времени $t = 0,25$ с, если относительно него под действием внутренней силы F движется тело 2 массой $m_2 = 0,1$ кг согласно уравнению $s = \sin 4t$.

Вариант 12

	Кривошип OA вращается с постоянной угловой скоростью $\omega = 6$ рад/с. Колесо 2 катится по неподвижному колесу 1. Определить кинетический момент колеса 2 относительно его мгновенного центра скоростей K, если радиус $r = 0,15$ м. Колесо 2 считать однородным диском массой $m = 3$ кг.
	Определить проекцию на ось Oy главного вектора количества движения системы двух материальных точек, массы которых $m_1 = 4$ кг, $m_2 = 2$ кг, в момент времени, когда их скорости $v_1 = 2$ м/с, $v_2 = 1$ м/с.
	Материальная точка M движется по параболе s-s в вертикальной плоскости под действием силы тяжести. Определить скорость точки в положении B, если в положении A ее скорость $v_A = 30$ м/с, а высота $OA = 600$ м.

Вариант 13

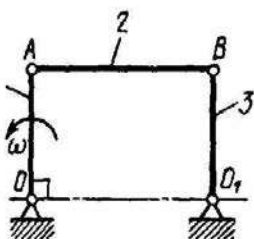
Материальная точка массой $m = 4$ кг движется по горизонтальной прямой. Через сколько секунд скорость точки уменьшится в 10 раз, если сила сопротивления движению $R = 0,8v$?



К диску диаметра $D = 20$ см, который вращается с угловой скоростью $\omega = 100$ рад/с, прижимаются две колодки с силой $F = 200$ Н каждая. Определить мощность силы трения, если коэффициент трения скольжения тормозной колодки о диск $f = 0,2$.

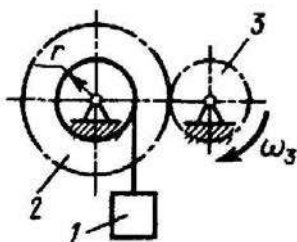
Вариант 14

Вариант 15



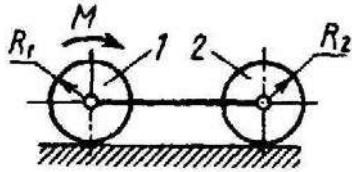
Звено 1 длиной $OA = 1$ м шарнирного параллелограмма $OABO_1$ вращается с угловой скоростью $\omega = 20$ рад/с. Определить модуль количества движения механизма в указанном положении. Звенья 1, 2 и 3 считать однородными стержнями, массы которых $m_1 = m_2 = m_3 = 4$ кг.

На материальную точку массой $m = 250$ кг, которая движется по горизонтальной прямой, действует сила сопротивления $R = 5v^2$. Определить скорость точки в момент времени $t = 6$ с, если при $t_0 = 0$ ее скорость $v_0 = 20$ м/с.



Для подъема груза 1 массой $m_1 = 200$ кг используется лебедка. Зубчатое колесо 3, соединенное с валом электродвигателя, вращается равномерно с угловой скоростью $\omega_3 = 30$ рад/с. Определить в кВт мощность электродвигателя, если число зубьев колес $z_2 = 2z_3$ и радиус барабана $r = 0,1$ м.

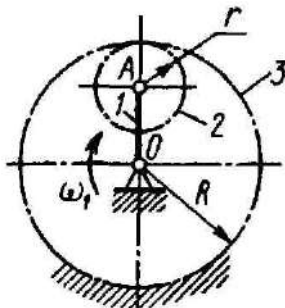
На вал двигателя действует крутящий момент $M = 80 (1 - \omega/400)$. Определить в кВт мощность двигателя в момент времени, когда вал двигателя имеет угловую скорость, равную 200 рад/с.



Однородные цилиндрические катки 1 и 2 массой 20 кг каждый приводятся в движение из состояния покоя постоянным моментом пары сил $M = 2 \text{ Н} \cdot \text{м}$. Определить скорость осей катков при их перемещении на расстояние 3 м, если радиусы $R_1 = R_2 = 0,2 \text{ м}$.

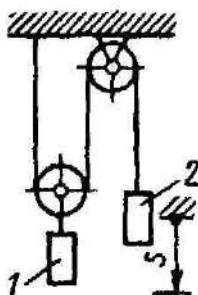
Вариант 18

Вариант 19

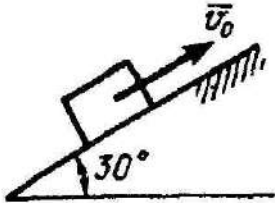
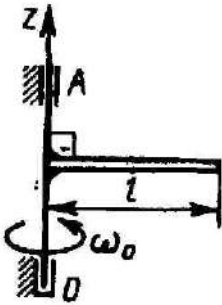


Кривошип 1, вращаясь с угловой скоростью $\omega = 10 \text{ рад/с}$, приводит в движение колесо 2 массой 1 кг, которое можно считать однородным диском. Момент инерции кривошипа относительно оси вращения равен $0,1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$. Определить кинетическую энергию механизма, если радиус $R = 3r = 0,6 \text{ м}$.

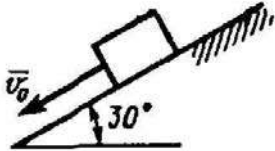
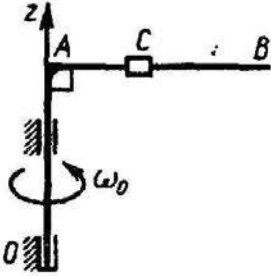
Модуль вектора количества движения механической системы изменяется по закону $Q = 4t^2$. Определить модуль главного вектора внешних сил, действующих на систему, в момент времени $t = 2 \text{ с}$, если вектор количества движения и главный вектор внешних сил параллельны.



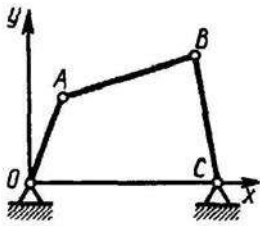
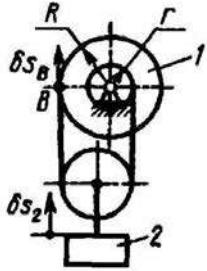
Определить скорость груза 2 в момент времени, когда он опустился вниз на расстояние $s = 4 \text{ м}$, если массы грузов $m_1 = 2 \text{ кг}$, $m_2 = 4 \text{ кг}$. Система тел вначале находилась в покое.

	Тело, которому сообщили начальную скорость $v_0 = 20$ м/с, скользило по шероховатой наклонной плоскости и остановилось. Найти время движения до остановки, если коэффициент трения скольжения $f = 0,1$.
Материальная точка массой $m = 7$ кг из состояния покоя движется по оси Ox под действием силы $F_x = 1e^t$. Определить скорость точки в момент времени $t = 2$ с.	
	Однородный стержень массой $m = 3$ кг и длиной $l = 1$ м вращается вокруг вертикальной оси Oz с угловой скоростью $\omega_0 = 24$ рад/с. К валу OA прикладывается постоянный момент сил торможения. Определить модуль этого момента, если стержень останавливается через 4 с после начала торможения.

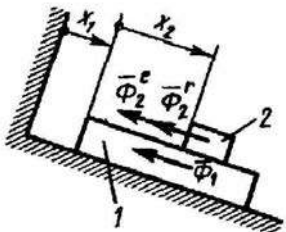
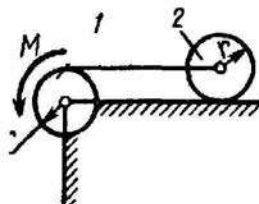
Вариант 20

	Тело, которому сообщили начальную скорость $v_0 = 5$ м/с скользит по гладким наклонным направляющим. Определить, через какое время скорость этого тела будет равна 9,81 м/с.
Материальная точка массой $m = 2$ кг движется по горизонтальной оси Ox под действием силы $F_x = 5\cos 0,5 t$. Определить скорость точки в момент времени $t = 4$ с, если при $t_0 = 0$ скорость $v_0 = 0$.	
	По стержню AB движется ползун C согласно закону $AC = 0,2 + 1,2t$. Ползун считать материальной точкой массой $m = 1$ кг. Момент инерции вала OA со стержнем $I_z = 2,5$ кг·м². Определить угловую скорость вала в момент времени $t = 1$ с, если начальная угловая скорость $\omega_0 = 10$ рад/с.

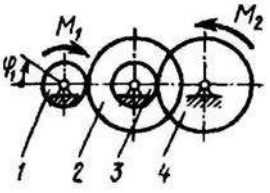
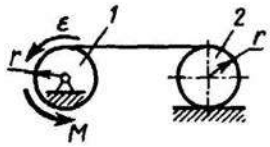
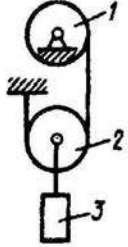
Вариант 1

	Определить число степеней свободы шарнирного четырехзвенника, если длины звеньев $OA = l_1$, $AB = l_2$ и $BC = l_3$.
В некоторый момент времени обобщенная координата $\varphi = 3$ рад, а обобщенная скорость $\dot{\varphi} = 2$ рад/с. Определить при этом модуль кинетического потенциала механической системы, если известно, что кинетическая энергия системы $T = 10\varphi^2$, а потенциальная энергия $\Pi = 2\varphi^2$.	
	Определить отношение между возможными перемещениями δs_B точки B барабана 1 и δs_2 груза 2 дифференциального ворота, если радиусы $R = 2r = 20$ см.

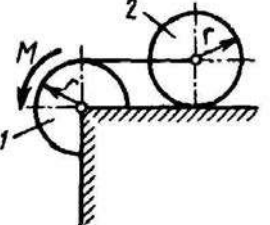
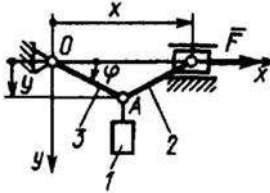
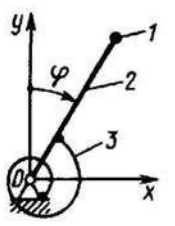
Вариант 2

	Определить обобщенную силу инерции, соответствующую обобщенной координате x_2, если сила инерции тела 1 $\Phi_1 = 8$ Н, переносная и относительная силы инерции тела 2 соответственно $\Phi_2^e = 5$ Н, $\Phi_2^r = 5$ Н.
	Определить угловое ускорение барабана 1, если к нему приложена пара сил с постоянным моментом $M = 0,2$ Н·м, массы тел $m_1 = m_2 = 1$ кг, моменты инерции относительно центральных осей $I_1 = I_2 = 0,02$ кг·м², радиус $r = 0,2$ м.
	Система трех стержней, связанных шарнирами, может двигаться в одной вертикальной плоскости. Определить число обобщенных координат системы.

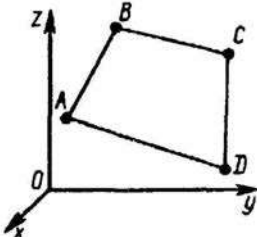
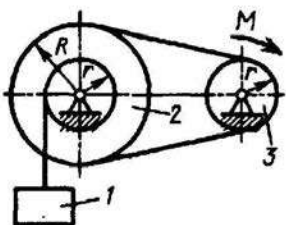
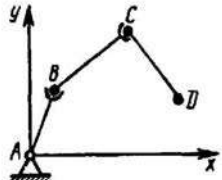
Вариант 3

	Радиусы колес 1 и 3, 2 и 4 соответственно равны: $r_1 = r_3 = 10$ см, $r_2 = r_4 = 15$ см. Моменты сил $M_1 = 5$ Н·м, $M_2 = 9$ Н·м. Определить угловое ускорение φ_1 колеса 1, если кинетическая энергия системы $T = 2\varphi_1^2$.
	Определить модуль постоянного момента M пары сил, при действии которой барабан 1 вращается с угловым ускорением $\epsilon = 1$ рад/с². Барабан 1 и каток 2 - однородные цилиндры одинакового радиуса $r = 0,2$ м, массы тел $m_1 = m_2 = 2$ кг.
	Тела 1 и 2 - однородные диски, массы и радиусы которых одинаковы. Определить ускорение тела 3, если его масса $m_3 = m_2 = m_1$.

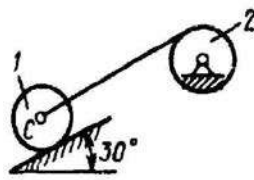
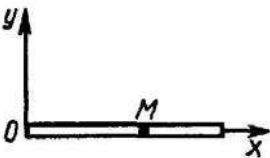
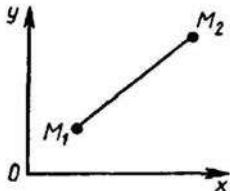
Вариант 4

	Определить угловое ускорение катка 2, катящегося без скольжения, если на блок 1 действует пара сил с моментом $M = 0,6$ Н·м. Каток 2 считать однородным цилиндром массой $m = 4$ кг и радиусом $r = 0,5$ м.
	Два стержня 2 и 3 одинаковой длины $l = 0,5$ м соединены шарниром А. Определить обобщенную силу, соответствующую обобщенной координате в момент времени, когда угол $\varphi = 25^\circ$, если сила $F = 100$ Н, а масса груза 1 равна 5 кг.
	Стержень 2 длиной 0,5 м вместе с присоединенным точечным грузом 1 массой $m_1 = 20$ кг колеблется в вертикальной плоскости. На стержень действует пружина 3 с моментом силы $M = -80\varphi$. Определить обобщенную силу соответствующую координате φ, когда угол $\varphi = \pi/6$.

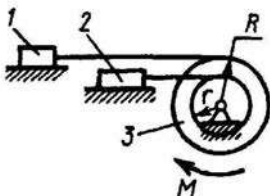
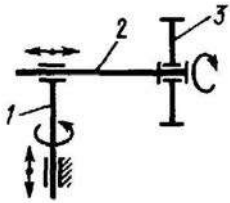
Вариант 5

	Материальные точки A, B, C и D соединены между собой невесомыми жесткими стержнями постоянной длины. Точка A неподвижна, а точки B, C и D движутся в пространстве. Определить число степеней свободы системы материальных точек.
	Определить модуль момента M на ры сил, который необходимо приложить к шкиву 3 для равномерного подъема груза 1 весом 900 Н. Радиусы шкивов $R = 2r = 40$ см.
	Материальные точки A, B, C и D соединены между собой невесомыми жесткими стержнями постоянной длины. Точка A неподвижна, а точки B, C и D движутся в плоскости Oxy. Определить число степеней свободы системы материальных точек.

Вариант 6

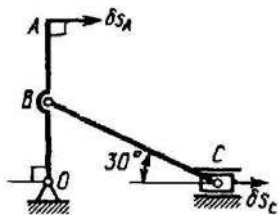
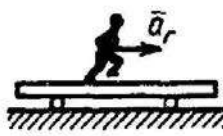
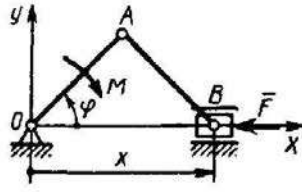
	Определить ускорение центра С катка 1, если тела 1 и 2 - однородные сплошные цилиндры с одинаковыми массами и радиусами.
	Материальная точка M движется в плоскости Oxy по трубке, расположенной вдоль оси Ox. Определить число степеней свободы этой точки.
	Материальные точки M_1 и M_2, соединенные жестким невесомым стержнем, движутся в плоскости чертежа. Определить число степеней свободы системы материальных точек.

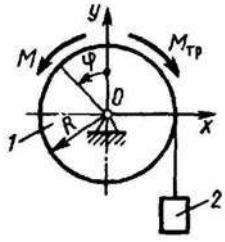
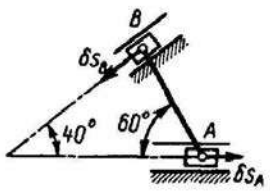
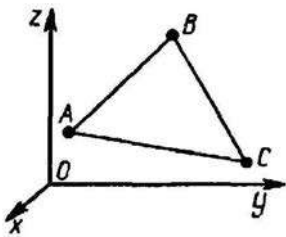
Вариант 7

	Определить угловое ускорение барабана если его момент инерции относительно оси вращения $I_3 = 0,1 \text{ кг}\cdot\text{м}$, момент пары сил, действующей на барабан, $M = 0,6 \text{ Н}\cdot\text{м}$, массы тел $m_1 = m_2 = 10 \text{ кг}$, радиусы $R = 0,2 \text{ м}$, $r = 0,1 \text{ м}$.
	Механизм состоит из вертикальной оси 1, горизонтального стержня 2 и колеса 3. Определить число обобщенных координат колеса 3.

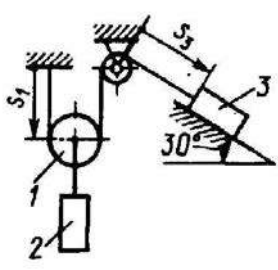
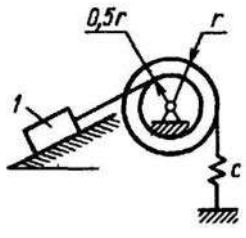
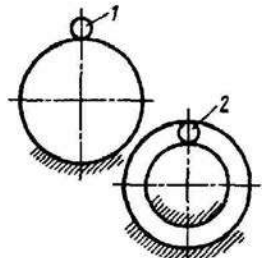
Вариант 8

Вариант 9

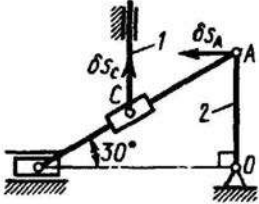
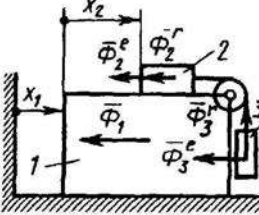
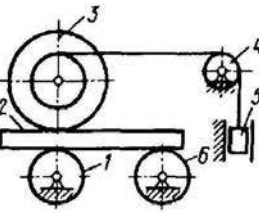
	Определить отношение между возможными перемещениями δs_A точки A кривошипа OA и δs_C точки C ползуна, если длины $OB = AB$.
	По горизонтальной платформе массой $m_2 = 425 \text{ кг}$ бежит человек с ускорением $a_r = 2 \text{ м/с}^2$ относительно платформы. Масса человека $m_1 = 75 \text{ кг}$. Определить модуль ускорения платформы.
	На кривошип OA действует пара сил с моментом $M = 1,5 \text{ Н}\cdot\text{м}$, а на ползун B - сила $F = 20 \text{ Н}$. Определить обобщенную силу, соответствующую обобщенной координате в момент времени, когда $\varphi = 45^\circ$, если расстояния $OA = AB = 0,2 \text{ м}$.

	К цилиндру 1 приложена пара сил с моментом $M = 120 \text{ Н}\cdot\text{м}$ и момент сил трения $M_{\text{тр}} = 10 \text{ Н}\cdot\text{м}$. К концу нерастяжимой нити привязан груз 2 массой $m_2 = 40 \text{ кг}$. Выбирая в качестве обобщенной координаты угол φ, определить обобщенную силу, если радиус $R = 0,3 \text{ м}$.
	Определить отношение между возможными перемещениями δs_A и δs_B точек A и B шатуна AB механизма эллипсографа.
	Материальные точки A, B и C, соединенные между собой невесомыми стержнями постоянной длины, движутся в пространстве. Определить число степеней свобода системы материальных точек.

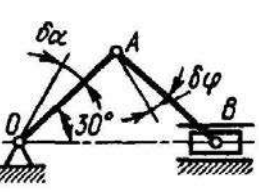
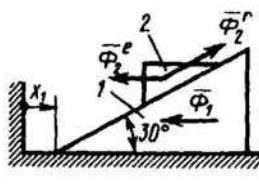
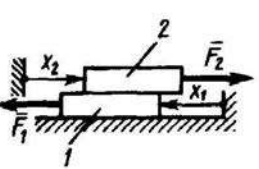
Вариант 10

	Тела 1, 2, 3, массы которых $m_1 = m_2 = m_3 = 5 \text{ кг}$, соединены нерастяжимой нитью. Определить обобщенную силу, соответствующую обобщенной координате s_1.
	Определить угловую частоту свободных колебаний тела 1, если его масса $m = 1 \text{ кг}$, коэффициент жесткости пружины $c = 1 \text{ Н/см}$.
	Шарик 1 катится по поверхности гладкого неподвижного цилиндра, а шарик 2 движется между двумя неподвижными цилиндрическими поверхностями. Укажите номер шарика, на который наложена удерживающая связь.

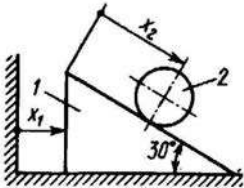
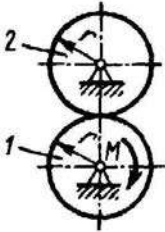
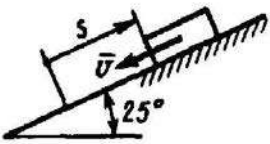
Вариант 11

	Определить отношение между возможными перемещениями δs_A точки A кривошипа 2 и δs_C точки C толкателя 1.
	Определить обобщенную силу инерции, соответствующую обобщенной координате x_2, если сила инерции тела 1 $\Phi_1 = 4$ Н, переносная и относительная силы инерции тела 2 соответственно $\Phi_2^e = 2$ Н, $\Phi_2^r = 1$ Н, переносная и относительная силы инерции тела 3 соответственно $\Phi_3^e = 2$ Н, $\Phi_3^r = 1$ Н.
	Механическая система состоит из катка 3, колес 1 и 6, бруса 2, блока 4 и груза 5. Определить число обобщенных координат этой системы.

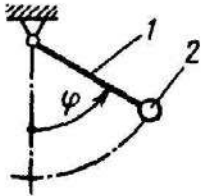
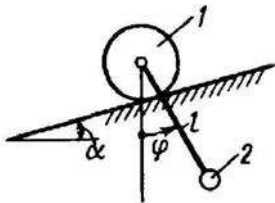
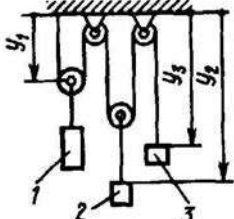
Вариант 12

	Определить отношение между возможными угловыми перемещениями $\delta \varphi$ шатуна AB и $\delta \alpha$ кривошипа OA, если длины $OA = AB$.
	Определить обобщенную силу инерции, соответствующую обобщенной координате x_1, если сила инерции тела 1 $\Phi_1 = 10$ Н, переносная и относительная силы инерции тела 2 соответственно $\Phi_2^e = 5$ Н, $\Phi_2^r = 10$ Н.
	На пластины 1 и 2, массы которых $m_1 = m_2 = 10$ кг, действуют сизгы $F_1 = 50$ Н и $F_2 = 30$ Н. Определить обобщенную силу, соответствующую координате x_1, если коэффициент трения скольжения между всеми поверхностями $f = 0,15$.

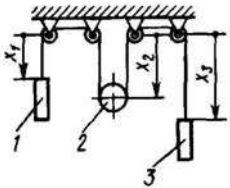
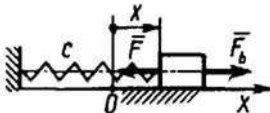
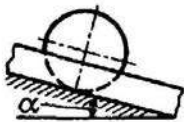
Вариант 13

	Определить обобщенную силу, соответствующую обобщенной координате x_2, если заданы массы тел $m_1 = 4$ кг, $m_2 = 2$ кг.
	Определить угловое ускорение диска 1, если на него действует пара сил с моментом $M = 0,4$ Н·м. Массы и радиусы однородных дисков 1 и 2 одинаковы: $m = 10$ кг, $r = 0,2$ м.
	Тело массой $m = 20$ кг скользит по гладкой поверхности вниз. Определить кинетический потенциал тела в момент времени, когда координата тела $s = 2$ м и скорость $v = 3$ м/с. Принять потенциальную энергию тела P_0 равной нулю в положении, когда координата $s = 0$.

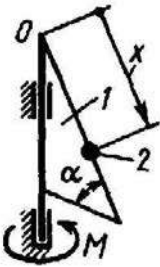
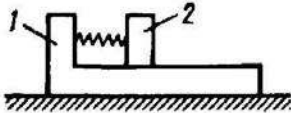
Вариант 14

	Груз 2 прикреплен к стержню 1 и движется в вертикальной плоскости. Потенциальная энергия маятника $\Pi = 9,81(1 - \cos\varphi)$, кинетическая энергия $T = 0,8\varphi^2$. Определить кинетический потенциал в момент времени, когда угол $\varphi = 60^\circ$ и угловая скорость $\dot{\varphi} = 1$ рад/с.
	Определить обобщенную силу, соответствующую обобщенной координате φ, в момент времени, когда угол отклонения маятника $\varphi = 30^\circ$, если его длина $l = 1$ м, массы тел $m_1 = 10$ кг, $m_2 = 1$ кг, угол $\alpha = 15^\circ$.
	Грузы 1, 2, 3, массы которых $m_1 = 12$ кг, $m_2 = 6$ кг, $m_3 = 4$ кг, перемещаются в вертикальной плоскости. Выбрав координаты y_1 и y_2 в качестве обобщенных, определить обобщенную силу, соответствующую координате y_1.

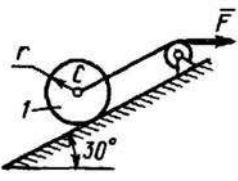
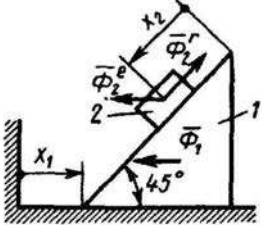
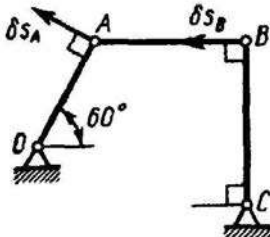
Вариант 15

	Грузы 1, 3 и цилиндр 2, массы которых $m_1 = 100$ кг, $m_3 = 150$ кг, $m_2 = 220$ кг, движутся в вертикальной плоскости. Выбрав координаты x_1 и x_3 в качестве обобщенных, определить обобщенную силу, соответствующую координате x_3.
	Сила $F_b = 40\cos 3t$, коэффициент жесткости пружины $c = 300$ Н/м. Определить обобщенную силу, соответствующую обобщенной координате x в момент времени $t = 2$ с, если координата $x = 0,1$ м.
	Деталь в форме кольца катится со скольжением по лотку. Определить число обобщенных координат детали.

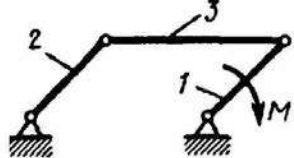
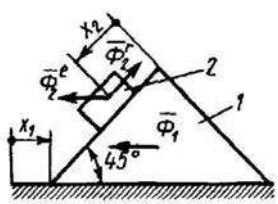
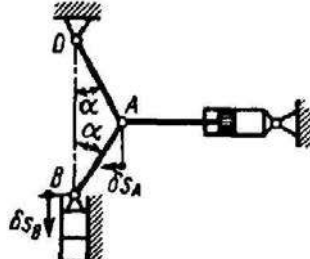
Вариант 16

	Пара сил с постоянным моментом $M = 1$ Н·м вращает треугольную пластину 1 с углом $\alpha = 60^\circ$. Точка 2 массой $m = 0,1$ кг движется по стороне пластины. Определить обобщенную силу, соответствующую координате x.
	Груз массой $m = 6$ кг подвешен на пружине, при деформации которой возникает восстанавливающая сила $F = -300y$. Определить в см координату y, при которой обобщенная сила Q_y равна нулю. Точка А является концом пружины в недеформированном состоянии.
	Тело 1 может свободно двигаться по горизонтальной плоскости. Тело 2 связано с телом 1 пружиной. Предполагая, что движение системы происходит в плоскости рисунка, определить число обобщенных координат.

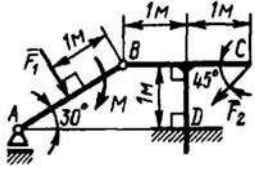
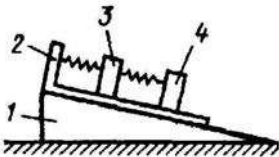
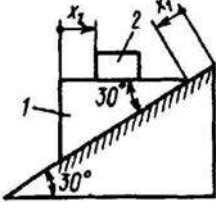
Вариант 17

	Определить модуль силы F, под действием которой центр C однородного сплошного катка 1, масса которого $m_1 = 20$ кг, а радиус $r = 0,4$ м, движется вверх с постоянным ускорением $a_C = 1 \text{ м/с}^2$.
	Определить обобщенную силу инерции, соответствующую обобщенной координате x_2, если сила инерции тела 1 $\Phi_1 = 5$ Н, переносная и относительная силы инерции тела 2 соответственно $\Phi_2^e = 1$ Н, $\Phi_2^r = 8$ Н.
	Определить отношение между возможными перемещениями δs_A и δs_B точек A и B шатуна AB шарнирного четырехзвенника.

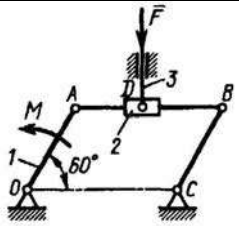
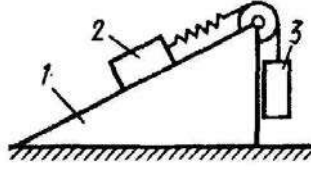
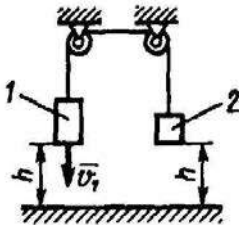
Вариант 18

	Пара сил с постоянным моментом $M = 0,8 \text{ Н·м}$ приводит в движение механизм, расположенный в горизонтальной плоскости. Кривошпы 1 и 2 - однородные стержни длиной $l = 0,2$ м и массой $m_1 = m_2 = 1$ кг, масса $m_3 = 2$ кг. Определить угловое ускорение кривошпы 1.
	Определить обобщенную силу инерции, соответствующую обобщенной координате x_1, если сила инерции тела 1 $\Phi_1 = 5$ Н, переносная и относительная силы инерции тела 2 соответственно $\Phi_2^e = 1$ Н, $\Phi_2^r = 8$ Н.
	Определить отношение между возможными перемещениями δs_A и δs_B точек A и B шатуна механизма прессы, если длины $OA = AB$ и угол $\alpha = 30^\circ$.

Вариант 19

	Стержень АВ нагружен силой $F_1 = 800$ Н и парой сил с моментом $M = 70$ Н·м. На точку С стержня BCD действует сила $F_2 = 280$ Н. Определить модуль горизонтальной составляющей реакции опоры D.
	Призма 1 может двигаться по горизонтальной плоскости. Тело 2 скользит по ее верхней грани. Тела 3 и 4 связаны между собой и с телом 2 пружинами. Определить число обобщенных координат системы, если все тела движутся в одной вертикальной плоскости.
	Определить обобщенную силу, соответствующую обобщенной координате x_1, если массы тел $m_1 = 8$ кг, $m_2 = 2$ кг.

Вариант 20

	На шатун АВ шарнирного параллелограмма OABC надета втулка 2, к которой с помощью шарнира D прикреплен вертикальный стержень 3. Определить в случае равновесия механизма момент M пары сил, если сила $F = 400$ Н и длина кривошипа OA = 0,2 м
	Призма 1 может свободно двигаться по горизонтальной плоскости. Тела 2 и 3 связаны между собой пружиной и могут перемещаться относительно призмы. Предполагая, что движение системы происходит в плоскости рисунка, определить число обобщенных координат.
	Определить кинетический потенциал тел 1 и 2, массы которых $m_1 = 10$ кг и $m_2 = 5$ кг. Скорость $v_1 = 3$ м/с и оба тела находятся на высоте $h = 2$ м над горизонтальной поверхностью, на которой потенциальная энергия тел принимается $\Pi_0 = 0$.

ФГБОУ ВО «УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГОРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ГОРНО-МЕХАНИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра технической механики

КОМПЛЕКТ ЗАДАНИЙ ДЛЯ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

дисциплина **ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА**

Задания контрольной работы, направленные на оценку уровня умений и навыков, формирующих компетенцию ОК-7 (*Знание*: методов определения и расчета кинематических и динамических параметров деталей механизмов и машин. *Умения*: определять неизвестные силы реакций несвободных тел; исследовать движение материальных точек и тел под действием заданных сил; находить силы по заданному движению материальных объектов. *Владения*: методами кинематического и динамического анализа деталей механизмов и машин; навыками по применению принципов и законов механики при создании и эксплуатации новой техники и новых технологий.); **СПК-2** (*Знания*: принципов и законов механического движения и их взаимосвязь. *Умения*: определять неизвестные силы реакций несвободных тел; исследовать движение материальных точек и тел под действием заданных сил; находить силы по заданному движению материальных объектов. *Владения*: фундаментальными принципами и методами решения научно-технических задач, связанных с механическими явлениями; навыками по применению принципов и законов механики при создании и эксплуатации новой техники и новых технологий.)

Расчетно-графическая работа по темам 1-4

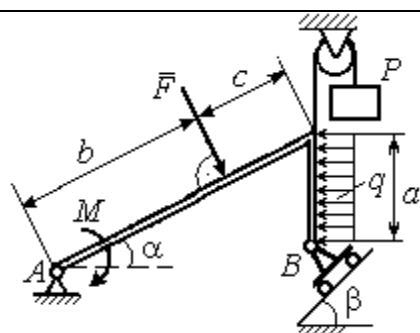
С1. Равновесие произвольной плоской системы сил. Равновесие системы тел

Каждый вариант задания включает две задачи по темам: «Равновесие произвольной плоской системы сил» и «Равновесие системы тел».

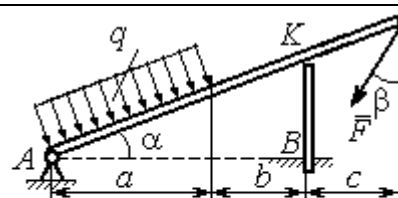
В задачах требуется определить реакции связей конструкции исходя из условия равновесия произвольной плоской системы сил. Весом стержневых подпорок, поддерживающих балочные конструкции, и блоков, через которые перекинута невесомые нити, пренебречь.

Из таблицы исходных данных выбираются значения тех параметров, которые указаны на схемах.

Варианты № 1, 11, 21	
Задача 1 Найти реакцию жесткой заделки в точке A	Задача 2 Найти реакции шарниров A, B, реакцию стержня CD и реакцию опоры в точке K
Варианты № 2, 12, 22	
Задача 1 Найти реакции шарниров A и C	Задача 2 Найти реакции шарниров A, B, реакцию опоры в точке E и реакцию стержня CD
Варианты № 3, 13, 23	
Задача 1	Задача 2



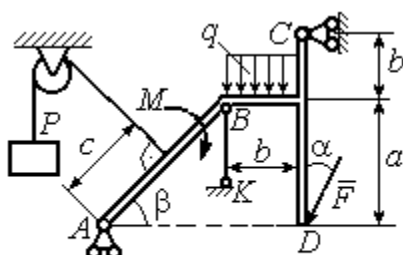
Найти реакцию шарниров A и B



Найти реакцию шарнира A ,
реакцию опоры в точке K
и реакцию жесткой заделки
в точке B

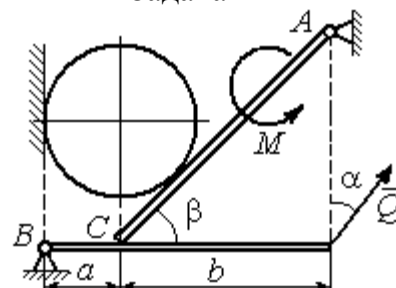
Варианты № 4, 14, 24

Задача 1



Найти усилие в стержне BK
и реакцию шарниров A, C

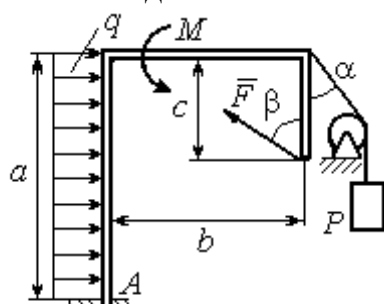
Задача 2



Вес шара P . Найти реакцию
шарниров A, B , давление шара на балку
и стенку, реакцию опоры балки
в точке C и уравновешивающую силу Q

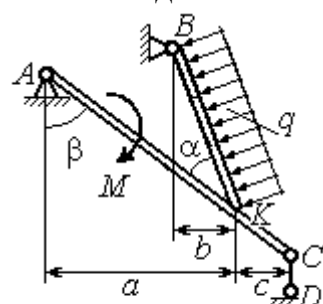
Варианты № 5, 15, 25

Задача 1



Найти реакцию жесткой заделки
в точке A

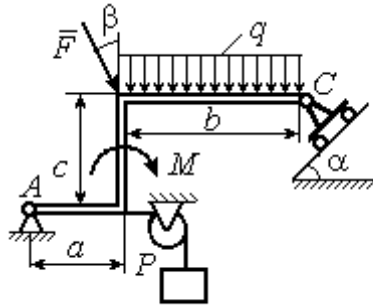
Задача 2



Найти реакцию шарниров A, B ,
реакцию стержня CD
и реакцию опоры в точке K

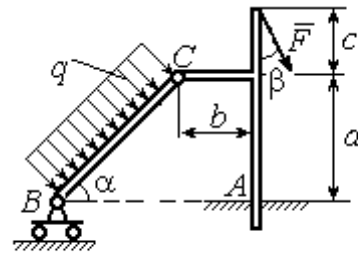
Варианты № 6, 16, 26

Задача 1



Найти реакции шарниров A и C

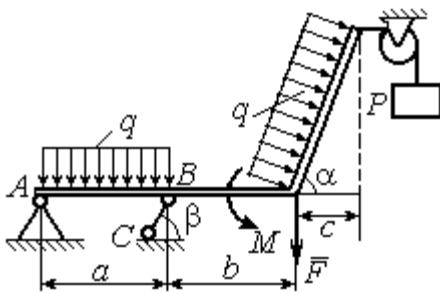
Задача 2



Найти реакцию жесткой заделки в точке A и реакции шарниров B и C

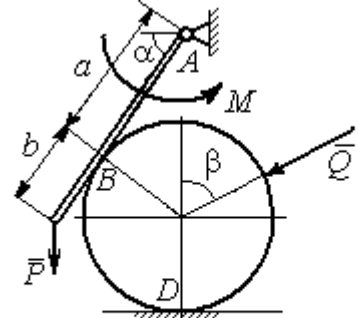
Варианты № 7, 17, 27

Задача 1



Найти реакцию стержня BC и реакцию шарнира A

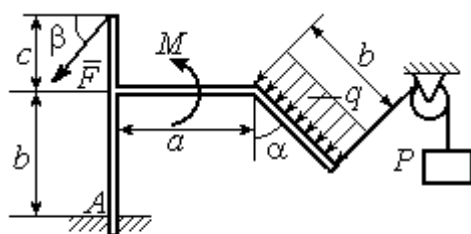
Задача 2



Найти реакцию шарнира A , давление балки на шар, реакцию опоры шара в точке D и уравновешивающую силу Q

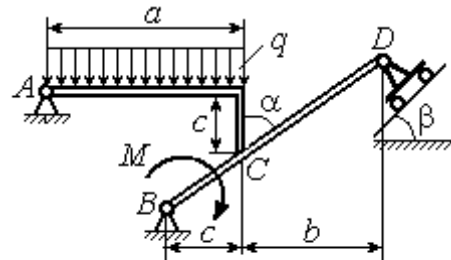
Варианты № 8, 18, 28

Задача 1



Найти реакцию жесткой заделки в точке A

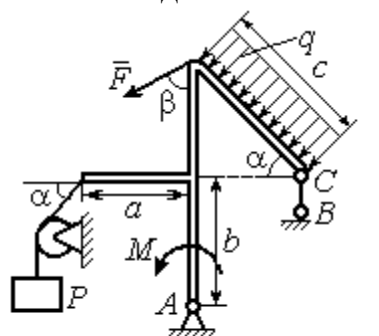
Задача 2



Найти реакцию шарниров A, B и D и реакцию опоры в точке C

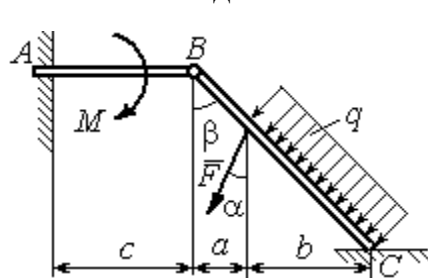
Варианты № 9, 19, 29

Задача 1



Найти реакцию стержня BC и реакцию шарнира A

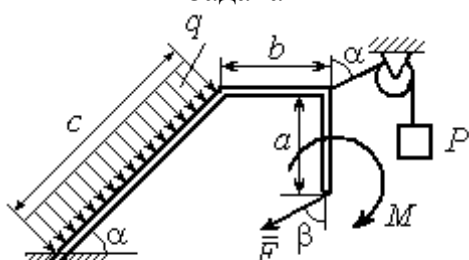
Задача 2



Найти реакцию жесткой заделки в точке A , реакцию шарнира B и реакцию опоры в точке C

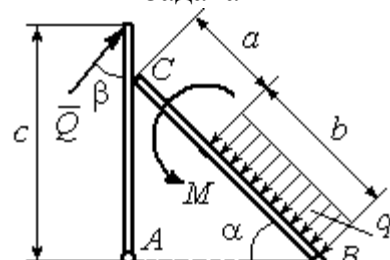
Варианты № 10, 20, 30

Задача 1



Найти реакцию жесткой заделки в точке A

Задача 2



Найти реакцию шарниров A, B , реакцию опоры в точке C и уравновешивающую силу Q

Исходные данные задания С1. Равновесие произвольной плоской системы сил. Равновесие системы тел.

Номер варианта задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
P , кН	6	5	6	12	6	6	10	3	8	5	10	4	8	10	8
F , кН	12	6	10	5	12	8	6	5	6	2	12	8	12	6	10
q , кН/м	5	4	2	3	6	3	5	2	2	4	6	2	3	4	5
M , кН·м	12	8	6	8	12	5	12	8	4	6	8	12	10	6	10
α , град	45	60	30	60	30	30	45	60	30	30	45	30	60	45	60
β , град	60	30	45	30	60	90	60	60	30	45	30	45	30	60	30
a , м	3	4	3	4	3	4	3	4	1	2	2	3	2	3	4
b , м	3	3	4	3	2	4	3	3	2	3	3	3	4	3	2
c , м	4	2	2	2	3	2	2	1	5	4	4	2	1	2	2

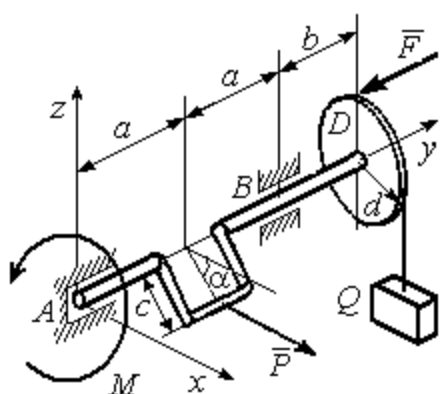
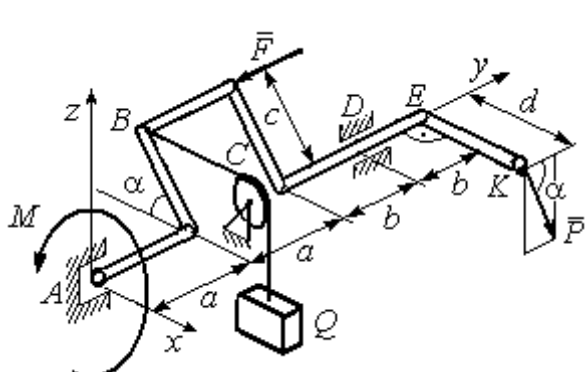
Номер варианта задания	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
P , кН	10	8	10	6	4	6	12	10	5	6	8	6	8	4	6
F , кН	6	12	12	8	3	14	10	8	15	10	12	8	10	10	2
q , кН/м	5	3	4	3	2	3	2	5	4	2	3	4	5	2	4
M , кН·м	10	6	8	6	5	12	4	6	8	10	12	10	6	4	8
α , град	60	60	30	45	60	30	60	45	30	60	45	30	30	30	45
β , град	45	30	30	60	60	45	30	60	30	45	90	30	60	45	30
a , м	3	4	3	1	2	2	4	1	4	3	4	3	2	1	2
b , м	2	4	3	3	4	1	4	3	2	2	2	2	2	2	2
c , м	3	2	2	4	5	4	2	2	1	1	1	2	1	3	5

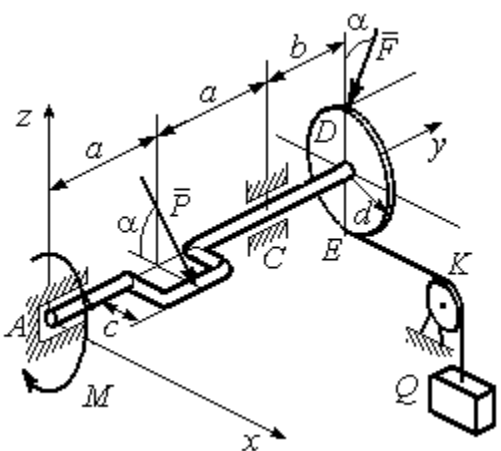
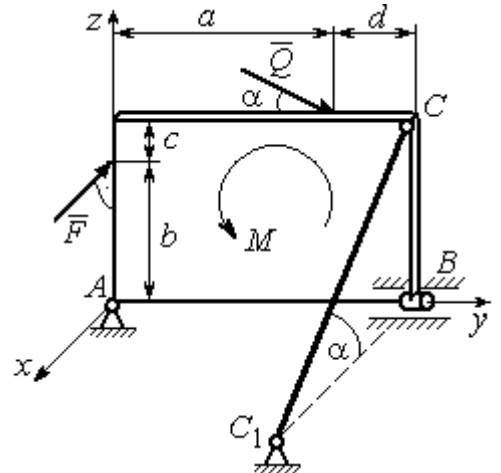
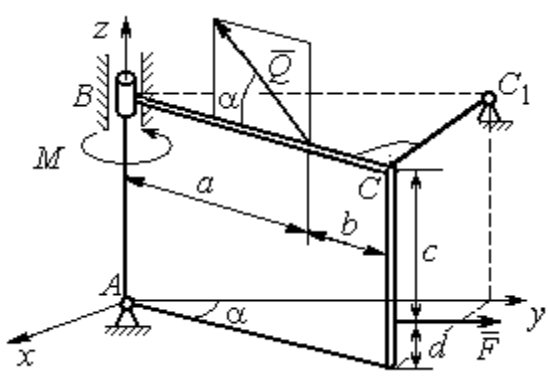
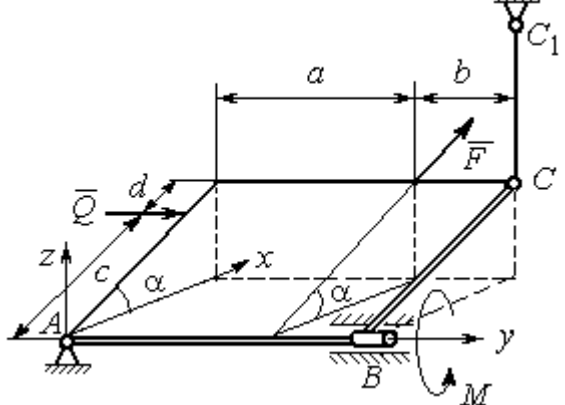
Задание С2. Равновесие пространственной системы сил

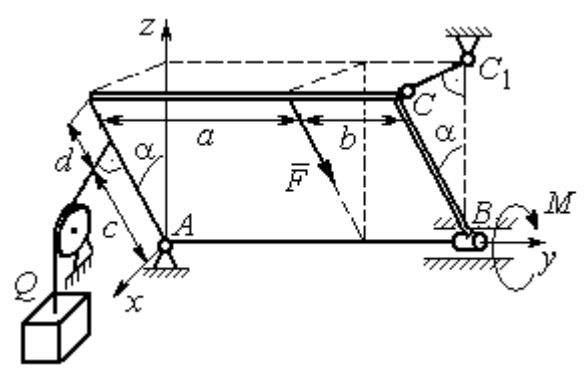
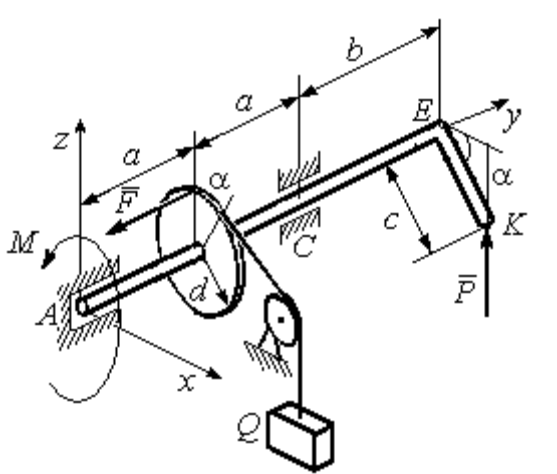
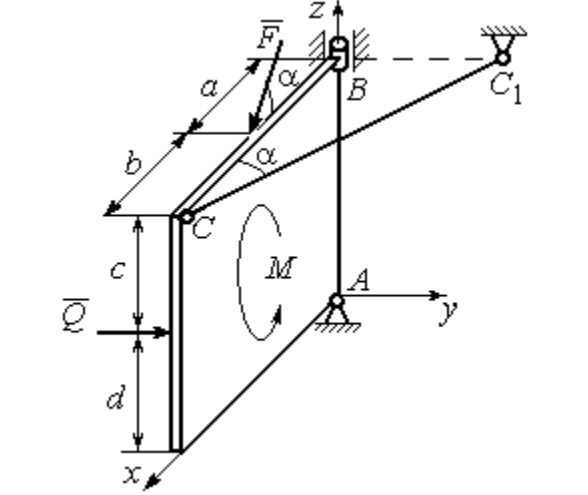
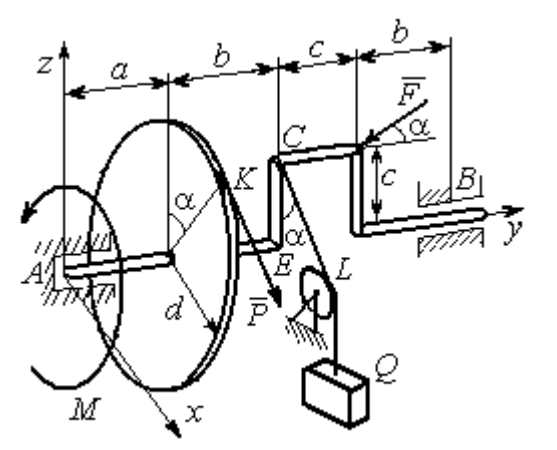
В заданиях рассматривается равновесие однородной плиты или вала (прямого или с «ломаной» осью) с насаженным на него шкивом.

Вал закреплен подшипником и подпятником и удерживается в равновесии. На вал действуют сила $\vec{F}$, пара сил с моментом M и сила $\vec{P}$. На шкив вала намотана нить, к свободному концу которой, перекинутому через невесомый блок, подвешен груз весом Q . Для вала определить реакции подшипника и подпятника и величину уравнивающей силы Q (или момента M).

Плита весом P закреплена пространственным шарниром, подшипником и удерживается в заданном положении невесомым стержнем. На плиту действуют силы $\vec{F}$, $\vec{Q}$ и пара сил с моментом M . Для плиты найти реакции сферического и цилиндрического шарниров и реакцию стержня.

Варианты № 1, 11, 21	Варианты № 2, 12, 22
 Сила $\vec{F}$ параллельна оси Ay; сила $\vec{P}$ параллельна оси Ax; нить, удерживающая груз, сходит со шкива вертикально. Найти реакции подпятника и подшипника в точках A и B и величину уравнивающего груза Q.	 Сила $\vec{F}$ параллельна оси Ay; сила $\vec{P}$ лежит в плоскости, параллельной zAy; отрезок нити BC параллелен оси Ax; рукоятка вала EK параллельна оси Ax. Найти реакции подпятника и подшипника в точках A и D и величину уравнивающего момента M.

Варианты № 3, 13, 23	Варианты № 4, 14, 24
 Сила $\vec{F}$, лежит в плоскости zAy; сила $\vec{P}$ лежит в плоскости, параллельной zAx, отрезок нити EK параллелен оси Ax. Найти реакции подпятника и подшипника в точках A и C, а также величину уравновешивающего груза Q	 Плита весом P расположена в плоскости zAy; пара сил с моментом M действует в плоскости плиты; стержень CC_1 расположен в плоскости, параллельной zAx; сила $\vec{Q}$ действует в плоскости плиты; сила $\vec{F}$ перпендикулярна плоскости плиты. Найти реакции сферического и цилиндрического шарниров в точках A и B и реакцию стержня CC_1
 Плита весом P отклонена на угол α от вертикальной плоскости zAy; сила $\vec{Q}$ лежит в плоскости плиты; сила $\vec{F}$ параллельна оси Ay; стержень CC_1 перпендикулярен плоскости плиты. Найти реакции сферического и цилиндрического шарниров в точках A и B и реакцию стержня CC_1	 Плита весом P отклонена на угол α от горизонтальной плоскости xAy; сила $\vec{Q}$ перпендикулярна боковой стенке плиты и перпендикулярна оси Ay; сила $\vec{F}$ расположена в плоскости плиты и параллельна её боковым стенкам; стержень CC_1 параллелен оси Az. Найти реакции сферического и цилиндрического шарниров в точках A и B и реакцию стержня CC_1

Варианты № 7, 17, 27	Варианты № 8, 18, 28
 Плита весом P отклонена на угол α от вертикальной плоскости zAy; нить, удерживающая груз Q, находится в плоскости zAx, прикреплена к боковой стенке плиты и перпендикулярна ей; сила $\vec{F}$ параллельна боковым стенкам плиты; стержень CC_1 перпендикулярен плоскости zAy. Найти реакции сферического и цилиндрического шарниров в точках A и B и реакцию стержня CC_1.	 Рукоять EK перпендикулярна оси вала и наклонена под углом α к горизонтальной плоскости xAy; сила $\vec{P}$ параллельна оси Az; сила $\vec{F}$ параллельна оси Ay; нить, удерживающая груз Q, сходит со шкива по касательной. Найти реакции подпятника A, подшипника C, и величину уравновешивающего груза Q.
 Плита весом P находится в вертикальной плоскости zAx; стержень CC_1 расположен в плоскости, параллельной xAy; пара сил с моментом M действует в плоскости плиты; сила $\vec{Q}$ перпендикулярна плоскости плиты; сила $\vec{F}$ лежит в плоскости плиты. Найти реакции сферического и цилиндрического шарниров в точках A и B и реакцию стержня CC_1.	 Сила $\vec{F}$ находится в плоскости zAy; стойка CE находится в плоскости zAy; отрезок CL нити, удерживающей груз, находится в плоскости параллельной xAz; сила $\vec{P}$ находится в плоскости шкива и направлена по касательной к ободу в точке K. Найти реакции подпятника A, подшипника B и величину уравновешивающего момента M.

Исходные данные для задания С2.

Равновесие пространственной системы сил

Номер варианта задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P , кН	5	4	6	10	16	15	12	10	15	14
F , кН	8	6	12	6	10	10	8	12	12	10
Q , кН	—	12	—	12	8	12	10	—	10	12
M , кН·м	12	—	10	8	12	6	8	6	8	—
α , град	60	30	30	30	60	60	60	30	30	60
a , м	1,2	0,8	1,4	0,6	1,2	0,9	1,4	0,4	0,8	0,8
b , м	1,0	0,6	1,1	0,4	0,8	0,4	0,6	1,2	0,2	0,6
c , м	0,8	0,5	0,8	0,3	1,4	0,8	1,2	0,8	0,4	0,4
d , м	0,4	0,4	0,6	0,2	0,4	0,2	0,4	0,6	0,6	0,6

Номер варианта задания	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
P , кН	8	10	10	15	14	10	16	9	10	12
F , кН	6	12	16	8	12	14	10	15	8	10
Q , кН	—	14	—	10	10	12	14	—	12	14
M , кН·м	10	—	12	12	12	8	10	10	10	—
α , град	30	60	60	60	30	30	30	60	60	30
a , м	0,8	1,3	0,9	0,5	1,3	1,2	1,6	0,6	0,9	1,2
b , м	0,6	1,1	0,6	0,4	0,9	0,6	0,8	1,2	0,3	0,8
c , м	0,4	0,8	0,5	0,2	1,5	0,9	1,2	0,4	0,6	0,6
d , м	0,2	0,4	0,4	0,1	0,5	0,4	0,6	0,2	0,2	0,8

Номер варианта задания	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
P , кН	10	12	5	8	10	14	18	12	14	10
F , кН	12	8	15	10	12	8	10	15	9	8
Q , кН	—	10	—	12	14	10	16	—	12	6
M , кН·м	12	—	16	14	8	10	8	12	10	—
α , град	90	30	60	30	45	30	30	60	60	30
a , м	0,6	0,8	1,1	1,2	1,5	0,8	1,0	0,8	1,2	0,9
b , м	0,8	0,6	0,9	1,0	0,9	0,6	0,8	1,4	0,6	0,4
c , м	0,4	1,2	0,8	0,6	1,5	0,9	1,1	0,5	0,8	0,6
d , м	0,4	1,5	0,5	0,2	0,4	0,3	0,3	0,4	0,6	0,5

Задание К1. Определение скоростей и ускорений точек твердого тела при поступательном и вращательном движениях

По заданному движению одного из звеньев механизма $x_1 = x_1(t)$ (варианты 1, 3, 5, 7, 9) или $\varphi_1 = \varphi_1(t)$ (варианты 2, 4, 6, 8, 10) найти в момент времени t_1 скорость, касательное, нормальное и полное ускорения точки M звена механизма, совершающего враща-

тельное движение, а также скорость и ускорение звена 4, совершающего поступательное движение.

Варианты № 1, 11, 21	Варианты № 2, 12, 22	Варианты № 3, 13, 23
Варианты № 4, 14, 24	Варианты № 5, 15, 25	Варианты № 6, 16, 26
Варианты № 7, 17, 27	Варианты № 8, 18, 28	

Варианты № 9, 19, 29	Варианты № 10, 20, 30

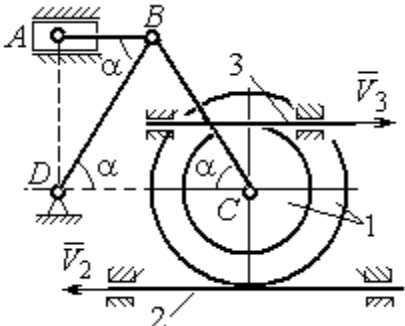
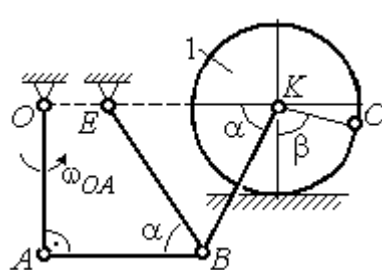
Исходные данные вариантов задания К1. Определение скоростей и ускорений точек при поступательном и вращательном движениях твёрдого тела

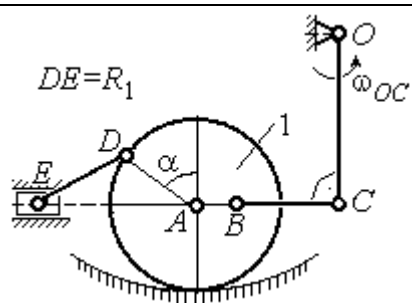
Номер варианта задания	R_1 , см	R_2 , см	R_3 , см	r_3 , см	$x_1(t)$, см $\varphi_1(t)$, рад	t_1 , с
1	—	40	45	35	$x_1(t) = (3t - 1)^2$	2
2	10	20	38	18	$\varphi_1(t) = t^2 + 6\cos(\pi t/6)$	3
3	—	30	42	18	$x_1(t) = 5t^2 - 2\cos(\pi t/2)$	1
4	15	30	45	20	$\varphi_1(t) = 5t^2 + \cos(\pi t/2)$	2
5	—	30	40	20	$x_1(t) = 6t - \cos(\pi t/3)$	3
6	10	20	30	10	$\varphi_1(t) = t^3 - \cos(\pi t/2)$	1
7	—	30	40	30	$x_1(t) = 2\sin(\pi t/2) + \cos(\pi t/2)$	2
8	8	10	30	25	$\varphi_1(t) = 5t + \cos(\pi t/2)$	2
9	—	18	30	18	$x_1(t) = 5t + \cos(\pi t/3)$	3
10	15	30	50	20	$\varphi_1(t) = 2t^2 + \sin(\pi t/4)$	2
11	—	30	40	25	$x_1(t) = (t^2 - 3t)$	2
12	12	20	40	28	$\varphi_1(t) = 3t^2 + 6\sin(\pi t/6)$	3
13	—	25	60	42	$x_1(t) = 2t^2 + \cos(\pi t/2)$	1
14	10	30	45	30	$\varphi_1(t) = 3t^2 + 2\cos(\pi t/2)$	2
15	—	20	30	20	$x_1(t) = 3t^2 - \cos(\pi t/3)$	3
16	12	18	40	20	$\varphi_1(t) = 2t^3 + \cos(\pi t/2)$	1
17	—	20	35	15	$x_1(t) = 2\sin(\pi t/2) - \cos(\pi t/2)$	2
18	15	18	40	25	$\varphi_1(t) = 5t + \cos(\pi t/2)$	1

Номер варианта задания	$R_1, \text{см}$	$R_2, \text{см}$	$R_3, \text{см}$	$r_3, \text{см}$	$x_1(t), \text{см}$ $\varphi_1(t), \text{рад}$	$t_1, \text{с}$
19	—	22	50	18	$x_1(t) = t^2 + \cos(\pi t/3)$	3
20	10	20	45	10	$\varphi_1(t) = 2t^2 + \sin(\pi t/4)$	4
21	—	20	40	20	$x_1(t) = t + (3t - 4)^2$	2
22	8	18	42	18	$\varphi_1(t) = 2t^2 + 12\cos(\pi t/6)$	3
23	—	45	60	40	$x_1(t) = 4t^2 + \sin(\pi t/2)$	1
24	5	15	30	20	$\varphi_1(t) = 2t^2 + 4\cos(\pi t/2)$	2
25	—	15	35	25	$x_1(t) = 2t^2 + \cos(\pi t/3)$	3
26	18	20	35	20	$\varphi_1(t) = 2t^3 + \sin(\pi t/2)$	1
27	—	15	35	15	$x_1(t) = 2\sin(\pi t/2) - \cos(\pi t/2)$	1
28	10	12	40	25	$\varphi_1(t) = 2t^2 + \cos(\pi t/2)$	1
29	—	35	50	10	$x_1(t) = t^3 - \cos(\pi t/2)$	1
30	10	20	40	10	$\varphi_1(t) = 2t^2 + \cos(\pi t/4)$	4

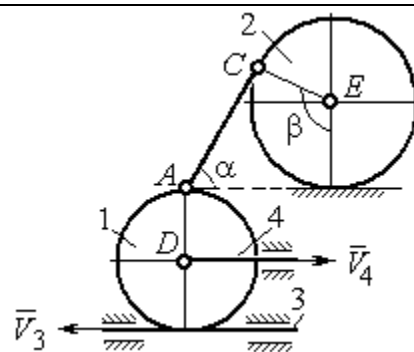
Задание К2. Определение скоростей точек твёрдого тела при плоскопараллельном движении

Для заданного положения плоского механизма определить скорости точек и угловые скорости звеньев механизма.

Варианты № 1, 11, 21							Варианты № 2, 12, 22						
 Найти: $V_A, V_B, V_C, \omega_{AB}, \omega_{BC}, \omega_1, \omega_{BD}$							 Найти: $V_A, V_B, V_K, \omega_1, \omega_{AB}, \omega_{OA}, \omega_{BE}, \omega_{BK}$						
Номер варианта задания	$R_1, \text{см}$	$r_1, \text{см}$	$AD, \text{см}$	$\alpha, \text{град}$	$V_2, \text{см/с}$	$V_3, \text{см/с}$	Номер варианта задания	$R_1, \text{см}$	$OA, \text{см}$	$OE, \text{см}$	$\alpha, \text{град}$	$\beta, \text{град}$	$V_C, \text{см/с}$
1	10	5	20	30	8	10	2	3	5	4	30	60	10
11	12	8	25	45	10	4	12	4	8	6	45	90	8
21	10	6	15	60	5	5	22	5	12	2	60	120	12
Варианты № 3, 13, 23							Варианты № 4, 14, 24						



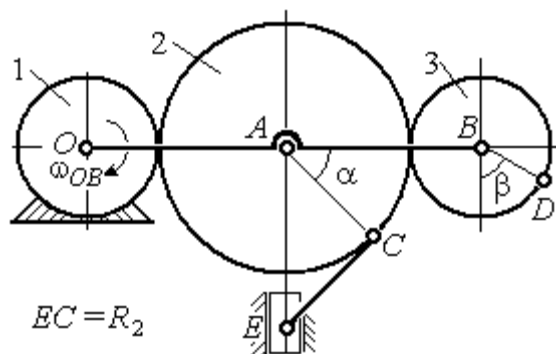
Найти: $V_A, V_B, V_C, V_D, V_E,$
 $\omega_{BC}, \omega_1, \omega_{DE}$



Найти: $V_A, V_C, V_E,$
 $\omega_1, \omega_2, \omega_{AC}$

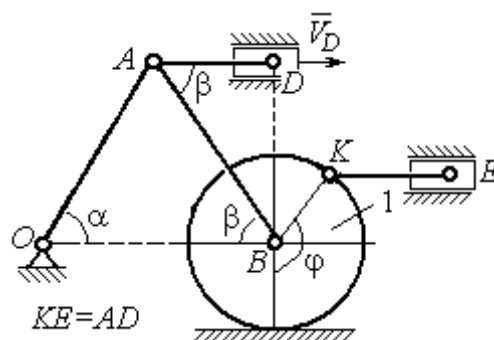
Номер вари- анта задания	$R_1,$ см	$OC,$ см	$AB,$ см	$BC,$ см	$\alpha,$ град	$\omega_{OC},$ рад/с	Номер вари- анта задания	$R_1,$ см	$R_2,$ см	$\alpha,$ град	$\beta,$ град	$V_3,$ см/с	$V_4,$ см/с
3	12	18	10	35	60	4	4	10	15	30	60	8	4
13	10	15	10	25	90	8	14	6	10	45	90	4	6
23	15	20	5	20	120	6	24	10	12	60	120	3	3

Варианты № 5, 15, 25



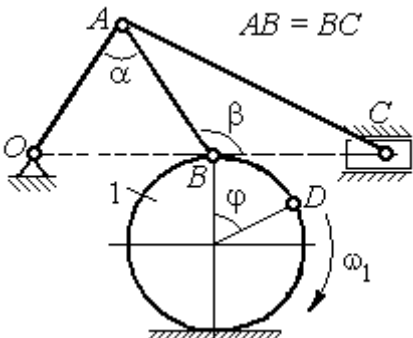
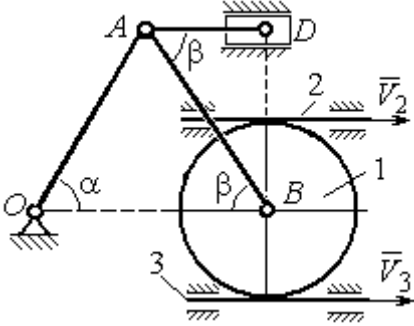
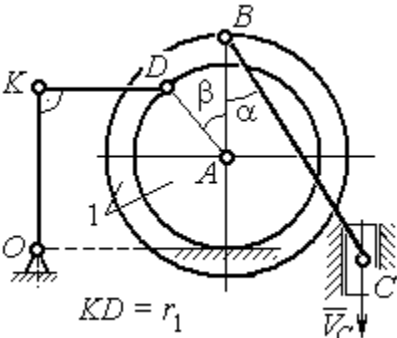
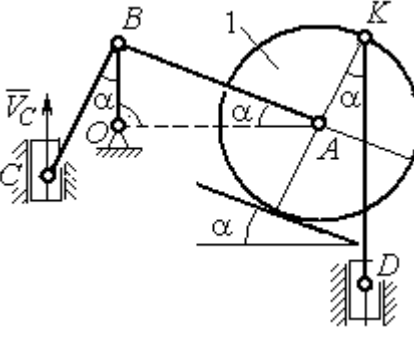
Найти: $V_A, V_B, V_C, V_D, V_E, \omega_2, \omega_3, \omega_{EC}$

Варианты № 6, 16, 26



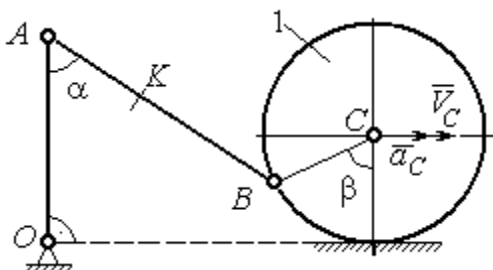
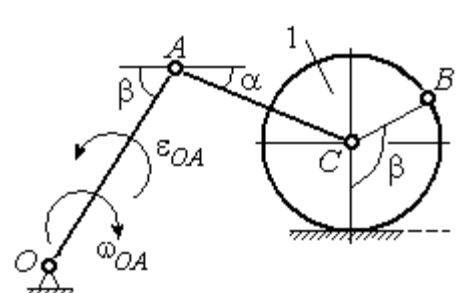
Найти: $V_A, V_B, V_K, V_E,$
 $\omega_1, \omega_{OA}, \omega_{AB}, \omega_{AD}, \omega_{KE}$

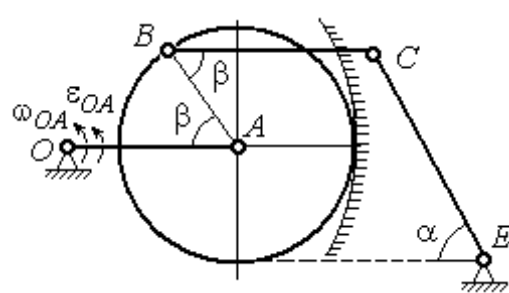
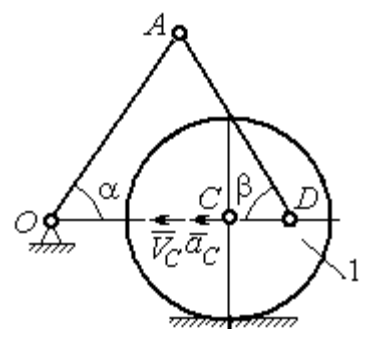
Номер вари- анта задания	$R_1,$ см	$R_2,$ см	$R_3,$ см	$\alpha,$ град	$\beta,$ град	$\omega_{OB},$ рад/с	Номер вари- анта задания	$R_1,$ см	$OA,$ см	$\alpha,$ град	$\beta,$ град	$\phi,$ град	$V_D,$ см/с
5	10	20	12	60	0	6	6	10	20	30	60	60	12
15	6	18	10	90	90	8	16	12	26	30	30	90	8
25	20	25	15	120	180	4	26	15	30	60	60	120	15

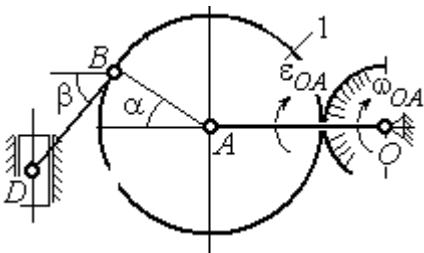
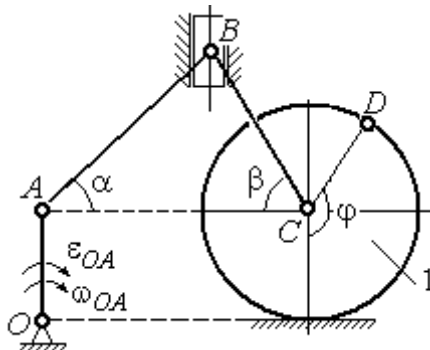
Варианты № 7, 17, 27							Варианты № 8, 18, 29						
 Найти: $V_A, V_B, V_C, \omega_1, \omega_{OA}, \omega_{AB}, \omega_{AC}$							 Найти: $V_A, V_B, V_D, \omega_1, \omega_{OA}, \omega_{AB}, \omega_{AD}$						
Номер вари- анта задания	R_1 , см	AB , см	α , град	β , град	φ , град	V_D , см/с	Номер вари- анта задания	R_1 , см	OA , см	α , град	β , град	V_2 , см/с	V_3 , см/с
7	10	20	30	60	60	12	8	10	20	30	60	12	4
17	12	25	60	120	90	16	18	12	26	30	30	8	2
27	8	16	30	60	120	10	28	15	30	60	60	6	3
Варианты № 9, 19, 29							Варианты № 10, 20, 30						
 Найти: $\omega_{OK}, \omega_{KD}, \omega_{BC}, \omega_1, V_A, V_B, V_K, V_D$							 Найти: $V_A, V_B, V_D, V_K, \omega_{CB}, \omega_1, \omega_{OB}, \omega_{AB}, \omega_{KD}$						
Номер вари- анта задания	R_1 , см	r_1 , см	α , град	β , град	BC , см	V_C , см/с	Номер вари- анта задания	R_1 , см	CB , см	OB , см	KD , см	α , град	V_C , см/с
9	20	12	45	60	60	8	10	10	20	30	60	30	4
19	24	16	60	90	50	4	20	12	26	30	50	45	2
29	16	10	30	120	40	6	30	15	30	60	60	60	3

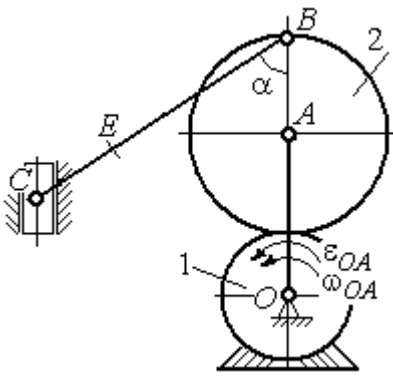
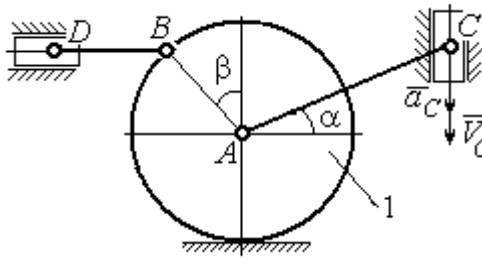
Задание К3. Определение ускорений точек твёрдого тела при плоскопараллельном движении

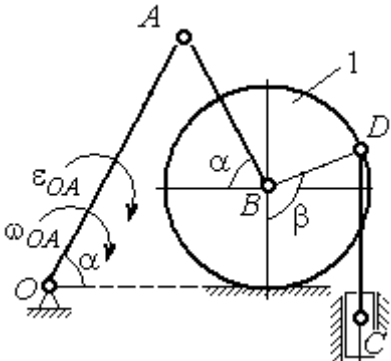
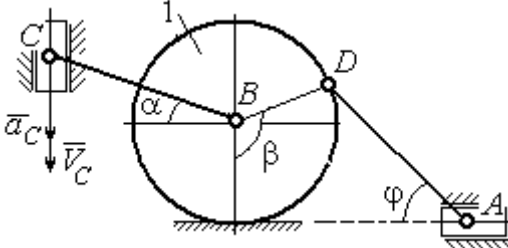
Для заданного положения плоского механизма определить ускорения точек звеньев механизма и угловые ускорения звеньев.

Варианты № 1, 11, 21								Варианты № 2, 12, 22							
 Найти: $a_A, a_K, \varepsilon_{AB}$								 Найти: $a_C, a_B, \varepsilon_{AC}$							
Номер вари- анта задания	AB, см	AK, см	α , град	β , град	R_1 , см	V_C , см/с	a_C , см/с ²	Номер вари- анта задания	R_1 , см	OA, см	AC, см	α , град	β , град	ω_{OA} , рад/с	ε_{OA} , рад/с ²
1	16	10	60	120	10	12	6	2	5	10	12	30	60	2	4
11	20	16	30	60	8	10	8	12	8	24	20	30	120	1	2
21	18	10	60	180	6	8	4	22	6	12	15	60	90	2	3

Варианты № 3, 13, 23								Варианты № 4, 14, 24							
 Найти: $a_C, a_B, \varepsilon_{BC}$								 Найти: $a_A, a_D, \varepsilon_{DA}$							
Номер вари- анта задания	BC, см	AO, см	α , град	β , град	R_1 , см	ω_{OA} , рад/с	ε_{OA} , рад/с ²	Номер вари- анта задания	R_1 , см	OA, см	DC, см	α , град	β , град	V_C , см/с	a_C , см/с ²
3	16	15	60	90	10	2	3	4	10	28	5,78	60	30	10	2
13	18	12	90	60	8	3	2	14	8	24	4,62	30	90	8	3
23	14	12	30	120	10	2	4	24	6	20	6	45	45	12	2

Варианты № 5, 15, 25								Варианты № 6, 16, 26							
 Найти: a_D, a_B, ϵ_{BD}								 Найти: a_B, a_D, ϵ_{BC}							
Номер вари- анта задания	OA , см	BD , см	α , град	β , град	R_1 , см	ω_{OA} , рад/с	ϵ_{OA} , рад/с ²	Номер вари- анта задания	R_1 , см	AB , см	φ , град	α , град	β , град	ω_{OA} , рад/с	ϵ_{OA} , рад/с ²
5	16	10	60	30	10	4	3	6	6	18	60	30	30	2	3
15	18	8	90	45	12	2	4	16	8	20	90	60	30	2	4
25	14	12	30	60	8	3	2	26	5	16	120	30	60	3	4

Варианты № 7, 17, 27								Варианты № 8, 18, 28							
 Найти: a_E, a_C, ϵ_{BC}								 Найти: a_D, a_B, ϵ_{BD}							
Номер вари- анта задания	BC , см	BE , см	α , град	R_1 , см	R_2 , см	ω_{OA} , рад/с	ϵ_{OA} , рад/с ²	Номер вари- анта задания	R_1 , см	BD , см	AC , см	α , град	β , град	V_C , см/с	a_C , см/с ²
7	22	10	60	2	10	2	3	8	4	5	12	60	60	12	5
17	28	15	30	3	6	3	4	18	6	10	16	45	90	10	8
27	20	8	45	4	8	2	2	28	8	8	16	30	120	8	6

Варианты № 9, 19, 29								Варианты № 10, 20, 30							
 Найти: $a_C, a_B, \varepsilon_{AB}$								 Найти: $a_A, a_B, \varepsilon_{CB}$							
Номер вари- анта задания	OA , см	DC , см	α , град	β , град	R_1 , см	ω_{OA} , рад/с	ε_{OA} , рад/с ²	Номер вари- анта задания	R_1 , см	BC , см	φ , град	α , град	β , град	V_C , см/с	a_C , см/с ²
9	18	10	30	120	4	2	3	10	6	14	60	30	120	15	3
19	20	12	60	60	6	3	4	20	5	18	45	60	90	10	5
29	18	8	60	90	4	2	3	30	4	16	30	45	60	12	4

Задание К4. Определение скорости и ускорения точки при сложном движении

Задание включает две задачи с вращательным и поступательным видами переносного движения точки.

Задача 1. Вращение тела относительно неподвижной оси задается законом изменения угла поворота: $\varphi_e = \varphi_e(t)$ или законом изменения его угловой скорости: $\omega_e = \omega_e(t)$. Движение точки относительно тела отсчитывается от её начального положения в точке C и задается законом изменения длины дуги окружности или отрезка прямой линии: $CM = S_r = S_r(t)$.

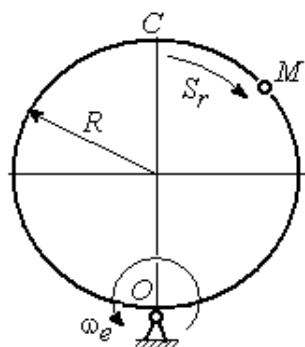
Определить абсолютные скорость и ускорение точки в заданный момент времени t_1 .

Задача 2. Поступательное движение тела, несущего точку, задается законом изменения координаты $x_e = x_e(t)$. Движение точки относительно тела отсчитывается от её начального положения в точке C и задается законом изменения длины дуги окружности или отрезка прямой линии: $CM = y_r = y_r(t)$.

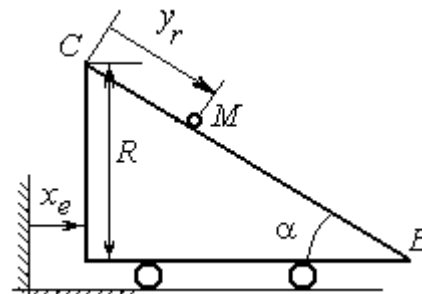
Определить абсолютные скорость и ускорение точки в момент времени t_2 , который либо задаётся в исходных данных задачи, либо на схеме описаны условия, из которых он находится.

Варианты № 1, 11, 21

Задача 1



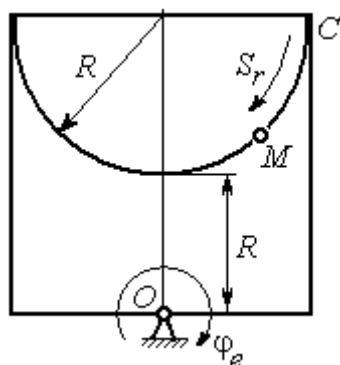
Задача 2



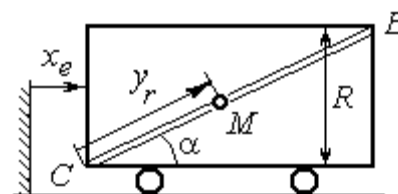
В момент $t = t_2$ точка M прошла половину пути CB

Варианты № 2, 12, 22

Задача 1



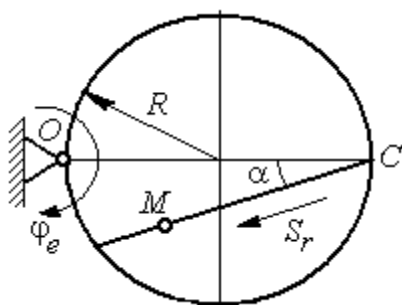
Задача 2



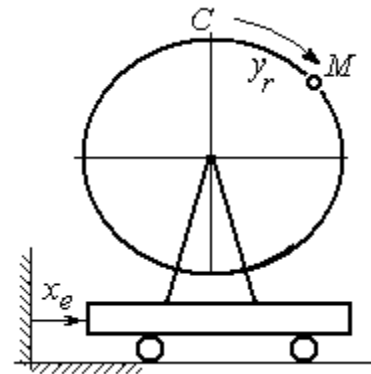
В момент $t = t_2$ точка M прошла $2/3$ пути CB

Варианты № 3, 13, 23

Задача 1

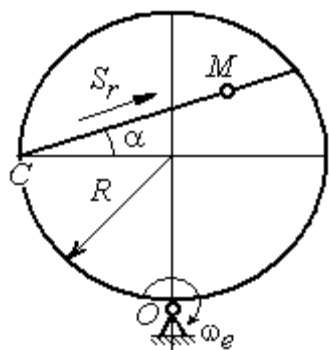


Задача 2

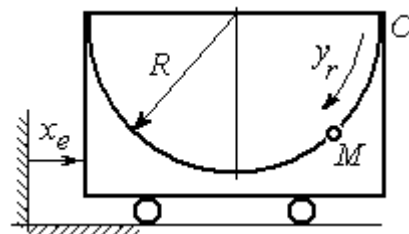


Варианты № 4, 14, 24

Задача 1

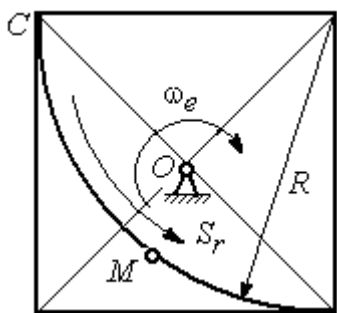


Задача 2

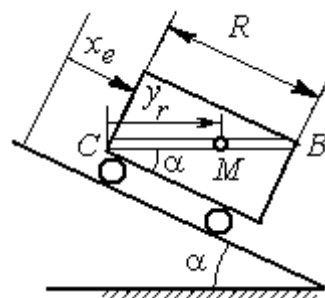


Варианты № 5, 15, 25

Задача 1



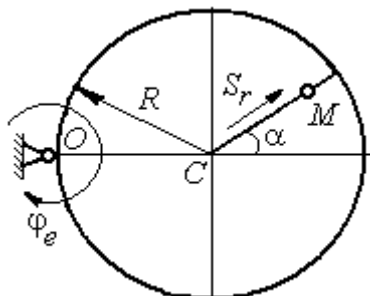
Задача 2



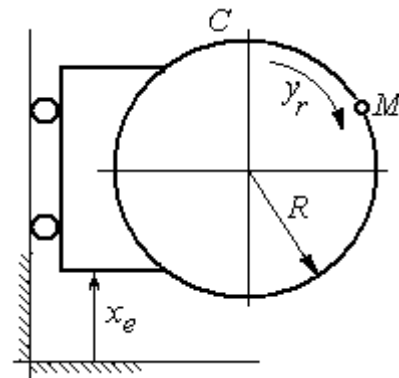
В момент $t = t_2$ точка M прошла путь CB

Варианты № 6, 16, 26

Задача 1

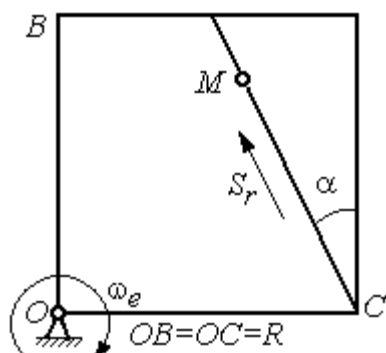


Задача 2

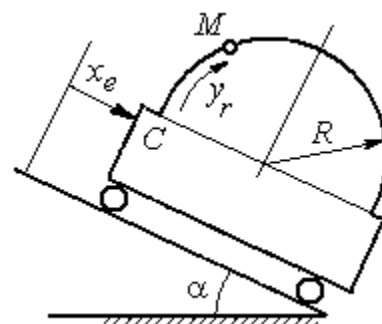


Варианты № 7, 17, 27

Задача 1

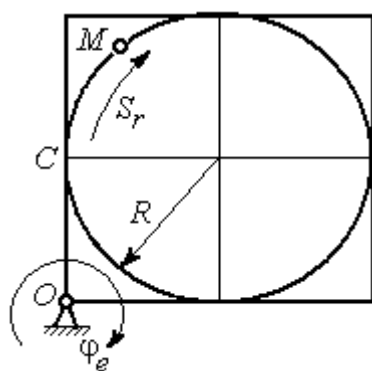


Задача 2

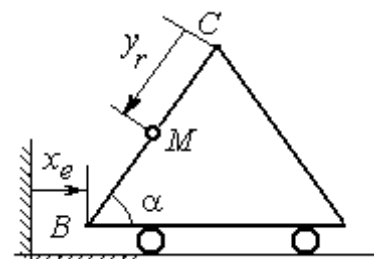


Варианты № 8, 18, 28

Задача 1



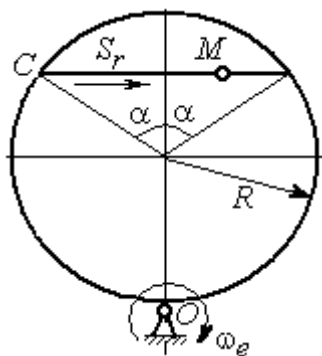
Задача 2



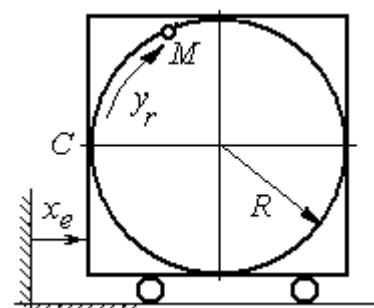
В момент $t = t_2$ точка M прошла половину пути $CB = R$

Варианты № 9, 19, 29

Задача 1

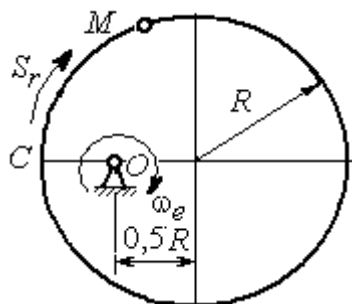


Задача 2

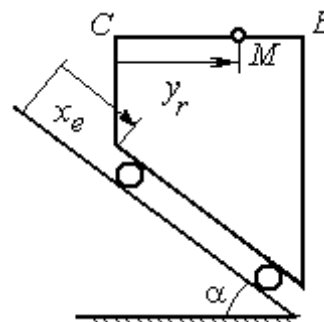


Варианты № 10, 20, 30

Задача 1



Задача 2



В момент $t = t_2$ точка M прошла половину пути $CB = R$

Исходные данные для заданий по сложному движению точки

Номер варианта задания	Номер задачи	R , см	α , град	$\vec{CM} = S_r(t)$, см $\vec{CM} = y_r(t)$, см	$\varphi_e(t)$, рад; $\omega_e(t)$, рад/с $x_e(t)$, см	t_1 , с t_2 , с
1	1	3	—	$S_r = 2\pi \sin(\pi t/6)$	$\omega_e = 4t^2$	1
	2	4	30	$y_r = 4t^2$	$x_e = 2\cos(\pi t/6)$	—
2	1	2	—	$S_r = 4\pi \sin^2(\pi t/6)$	$\varphi_e = 6\cos(\pi t/3)$	1
	2	3	60	$y_r = t^2 + t$	$x_e = 1 + \cos(\pi t)$	—
3	1	4	30	$S_r = 2\sqrt{3}[t + \sin(\pi t/2)]$	$\varphi_e = 4t - t^2$	1
	2	6	—	$y_r = \pi[2t + \sin \pi t]$	$x_e = 5t - t^2$	1
4	1	4	60	$S_r = 2(t^3 + t)$	$\omega_e = 6\cos(\pi t/6)$	1
	2	3	—	$y_r = \pi[2t + \cos(\pi t/2)]$	$x_e = t^3 - 4t$	1
5	1	6	—	$S_r = 4\pi \sin^2(\pi t/6)$	$\omega_e = 6\cos(\pi t/3)$	1
	2	2	30	$y_r = t^2 + 2t$	$x_e = t^2 - 4t$	—
6	1	6	60	$S_r = t + 10\sin(\pi t/6)$	$\varphi_e = 2t^2 - 5t$	1
	2	3	—	$y_r = 4\pi \sin(\pi t/6)$	$x_e = [1 - \cos(\pi t/4)]$	1
7	1	8	30	$S_r = 2(t^3 + 3t)$	$\omega_e = 6\cos(\pi t/6)$	1
	2	4	30	$y_r = 2\pi t^2$	$x_e = t^3 - 5t$	1
8	1	8	—	$S_r = 2\pi[t^2 + \sin \pi t]$	$\varphi_e = t^2 - 5t$	2
	2	6	30	$y_r = t(t + 1)$	$x_e = \cos \pi t$	—

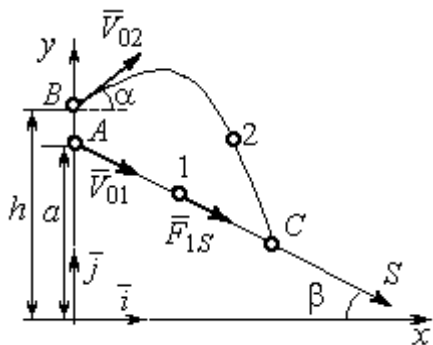
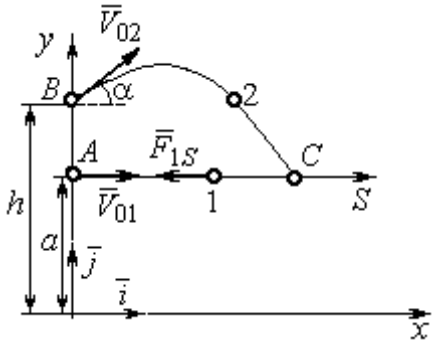
Номер варианта задания	Номер задачи	R , см	α , град	$\tilde{CM} = S_r(t)$, см $\tilde{CM} = y_r(t)$, см	$\varphi_e(t)$, рад; $\omega_e(t)$, рад/с $x_e(t)$, см	t_1 , с t_2 , с
9	1	8	30	$S_r = 2t^2$	$\omega_e = \cos(\pi t/8)$	2
	2	3	—	$y_r = 4\pi \sin^2(\pi t/4)$	$x_e = (3 - 2t)^2$	1
10	1	6	—	$S_r = \pi(2t^3 + \sin \pi t)$	$\omega_e = 5t - 2t^3$	1
	2	4	30	$y_r = t^2 + 2t$	$x_e = 1 + \cos \pi t$	—
11	1	6	—	$S_r = 8\pi \sin(\pi t/12)$	$\omega_e = 2 + \cos(\pi t/4)$	2
	2	6	60	$y_r = 4\sin \pi t$	$x_e = t^2 - 2t$	—
12	1	18	—	$S_r = \pi(2t^2 + 2t)$	$\varphi_e(t) = 3t - t^2$	2
	2	6	30	$y_r = 2t^2 + t$	$x_e = 1 + \cos(\pi t)$	—
13	1	10	60	$S_r = t^3 + t$	$\varphi_e = 6\cos(\pi t/6)$	2
	2	6	—	$y_r = 6\pi \cos(\pi t/3)$	$x_e = t(t + 1)$	1
14	1	4	30	$S_r = 8\sqrt{3}\sin(\pi t/12)$	$\omega_e = (3 - 2t)^2$	2
	2	3	—	$y_r = 2\pi \sin(\pi t/6)$	$x_e = 2t^2 - 5t$	1
15	1	8	—	$S_r = 4\pi \sin^2(\pi t/4)$	$\omega_e = 2 + \cos(\pi t/4)$	1
	2	5	60	$y_r = 5t + t^2$	$x_e = \cos(\pi t/6)$	—
16	1	12	90	$S_r = 3[t + \sin(\pi t/2)]$	$\varphi_e = 2t - 3t^2$	1
	2	15	—	$y_r = \pi(4t + t^2)$	$x_e = 6\sin(\pi t/3)$	1
17	1	6	45	$S_r = 3\sqrt{2}[t^2 + 2\sin \pi t]$	$\omega_e(t) = 4t^2 - 6$	1
	2	6	60	$y_r = 8\pi \sin(\pi t/12)$	$x_e = \sqrt{2}\sin(\pi t/8)$	2
18	1	8	—	$S_r = 4\pi\sqrt{2}\sin(\pi t/8)$	$\varphi_e = 18t - 4t^2$	2
	2	8	60	$y_r = 3t + 2t^2$	$x_e = \sin \pi t$	—
19	1	8	60	$S_r = 2\sqrt{3}[t + \sin(\pi t/2)]$	$\omega_e = 5t - t^2$	1
	2	9	—	$y_r = 6\pi \cos(\pi t/3)$	$x_e = \cos(\pi t/6)$	1
20	1	4	—	$S_r = 4\pi \sin(\pi t/6)$	$\omega_e = 3t - 5$	1
	2	6	60	$y_r = 3t + 2t^2$	$x_e = \pi \sin \pi t$	—
21	1	3	—	$S_r = 4\pi\sqrt{2}\sin(\pi t/8)$	$\omega_e = 6t - 14$	2
	2	8	45	$y_r = (t^2 + 3t)$	$x_e = t + 2\sin \pi t$	—
22	1	4	—	$S_r = 2\pi(t^2 + 2t)$	$\varphi_e = 6\cos(\pi t/6)$	1
	2	9	60	$y_r = 8\sin \pi t$	$x_e = 5t - t^2$	—
	1	6	45	$S_r = 12\sin(\pi t/8)$	$\varphi_e = t^2 + \cos(\pi t/4)$	2

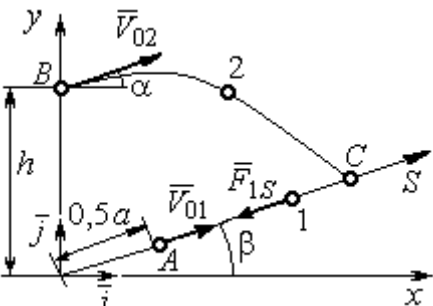
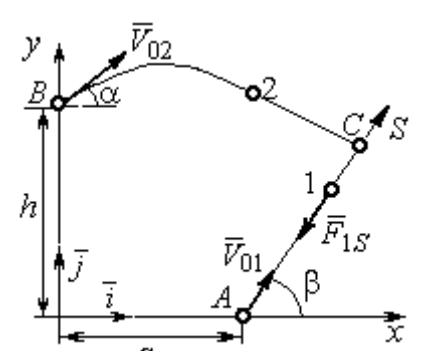
Номер варианта задания	Номер задачи	R , см	α , град	$\ddot{CM} = S_r(t)$, см $\ddot{CM} = y_r(t)$, см	$\varphi_e(t)$, рад; $\omega_e(t)$, рад/с $x_e(t)$, см	t_1 , с t_2 , с
23	2	6	—	$y_r = 6\pi[t + \sin(\pi t/6)]$	$x_e = 5t - t^2$	1
24	1	6	45	$S_r = 12\sin(\pi t/8)$	$\omega_e = t + 4\cos(\pi t/4)$	2
	2	6	—	$y_r = \pi(t^2 + 2t)$	$x_e = 6\cos(\pi t/6)$	1
25	1	6	—	$S_r = 2\pi t^2$	$\omega_e = 3\sin(\pi t/3)$	1
	2	4	45	$y_r = 2t(t + 3t)$	$x_e = 2(t^3 - 3t)$	—
26	1	6	120	$S_r = t^2 + t$	$\varphi_e = 12\cos(\pi t/12)$	2
	2	9	—	$y_r = \pi\sqrt{3}\sin(\pi t/3)$	$x_e = 2(t^2 - 3t)$	1
27	1	10	60	$S_r = \sqrt{3}(t^2 + t)$	$\omega_e = 6\cos(\pi t/6)$	2
	2	9	30	$y_r = \sqrt{3}\pi\sin(\pi t/3)$	$x_e = t + 4\cos(\pi t/4)$	1
28	1	2	—	$S_r = 6\pi\sin(\pi t/6)$	$\varphi_e = 2t + \cos(\pi t/2)$	1
	2	6		$y_r = 2t + 3t^2$	$x_e = t + \sin\pi t$	—
29	1	8	30	$S_r = (t^2 + 2t)$	$\omega_e = 6\sin(\pi t/12)$	2
	2	3	—	$y_r = 2\pi\sqrt{3}\sin(\pi t/3)$	$x_e = 5t - t^2$	1
30	1	2	—	$\pi(t^2 + 2t)$	$\omega_e(t) = 6\cos(\pi t/6)$	1
	2	3	60	$y_r = t + t^2$	$x_e = t + \sin\pi t$	—

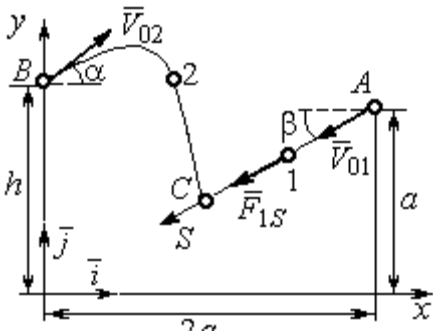
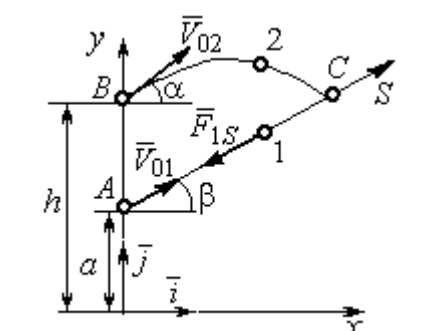
Задание Д1. Интегрирование дифференциальных уравнений движения точки

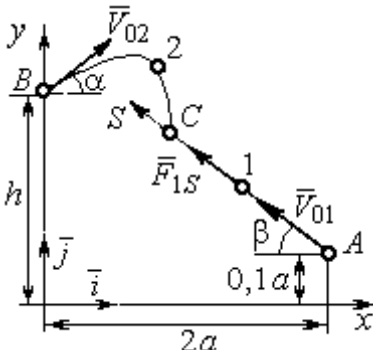
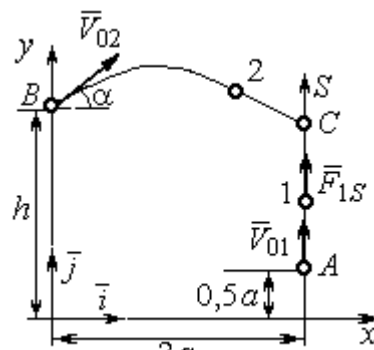
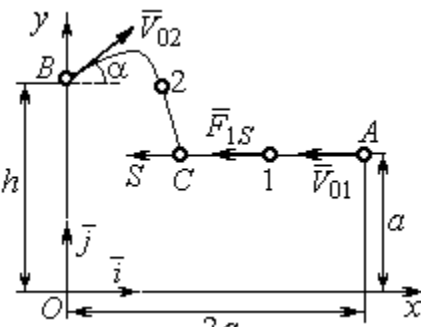
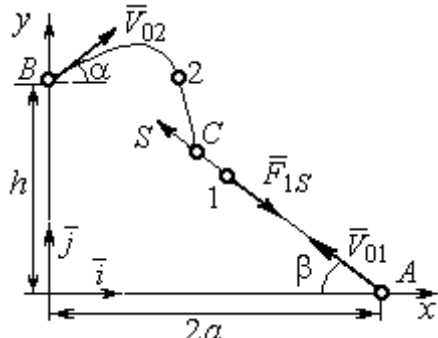
Две материальные точки движутся в вертикальной плоскости xOy . Точка 1 массой m_1 , получив в начальном положении A скорость V_{01} , движется вдоль гладкой оси AS , наклоненной под углом β к горизонту. Во время движения на точку 1 действуют сила тяжести и постоянная сила $\vec{F}_1$, направленная вдоль оси AS . Направление вектора проекции силы на ось $\vec{F}_{1S}$ показано на схеме.

Одновременно с точкой 1 начинает движение точка 2 массой m_2 из положения B на оси y . На точку 2 действуют сила тяжести и постоянная сила $\vec{F}_2$. Направление вектора силы $\vec{F}_2$ определяется его разложением по единичным векторам $\vec{i}$, $\vec{j}$ координатных осей x , y . Определить величину и направление (угол α) начальной скорости V_{02} точки 2, чтобы в момент времени t_1 точки 1 и 2 встретились на оси AS в точке C . Момент времени t_1 задаётся в условиях задачи или определяется по дополнительным условиям встречи.

Варианты № 1, 11, 21	Варианты № 2, 12, 22
 Встреча в точке C в момент, когда скорость точки 1 увеличилась в 1,5 раза относительно начальной	 Встреча в точке C в момент, когда точка 1 максимально удалилась от места старта

Варианты № 3, 13, 23	Варианты № 4, 14, 24
 Встреча в точке C в момент, когда скорость точки 1 уменьшилась в 2 раза относительно начальной	 Встреча в точке C в момент времени $t_1 = 0,5$ с

Варианты № 5, 15, 25	Варианты № 6, 16, 26
 Встреча в точке C в момент, когда скорость точки 1 увеличилась в 1,5 раза относительно начальной	 Встреча в точке C, когда точка 1 максимально удалилась от места старта

Варианты № 7, 17, 27	Варианты № 8, 18, 28
 Встреча в точке C в момент времени $t_1 = 0,4$ с	 Встреча в точке C в момент максимального подъёма точки 1
Варианты № 9, 19, 29	Варианты № 10, 20, 30
 Встреча в точке C в момент времени $t_1 = 0,6$ с	 Встреча в точке C в момент, когда точка 1 достигла максимальной высоты подъёма

Исходные данные задания Д1. Интегрирование уравнений движения точки

Номер варианта задания	m_1 , кг	F_{1S} , Н	V_{01} , м/с	β , град	m_2 , кг	$\vec{F}_2$, Н	a , м	h , м
1	1	3	3	30	2	$7\vec{i}$	2	4
2	3	6	2	0	2	$4\vec{i} + 12\vec{j}$	1,5	1
3	2	5	4	35	1,5	$10\vec{i} + 4\vec{j}$	2	2,5
4	1	10	2	60	2	$4\vec{i} + 8\vec{j}$	2,2	2
5	1	3	3	30	2	$5\vec{i}$	3	4,5
6	0,8	6	6	50	3	$3\vec{i} + 12\vec{j}$	1,5	4
7	2	5	4,5	40	1	$10\vec{i} + 2\vec{j}$	3	2,5
8	1	2	3,5	90	2	$6\vec{i} + 8\vec{j}$	1,2	2
9	2	4	4	0	1	$3\vec{i} + 2\vec{j}$	2	2,5

Номер варианта задания	m_1 , кг	F_{1S} , Н	V_{01} , м/с	β , град	m_2 , кг	$\vec{F}_2$, Н	a , м	h , м
10	1	3	3	55	1,5	$4\vec{i}$	1	1,5
11	0,5	2	3	60	2	$3\vec{i} + 8\vec{j}$	1,5	2,5
12	0,2	3	4	0	1	$5\vec{i} - 2\vec{j}$	1	2,5
13	1	2	6	50	1,5	$6\vec{i} - 4\vec{j}$	0,8	2
14	0,5	6	4	35	1	$3\vec{i} - 2\vec{j}$	2,5	2
15	0,2	3	3	50	2	$2\vec{i} - 2\vec{j}$	3	4
16	2	4	6	40	2	$3\vec{i} + 12\vec{j}$	1	1,5
17	1	6	5	60	1,5	$5\vec{i} + 4\vec{j}$	3	2,5
18	1	2	2	90	2	$4\vec{i} + 4\vec{j}$	2	2
19	1	3	2	2	2	$2\vec{i} + 10\vec{j}$	1	1,5
20	5	4	2	30	1	$3\vec{i} - 2\vec{j}$	1,5	1,5
21	0,2	4	4	45	1	$6\vec{i} - 2\vec{j}$	1	3
22	0,4	3	2	0	2	$4\vec{i} + 6\vec{j}$	1,5	2,5
23	1	3	8	60	2	$4\vec{i} + 2\vec{j}$	1,2	1,5
24	0,5	8	3	30	2	$6\vec{i} + 7\vec{j}$	2	1,5
25	2	4	4	60	1	$2\vec{i} - 2\vec{j}$	3,5	4
26	1	3	5	50	2	$4\vec{i} + 6\vec{j}$	0,5	1,5
27	1,5	3	6	30	2	$4\vec{i} + 4\vec{j}$	2	2,5
28	2	5	3	90	2	$6\vec{i} + 7\vec{j}$	2	1,5
29	2	4	4	0	1	$5\vec{i} - 2\vec{j}$	1,5	2
30	1	3	2,5	70	2	$4\vec{i} + 6\vec{j}$	1	1

Задание Д2. Исследование колебаний точки

Задание Д2 на исследование колебаний точки включает две задачи.

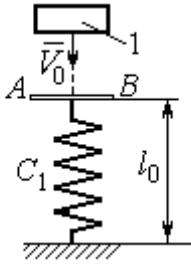
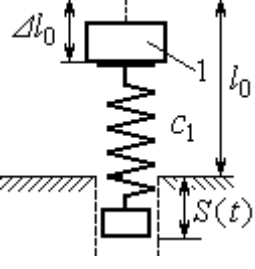
Задача 1. Исследование гармонических колебаний точки.

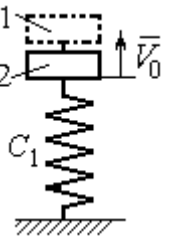
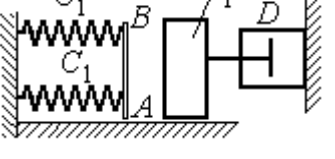
Найти уравнение движения груза массой m_1 (или одновременно двух грузов массой m_1 и m_2) на пружине жесткостью c_1 (или на двух пружинах жесткостью c_1 и c_2). Расположение грузов на пружине и описание условий, при которых начались колебания, приведено на схемах. Определить амплитуду и частоту колебаний.

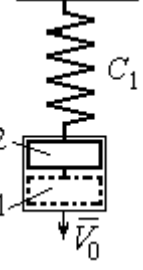
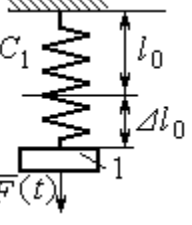
Задача 2. Исследование вынужденных колебаний точки.

Груз движется на пружинах, расположенных вертикально или горизонтально. При движении груза по горизонтальной поверхности трение не учитывается. Жёсткость пружин c_1 и c_2 . Направление возмущающего усилия $F = F(t)$, приложенного к грузу, или возмущающего движения точки крепления пружин $S = S(t)$, а также описание условий начала колебаний приведено на схемах. В задачах, где на схемах присутствует амортизатор, создающий сопротивление движению груза, сила сопротивления пропорциональна скорости движения груза и находится по формуле: $\vec{R} = -\mu\vec{V}$ Н, где μ – коэффициент

сопротивления; V – скорость груза. Определить уравнение колебаний груза, амплитуды собственных и вынужденных колебаний.

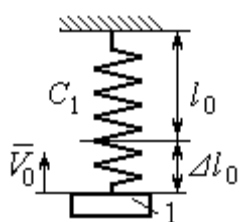
Варианты № 1, 11, 21	
Задача 1  Невесомая пластина AB укреплена на нерастянутой пружине. Груз 1, получив начальную скорость V_0, падает вертикально вниз. Через 1 с после начала падения груз достигает пластины и продолжает движение вместе с ней	Задача 2  К верхнему концу пружины, сжатой на величину Δl_0, прикрепляют груз 1 и отпускают без начальной скорости. Одновременно нижний конец пружины начинает двигаться по закону $S = S(t)$

Варианты № 2, 12, 22	
Задача 1  В положении статического равновесия двух грузов (1 и 2), установленных на пружине, груз 1 убрали, а грузу 2 сообщили скорость V_0, направленную вверх	Задача 2  Груз 1 движется по гладкой горизонтальной поверхности с начальной скоростью V_0. Через 1 с груз упирается в площадку AB, укрепленную на недеформированных пружинах, соединённых параллельно, и продолжает движение вместе с ней. Во время движения (до упора в площадку AB и вместе с ней) груз испытывает сопротивление, создаваемое демпфером D

Варианты № 3, 13, 23	
Задача 1  В положении статического равновесия груза 2, укрепленного на пружине, к нему присоединили груз 1 и оба груза толкнули вниз со скоростью V_0	Задача 2  Недеформированную пружину оттянули вниз на расстояние Δl_0, подцепили груз 1 и отпустили без начальной скорости. Одновременно на груз стала действовать возмущающая сила $\vec{F}(t)$

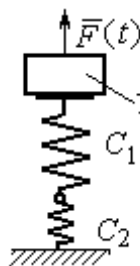
Варианты № 4, 14, 24

Задача 1



К недеформированной пружине подцепили груз 1, оттянули его вниз на расстояние Δl_0 и сообщили скорость V_0 , направленную вверх

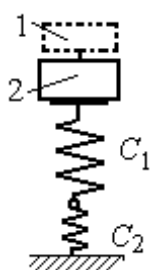
Задача 2



Грузу 1, укрепленному на двух последовательно соединенных пружинах в положении статического равновесия, сообщили начальную скорость V_0 , направленную вниз. Одновременно на груз стала действовать возмущающая сила $\vec{F}(t)$

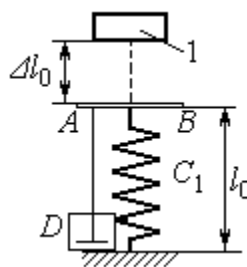
Варианты № 5, 15, 25

Задача 1



В положении статического равновесия грузов 1 и 2, укрепленных на двух вертикальных последовательно соединенных пружинах, убрали груз 1, а груз 2 отпустили без начальной скорости

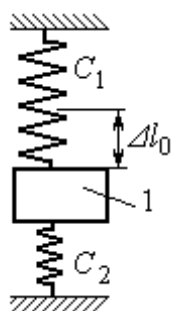
Задача 2



Груз 1 падает с высоты Δl_0 на площадку AB , установленную на недеформированной пружине, и продолжает движение вместе с ней. Демпфер D создаёт сопротивление движению груза на пружине

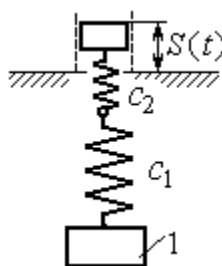
Варианты № 6, 16, 26

Задача 1

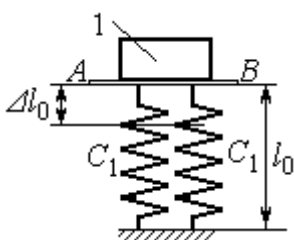
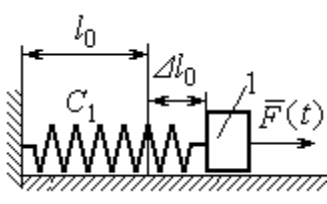


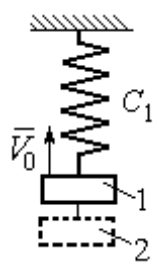
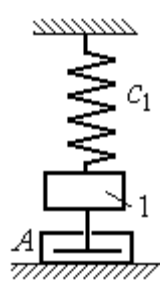
Груз 1 поместили между двумя недеформированными пружинами, затем оттянули вниз на расстояние Δl_0 и отпустили без начальной скорости

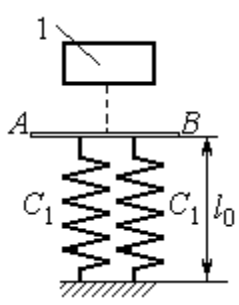
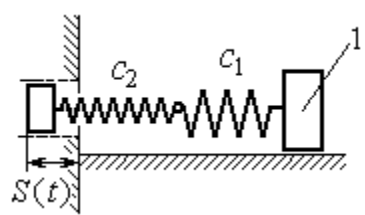
Задача 2



К недеформированным пружинам, соединенным последовательно, подцепили груз 1 и толкнули его вниз со скоростью V_0 . Одновременно верхний конец пружины начинает двигаться по закону $S = S(t)$

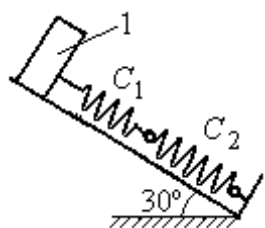
Варианты № 7, 17, 27	
Задача 1  К недеформированным пружинам приложили груз 1, переместили его вниз на величину Δl_0 и сообщили скорость V_0, направленную вниз	Задача 2  К нерастянутой пружине, расположенной на горизонтальной гладкой поверхности, подцепили груз 1, оттянули его на расстояние Δl_0 и отпустили. Одновременно на груз стала действовать горизонтальная возмущающая сила $\vec{F}(t)$

Варианты № 8, 18, 28	
Задача 1  Грузы 1 и 2 находятся на пружине в положении статического равновесия. Груз 2 удаляют, а грузу 1 сообщают скорость V_0, направленную вверх	Задача 2  В положении статического равновесия груза 1 ему сообщили скорость V_0, направленную вниз. Демпфер A создаёт сопротивление движению груза

Варианты № 9, 19, 29	
Задача 1  Груз 1 без начальной скорости падает вниз. Пройдя путь 1 м, груз достигает невесомой пластины AB, укрепленной на недеформированных, параллельно соединённых пружинах, и дальше движется вместе с ней	Задача 2  К двум горизонтальным пружинам, соединённым последовательно, в положении их нерастянутого состояния прицепили груз 1 и сообщили ему горизонтальную скорость V_0, направленную в сторону сжатия пружин. Одновременно левый конец пружинной системы начинает двигаться по закону $S = S(t)$

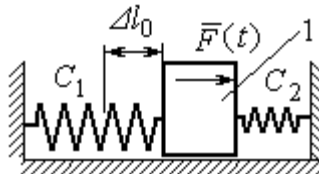
Варианты № 10, 20, 30

Задача 1



В положении статического равновесия груза 1, укрепленного на двух последовательно соединенных пружинах, сообщили скорость V_0 , направленную вниз по наклонной плоскости

Задача 2



Между двумя горизонтальными недеформированными пружинами на гладкую поверхность поместили груз 1, оттянули его влево на расстояние Δl_0 и отпустили без начальной скорости. Одновременно на груз стала действовать возмущающая сила $\vec{F}(t)$

Исходные данные задания Д2. Исследование колебаний точки

Номер варианта задания	Номер задачи	m_1 , кг	m_2 , кг	V_0 , м/с	c_1 , Н/м	c_2 , Н/м	Δl_0 , м	μ , Н·с/м	$F(t)$, Н	$S(t)$, м
1	1	2,5	—	2,0	200	—	—	—	—	—
	2	2,0	—	—	210	—	0,1	—	—	$0,02\sin 12t$
2	1	1,5	2,0	4	250	—	—	—	—	—
	2	2,0	—	4	220	—	—	1,0	—	—
3	1	2,0	1,5	3	250	—	—	—	—	—
	2	1,2	—	—	200	—	0,14	—	$12\sin 5t$	—
4	1	2,0	—	3	180	—	0,1	—	—	—
	2	1,5	—	2	150	120	—	—	$8\sin 12t$	—
5	1	1,0	2,0	—	120	100	—	—	—	—
	2	1,0	—	—	50	—	0,5	18	—	—
6	1	1,2	—	—	120	180	0,12	—	—	—
	2	1,4	—	2,4	120	180	—	—	—	$0,03\sin 14t$
7	1	1,6	—	3,2	140	—	0,15	—	—	—
	2	1,5	—	—	120	—	0,12	—	$12\sin 6t$	—
8	1	1,0	2,0	3,0	150	—	—	—	—	—
	2	2,0	—	3,5	120	—	—	15	—	—
9	1	1,5	—	—	100	—	—	—	—	—
	2	1,4	—	2,0	100	110	—	—	—	$0,015\sin 8t$
10	1	2,5	—	2,5	110	100	—	—	—	—
	2	2,0	—	—	110	52	0,08	—	$5\sin 9t$	—
11	1	2,0	—	4,0	300	—	—	—	—	—

Номер варианта задания	Номер задачи	m_1 , кг	m_2 , кг	V_0 , м/с	c_1 , Н/м	c_2 , Н/м	$\Delta\ell_0$, м	μ , Н·с/м	$F(t)$, Н	$S(t)$, м
	2	1,0	—	—	200	—	0,12	—	—	$0,01\sin 4t$
12	1	1,8	2,4	4	220	—	—	—	—	—
	2	1,0	—	5	240	—	—	0,6	—	—
13	1	1,5	1,5	2	200	—	—	—	—	—
	2	1,8	—	—	180	—	0,08	—	$10\sin 10t$	—
14	1	2,0	—	2	200	—	0,12	—	—	—
	2	2,0	—	2	150	120	—	—	$10\sin 8t$	—
15	1	1,5	2,0	—	120	250	—	—	—	—
	2	1,5	—	—	120	—	0,4	4	—	—
16	1	2,0	—	—	150	75	0,1	—	—	—
	2	2,0	—	2,5	150	75	—	—	—	$0,01\sin 5t$
17	1	1,5	—	2,1	160	—	0,11	—	—	—
	2	1,8	—	—	150	—	0,1	—	$8\sin 12t$	—
18	1	2,0	1,0	2,5	80	—	—	—	—	—
	2	1,5	—	2,5	50	—	—	21	—	—
19	1	1,6	—	—	120	—	—	—	—	—
	2	1,2	—	2,0	85	120	—	—	—	$0,015\sin 7t$
20	1	2,0	—	2,0	90	100	—	—	—	—
	2	2,5	—	—	100	90	0,12	—	$6\sin 10t$	—
21	1	2,0	—	1,6	220	—	—	—	—	—
	2	2,5	—	—	250	—	0,14	—	—	$0,01\sin 10t$
22	1	2,2	1,5	3	180	—	—	—	—	—
	2	1,5	—	4	280	—	—	0,8	—	—
23	1	2,2	1,2	2	220	—	—	—	—	—
	2	1,6	—	—	200	—	0,12	—	$5\sin 7t$	—
24	1	1,6	—	2,4	160	—	0,13	—	—	—
	2	1,0	—	3	150	300	—	—	$6\sin 10t$	—
25	1	0,8	1,2	—	120	80	—	—	—	—
	2	0,8	—	—	180	—	0,4	12	—	—
26	1	1,4	—	—	100	120	0,15	—	—	—
	2	1,8	—	2,2	150	120	—	—	—	$0,015\sin 8t$
27	1	2	—	4,0	150	—	0,12	—	—	—
	2	2	—	—	162	—	0,13	—	$5\sin 9t$	—
28	1	1,5	2,0	2,0	140	—	—	—	—	—

Номер варианта задания	Номер задачи	m_1 , кг	m_2 , кг	V_0 , м/с	c_1 , Н/м	c_2 , Н/м	$\Delta\ell_0$, м	μ , Н·с/м	$F(t)$, Н	$S(t)$, м
	2	1,5	—	3,1	180	—	—	12	—	—
29	1	1,0	—	—	140	—	—	—	—	—
	2	2,0	—	2,4	75	150	—	—	—	$0,08\sin 5t$
30	1	1,6	—	3	75	150	—	—	—	—
	2	1,5	—	3	80	70	0,15	—	$8\sin 10t$	—

**Задание Д3. Исследование движения точки
с применением теоремы об изменении кинетической энергии**

Тонкий стержень с надетым на него шариком массой m расположен в вертикальной плоскости и состоит из дуг окружностей радиусами r и $R = 2r$, соединённых прямолинейным отрезком EK , сопряжённым с дугами окружностей в точках E и K . В этих точках шарик переходит с одного участка стержня на другой, не изменяя величины и направления скорости. Длина отрезка $EK = a$.

В точке A , положение которой на дуге окружности определяется углом α , шарiku сообщают начальную скорость V_0 . По дугам окружностей шарик скользит без трения, а при движении по прямолинейному отрезку EK на него действует постоянная сила трения с коэффициентом трения f . На участках с вертикальным отрезком EK считать, что шарик прижимается к стержню силой, равной половине веса шарика.

Достигнув на дуге окружности точки D , шарик упирается в недеформированную пружину жёсткостью s и, продолжая движение по сопряженной прямой, сжимает её. Положение точки D определяется углом φ .

Определить величину максимального сжатия пружины, если шарик проходит наивысшее положение траектории – точку B со скоростью $V_B = kV_0$. При найденном значении начальной скорости рассчитать давление шарика на стержень в точке C , положение которой на дуге определяется углом β .

Варианты № 1, 11, 21	Варианты № 2, 12, 22	Варианты № 3, 13, 23

Варианты № 4, 14, 24	Варианты № 5, 15, 25	Варианты № 6, 16, 26
Варианты № 7, 17, 27	Варианты № 8, 18, 28	
Варианты № 9, 19, 29	Варианты № 10, 20, 30	

Исходные данные задания Д3. Исследование движения точки с применением теоремы об изменении кинетической энергии

Номер варианта задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
m , кг	0,8	0,5	0,6	0,4	1,0	0,6	0,9	0,5	0,3	0,4	0,8	0,6	0,5	0,3	1,0
α , град	30	45	0	30	30	0	0	45	30	0	60	30	30	45	60
β , град	60	30	60	0	60	30	60	60	30	45	30	60	60	30	30
φ , град	0	60	30	0	0	30	45	0	30	45	30	30	0	30	45
r , м	0,4	0,4	0,5	0,3	0,6	0,5	0,3	0,6	0,4	0,5	0,3	0,5	0,4	0,5	0,8
a , м	0,5	0,6	0,9	1,4	0,8	1,2	0,5	0,5	1,4	0,5	0,8	0,5	0,8	0,6	0,6
f	0,4	0,3	0,4	0,3	0,4	0,3	0,5	0,3	0,4	0,3	0,4	0,5	0,3	0,4	0,3
k	0,3	0,4	0,3	0,4	0,3	0,3	0,4	0,4	0,3	0,4	0,3	0,3	0,4	0,3	0,4
c , Н/м	100	80	90	80	120	100	90	80	60	80	90	60	80	60	110

Номер варианта задания	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
m , кг	0,6	0,5	0,6	0,4	0,8	0,5	0,4	1,0	0,6	0,5	0,4	0,8	0,4	0,6	0,8
α , град	60	30	0	45	60	90	90	60	60	90	30	60	60	45	90
β , град	60	30	45	90	60	45	90	60	60	30	30	60	60	0	60
φ , град	45	60	60	60	30	90	0	90	45	60	60	90	30	60	0
r , м	0,6	0,4	0,8	0,5	0,6	0,6	0,6	0,4	0,6	0,8	0,4	0,4	0,8	0,6	0,4
a , м	0,4	1,2	0,9	1,2	1,2	0,9	0,6	1,5	1,4	0,8	1,2	0,9	0,6	0,8	0,5
f	0,3	0,4	0,4	0,5	0,3	0,3	0,4	0,3	0,3	0,4	0,4	0,3	0,4	0,3	0,4
k	0,4	0,3	0,3	0,4	0,3	0,4	0,4	0,3	0,4	0,3	0,3	0,4	0,4	0,3	0,3
c , Н/м	80	60	90	60	100	90	80	110	80	60	60	80	60	80	100

Задание Д4. Динамический расчет механической системы

Механизм состоит из трёх тел – груза 1, катка 2 и блока 3, соединенных нерастяжимыми нитями или невесомыми стержнями.

Движение механизма происходит в вертикальной плоскости под действием сил тяжести $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$, силы $\vec{F}$ и пары сил с моментом M . Направление действия силы $\vec{F}$ определяется углом α . Качение катка 2 происходит без скольжения. Проскальзывание между дисками и соединяющими их невесомыми стержнями или нитями отсутствует.

Радиусы ступеней катка 2 и блока 3 на схемах обозначены R_2 , r_2 и R_3 , r_3 .

Сплошные диски считать однородными. Радиусы инерции неоднородных (ступенчатых) дисков относительно осей, проходящих через центры масс перпендикулярно плоскости движения, равны i_{z2} , i_{z3} .

Найти ускорение груза 1 и динамические реакции, действующие на ось блока 3.

Варианты № 1, 11, 21	Варианты № 2, 12, 22
Варианты № 3, 13, 23	Варианты № 4, 14, 24
Варианты № 5, 15, 25	Варианты № 6, 16, 26

Варианты № 7, 17, 27	Варианты № 8, 18, 28

Варианты № 9, 19, 29	Варианты № 10, 20, 30

Исходные данные задания Д4. Динамический расчёт механической системы

Номер варианта задания	P_1 , Н	P_2 , Н	P_3 , Н	F , Н	M , Н·м	α , град	R_2 , м	r_2 , м	R_3 , м	r_3 , м	i_{z2} , м	i_{z3} , м
1	P	P	$2P$	P	$2Pr$	60	$3r$	r	$2r$	r	$2r$	$r\sqrt{2}$
2	$3P$	P	$3P$	$3P$	Pr	30	$2r$	r	$2r$	—	$2r$	—
3	$4P$	$3P$	$4P$	$2P$	$2Pr$	60	$2r$	r	$2r$	r	$2r$	$2r$
4	$2P$	$2P$	$4P$	P	$4Pr$	45	$3r$	—	$3r$	r	—	$r\sqrt{2}$
5	P	$3P$	$3P$	$2P$	$3Pr$	30	$3r$	r	r	—	$2r$	—
6	P	$2P$	$4P$	$4P$	$6Pr$	60	$3r$	—	$3r$	r	—	$r\sqrt{2}$
7	P	$2P$	$3P$	$2P$	$3Pr$	45	$3r$	r	r	—	$r\sqrt{3}$	—
8	$2P$	$3P$	$3P$	P	$3Pr$	30	$2r$	—	$2r$	r	—	$r\sqrt{3}$
9	$3P$	P	$3P$	P	$2Pr$	30	$2r$	r	$2r$	—	$r\sqrt{2}$	—
10	P	P	$3P$	P	$2Pr$	60	$3r$	—	$3r$	r	—	$r\sqrt{3}$
11	P	P	$3P$	$2P$	$3Pr$	30	$3r$	$2r$	$2r$	r	$r\sqrt{2}$	$r\sqrt{2}$
12	$2P$	P	$2P$	$4P$	Pr	60	$3r$	r	$3r$	—	$r\sqrt{3}$	—

Номер варианта задания	P_1 , Н	P_2 , Н	P_3 , Н	F , Н	M , Н·м	α , град	R_2 , м	r_2 , м	R_3 , м	r_3 , м	i_{z2} , м	i_{z3} , м
13	$3P$	P	$3P$	$3P$	$2Pr$	30	$3r$	$2r$	$2r$	r	$2r$	$r\sqrt{2}$
14	$2P$	P	$3P$	$2P$	$4Pr$	60	$2r$	—	$3r$	$2r$	—	$2r$
15	P	$2P$	$4P$	P	$4Pr$	45	$3r$	$2r$	$2r$	—	$r\sqrt{3}$	—
16	P	$3P$	$4P$	$2P$	$3Pr$	30	$2r$	—	$2r$	r	—	$r\sqrt{2}$
17	P	P	$3P$	$2P$	$6Pr$	60	$3r$	r	$3r$	—	$r\sqrt{3}$	—
18	$2P$	$2P$	$3P$	P	$3Pr$	60	$2r$	—	$3r$	r	—	$r\sqrt{2}$
19	$2P$	P	$2P$	$3P$	$4Pr$	30	$3r$	r	$3r$	—	$2r$	—
20	P	P	$3P$	P	$2Pr$	45	$2r$	—	$2r$	r	—	$r\sqrt{3}$
21	$2P$	P	$4P$	$2P$	$4Pr$	60	$2r$	r	$3r$	r	$r\sqrt{2}$	$2r$
22	P	P	$2P$	$5P$	$2Pr$	45	$3r$	$2r$	$2r$	—	$2r$	—
23	$2P$	$2P$	$3P$	$3P$	$2Pr$	60	$3r$	r	$2r$	r	$2r$	$r\sqrt{2}$
24	$4P$	P	$3P$	P	$3Pr$	30	$2r$	—	$3r$	r	—	$r\sqrt{3}$
25	P	$3P$	$2P$	P	$2Pr$	60	$3r$	r	r	—	$r\sqrt{3}$	—
26	P	$3P$	$4P$	$3P$	$3Pr$	45	$2r$	—	$3r$	$2r$	—	$r\sqrt{3}$
27	P	P	$4P$	$2P$	$4Pr$	30	$2r$	r	$2r$	—	$r\sqrt{3}$	—
28	$2P$	$3P$	$3P$	P	$6Pr$	30	$2r$	—	$3r$	$2r$	—	$r\sqrt{2}$
29	$2P$	P	$2P$	$2P$	$2Pr$	45	$2r$	r	r	—	$2r$	—
30	P	P	$4P$	P	$4Pr$	60	$3r$	—	$3r$	$2r$	—	$2r$

Задание Д5. Исследование движения механической системы с применением теоремы об изменении кинетической энергии

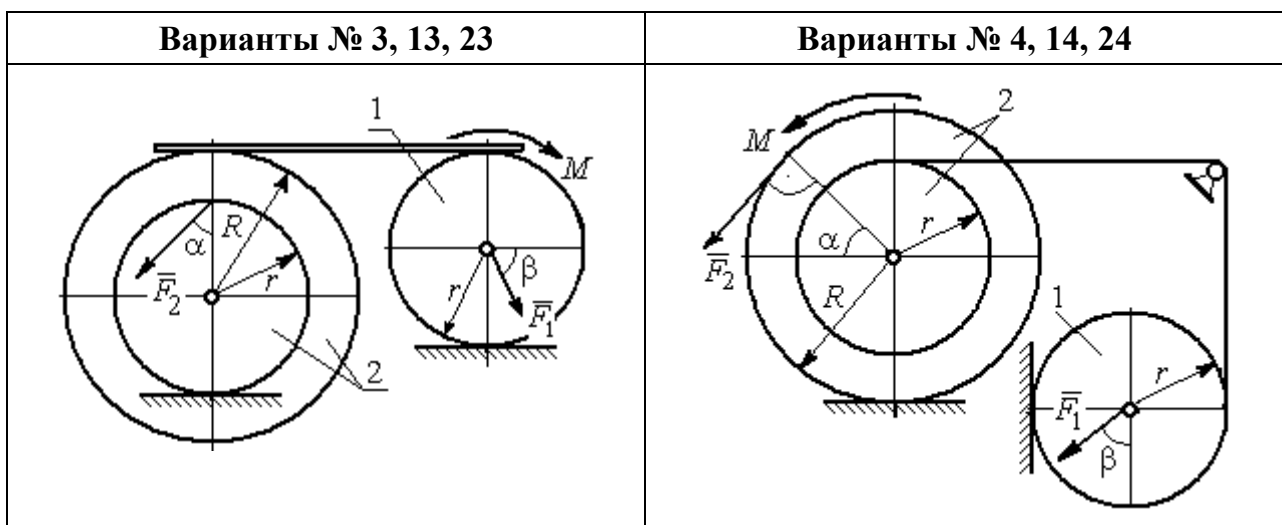
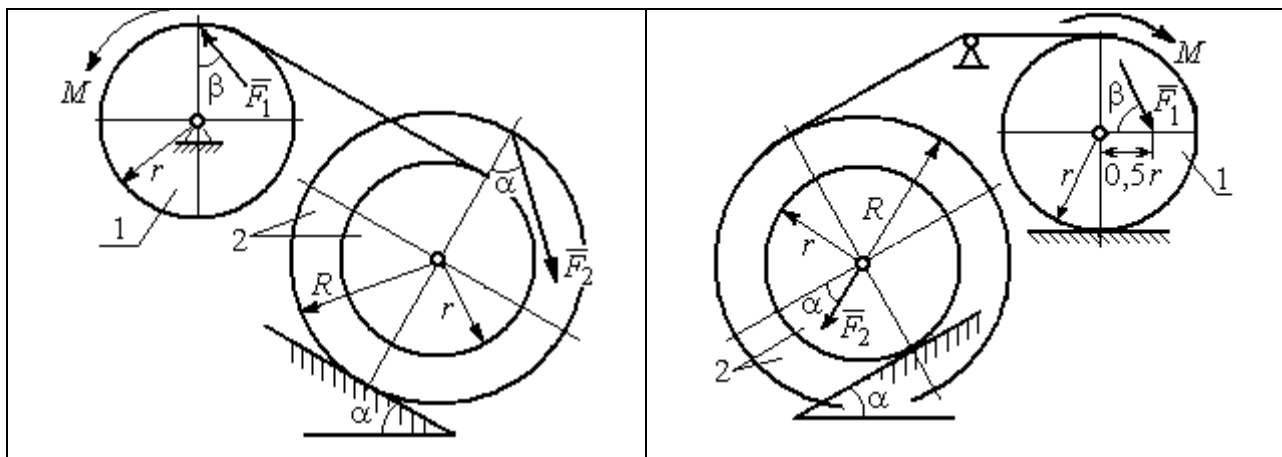
Неизменяемая механическая система состоит из ступенчатого и однородного дисков, соединённых нерастяжимой нитью или невесомым стержнем. Нити и стержни, соединяющие диски, параллельны плоскостям качения дисков. Качение дисков без скольжения. Скольжение между невесомым стержнем и дисками отсутствует.

Вес дисков P_1 и P_2 . Система движется в вертикальной плоскости под действием сил тяжести $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, сил $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ и пары сил с моментом M . Направления действия сил $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ и наклон плоскости (если он есть) определяются углами α или β , показанными на схемах механизмов.

Радиус однородного диска r . Радиусы ступеней ступенчатого диска R и r . Радиус инерции ступенчатого диска относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения, равен i_z .

1. Найти ускорение центра масс диска 2.
2. Найти реакцию опоры диска 2 на плоскость (её нормальную составляющую и силу сцепления диска с плоскостью).

Варианты № 1, 11, 21	Варианты № 2, 12, 22



Вариант № 5, 15, 25	Варианты № 6, 16, 26
Варианты № 7, 17, 27	Варианты № 8, 18, 28
Варианты № 9, 19, 29	Варианты 10, 20, 30

Исходные данные задания Д5. Исследование движения механической системы с применением теоремы об изменении кинетической энергии

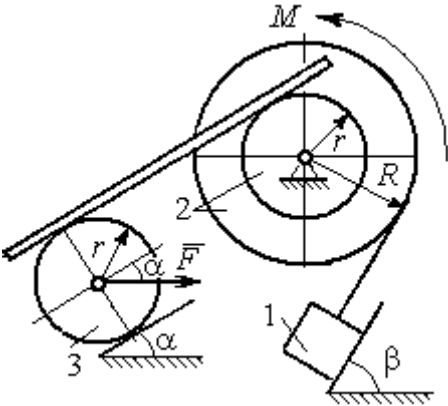
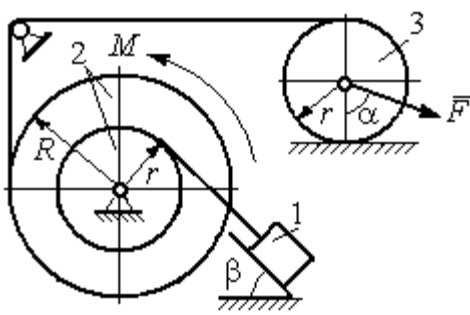
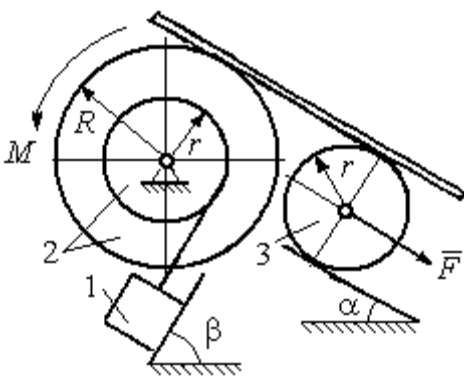
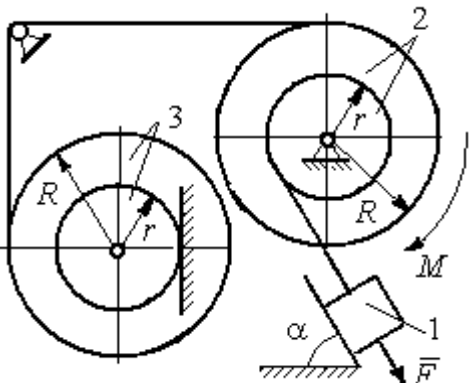
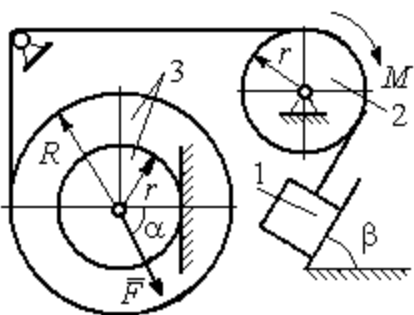
Номер варианта задания	P_1 , Н	P_2 , Н	F_1 , Н	F_2 , Н	M , Н·м	α , град	β , град	R , м	r , м	i_z , м
1	10	20	15	20	25	30	60	0,4	0,3	0,3
2	20	30	10	20	20	60	30	0,6	0,3	0,4
3	10	15	12	20	25	60	60	1,2	0,6	0,8
4	12	25	20	25	35	30	30	1,5	0,5	1,2
5	15	20	10	20	30	60	30	0,8	0,4	0,7
6	18	20	18	22	22	45	60	1,2	0,4	0,9
7	15	25	10	8	20	45	45	0,9	0,6	0,7
8	25	22	10	12	30	45	60	1,0	0,8	0,9
9	12	25	18	10	32	30	30	0,8	0,6	0,7
10	10	15	8	10	28	60	30	1,4	0,7	1,2
11	15	22	20	25	30	60	45	0,6	0,4	0,5
12	20	25	15	40	30	30	60	0,8	0,4	0,6
13	10	20	10	25	30	45	30	1,0	0,5	0,9
14	12	15	18	15	25	30	30	0,9	0,3	0,8
15	20	25	20	20	30	45	60	1,0	0,5	0,8
16	10	15	10	15	16	60	45	1,2	0,4	1,1
17	18	25	12	10	30	30	30	1,5	0,9	1,3
18	25	20	10	15	20	60	60	0,8	0,5	0,7
19	12	25	10	10	32	60	60	1,2	0,9	1,1
20	15	20	8	20	25	30	45	0,8	0,4	0,7
21	10	25	25	15	30	45	30	0,7	0,5	0,6
22	18	20	20	20	35	60	45	1,4	0,7	0,9
23	10	15	10	30	30	30	30	1,4	0,7	0,8
24	10	15	12	20	20	30	30	1,2	0,4	0,8
25	12	18	20	18	30	60	30	1,2	0,6	1,1
26	10	12	12	15	15	30	30	0,9	0,3	0,8
27	15	22	10	12	20	45	60	0,8	0,6	0,7
28	22	20	8	16	8	30	45	0,6	0,2	0,4
29	18	25	10	8	32	60	60	1,2	0,8	1,1
30	20	25	8	20	28	30	30	0,8	0,4	0,6

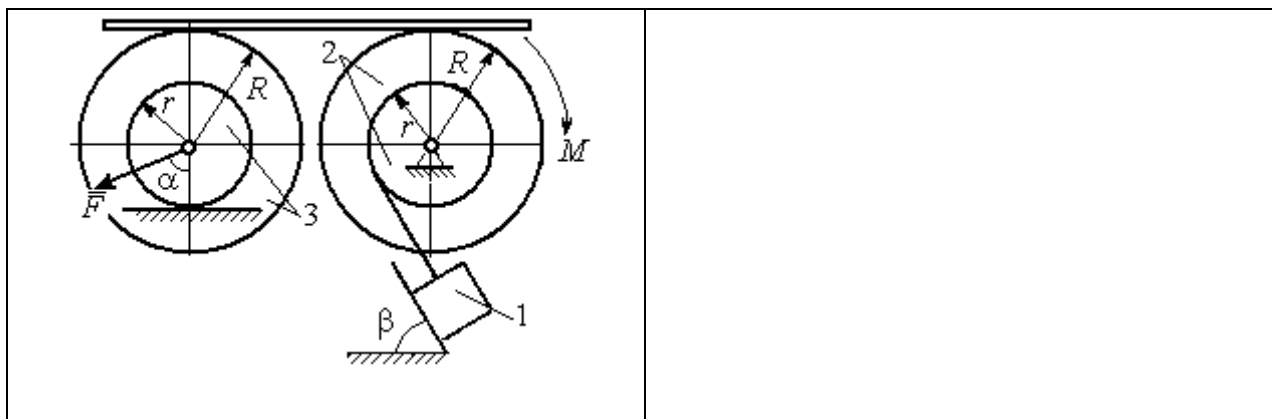
Задание Д6. Исследование механической системы с применением общего уравнения динамики

Механическая система с идеальными связями включает груз и два диска – однородного радиусом R или r и ступенчатого. Ступенчатый диск состоит из двух одноосных цилиндров радиусом R и r . Радиусы дисков указаны на схеме. Тела соединены нерастяжимыми нитями или невесомыми стержнями. Система движется в вертикальной плоскости из состояния покоя под действием сил тяжести, постоянной силы $\vec{F}$, а также пары сил с переменным моментом M . Направление действия силы $\vec{F}$ и наклон плоскости движущихся тел определяются углами α и β . Радиус инерции ступенчатого диска

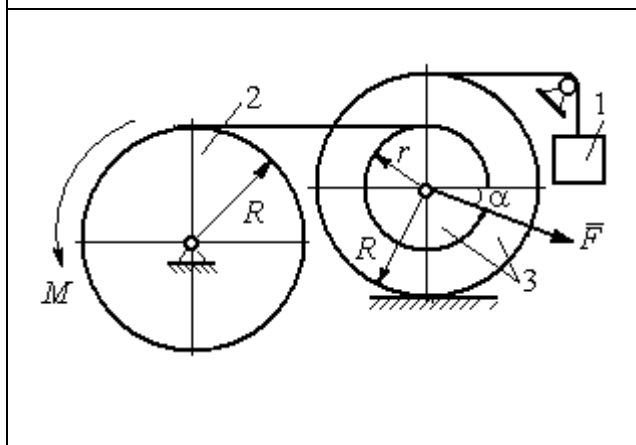
относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения, равен i_z .

Качение дисков без проскальзывания. Скольжение между невесомым стержнем и дисками отсутствует. Движение грузов по плоскости без трения. Нити и стержни, соединяющие груз и диски, параллельны соответствующим плоскостям, по которым движутся тела. Найти уравнение движения центра масс диска 3. Определить реакцию шарнира диска 2 в момент времени $t = 1$ с.

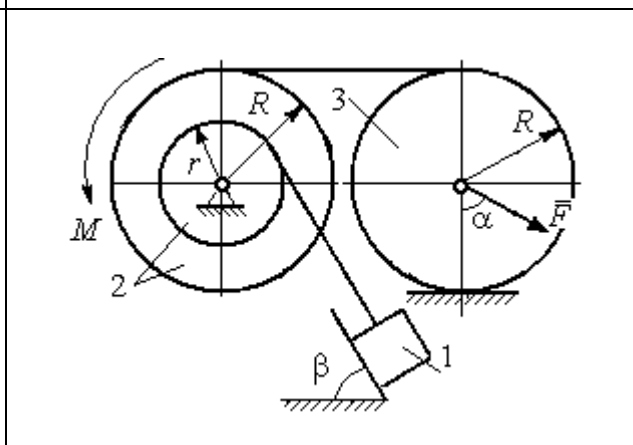
Варианты № 1, 11, 21	Варианты № 2, 12, 22
	
Варианты 3, 13, 23	Варианты № 4, 14, 24
	
Варианты № 5, 15, 25	Варианты № 6, 16, 26
	



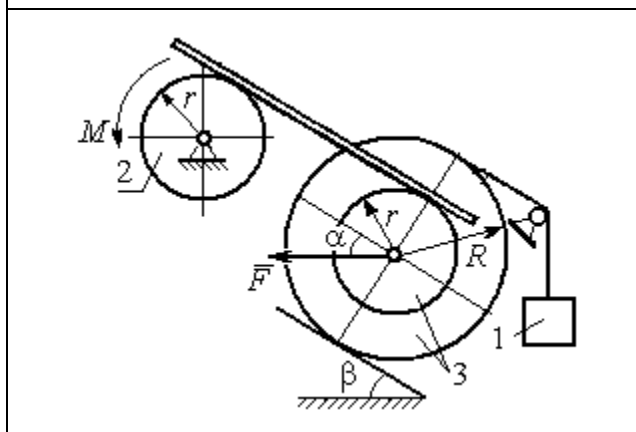
Варианты № 7, 17, 27



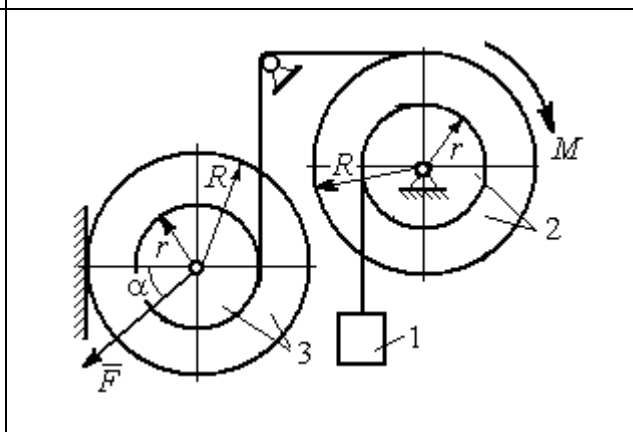
Варианты № 8, 18, 28



Варианты № 9, 19, 29



Варианты № 10, 20, 30



Исходные данные задания Д6. Исследование движения механической системы с применением общего уравнения динамики

Номер варианта задания	P_1 , Н	P_2 , Н	P_3 , Н	F , Н	M , Н·м	α , град	β , град	R , м	r , м	i_z , м
1	10	20	8	20	$3(2+t^2)$	30	60	0,6	0,3	0,4
2	10	22	15	15	$4(t+3)$	30	30	0,8	0,4	0,6
3	5	18	10	6	$8(t^2+1)$	90	30	0,4	0,3	0,3

4	5	22	10	5	$14(t^2+t+1)$	30	–	0,6	0,5	0,6
5	5	20	16	9	$3(t^2+4)$	45	60	0,6	0,3	0,5
6	10	16	14	15	$4(5+t)$	60	30	1,0	0,6	0,8
7	6	20	20	8	$9(3t^2+2)$	45	–	0,8	0,6	0,8
8	16	25	15	12	$5(t^2+4)$	30	60	1,2	0,6	0,8
9	5	20	12	8	$4(3+5t)$	60	30	0,6	0,4	0,5
10	6	25	8	10	$5(3t+6)$	30	–	1,0	0,8	0,9
11	4	22	8	15	$2+t^2$	45	45	0,8	0,4	0,6
12	15	18	15	10	$5(t+3)$	30	60	1,0	0,5	0,7
13	6	20	10	4	$5(t^2+2)$	30	60	0,6	0,5	0,4
14	10	25	15	8	$16(t+2)$	60	–	0,8	0,6	0,7
15	8	18	20	10	$6(t+2)$	30	90	1,2	0,6	1,0
16	8	18	12	12	$5(3+t^2)$	90	60	0,8	0,6	0,7
17	5	20	10	10	$2t^2+20$	60	–	0,9	0,6	0,8
18	20	15	20	15	$3(t+4)$	60	30	0,8	0,4	0,7
19	8	20	12	10	$4(3+t)$	45	45	1,2	0,4	0,8
20	12	20	10	6	$6(3t+4)$	45	–	1,0	0,6	0,9
21	15	25	12	12	$6+t^2$	60	60	0,6	0,3	0,5
22	20	22	18	15	$2(2t+9)$	45	45	0,8	0,4	0,6
23	8	24	12	8	$7(3t^2+2)$	30	45	0,8	0,5	0,6
24	12	20	18	10	$6(t+4)$	90	–	0,5	0,3	0,4
25	5	20	12	12	$9(2+t^2)$	60	30	1,4	0,7	1,2
26	10	12	10	8	$6(2+t)$	30	45	1,2	0,8	0,9
27	6	18	16	14	$8(2t^2+3)$	30	–	0,8	0,2	0,6
28	10	20	20	20	$3(t^2+3)$	45	30	0,6	0,3	0,5
29	10	18	8	12	$5(4+t+t^2)$	30	60	1,2	0,8	0,9
30	8	18	10	15	$8(t^2+5)$	60	–	1,0	0,8	0,9

Задание Д7. Исследование механической системы с одной степенью свободы с применением уравнений Лагранжа

Механическая система состоит из трёх тел – бруса 1, блока 2, катка 3 и невесомой пружины жесткостью c . Брус 1, соединяющий каток 3 с блоком 2, расположен параллельно линии качения катка 3. Радиусы ступеней ступенчатого диска и радиус однородного диска указаны на схеме.

Качение катка 3 происходит без проскальзывания. Скольжение между брусом и дисками отсутствует. В задачах, где пружина соединяется с блоком 2, передача движения блоку 2 производится посредством невесомого стержня без скольжения.

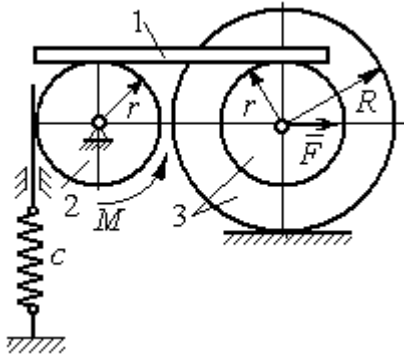
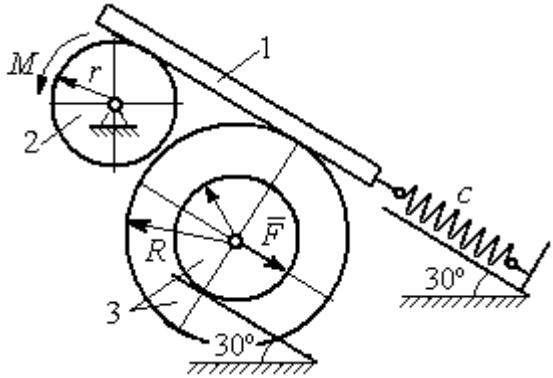
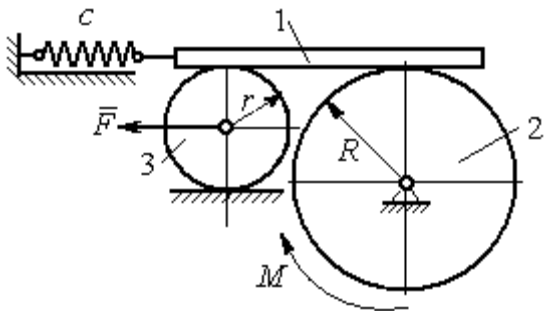
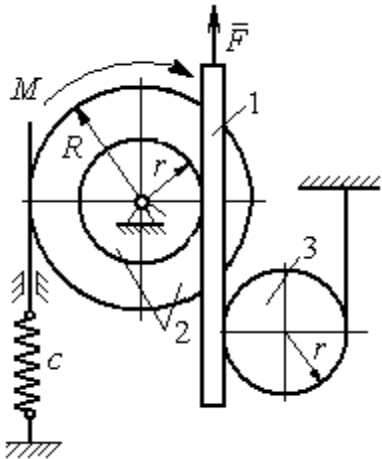
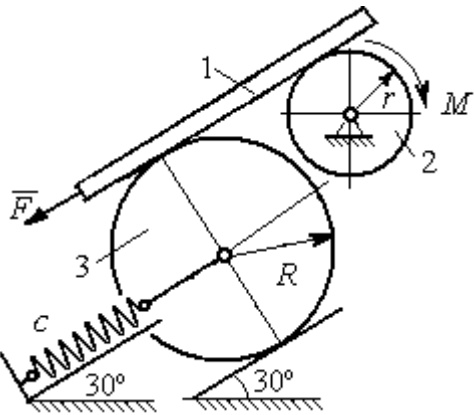
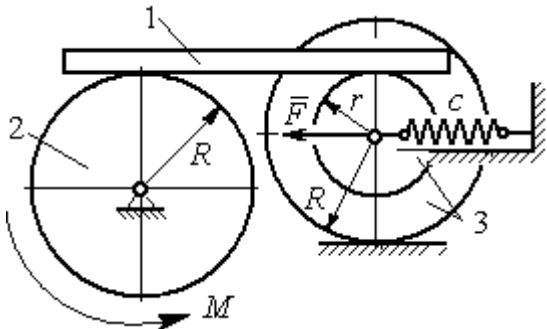
Радиус инерции ступенчатого диска относительно оси, проходящей через его центр масс перпендикулярно плоскости движения, равен i_z .

Система движется в вертикальной плоскости под действием сил тяжести $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3$, силы $\vec{F}$ и пары сил с моментом M .

Определить закон движения бруса 1 и закон угловых колебаний блока 2, если в начальный момент пружина находилась в нерастянутом состоянии, а блоку 2 придали угловую скорость ω_{20} , направленную в сторону заданного момента пары сил.

Варианты заданий даны на рис. 6.9, 6.10. Варианты исходных данных в табл. 6.2. Отрицательные значения величин F или M в табл. 6.2 означают, что при заданных

модулях силы или момента направление вектора силы $\vec{F}$ или момента M на схеме следует изменить на противоположные.

Варианты № 1, 11, 21	Варианты № 2, 12, 22
	
Варианты № 3, 13, 23	Варианты № 4, 14, 24
	
Варианты № 5, 15, 25	Варианты № 6, 16, 26
	

Варианты № 7, 17, 27	Варианты № 8, 18, 28
Варианты № 9, 19, 29	Варианты № 10, 20, 30

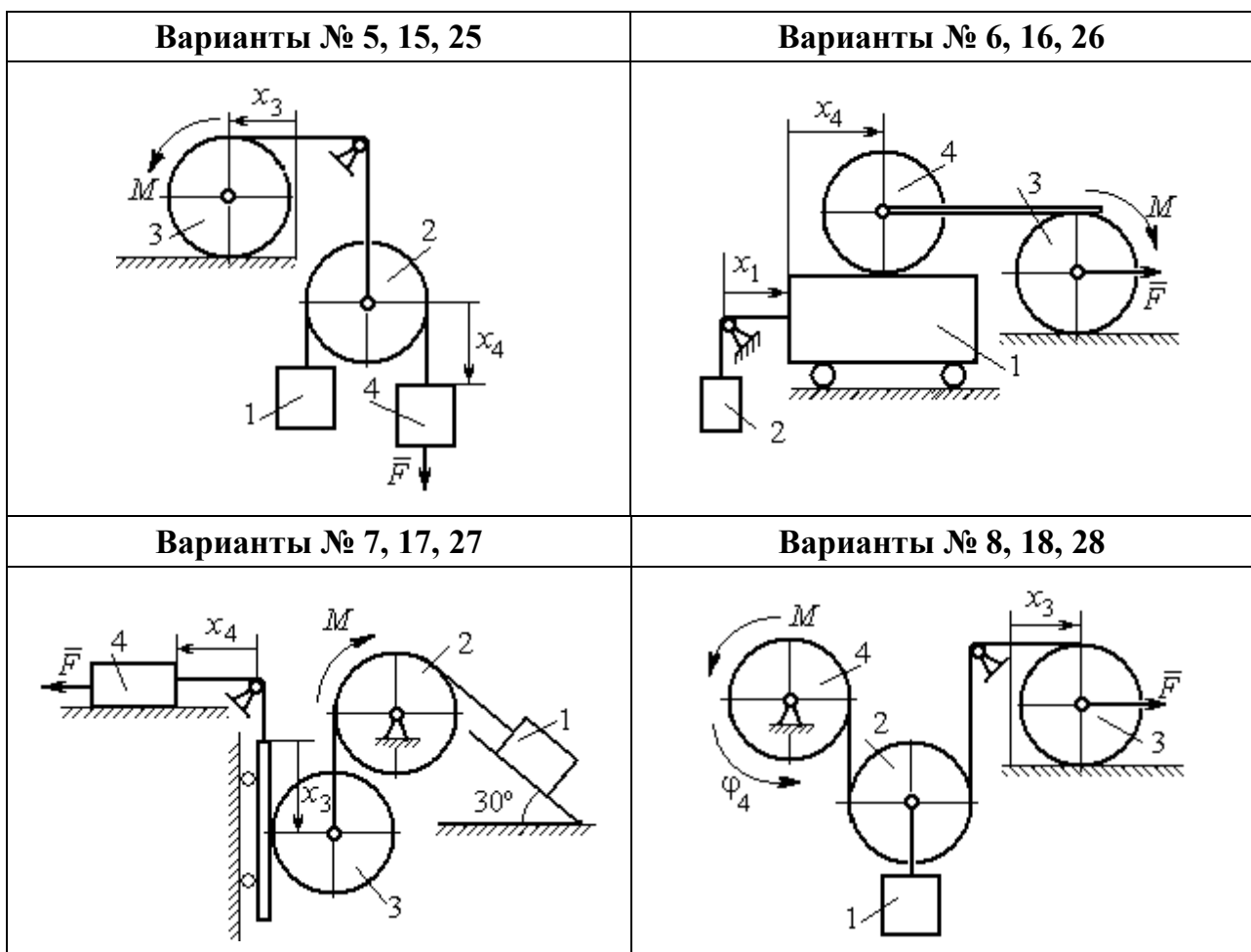
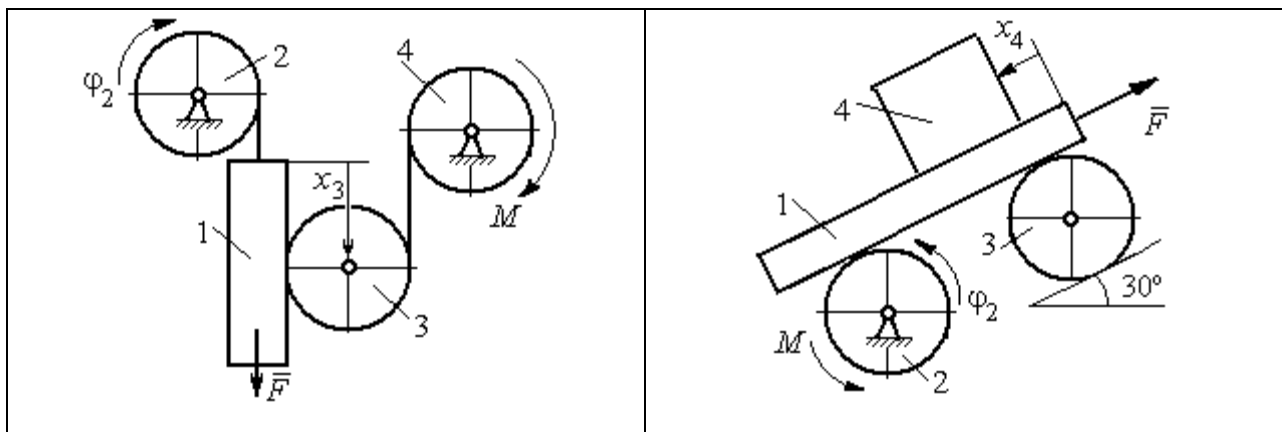
Исходные данные задания Д7. Исследование движения механической системы с одной степенью свободы с применением уравнений Лагранжа

Номер варианта задания	P_1 , Н	P_2 , Н	P_3 , Н	F , Н	M , Н·м	c , Н/м	ω_{20} , рад/с	R , м	r , м	i_z , м
1	8	12	18	15	3	50	0,3	0,6	0,3	0,4
2	10	8	15	12	5	55	0,4	0,8	0,5	0,6
3	5	18	10	8	4	60	0,2	0,5	0,3	—
4	5	20	12	10	6	70	0,5	0,6	0,5	0,6
5	5	8	16	8	8	65	0,2	0,6	0,3	—
6	8	10	14	6	2	50	0,1	1,0	0,6	0,8
7	10	12	15	12	3	65	0,2	0,8	0,6	0,7
8	12	15	15	6	2	50	0,3	1,2	0,6	0,8
9	5	20	12	8	4	75	0,1	0,6	0,4	0,5
10	6	25	8	5	12	60	0,4	1,0	0,8	0,9

Номер варианта задания	P_1 , Н	P_2 , Н	P_3 , Н	F , Н	M , Н·м	c , Н/м	ω_{20} , рад/с	R , м	r , м	i_z , м
11	4	10	12	-10	-2	60	0,2	0,8	0,4	0,6
12	5	8	15	-8	3	50	0,5	1,0	0,5	0,7
13	6	15	8	-12	-4	65	0,4	0,6	0,5	—
14	10	25	10	6	10	55	0,1	0,8	0,6	0,7
15	8	6	20	-10	2	70	0,2	1,2	0,6	—
16	10	12	12	-5	6	60	0,3	0,8	0,6	0,7
17	12	16	12	-6	-2	55	0,4	0,9	0,6	0,8
18	10	20	20	10	4	60	0,1	0,8	0,4	0,7
19	8	20	12	-10	6	65	0,2	1,2	0,4	0,8
20	12	20	10	-3	6	50	0,24	1,0	0,6	0,9
21	5	12	15	12	-3	55	0,3	0,6	0,5	0,55
22	10	15	18	6	-2	65	0,1	0,8	0,4	0,6
23	8	20	12	-8	2	45	0,2	0,8	0,6	—
24	12	20	18	-4	-8	70	0,4	0,5	0,3	0,4
25	6	10	15	-6	-2	60	0,1	1,4	0,7	—
26	8	12	10	10	-3	65	0,2	1,2	0,8	0,9
27	6	18	16	5	-3	70	0,2	0,8	0,2	0,6
28	8	12	12	-6	2	65	0,3	0,6	0,3	0,5
29	10	18	20	-10	4	60	0,2	1,2	0,8	0,9
30	8	18	10	8	6	75	0,1	1,0	0,8	0,9

Задание Д8. Исследование механической системы с двумя степенями свободы
Механическая система, состоящая из четырёх тел, из состояния покоя движется в вертикальной плоскости под действием сил тяжести $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3, \vec{P}_4$, силы $\vec{F}$ и пары сил с моментом M . Качение тел во всех случаях происходит без проскальзывания, скольжение грузов по поверхностям – без трения. Радиусы дисков одинаковы и равны R . Найти уравнения движения системы в обобщённых координатах.

Варианты № 1, 11, 21	Варианты № 2, 12, 22
Варианты № 3, 13, 23	Варианты № 4, 14, 24



Варианты № 9, 19, 29	Варианты № 10, 20, 30

Исходные данные задания Д8. Исследование движения механической системы с двумя степенями свободы

Номер варианта задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$P_1, \text{ Н}$	P	$2P$	P	$1,5P$	P	$3P$	P	$1,2P$	$3P$	P	$2P$	P	P	$2P$	P
$P_2, \text{ Н}$	$3P$	$3P$	$4P$	$3P$	$2P$	P	$2P$	$3P$	P	$2P$	$3P$	$2P$	$3P$	$4P$	$3P$
$P_3, \text{ Н}$	$2P$	$2P$	$3P$	$2P$	$2P$	$2P$	$3P$	P	$2P$	$3P$	$2P$	$2P$	$2P$	P	$2P$
$P_4, \text{ Н}$	$2P$	P	P	$2P$	$3P$	$3P$	P	P	$2P$	P	P	P	$2P$	$2P$	$2P$
$R, \text{ м}$	$2r$	$1,5r$	$2,5r$	$1,2r$	$2r$	r	$1,5r$	r	$2r$	r	$1,5r$	$1,2r$	$2r$	$2r$	$2r$
$F, \text{ Н}$	P	$2P$	P	$3P$	P	P	$2P$	$4P$	P	$2P$	P	$2P$	$1,5P$	$4P$	$2P$
$M, \text{ Н}\cdot\text{м}$	$2Pr$	$3Pr$	$4Pr$	$3Pr$	$3Pr$	$4Pr$	$2Pr$	$2Pr$	$3Pr$	$2Pr$	$3Pr$	$4Pr$	$3Pr$	$3Pr$	$2Pr$

Номер варианта задания	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
$P_1, \text{ Н}$	$4P$	$1,5P$	P	$2P$	P	P	$1,5P$	$1,5P$	$2P$	P	P	$2P$	$1,2P$	$3P$	$1,2P$
$P_2, \text{ Н}$	$2P$	$2P$	$2P$	$4P$	$3P$	$4P$	$3P$	$4P$	$3P$	$2P$	$2P$	$1,2P$	$2P$	$3P$	$2P$
$P_3, \text{ Н}$	$2P$	$2P$	$3P$	$2P$	$2P$	$3P$	$2P$	$2P$	P	$2P$	$3P$	$2P$	P	P	$3P$
$P_4, \text{ Н}$	$1,5P$	$2P$	$3P$	P	$2P$	$2P$	$2P$	P	$2P$	$3P$	P	P	$2P$	P	$2P$
$R, \text{ м}$	$1,5r$	r	$1,5r$	$2r$	r	$1,2r$	$2r$	$1,5r$	$2r$	r	$1,5r$	$2r$	r	$1,2r$	$2r$
$F, \text{ Н}$	$2P$	$2P$	P	$3P$	$4P$	$2P$	$3P$	$2P$	$3P$	P	$3P$	$1,5P$	$4P$	$2P$	$3P$
$M, \text{ Н}\cdot\text{м}$	$3Pr$	$2Pr$	$4Pr$	Pr	$4Pr$	$4Pr$	$2Pr$	Pr	$4Pr$	$2Pr$	$4Pr$	$2Pr$	$2Pr$	$3Pr$	$2Pr$

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»



Проректор по учебно-методическому комплексу
И. А. Упоров

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

по выполнению расчётно-графической работы по дисциплине

Б1.О.17 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Специальность
21.05.04 Горное дело

Направленность (профиль) подготовки
Горные машины и оборудование

Форма обучения: **очная, заочная**

Год набора: **2022**

Автор: Волков Е. Б., доцент, к. т. н.

Одобрены на заседании кафедры

Технической механики

(название кафедры)

Зав. кафедрой

(подпись)

Волков Е. Б.

(Фамилия И. О.)

Протокол № 1 от 17.09.2021

(Дата)

Рассмотрены методической комиссией
факультета

Горно-механического

(название факультета)

Председатель

(подпись)

Осипов П. А.

(Фамилия И. О.)

Протокол № 2 от 12.10.2021

(Дата)

Екатеринбург

КОМПЛЕКТ ЗАДАНИЙ ДЛЯ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

Расчетно-графическая работа по темам 1-4

С1. Равновесие произвольной плоской системы сил. Равновесие системы тел

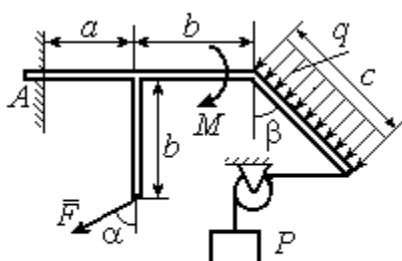
Каждый вариант задания включает две задачи по темам: «Равновесие произвольной плоской системы сил» и «Равновесие системы тел».

В задачах требуется определить реакции связей конструкции исходя из условия равновесия произвольной плоской системы сил. Весом стержневых подпорок, поддерживающих балочные конструкции, и блоков, через которые перекинuty невесомые нити, пренебречь.

Из таблицы исходных данных выбираются значения тех параметров, которые указаны на схемах.

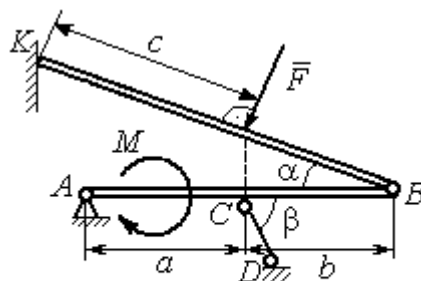
Варианты № 1, 11, 21

Задача 1



Найти реакцию жесткой заделки в точке A

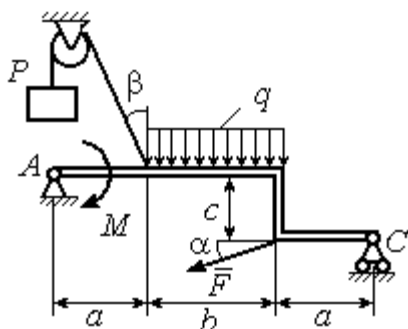
Задача 2



Найти реакции шарниров A, B , реакцию стержня CD и реакцию опоры в точке K

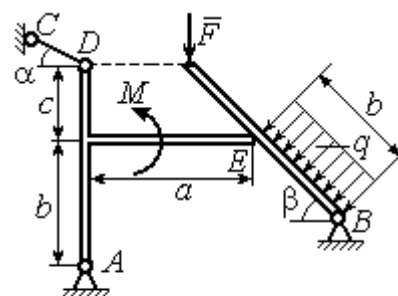
Варианты № 2, 12, 22

Задача 1



Найти реакции шарниров A и C

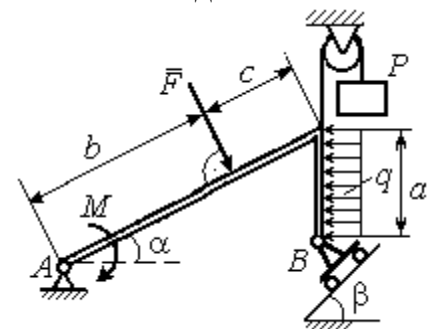
Задача 2



Найти реакции шарниров A, B , реакцию опоры в точке E и реакцию стержня CD

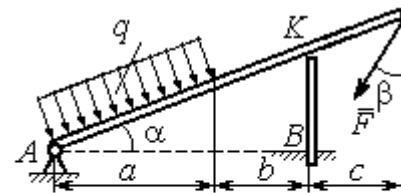
Варианты № 3, 13, 23

Задача 1



Найти реакцию шарниров A и B

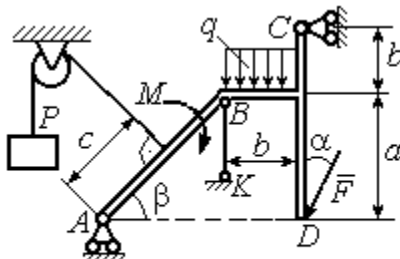
Задача 2



Найти реакцию шарнира A ,
реакцию опоры в точке K
и реакцию жесткой заделки
в точке B

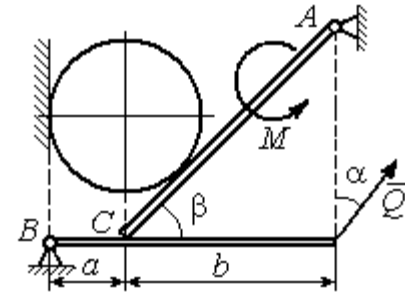
Варианты № 4, 14, 24

Задача 1



Найти усилие в стержне BK
и реакцию шарниров A, C

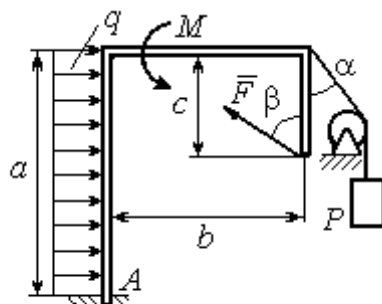
Задача 2



Вес шара P . Найти реакцию
шарниров A, B , давление шара на балку
и стенку, реакцию опоры балки
в точке C и уравновешивающую силу Q

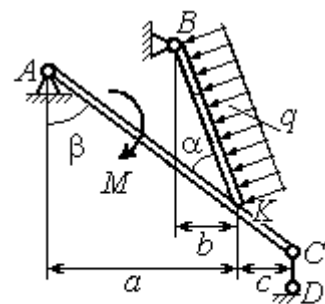
Варианты № 5, 15, 25

Задача 1



Найти реакцию жесткой заделки
в точке A

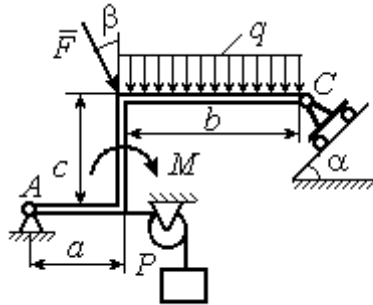
Задача 2



Найти реакцию шарниров A, B ,
реакцию стержня CD
и реакцию опоры в точке K

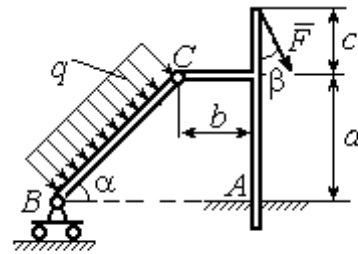
Варианты № 6, 16, 26

Задача 1



Найти реакции шарниров A и C

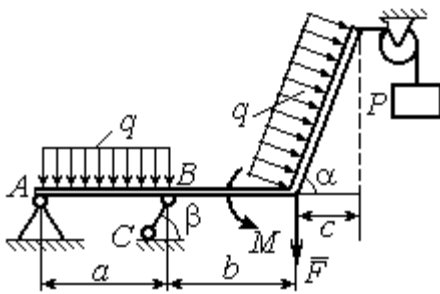
Задача 2



Найти реакцию жесткой заделки в точке A и реакции шарниров B и C

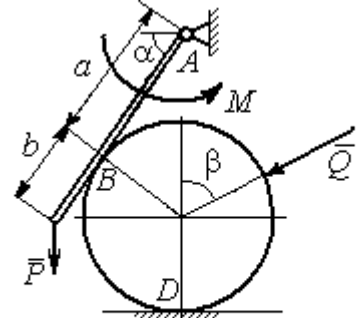
Варианты № 7, 17, 27

Задача 1



Найти реакцию стержня BC и реакцию шарнира A

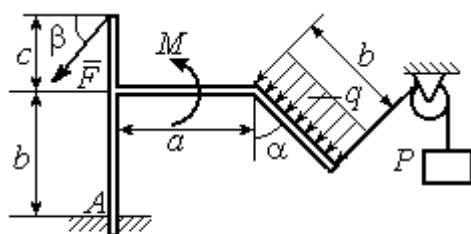
Задача 2



Найти реакцию шарнира A , давление балки на шар, реакцию опоры шара в точке D и уравновешивающую силу Q

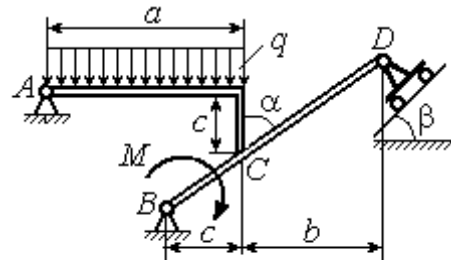
Варианты № 8, 18, 28

Задача 1



Найти реакцию жесткой заделки в точке A

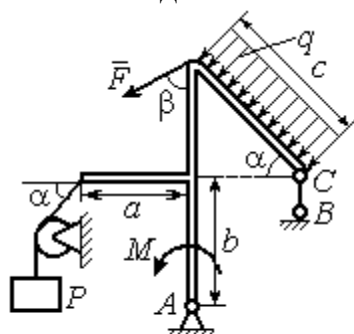
Задача 2



Найти реакцию шарниров A, B и D и реакцию опоры в точке C

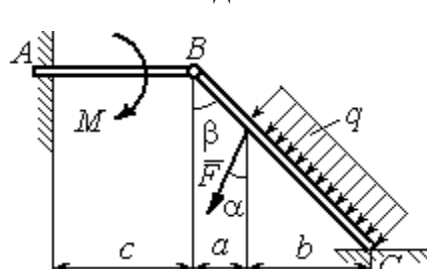
Варианты № 9, 19, 29

Задача 1



Найти реакцию стержня BC и реакцию шарнира A

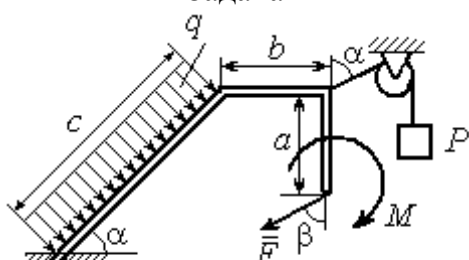
Задача 2



Найти реакцию жесткой заделки в точке A , реакцию шарнира B и реакцию опоры в точке C

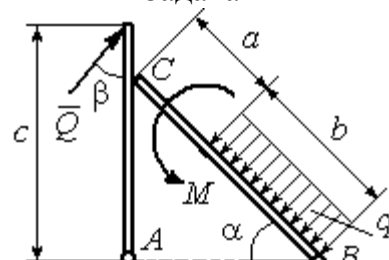
Варианты № 10, 20, 30

Задача 1



Найти реакцию жесткой заделки в точке A

Задача 2



Найти реакцию шарниров A, B , реакцию опоры в точке C и уравновешивающую силу Q

Исходные данные задания С1. Равновесие произвольной плоской системы сил. Равновесие системы тел.

Номер варианта задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
P , кН	6	5	6	12	6	6	10	3	8	5	10	4	8	10	8
F , кН	12	6	10	5	12	8	6	5	6	2	12	8	12	6	10
q , кН/м	5	4	2	3	6	3	5	2	2	4	6	2	3	4	5
M , кН·м	12	8	6	8	12	5	12	8	4	6	8	12	10	6	10
α , град	45	60	30	60	30	30	45	60	30	30	45	30	60	45	60
β , град	60	30	45	30	60	90	60	60	30	45	30	45	30	60	30
a , м	3	4	3	4	3	4	3	4	1	2	2	3	2	3	4
b , м	3	3	4	3	2	4	3	3	2	3	3	3	4	3	2
c , м	4	2	2	2	3	2	2	1	5	4	4	2	1	2	2

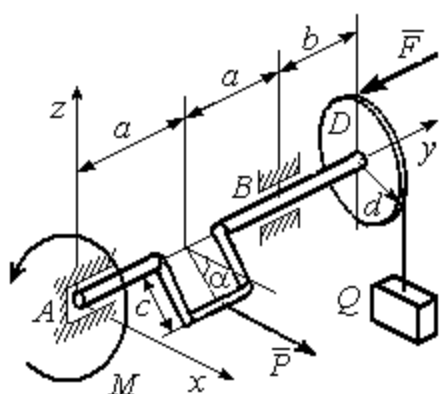
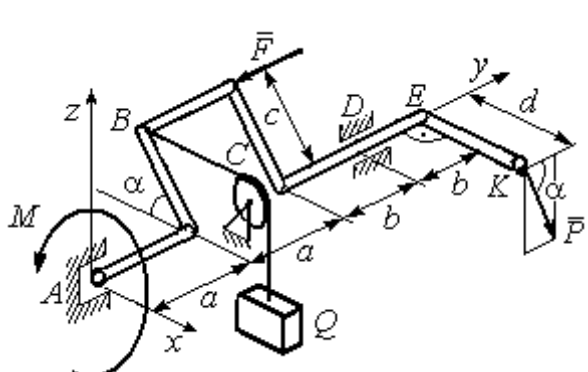
Номер варианта задания	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
P , кН	10	8	10	6	4	6	12	10	5	6	8	6	8	4	6
F , кН	6	12	12	8	3	14	10	8	15	10	12	8	10	10	2
q , кН/м	5	3	4	3	2	3	2	5	4	2	3	4	5	2	4
M , кН·м	10	6	8	6	5	12	4	6	8	10	12	10	6	4	8
α , град	60	60	30	45	60	30	60	45	30	60	45	30	30	30	45
β , град	45	30	30	60	60	45	30	60	30	45	90	30	60	45	30
a , м	3	4	3	1	2	2	4	1	4	3	4	3	2	1	2
b , м	2	4	3	3	4	1	4	3	2	2	2	2	2	2	2
c , м	3	2	2	4	5	4	2	2	1	1	1	2	1	3	5

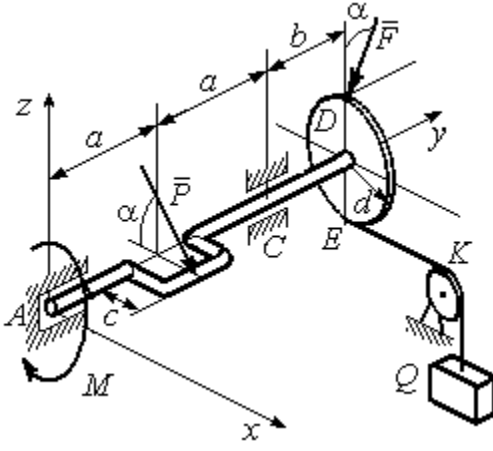
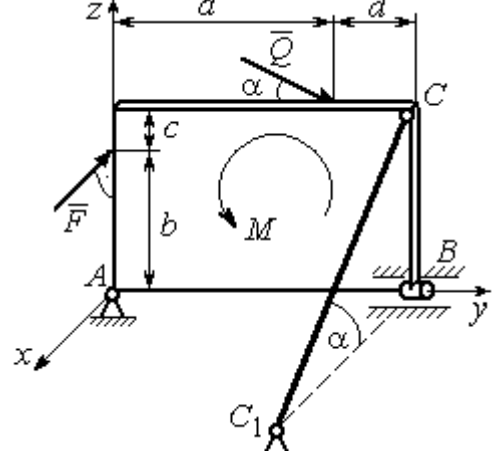
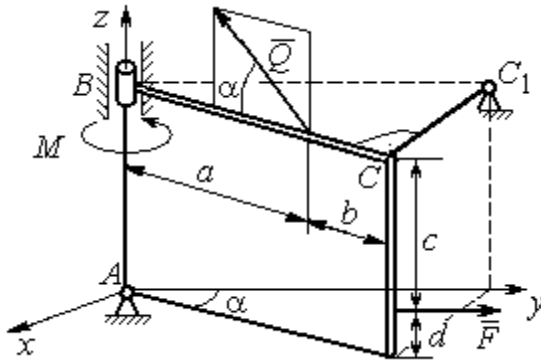
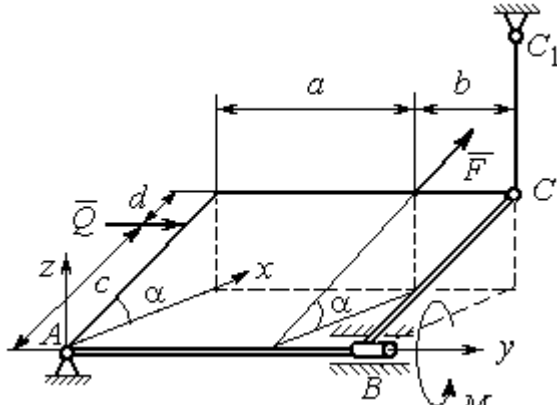
Задание С2. Равновесие пространственной системы сил

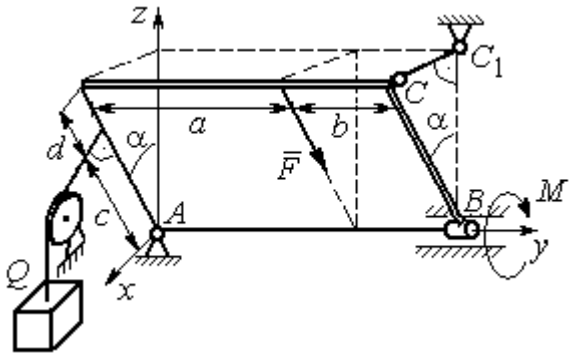
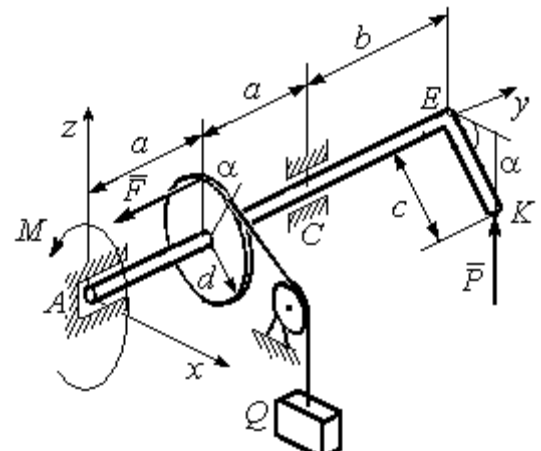
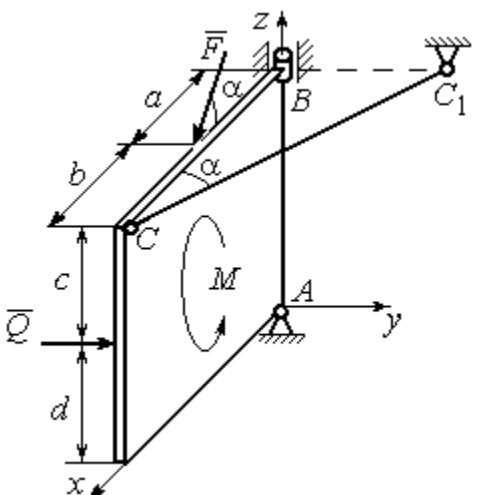
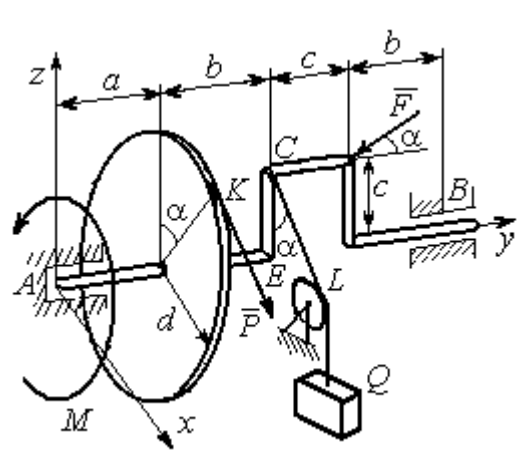
В заданиях рассматривается равновесие однородной плиты или вала (прямого или с «ломаной» осью) с насаженным на него шкивом.

Вал закреплен подшипником и подпятником и удерживается в равновесии. На вал действуют сила $\vec{F}$, пара сил с моментом M и сила $\vec{P}$. На шкив вала намотана нить, к свободному концу которой, перекинутому через невесомый блок, подвешен груз весом Q . Для вала определить реакции подшипника и подпятника и величину уравнивающей силы Q (или момента M).

Плита весом P закреплена пространственным шарниром, подшипником и удерживается в заданном положении невесомым стержнем. На плиту действуют силы $\vec{F}$, $\vec{Q}$ и пара сил с моментом M . Для плиты найти реакции сферического и цилиндрического шарниров и реакцию стержня.

Варианты № 1, 11, 21	Варианты № 2, 12, 22
 Сила $\vec{F}$ параллельна оси Ay; сила $\vec{P}$ параллельна оси Ax; нить, удерживающая груз, сходит со шкива вертикально. Найти реакции подпятника и подшипника в точках A и B и величину уравнивающего груза Q.	 Сила $\vec{F}$ параллельна оси Ay; сила $\vec{P}$ лежит в плоскости, параллельной zAy; отрезок нити BC параллелен оси Ax; рукоятка вала EK параллельна оси Ax. Найти реакции подпятника и подшипника в точках A и D и величину уравнивающего момента M.

Варианты № 3, 13, 23	Варианты № 4, 14, 24
 Сила $\vec{F}$, лежит в плоскости zAy; сила $\vec{P}$ лежит в плоскости, параллельной zAx, отрезок нити EK параллелен оси Ax. Найти реакции подпятника и подшипника в точках A и C, а также величину уравновешивающего груза Q	 Плита весом P расположена в плоскости zAy; пара сил с моментом M действует в плоскости плиты; стержень CC_1 расположен в плоскости, параллельной zAx; сила $\vec{Q}$ действует в плоскости плиты; сила $\vec{F}$ перпендикулярна плоскости плиты. Найти реакции сферического и цилиндрического шарниров в точках A и B и реакцию стержня CC_1
Варианты № 5, 15, 25  Плита весом P отклонена на угол α от вертикальной плоскости zAy; сила $\vec{Q}$ лежит в плоскости плиты; сила $\vec{F}$ параллельна оси Ay; стержень CC_1 перпендикулярен плоскости плиты. Найти реакции сферического и цилиндрического шарниров в точках A и B и реакцию стержня CC_1	Варианты № 6, 16, 26  Плита весом P отклонена на угол α от горизонтальной плоскости xAy; сила $\vec{Q}$ перпендикулярна боковой стенке плиты и параллельна оси Ay; сила $\vec{F}$ расположена в плоскости плиты и параллельна её боковым стенкам; стержень CC_1 параллелен оси Az. Найти реакции сферического и цилиндрического шарниров в точках A и B и реакцию стержня CC_1

Варианты № 7, 17, 27	Варианты № 8, 18, 28
 Плита весом P отклонена на угол α от вертикальной плоскости zAy; нить, удерживающая груз Q, находится в плоскости zAx, прикреплена к боковой стенке плиты и перпендикулярна ей; сила $\vec{F}$ параллельна боковым стенкам плиты; стержень CC_1 перпендикулярен плоскости zAy. Найти реакции сферического и цилиндрического шарниров в точках A и B и реакцию стержня CC_1.	 Рукоять EK перпендикулярна оси вала и наклонена под углом α к горизонтальной плоскости xAy; сила $\vec{P}$ параллельна оси Az; сила $\vec{F}$ параллельна оси Ay; нить, удерживающая груз Q, сходит со шкива по касательной. Найти реакции подпятника A, подшипника C, и величину уравновешивающего груза Q.
Варианты № 9, 19, 29	Варианты № 10, 20, 30
 Плита весом P находится в вертикальной плоскости zAx; стержень CC_1 расположен в плоскости, параллельной xAy; пара сил с моментом M действует в плоскости плиты; сила $\vec{Q}$ перпендикулярна плоскости плиты; сила $\vec{F}$ лежит в плоскости плиты. Найти реакции сферического и цилиндрического шарниров в точках A и B и реакцию стержня CC_1.	 Сила $\vec{F}$ находится в плоскости zAy; стойка CE находится в плоскости zAy; отрезок CL нити, удерживающей груз, находится в плоскости параллельной xAz; сила $\vec{P}$ находится в плоскости шкива и направлена по касательной к ободу в точке K. Найти реакции подпятника A, подшипника B и величину уравновешивающего момента M.

Исходные данные для задания С2.

Равновесие пространственной системы сил

Номер варианта задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P , кН	5	4	6	10	16	15	12	10	15	14
F , кН	8	6	12	6	10	10	8	12	12	10
Q , кН	—	12	—	12	8	12	10	—	10	12
M , кН·м	12	—	10	8	12	6	8	6	8	—
α , град	60	30	30	30	60	60	60	30	30	60
a , м	1,2	0,8	1,4	0,6	1,2	0,9	1,4	0,4	0,8	0,8
b , м	1,0	0,6	1,1	0,4	0,8	0,4	0,6	1,2	0,2	0,6
c , м	0,8	0,5	0,8	0,3	1,4	0,8	1,2	0,8	0,4	0,4
d , м	0,4	0,4	0,6	0,2	0,4	0,2	0,4	0,6	0,6	0,6

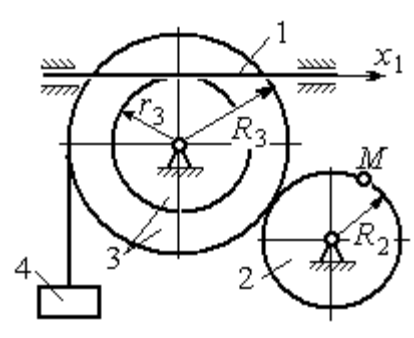
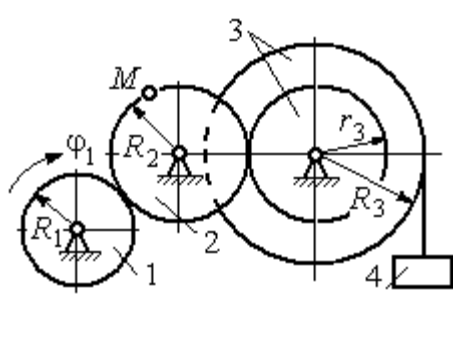
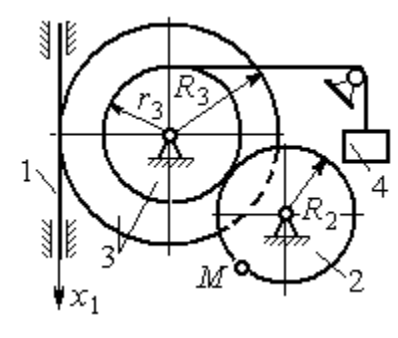
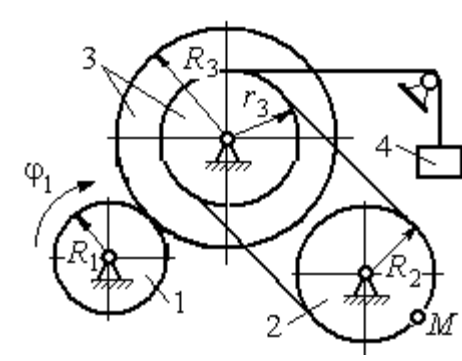
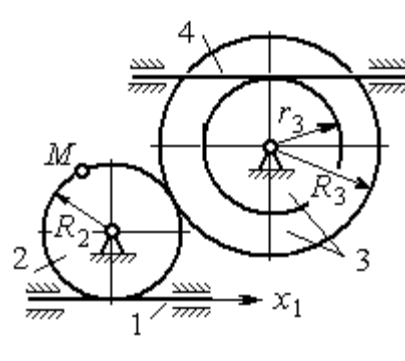
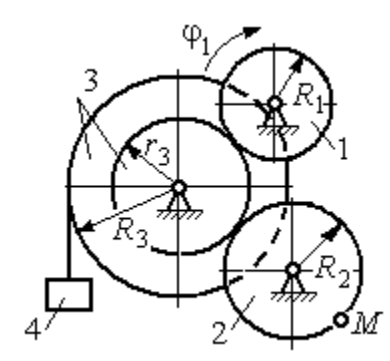
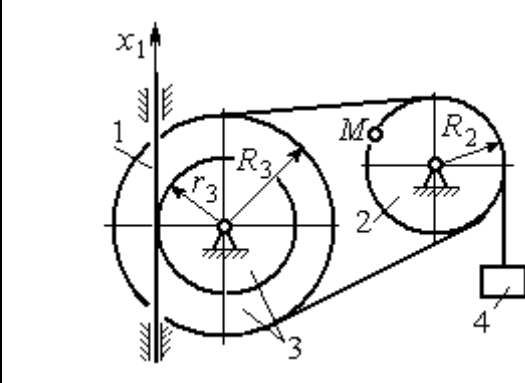
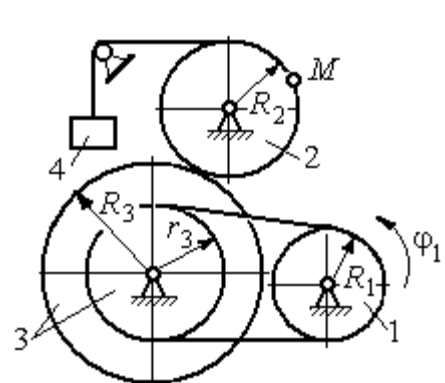
Номер варианта задания	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
P , кН	8	10	10	15	14	10	16	9	10	12
F , кН	6	12	16	8	12	14	10	15	8	10
Q , кН	—	14	—	10	10	12	14	—	12	14
M , кН·м	10	—	12	12	12	8	10	10	10	—
α , град	30	60	60	60	30	30	30	60	60	30
a , м	0,8	1,3	0,9	0,5	1,3	1,2	1,6	0,6	0,9	1,2
b , м	0,6	1,1	0,6	0,4	0,9	0,6	0,8	1,2	0,3	0,8
c , м	0,4	0,8	0,5	0,2	1,5	0,9	1,2	0,4	0,6	0,6
d , м	0,2	0,4	0,4	0,1	0,5	0,4	0,6	0,2	0,2	0,8

Номер варианта задания	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
P , кН	10	12	5	8	10	14	18	12	14	10
F , кН	12	8	15	10	12	8	10	15	9	8
Q , кН	—	10	—	12	14	10	16	—	12	6
M , кН·м	12	—	16	14	8	10	8	12	10	—
α , град	90	30	60	30	45	30	30	60	60	30
a , м	0,6	0,8	1,1	1,2	1,5	0,8	1,0	0,8	1,2	0,9
b , м	0,8	0,6	0,9	1,0	0,9	0,6	0,8	1,4	0,6	0,4
c , м	0,4	1,2	0,8	0,6	1,5	0,9	1,1	0,5	0,8	0,6
d , м	0,4	1,5	0,5	0,2	0,4	0,3	0,3	0,4	0,6	0,5

Задание К1. Определение скоростей и ускорений точек твердого тела при поступательном и вращательном движениях

По заданному движению одного из звеньев механизма $x_1 = x_1(t)$ (варианты 1, 3, 5, 7, 9) или $\varphi_1 = \varphi_1(t)$ (варианты 2, 4, 6, 8, 10) найти в момент времени t_1 скорость, касательное, нормальное и полное ускорения точки M звена механизма, совершающего враща-

тельное движение, а также скорость и ускорение звена 4, совершающего поступательное движение.

Варианты № 1, 11, 21	Варианты № 2, 12, 22	Варианты № 3, 13, 23
		
Варианты № 4, 14, 24	Варианты № 5, 15, 25	Варианты № 6, 16, 26
		
Варианты № 7, 17, 27	Варианты № 8, 18, 28	
		

Варианты № 9, 19, 29	Варианты № 10, 20, 30

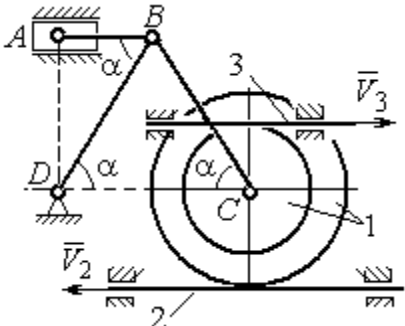
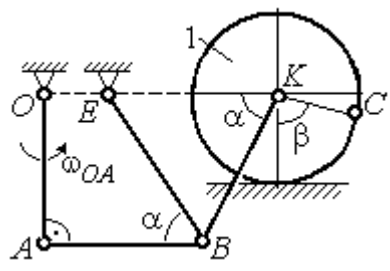
Исходные данные вариантов задания К1. Определение скоростей и ускорений точек при поступательном и вращательном движениях твёрдого тела

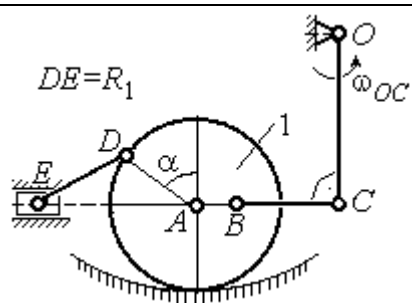
Номер варианта задания	R_1 , см	R_2 , см	R_3 , см	r_3 , см	$x_1(t)$, см $\varphi_1(t)$, рад	t_1 , с
1	—	40	45	35	$x_1(t) = (3t - 1)^2$	2
2	10	20	38	18	$\varphi_1(t) = t^2 + 6\cos(\pi t/6)$	3
3	—	30	42	18	$x_1(t) = 5t^2 - 2\cos(\pi t/2)$	1
4	15	30	45	20	$\varphi_1(t) = 5t^2 + \cos(\pi t/2)$	2
5	—	30	40	20	$x_1(t) = 6t - \cos(\pi t/3)$	3
6	10	20	30	10	$\varphi_1(t) = t^3 - \cos(\pi t/2)$	1
7	—	30	40	30	$x_1(t) = 2\sin(\pi t/2) + \cos(\pi t/2)$	2
8	8	10	30	25	$\varphi_1(t) = 5t + \cos(\pi t/2)$	2
9	—	18	30	18	$x_1(t) = 5t + \cos(\pi t/3)$	3
10	15	30	50	20	$\varphi_1(t) = 2t^2 + \sin(\pi t/4)$	2
11	—	30	40	25	$x_1(t) = (t^2 - 3t)$	2
12	12	20	40	28	$\varphi_1(t) = 3t^2 + 6\sin(\pi t/6)$	3
13	—	25	60	42	$x_1(t) = 2t^2 + \cos(\pi t/2)$	1
14	10	30	45	30	$\varphi_1(t) = 3t^2 + 2\cos(\pi t/2)$	2
15	—	20	30	20	$x_1(t) = 3t^2 - \cos(\pi t/3)$	3
16	12	18	40	20	$\varphi_1(t) = 2t^3 + \cos(\pi t/2)$	1
17	—	20	35	15	$x_1(t) = 2\sin(\pi t/2) - \cos(\pi t/2)$	2
18	15	18	40	25	$\varphi_1(t) = 5t + \cos(\pi t/2)$	1

Номер варианта задания	$R_1, \text{см}$	$R_2, \text{см}$	$R_3, \text{см}$	$r_3, \text{см}$	$x_1(t), \text{см}$ $\varphi_1(t), \text{рад}$	$t_1, \text{с}$
19	—	22	50	18	$x_1(t) = t^2 + \cos(\pi t/3)$	3
20	10	20	45	10	$\varphi_1(t) = 2t^2 + \sin(\pi t/4)$	4
21	—	20	40	20	$x_1(t) = t + (3t - 4)^2$	2
22	8	18	42	18	$\varphi_1(t) = 2t^2 + 12\cos(\pi t/6)$	3
23	—	45	60	40	$x_1(t) = 4t^2 + \sin(\pi t/2)$	1
24	5	15	30	20	$\varphi_1(t) = 2t^2 + 4\cos(\pi t/2)$	2
25	—	15	35	25	$x_1(t) = 2t^2 + \cos(\pi t/3)$	3
26	18	20	35	20	$\varphi_1(t) = 2t^3 + \sin(\pi t/2)$	1
27	—	15	35	15	$x_1(t) = 2\sin(\pi t/2) - \cos(\pi t/2)$	1
28	10	12	40	25	$\varphi_1(t) = 2t^2 + \cos(\pi t/2)$	1
29	—	35	50	10	$x_1(t) = t^3 - \cos(\pi t/2)$	1
30	10	20	40	10	$\varphi_1(t) = 2t^2 + \cos(\pi t/4)$	4

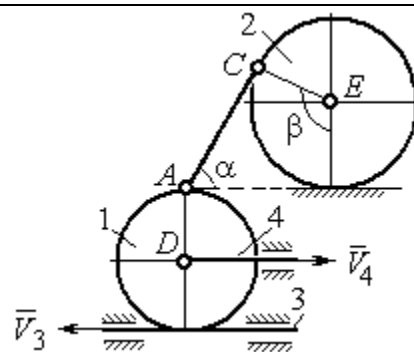
Задание К2. Определение скоростей точек твёрдого тела при плоскопараллельном движении

Для заданного положения плоского механизма определить скорости точек и угловые скорости звеньев механизма.

Варианты № 1, 11, 21							Варианты № 2, 12, 22						
 Найти: $V_A, V_B, V_C, \omega_{AB}, \omega_{BC}, \omega_1, \omega_{BD}$							 Найти: $V_A, V_B, V_K, \omega_1, \omega_{AB}, \omega_{OA}, \omega_{BE}, \omega_{BK}$						
Номер варианта задания	$R_1, \text{см}$	$r_1, \text{см}$	$AD, \text{см}$	$\alpha, \text{град}$	$V_2, \text{см/с}$	$V_3, \text{см/с}$	Номер варианта задания	$R_1, \text{см}$	$OA, \text{см}$	$OE, \text{см}$	$\alpha, \text{град}$	$\beta, \text{град}$	$V_C, \text{см/с}$
1	10	5	20	30	8	10	2	3	5	4	30	60	10
11	12	8	25	45	10	4	12	4	8	6	45	90	8
21	10	6	15	60	5	5	22	5	12	2	60	120	12
Варианты № 3, 13, 23							Варианты № 4, 14, 24						



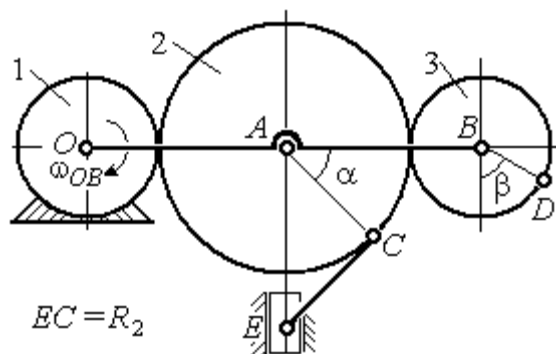
Найти: $V_A, V_B, V_C, V_D, V_E,$
 $\omega_{BC}, \omega_1, \omega_{DE}$



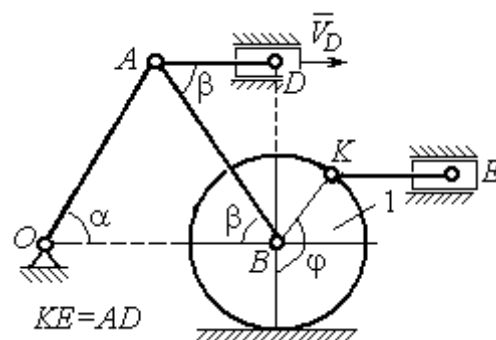
Найти: $V_A, V_C, V_E,$
 $\omega_1, \omega_2, \omega_{AC}$

Номер вари- анта задания	$R_1,$ см	$OC,$ см	$AB,$ см	$BC,$ см	$\alpha,$ град	$\omega_{OC},$ рад/с	Номер вари- анта задания	$R_1,$ см	$R_2,$ см	$\alpha,$ град	$\beta,$ град	$V_3,$ см/с	$V_4,$ см/с
3	12	18	10	35	60	4	4	10	15	30	60	8	4
13	10	15	10	25	90	8	14	6	10	45	90	4	6
23	15	20	5	20	120	6	24	10	12	60	120	3	3

Варианты № 5, 15, 25

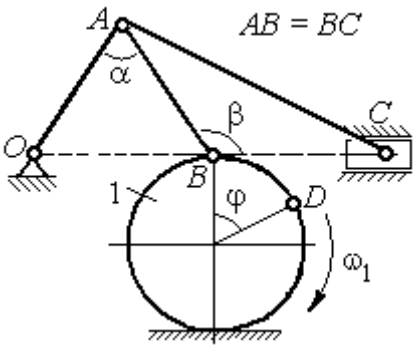
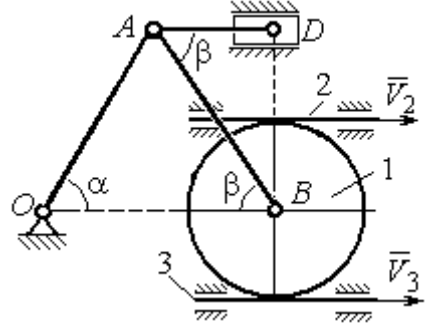
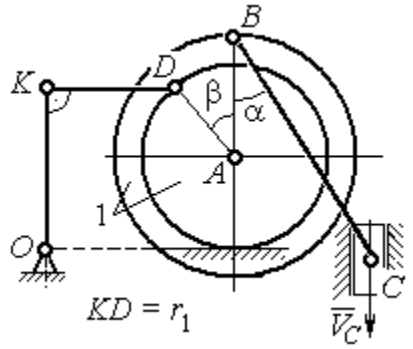
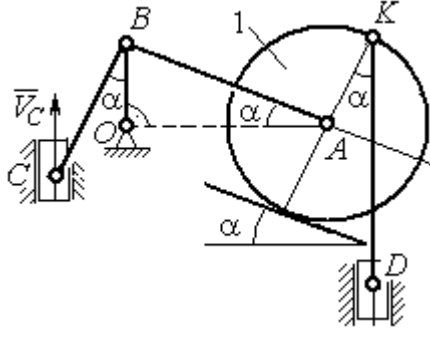


Найти: $V_A, V_B, V_C, V_D, V_E, \omega_2, \omega_3, \omega_{EC}$



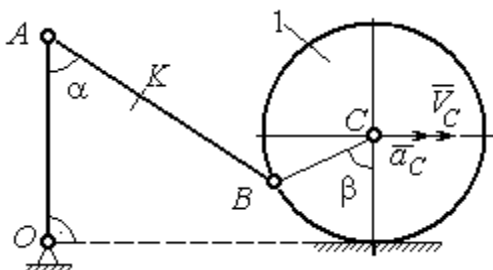
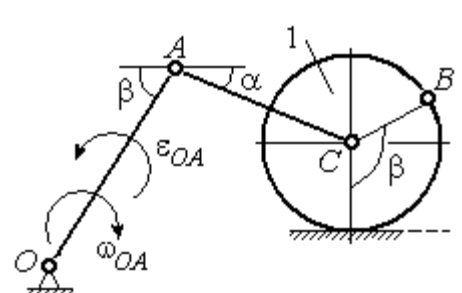
Найти: $V_A, V_B, V_K, V_E,$
 $\omega_1, \omega_{OA}, \omega_{AB}, \omega_{AD}, \omega_{KE}$

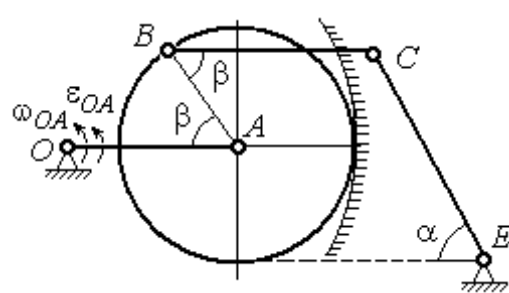
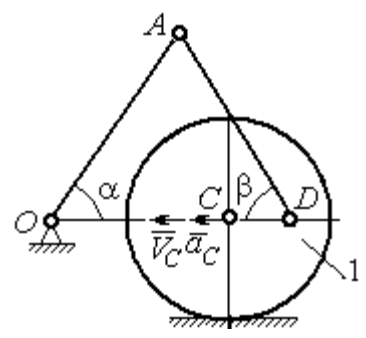
Номер вари- анта задания	$R_1,$ см	$R_2,$ см	$R_3,$ см	$\alpha,$ град	$\beta,$ град	$\omega_{OB},$ рад/с	Номер вари- анта задания	$R_1,$ см	$OA,$ см	$\alpha,$ град	$\beta,$ град	$\phi,$ град	$V_D,$ см/с
5	10	20	12	60	0	6	6	10	20	30	60	60	12
15	6	18	10	90	90	8	16	12	26	30	30	90	8
25	20	25	15	120	180	4	26	15	30	60	60	120	15

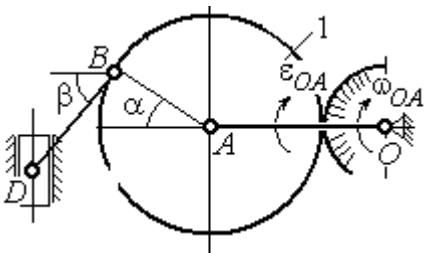
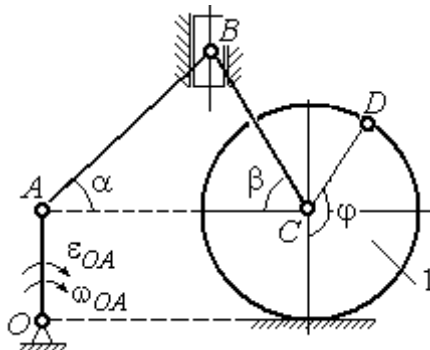
Варианты № 7, 17, 27							Варианты № 8, 18, 29						
 Найти: $V_A, V_B, V_C, \omega_1, \omega_{OA}, \omega_{AB}, \omega_{AC}$							 Найти: $V_A, V_B, V_D, \omega_1, \omega_{OA}, \omega_{AB}, \omega_{AD}$						
Номер вари- анта задания	R_1 , см	AB , см	α , град	β , град	φ , град	V_D , см/с	Номер вари- анта задания	R_1 , см	OA , см	α , град	β , град	V_2 , см/с	V_3 , см/с
7	10	20	30	60	60	12	8	10	20	30	60	12	4
17	12	25	60	120	90	16	18	12	26	30	30	8	2
27	8	16	30	60	120	10	28	15	30	60	60	6	3
Варианты № 9, 19, 29							Варианты № 10, 20, 30						
 Найти: $\omega_{OK}, \omega_{KD}, \omega_{BC}, \omega_1, V_A, V_B, V_K, V_D$							 Найти: $V_A, V_B, V_D, V_K, \omega_{CB}, \omega_1, \omega_{OB}, \omega_{AB}, \omega_{KD}$						
Номер вари- анта задания	R_1 , см	r_1 , см	α , град	β , град	BC , см	V_C , см/с	Номер вари- анта задания	R_1 , см	CB , см	OB , см	KD , см	α , град	V_C , см/с
9	20	12	45	60	60	8	10	10	20	30	60	30	4
19	24	16	60	90	50	4	20	12	26	30	50	45	2
29	16	10	30	120	40	6	30	15	30	60	60	60	3

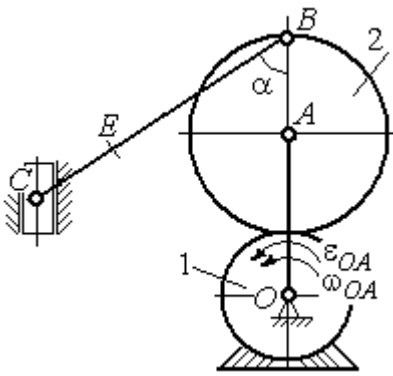
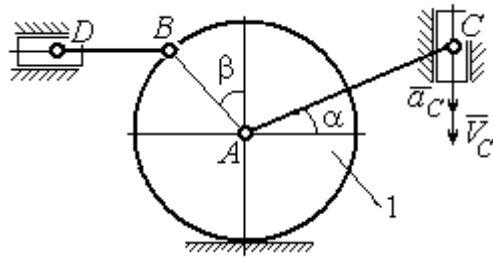
Задание К3. Определение ускорений точек твёрдого тела при плоскопараллельном движении

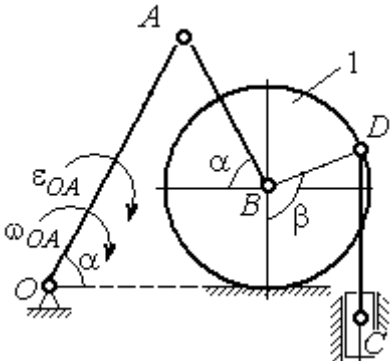
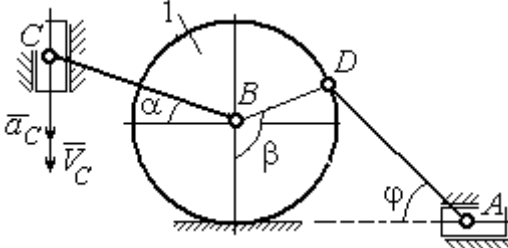
Для заданного положения плоского механизма определить ускорения точек звеньев механизма и угловые ускорения звеньев.

Варианты № 1, 11, 21								Варианты № 2, 12, 22							
 Найти: $a_A, a_K, \varepsilon_{AB}$								 Найти: $a_C, a_B, \varepsilon_{AC}$							
Номер вари- анта задания	AB, см	AK, см	α , град	β , град	R_1 , см	V_C , см/с	a_C , см/с ²	Номер вари- анта задания	R_1 , см	OA, см	AC, см	α , град	β , град	ω_{OA} , рад/с	ε_{OA} , рад/с ²
1	16	10	60	120	10	12	6	2	5	10	12	30	60	2	4
11	20	16	30	60	8	10	8	12	8	24	20	30	120	1	2
21	18	10	60	180	6	8	4	22	6	12	15	60	90	2	3

Варианты № 3, 13, 23								Варианты № 4, 14, 24							
 Найти: $a_C, a_B, \varepsilon_{BC}$								 Найти: $a_A, a_D, \varepsilon_{DA}$							
Номер вари- анта задания	BC, см	AO, см	α , град	β , град	R_1 , см	ω_{OA} , рад/с	ε_{OA} , рад/с ²	Номер вари- анта задания	R_1 , см	OA, см	DC, см	α , град	β , град	V_C , см/с	a_C , см/с ²
3	16	15	60	90	10	2	3	4	10	28	5,78	60	30	10	2
13	18	12	90	60	8	3	2	14	8	24	4,62	30	90	8	3
23	14	12	30	120	10	2	4	24	6	20	6	45	45	12	2

Варианты № 5, 15, 25								Варианты № 6, 16, 26							
 Найти: a_D, a_B, ϵ_{BD}								 Найти: a_B, a_D, ϵ_{BC}							
Номер вари- анта задания	OA , см	BD , см	α , град	β , град	R_1 , см	ω_{OA} , рад/с	ϵ_{OA} , рад/с ²	Номер вари- анта задания	R_1 , см	AB , см	φ , град	α , град	β , град	ω_{OA} , рад/с	ϵ_{OA} , рад/с ²
5	16	10	60	30	10	4	3	6	6	18	60	30	30	2	3
15	18	8	90	45	12	2	4	16	8	20	90	60	30	2	4
25	14	12	30	60	8	3	2	26	5	16	120	30	60	3	4

Варианты № 7, 17, 27								Варианты № 8, 18, 28							
 Найти: a_E, a_C, ϵ_{BC}								 Найти: a_D, a_B, ϵ_{BD}							
Номер вари- анта задания	BC , см	BE , см	α , град	R_1 , см	R_2 , см	ω_{OA} , рад/с	ϵ_{OA} , рад/с ²	Номер вари- анта задания	R_1 , см	BD , см	AC , см	α , град	β , град	V_C , см/с	a_C , см/с ²
7	22	10	60	2	10	2	3	8	4	5	12	60	60	12	5
17	28	15	30	3	6	3	4	18	6	10	16	45	90	10	8
27	20	8	45	4	8	2	2	28	8	8	16	30	120	8	6

Варианты № 9, 19, 29								Варианты № 10, 20, 30							
 Найти: $a_C, a_B, \varepsilon_{AB}$								 Найти: $a_A, a_B, \varepsilon_{CB}$							
Номер вари- анта задания	OA , см	DC , см	α , град	β , град	R_1 , см	ω_{OA} , рад/с	ε_{OA} , рад/с ²	Номер вари- анта задания	R_1 , см	BC , см	φ , град	α , град	β , град	V_C , см/с	a_C , см/с ²
9	18	10	30	120	4	2	3	10	6	14	60	30	120	15	3
19	20	12	60	60	6	3	4	20	5	18	45	60	90	10	5
29	18	8	60	90	4	2	3	30	4	16	30	45	60	12	4

Задание К4. Определение скорости и ускорения точки при сложном движении

Задание включает две задачи с вращательным и поступательным видами переносного движения точки.

Задача 1. Вращение тела относительно неподвижной оси задается законом изменения угла поворота: $\varphi_e = \varphi_e(t)$ или законом изменения его угловой скорости: $\omega_e = \omega_e(t)$. Движение точки относительно тела отсчитывается от её начального положения в точке C и задается законом изменения длины дуги окружности или отрезка прямой линии: $CM = S_r = S_r(t)$.

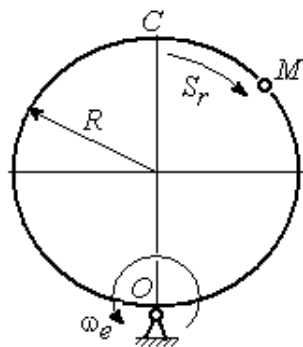
Определить абсолютные скорость и ускорение точки в заданный момент времени t_1 .

Задача 2. Поступательное движение тела, несущего точку, задается законом изменения координаты $x_e = x_e(t)$. Движение точки относительно тела отсчитывается от её начального положения в точке C и задается законом изменения длины дуги окружности или отрезка прямой линии: $CM = y_r = y_r(t)$.

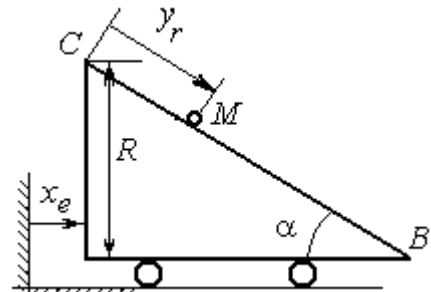
Определить абсолютные скорость и ускорение точки в момент времени t_2 , который либо задаётся в исходных данных задачи, либо на схеме описаны условия, из которых он находится.

Варианты № 1, 11, 21

Задача 1



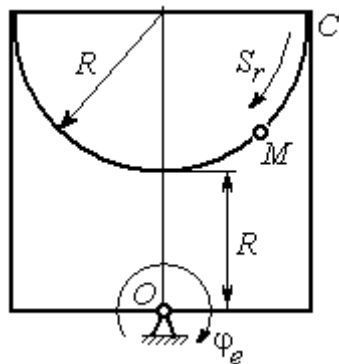
Задача 2



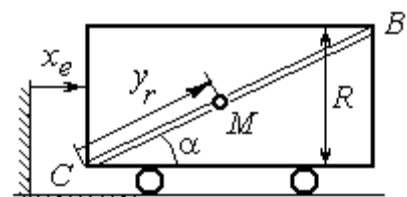
В момент $t = t_2$ точка M прошла половину пути CB

Варианты № 2, 12, 22

Задача 1



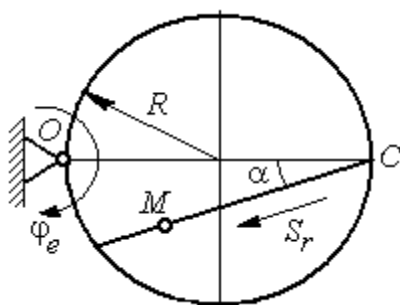
Задача 2



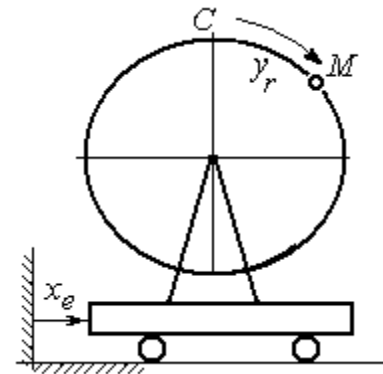
В момент $t = t_2$ точка M прошла $2/3$ пути CB

Варианты № 3, 13, 23

Задача 1

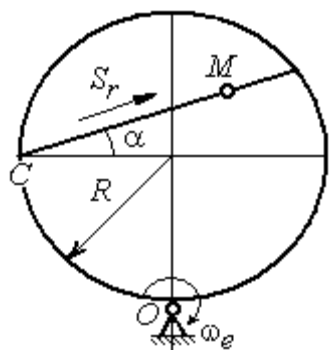


Задача 2

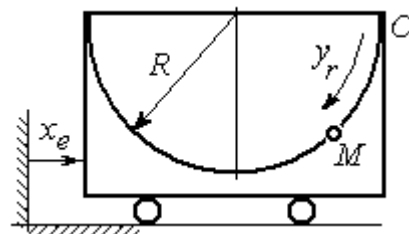


Варианты № 4, 14, 24

Задача 1

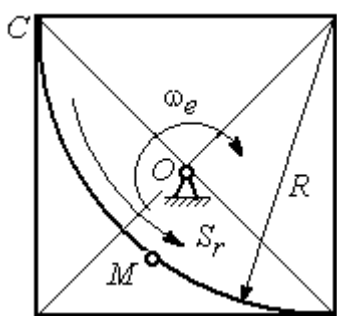


Задача 2

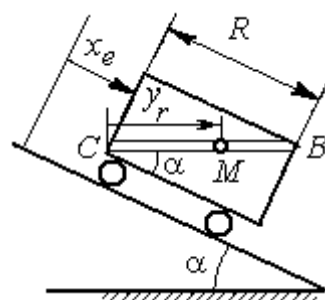


Варианты № 5, 15, 25

Задача 1



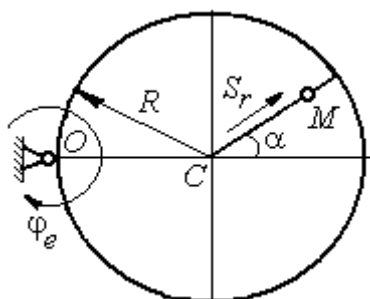
Задача 2



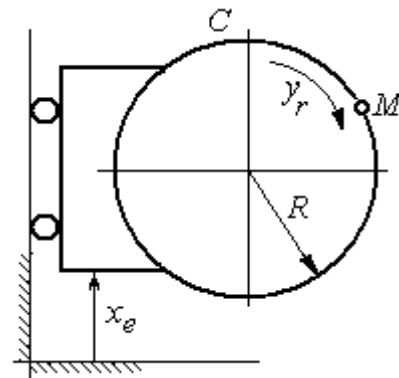
В момент $t = t_2$ точка M прошла путь CB

Варианты № 6, 16, 26

Задача 1

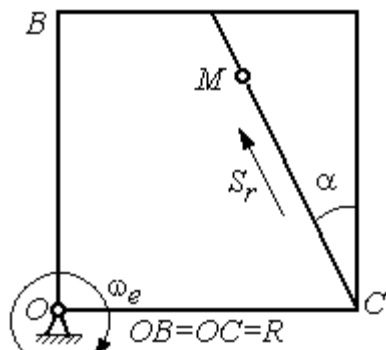


Задача 2

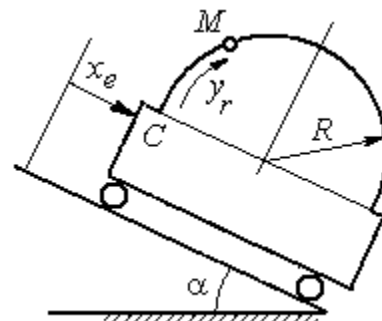


Варианты № 7, 17, 27

Задача 1

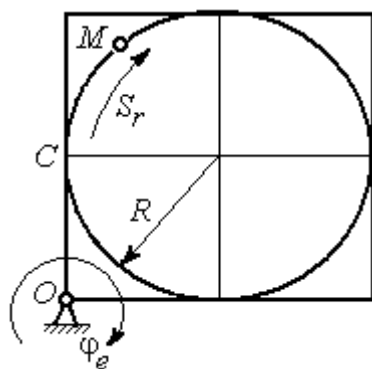


Задача 2

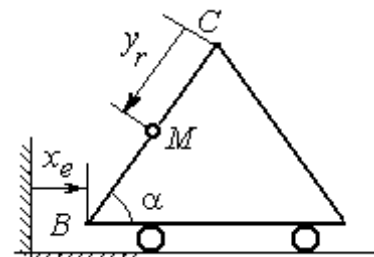


Варианты № 8, 18, 28

Задача 1



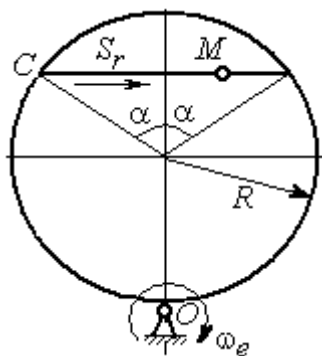
Задача 2



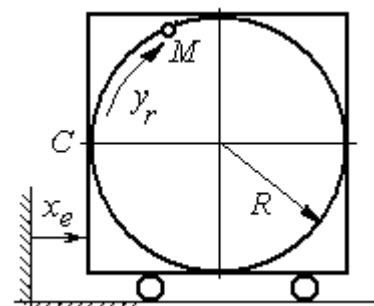
В момент $t = t_2$ точка M прошла половину пути $CB = R$

Варианты № 9, 19, 29

Задача 1

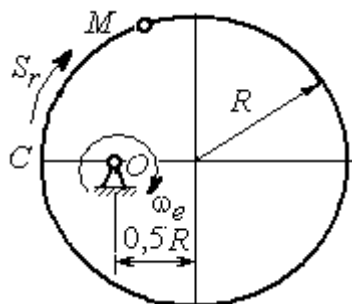


Задача 2

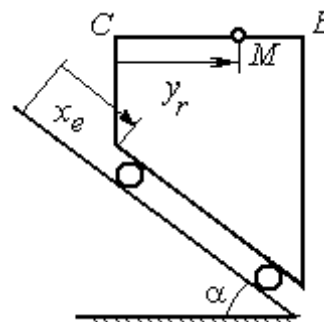


Варианты № 10, 20, 30

Задача 1



Задача 2



В момент $t = t_2$ точка M прошла половину пути $CB = R$

Исходные данные для заданий по сложному движению точки

Номер варианта задания	Номер задачи	R , см	α , град	$\vec{CM} = S_r(t)$, см $\vec{CM} = y_r(t)$, см	$\varphi_e(t)$, рад; $\omega_e(t)$, рад/с $x_e(t)$, см	t_1 , с t_2 , с
1	1	3	—	$S_r = 2\pi \sin(\pi t/6)$	$\omega_e = 4t^2$	1
	2	4	30	$y_r = 4t^2$	$x_e = 2\cos(\pi t/6)$	—
2	1	2	—	$S_r = 4\pi \sin^2(\pi t/6)$	$\varphi_e = 6\cos(\pi t/3)$	1
	2	3	60	$y_r = t^2 + t$	$x_e = 1 + \cos(\pi t)$	—
3	1	4	30	$S_r = 2\sqrt{3}[t + \sin(\pi t/2)]$	$\varphi_e = 4t - t^2$	1
	2	6	—	$y_r = \pi[2t + \sin \pi t]$	$x_e = 5t - t^2$	1
4	1	4	60	$S_r = 2(t^3 + t)$	$\omega_e = 6\cos(\pi t/6)$	1
	2	3	—	$y_r = \pi[2t + \cos(\pi t/2)]$	$x_e = t^3 - 4t$	1
5	1	6	—	$S_r = 4\pi \sin^2(\pi t/6)$	$\omega_e = 6\cos(\pi t/3)$	1
	2	2	30	$y_r = t^2 + 2t$	$x_e = t^2 - 4t$	—
6	1	6	60	$S_r = t + 10\sin(\pi t/6)$	$\varphi_e = 2t^2 - 5t$	1
	2	3	—	$y_r = 4\pi \sin(\pi t/6)$	$x_e = [1 - \cos(\pi t/4)]$	1
7	1	8	30	$S_r = 2(t^3 + 3t)$	$\omega_e = 6\cos(\pi t/6)$	1
	2	4	30	$y_r = 2\pi t^2$	$x_e = t^3 - 5t$	1
8	1	8	—	$S_r = 2\pi[t^2 + \sin \pi t]$	$\varphi_e = t^2 - 5t$	2
	2	6	30	$y_r = t(t + 1)$	$x_e = \cos \pi t$	—

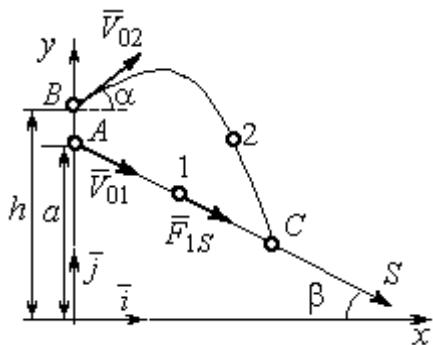
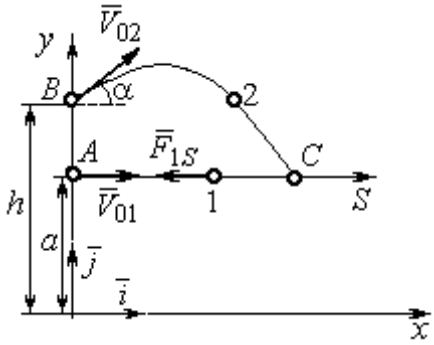
Номер варианта задания	Номер задачи	R , см	α , град	$\tilde{CM} = S_r(t)$, см $\tilde{CM} = y_r(t)$, см	$\varphi_e(t)$, рад; $\omega_e(t)$, рад/с $x_e(t)$, см	t_1 , с t_2 , с
9	1	8	30	$S_r = 2t^2$	$\omega_e = \cos(\pi t/8)$	2
	2	3	—	$y_r = 4\pi \sin^2(\pi t/4)$	$x_e = (3 - 2t)^2$	1
10	1	6	—	$S_r = \pi(2t^3 + \sin \pi t)$	$\omega_e = 5t - 2t^3$	1
	2	4	30	$y_r = t^2 + 2t$	$x_e = 1 + \cos \pi t$	—
11	1	6	—	$S_r = 8\pi \sin(\pi t/12)$	$\omega_e = 2 + \cos(\pi t/4)$	2
	2	6	60	$y_r = 4\sin \pi t$	$x_e = t^2 - 2t$	—
12	1	18	—	$S_r = \pi(2t^2 + 2t)$	$\varphi_e(t) = 3t - t^2$	2
	2	6	30	$y_r = 2t^2 + t$	$x_e = 1 + \cos(\pi t)$	—
13	1	10	60	$S_r = t^3 + t$	$\varphi_e = 6\cos(\pi t/6)$	2
	2	6	—	$y_r = 6\pi \cos(\pi t/3)$	$x_e = t(t + 1)$	1
14	1	4	30	$S_r = 8\sqrt{3}\sin(\pi t/12)$	$\omega_e = (3 - 2t)^2$	2
	2	3	—	$y_r = 2\pi \sin(\pi t/6)$	$x_e = 2t^2 - 5t$	1
15	1	8	—	$S_r = 4\pi \sin^2(\pi t/4)$	$\omega_e = 2 + \cos(\pi t/4)$	1
	2	5	60	$y_r = 5t + t^2$	$x_e = \cos(\pi t/6)$	—
16	1	12	90	$S_r = 3[t + \sin(\pi t/2)]$	$\varphi_e = 2t - 3t^2$	1
	2	15	—	$y_r = \pi(4t + t^2)$	$x_e = 6\sin(\pi t/3)$	1
17	1	6	45	$S_r = 3\sqrt{2}[t^2 + 2\sin \pi t]$	$\omega_e(t) = 4t^2 - 6$	1
	2	6	60	$y_r = 8\pi \sin(\pi t/12)$	$x_e = \sqrt{2}\sin(\pi t/8)$	2
18	1	8	—	$S_r = 4\pi\sqrt{2}\sin(\pi t/8)$	$\varphi_e = 18t - 4t^2$	2
	2	8	60	$y_r = 3t + 2t^2$	$x_e = \sin \pi t$	—
19	1	8	60	$S_r = 2\sqrt{3}[t + \sin(\pi t/2)]$	$\omega_e = 5t - t^2$	1
	2	9	—	$y_r = 6\pi \cos(\pi t/3)$	$x_e = \cos(\pi t/6)$	1
20	1	4	—	$S_r = 4\pi \sin(\pi t/6)$	$\omega_e = 3t - 5$	1
	2	6	60	$y_r = 3t + 2t^2$	$x_e = \pi \sin \pi t$	—
21	1	3	—	$S_r = 4\pi\sqrt{2}\sin(\pi t/8)$	$\omega_e = 6t - 14$	2
	2	8	45	$y_r = (t^2 + 3t)$	$x_e = t + 2\sin \pi t$	—
22	1	4	—	$S_r = 2\pi(t^2 + 2t)$	$\varphi_e = 6\cos(\pi t/6)$	1
	2	9	60	$y_r = 8\sin \pi t$	$x_e = 5t - t^2$	—
	1	6	45	$S_r = 12\sin(\pi t/8)$	$\varphi_e = t^2 + \cos(\pi t/4)$	2

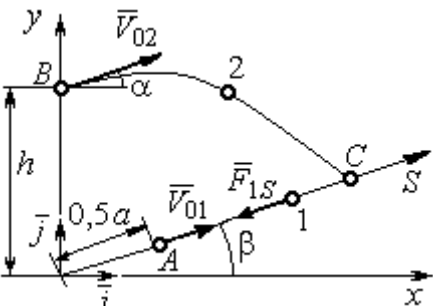
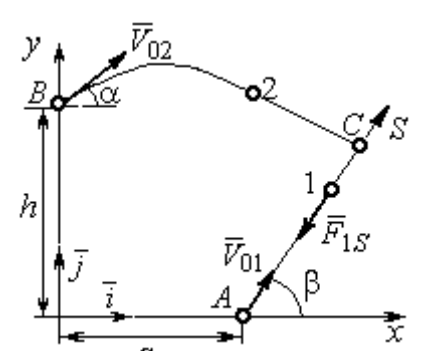
Номер варианта задания	Номер задачи	R , см	α , град	$\ddot{CM} = S_r(t)$, см $\ddot{CM} = y_r(t)$, см	$\varphi_e(t)$, рад; $\omega_e(t)$, рад/с $x_e(t)$, см	t_1 , с t_2 , с
23	2	6	—	$y_r = 6\pi[t + \sin(\pi t/6)]$	$x_e = 5t - t^2$	1
24	1	6	45	$S_r = 12\sin(\pi t/8)$	$\omega_e = t + 4\cos(\pi t/4)$	2
	2	6	—	$y_r = \pi(t^2 + 2t)$	$x_e = 6\cos(\pi t/6)$	1
25	1	6	—	$S_r = 2\pi t^2$	$\omega_e = 3\sin(\pi t/3)$	1
	2	4	45	$y_r = 2t(t + 3t)$	$x_e = 2(t^3 - 3t)$	—
26	1	6	120	$S_r = t^2 + t$	$\varphi_e = 12\cos(\pi t/12)$	2
	2	9	—	$y_r = \pi\sqrt{3}\sin(\pi t/3)$	$x_e = 2(t^2 - 3t)$	1
27	1	10	60	$S_r = \sqrt{3}(t^2 + t)$	$\omega_e = 6\cos(\pi t/6)$	2
	2	9	30	$y_r = \sqrt{3}\pi\sin(\pi t/3)$	$x_e = t + 4\cos(\pi t/4)$	1
28	1	2	—	$S_r = 6\pi\sin(\pi t/6)$	$\varphi_e = 2t + \cos(\pi t/2)$	1
	2	6		$y_r = 2t + 3t^2$	$x_e = t + \sin\pi t$	—
29	1	8	30	$S_r = (t^2 + 2t)$	$\omega_e = 6\sin(\pi t/12)$	2
	2	3	—	$y_r = 2\pi\sqrt{3}\sin(\pi t/3)$	$x_e = 5t - t^2$	1
30	1	2	—	$\pi(t^2 + 2t)$	$\omega_e(t) = 6\cos(\pi t/6)$	1
	2	3	60	$y_r = t + t^2$	$x_e = t + \sin\pi t$	—

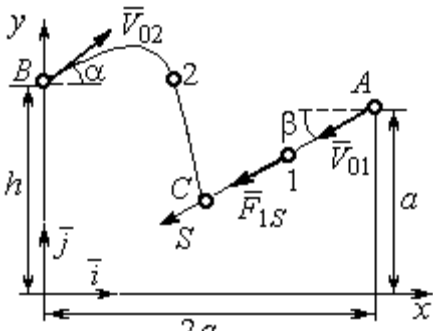
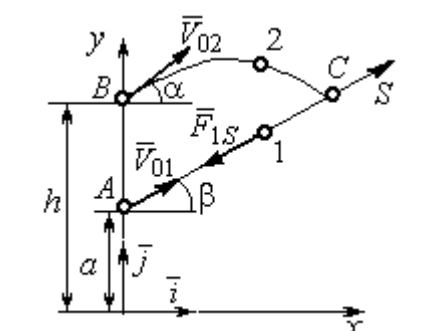
Задание Д1. Интегрирование дифференциальных уравнений движения точки

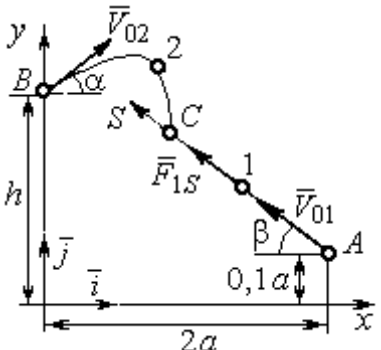
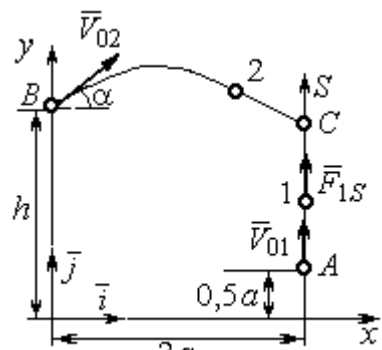
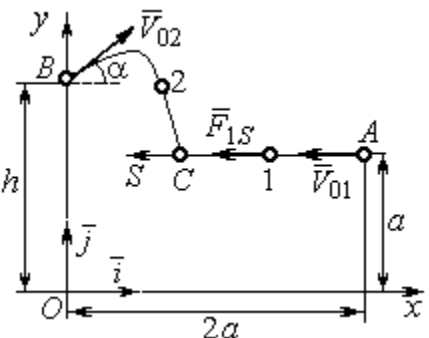
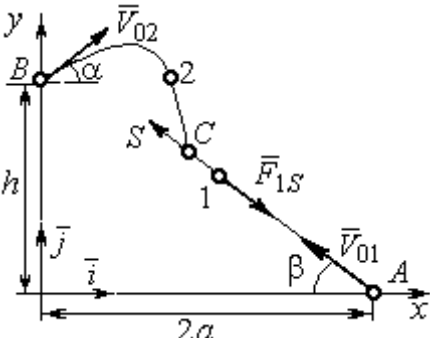
Две материальные точки движутся в вертикальной плоскости xOy . Точка 1 массой m_1 , получив в начальном положении A скорость V_{01} , движется вдоль гладкой оси AS , наклоненной под углом β к горизонту. Во время движения на точку 1 действуют сила тяжести и постоянная сила $\vec{F}_1$, направленная вдоль оси AS . Направление вектора проекции силы на ось $\vec{F}_{1S}$ показано на схеме.

Одновременно с точкой 1 начинает движение точка 2 массой m_2 из положения B на оси y . На точку 2 действуют сила тяжести и постоянная сила $\vec{F}_2$. Направление вектора силы $\vec{F}_2$ определяется его разложением по единичным векторам $\vec{i}$, $\vec{j}$ координатных осей x , y . Определить величину и направление (угол α) начальной скорости V_{02} точки 2, чтобы в момент времени t_1 точки 1 и 2 встретились на оси AS в точке C . Момент времени t_1 задаётся в условиях задачи или определяется по дополнительным условиям встречи.

Варианты № 1, 11, 21	Варианты № 2, 12, 22
 Встреча в точке C в момент, когда скорость точки 1 увеличилась в 1,5 раза относительно начальной	 Встреча в точке C в момент, когда точка 1 максимально удалилась от места старта

Варианты № 3, 13, 23	Варианты № 4, 14, 24
 Встреча в точке C в момент, когда скорость точки 1 уменьшилась в 2 раза относительно начальной	 Встреча в точке C в момент времени $t_1 = 0,5$ с

Варианты № 5, 15, 25	Варианты № 6, 16, 26
 Встреча в точке C в момент, когда скорость точки 1 увеличилась в 1,5 раза относительно начальной	 Встреча в точке C, когда точка 1 максимально удалилась от места старта

Варианты № 7, 17, 27	Варианты № 8, 18, 28
 Встреча в точке C в момент времени $t_1 = 0,4$ с	 Встреча в точке C в момент максимального подъёма точки 1
Варианты № 9, 19, 29	Варианты № 10, 20, 30
 Встреча в точке C в момент времени $t_1 = 0,6$ с	 Встреча в точке C в момент, когда точка 1 достигла максимальной высоты подъёма

Исходные данные задания Д1. Интегрирование уравнений движения точки

Номер варианта задания	m_1 , кг	F_{1S} , Н	V_{01} , м/с	β , град	m_2 , кг	$\vec{F}_2$, Н	a , м	h , м
1	1	3	3	30	2	$7\vec{i}$	2	4
2	3	6	2	0	2	$4\vec{i} + 12\vec{j}$	1,5	1
3	2	5	4	35	1,5	$10\vec{i} + 4\vec{j}$	2	2,5
4	1	10	2	60	2	$4\vec{i} + 8\vec{j}$	2,2	2
5	1	3	3	30	2	$5\vec{i}$	3	4,5
6	0,8	6	6	50	3	$3\vec{i} + 12\vec{j}$	1,5	4
7	2	5	4,5	40	1	$10\vec{i} + 2\vec{j}$	3	2,5
8	1	2	3,5	90	2	$6\vec{i} + 8\vec{j}$	1,2	2
9	2	4	4	0	1	$3\vec{i} + 2\vec{j}$	2	2,5

Номер варианта задания	m_1 , кг	F_{1S} , Н	V_{01} , м/с	β , град	m_2 , кг	$\vec{F}_2$, Н	a , м	h , м
10	1	3	3	55	1,5	$4\vec{i}$	1	1,5
11	0,5	2	3	60	2	$3\vec{i} + 8\vec{j}$	1,5	2,5
12	0,2	3	4	0	1	$5\vec{i} - 2\vec{j}$	1	2,5
13	1	2	6	50	1,5	$6\vec{i} - 4\vec{j}$	0,8	2
14	0,5	6	4	35	1	$3\vec{i} - 2\vec{j}$	2,5	2
15	0,2	3	3	50	2	$2\vec{i} - 2\vec{j}$	3	4
16	2	4	6	40	2	$3\vec{i} + 12\vec{j}$	1	1,5
17	1	6	5	60	1,5	$5\vec{i} + 4\vec{j}$	3	2,5
18	1	2	2	90	2	$4\vec{i} + 4\vec{j}$	2	2
19	1	3	2	2	2	$2\vec{i} + 10\vec{j}$	1	1,5
20	5	4	2	30	1	$3\vec{i} - 2\vec{j}$	1,5	1,5
21	0,2	4	4	45	1	$6\vec{i} - 2\vec{j}$	1	3
22	0,4	3	2	0	2	$4\vec{i} + 6\vec{j}$	1,5	2,5
23	1	3	8	60	2	$4\vec{i} + 2\vec{j}$	1,2	1,5
24	0,5	8	3	30	2	$6\vec{i} + 7\vec{j}$	2	1,5
25	2	4	4	60	1	$2\vec{i} - 2\vec{j}$	3,5	4
26	1	3	5	50	2	$4\vec{i} + 6\vec{j}$	0,5	1,5
27	1,5	3	6	30	2	$4\vec{i} + 4\vec{j}$	2	2,5
28	2	5	3	90	2	$6\vec{i} + 7\vec{j}$	2	1,5
29	2	4	4	0	1	$5\vec{i} - 2\vec{j}$	1,5	2
30	1	3	2,5	70	2	$4\vec{i} + 6\vec{j}$	1	1

Задание Д2. Исследование колебаний точки

Задание Д2 на исследование колебаний точки включает две задачи.

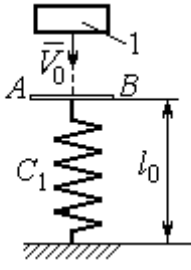
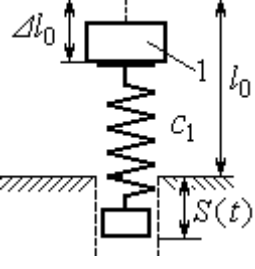
Задача 1. Исследование гармонических колебаний точки.

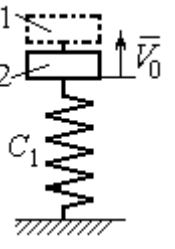
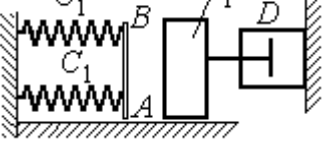
Найти уравнение движения груза массой m_1 (или одновременно двух грузов массой m_1 и m_2) на пружине жесткостью c_1 (или на двух пружинах жесткостью c_1 и c_2). Расположение грузов на пружине и описание условий, при которых начались колебания, приведено на схемах. Определить амплитуду и частоту колебаний.

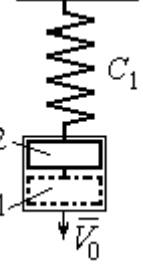
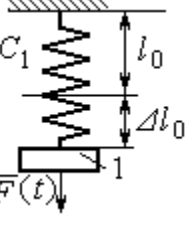
Задача 2. Исследование вынужденных колебаний точки.

Груз движется на пружинах, расположенных вертикально или горизонтально. При движении груза по горизонтальной поверхности трение не учитывается. Жёсткость пружин c_1 и c_2 . Направление возмущающего усилия $F = F(t)$, приложенного к грузу, или возмущающего движения точки крепления пружин $S = S(t)$, а также описание условий начала колебаний приведено на схемах. В задачах, где на схемах присутствует амортизатор, создающий сопротивление движению груза, сила сопротивления пропорциональна скорости движения груза и находится по формуле: $\vec{R} = -\mu\vec{V}$ Н, где μ – коэффициент

сопротивления; V – скорость груза. Определить уравнение колебаний груза, амплитуды собственных и вынужденных колебаний.

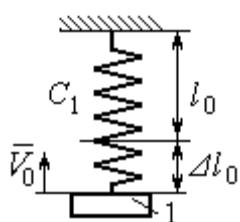
Варианты № 1, 11, 21	
Задача 1  Невесомая пластина AB укреплена на нерастянутой пружине. Груз 1, получив начальную скорость V_0, падает вертикально вниз. Через 1 с после начала падения груз достигает пластины и продолжает движение вместе с ней	Задача 2  К верхнему концу пружины, сжатой на величину Δl_0, прикрепляют груз 1 и отпускают без начальной скорости. Одновременно нижний конец пружины начинает двигаться по закону $S = S(t)$

Варианты № 2, 12, 22	
Задача 1  В положении статического равновесия двух грузов (1 и 2), установленных на пружине, груз 1 убрали, а грузу 2 сообщили скорость V_0, направленную вверх	Задача 2  Груз 1 движется по гладкой горизонтальной поверхности с начальной скоростью V_0. Через 1 с груз упирается в площадку AB, укрепленную на недеформированных пружинах, соединённых параллельно, и продолжает движение вместе с ней. Во время движения (до упора в площадку AB и вместе с ней) груз испытывает сопротивление, создаваемое демпфером D

Варианты № 3, 13, 23	
Задача 1  В положении статического равновесия груза 2, укрепленного на пружине, к нему присоединили груз 1 и оба груза толкнули вниз со скоростью V_0	Задача 2  Недеформированную пружину оттянули вниз на расстояние Δl_0, подцепили груз 1 и отпустили без начальной скорости. Одновременно на груз стала действовать возмущающая сила $\vec{F}(t)$

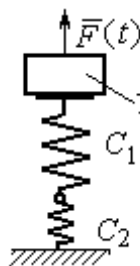
Варианты № 4, 14, 24

Задача 1



К недеформированной пружине подцепили груз 1, оттянули его вниз на расстояние Δl_0 и сообщили скорость V_0 , направленную вверх

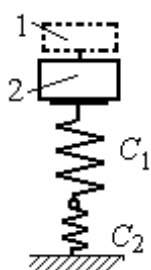
Задача 2



Грузу 1, укрепленному на двух последовательно соединенных пружинах в положении статического равновесия, сообщили начальную скорость V_0 , направленную вниз. Одновременно на груз стала действовать возмущающая сила $\vec{F}(t)$

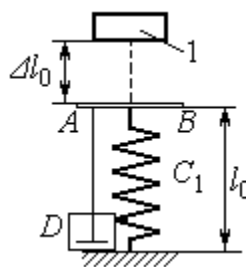
Варианты № 5, 15, 25

Задача 1



В положении статического равновесия грузов 1 и 2, укрепленных на двух вертикальных последовательно соединенных пружинах, убрали груз 1, а груз 2 отпустили без начальной скорости

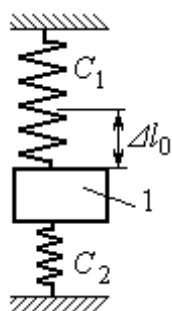
Задача 2



Груз 1 падает с высоты Δl_0 на площадку AB , установленную на недеформированной пружине, и продолжает движение вместе с ней. Демпфер D создает сопротивление движению груза на пружине

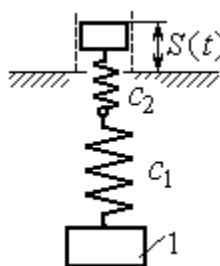
Варианты № 6, 16, 26

Задача 1

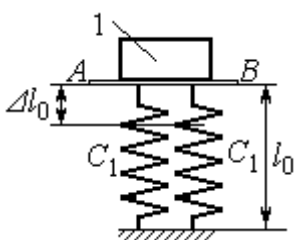
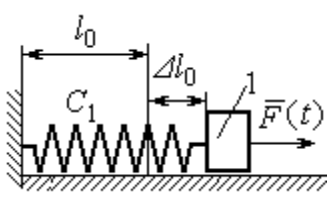


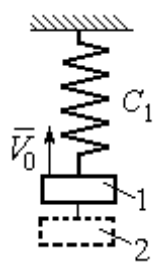
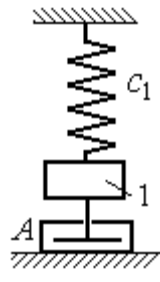
Груз 1 поместили между двумя недеформированными пружинами, затем оттянули вниз на расстояние Δl_0 и отпустили без начальной скорости

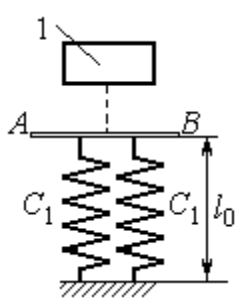
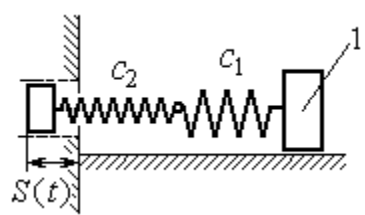
Задача 2



К недеформированным пружинам, соединенным последовательно, подцепили груз 1 и толкнули его вниз со скоростью V_0 . Одновременно верхний конец пружины начинает двигаться по закону $S = S(t)$

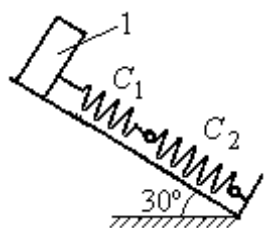
Варианты № 7, 17, 27	
Задача 1  К недеформированным пружинам приложили груз 1, переместили его вниз на величину Δl_0 и сообщили скорость V_0, направленную вниз	Задача 2  К нерастянутой пружине, расположенной на горизонтальной гладкой поверхности, подцепили груз 1, оттянули его на расстояние Δl_0 и отпустили. Одновременно на груз стала действовать горизонтальная возмущающая сила $\vec{F}(t)$

Варианты № 8, 18, 28	
Задача 1  Грузы 1 и 2 находятся на пружине в положении статического равновесия. Груз 2 удаляют, а грузу 1 сообщают скорость V_0, направленную вверх	Задача 2  В положении статического равновесия груза 1 ему сообщили скорость V_0, направленную вниз. Демпфер A создаёт сопротивление движению груза

Варианты № 9, 19, 29	
Задача 1  Груз 1 без начальной скорости падает вниз. Пройдя путь 1 м, груз достигает невесомой пластины AB, укрепленной на недеформированных, параллельно соединённых пружинах, и дальше движется вместе с ней	Задача 2  К двум горизонтальным пружинам, соединённым последовательно, в положении их нерастянутого состояния прицепили груз 1 и сообщили ему горизонтальную скорость V_0, направленную в сторону сжатия пружин. Одновременно левый конец пружинной системы начинает двигаться по закону $S = S(t)$

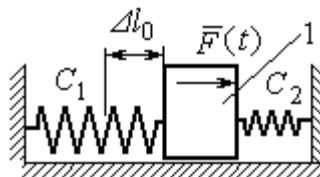
Варианты № 10, 20, 30

Задача 1



В положении статического равновесия груза 1, укрепленного на двух последовательно соединенных пружинах, сообщили скорость V_0 , направленную вниз по наклонной плоскости

Задача 2



Между двумя горизонтальными недеформированными пружинами на гладкую поверхность поместили груз 1, оттянули его влево на расстояние Δl_0 и отпустили без начальной скорости. Одновременно на груз стала действовать возмущающая сила $\vec{F}(t)$

Исходные данные задания Д2. Исследование колебаний точки

Номер варианта задания	Номер задачи	m_1 , кг	m_2 , кг	V_0 , м/с	c_1 , Н/м	c_2 , Н/м	Δl_0 , м	μ , Н·с/м	$F(t)$, Н	$S(t)$, м
1	1	2,5	—	2,0	200	—	—	—	—	—
	2	2,0	—	—	210	—	0,1	—	—	$0,02\sin 12t$
2	1	1,5	2,0	4	250	—	—	—	—	—
	2	2,0	—	4	220	—	—	1,0	—	—
3	1	2,0	1,5	3	250	—	—	—	—	—
	2	1,2	—	—	200	—	0,14	—	$12\sin 5t$	—
4	1	2,0	—	3	180	—	0,1	—	—	—
	2	1,5	—	2	150	120	—	—	$8\sin 12t$	—
5	1	1,0	2,0	—	120	100	—	—	—	—
	2	1,0	—	—	50	—	0,5	18	—	—
6	1	1,2	—	—	120	180	0,12	—	—	—
	2	1,4	—	2,4	120	180	—	—	—	$0,03\sin 14t$
7	1	1,6	—	3,2	140	—	0,15	—	—	—
	2	1,5	—	—	120	—	0,12	—	$12\sin 6t$	—
8	1	1,0	2,0	3,0	150	—	—	—	—	—
	2	2,0	—	3,5	120	—	—	15	—	—
9	1	1,5	—	—	100	—	—	—	—	—
	2	1,4	—	2,0	100	110	—	—	—	$0,015\sin 8t$
10	1	2,5	—	2,5	110	100	—	—	—	—
	2	2,0	—	—	110	52	0,08	—	$5\sin 9t$	—
11	1	2,0	—	4,0	300	—	—	—	—	—

Номер варианта задания	Номер задачи	m_1 , кг	m_2 , кг	V_0 , м/с	c_1 , Н/м	c_2 , Н/м	$\Delta\ell_0$, м	μ , Н·с/м	$F(t)$, Н	$S(t)$, м
	2	1,0	—	—	200	—	0,12	—	—	$0,01\sin 4t$
12	1	1,8	2,4	4	220	—	—	—	—	—
	2	1,0	—	5	240	—	—	0,6	—	—
13	1	1,5	1,5	2	200	—	—	—	—	—
	2	1,8	—	—	180	—	0,08	—	$10\sin 10t$	—
14	1	2,0	—	2	200	—	0,12	—	—	—
	2	2,0	—	2	150	120	—	—	$10\sin 8t$	—
15	1	1,5	2,0	—	120	250	—	—	—	—
	2	1,5	—	—	120	—	0,4	4	—	—
16	1	2,0	—	—	150	75	0,1	—	—	—
	2	2,0	—	2,5	150	75	—	—	—	$0,01\sin 5t$
17	1	1,5	—	2,1	160	—	0,11	—	—	—
	2	1,8	—	—	150	—	0,1	—	$8\sin 12t$	—
18	1	2,0	1,0	2,5	80	—	—	—	—	—
	2	1,5	—	2,5	50	—	—	21	—	—
19	1	1,6	—	—	120	—	—	—	—	—
	2	1,2	—	2,0	85	120	—	—	—	$0,015\sin 7t$
20	1	2,0	—	2,0	90	100	—	—	—	—
	2	2,5	—	—	100	90	0,12	—	$6\sin 10t$	—
21	1	2,0	—	1,6	220	—	—	—	—	—
	2	2,5	—	—	250	—	0,14	—	—	$0,01\sin 10t$
22	1	2,2	1,5	3	180	—	—	—	—	—
	2	1,5	—	4	280	—	—	0,8	—	—
23	1	2,2	1,2	2	220	—	—	—	—	—
	2	1,6	—	—	200	—	0,12	—	$5\sin 7t$	—
24	1	1,6	—	2,4	160	—	0,13	—	—	—
	2	1,0	—	3	150	300	—	—	$6\sin 10t$	—
25	1	0,8	1,2	—	120	80	—	—	—	—
	2	0,8	—	—	180	—	0,4	12	—	—
26	1	1,4	—	—	100	120	0,15	—	—	—
	2	1,8	—	2,2	150	120	—	—	—	$0,015\sin 8t$
27	1	2	—	4,0	150	—	0,12	—	—	—
	2	2	—	—	162	—	0,13	—	$5\sin 9t$	—
28	1	1,5	2,0	2,0	140	—	—	—	—	—

Номер варианта задания	Номер задачи	m_1 , кг	m_2 , кг	V_0 , м/с	c_1 , Н/м	c_2 , Н/м	$\Delta\ell_0$, м	μ , Н·с/м	$F(t)$, Н	$S(t)$, м
	2	1,5	—	3,1	180	—	—	12	—	—
29	1	1,0	—	—	140	—	—	—	—	—
	2	2,0	—	2,4	75	150	—	—	—	$0,08\sin 5t$
30	1	1,6	—	3	75	150	—	—	—	—
	2	1,5	—	3	80	70	0,15	—	$8\sin 10t$	—

**Задание Д3. Исследование движения точки
с применением теоремы об изменении кинетической энергии**

Тонкий стержень с надетым на него шариком массой m расположен в вертикальной плоскости и состоит из дуг окружностей радиусами r и $R = 2r$, соединённых прямолинейным отрезком EK , сопряжённым с дугами окружностей в точках E и K . В этих точках шарик переходит с одного участка стержня на другой, не изменяя величины и направления скорости. Длина отрезка $EK = a$.

В точке A , положение которой на дуге окружности определяется углом α , шарiku сообщают начальную скорость V_0 . По дугам окружностей шарик скользит без трения, а при движении по прямолинейному отрезку EK на него действует постоянная сила трения с коэффициентом трения f . На участках с вертикальным отрезком EK считать, что шарик прижимается к стержню силой, равной половине веса шарика.

Достигнув на дуге окружности точки D , шарик упирается в недеформированную пружину жёсткостью s и, продолжая движение по сопряженной прямой, сжимает её. Положение точки D определяется углом φ .

Определить величину максимального сжатия пружины, если шарик проходит наивысшее положение траектории – точку B со скоростью $V_B = kV_0$. При найденном значении начальной скорости рассчитать давление шарика на стержень в точке C , положение которой на дуге определяется углом β .

Варианты № 1, 11, 21	Варианты № 2, 12, 22	Варианты № 3, 13, 23

Варианты № 4, 14, 24	Варианты № 5, 15, 25	Варианты № 6, 16, 26
Варианты № 7, 17, 27	Варианты № 8, 18, 28	
Варианты № 9, 19, 29	Варианты № 10, 20, 30	

Исходные данные задания Д3. Исследование движения точки с применением теоремы об изменении кинетической энергии

Номер варианта задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
m , кг	0,8	0,5	0,6	0,4	1,0	0,6	0,9	0,5	0,3	0,4	0,8	0,6	0,5	0,3	1,0
α , град	30	45	0	30	30	0	0	45	30	0	60	30	30	45	60
β , град	60	30	60	0	60	30	60	60	30	45	30	60	60	30	30
φ , град	0	60	30	0	0	30	45	0	30	45	30	30	0	30	45
r , м	0,4	0,4	0,5	0,3	0,6	0,5	0,3	0,6	0,4	0,5	0,3	0,5	0,4	0,5	0,8
a , м	0,5	0,6	0,9	1,4	0,8	1,2	0,5	0,5	1,4	0,5	0,8	0,5	0,8	0,6	0,6
f	0,4	0,3	0,4	0,3	0,4	0,3	0,5	0,3	0,4	0,3	0,4	0,5	0,3	0,4	0,3
k	0,3	0,4	0,3	0,4	0,3	0,3	0,4	0,4	0,3	0,4	0,3	0,3	0,4	0,3	0,4
c , Н/м	100	80	90	80	120	100	90	80	60	80	90	60	80	60	110

Номер варианта задания	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
m , кг	0,6	0,5	0,6	0,4	0,8	0,5	0,4	1,0	0,6	0,5	0,4	0,8	0,4	0,6	0,8
α , град	60	30	0	45	60	90	90	60	60	90	30	60	60	45	90
β , град	60	30	45	90	60	45	90	60	60	30	30	60	60	0	60
φ , град	45	60	60	60	30	90	0	90	45	60	60	90	30	60	0
r , м	0,6	0,4	0,8	0,5	0,6	0,6	0,6	0,4	0,6	0,8	0,4	0,4	0,8	0,6	0,4
a , м	0,4	1,2	0,9	1,2	1,2	0,9	0,6	1,5	1,4	0,8	1,2	0,9	0,6	0,8	0,5
f	0,3	0,4	0,4	0,5	0,3	0,3	0,4	0,3	0,3	0,4	0,4	0,3	0,4	0,3	0,4
k	0,4	0,3	0,3	0,4	0,3	0,4	0,4	0,3	0,4	0,3	0,3	0,4	0,4	0,3	0,3
c , Н/м	80	60	90	60	100	90	80	110	80	60	60	80	60	80	100

Задание Д4. Динамический расчет механической системы

Механизм состоит из трёх тел – груза 1, катка 2 и блока 3, соединенных нерастяжимыми нитями или невесомыми стержнями.

Движение механизма происходит в вертикальной плоскости под действием сил тяжести $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$, силы $\vec{F}$ и пары сил с моментом M . Направление действия силы $\vec{F}$ определяется углом α . Качение катка 2 происходит без скольжения. Проскальзывание между дисками и соединяющими их невесомыми стержнями или нитями отсутствует.

Радиусы ступеней катка 2 и блока 3 на схемах обозначены R_2 , r_2 и R_3 , r_3 .

Сплошные диски считать однородными. Радиусы инерции неоднородных (ступенчатых) дисков относительно осей, проходящих через центры масс перпендикулярно плоскости движения, равны i_{z2} , i_{z3} .

Найти ускорение груза 1 и динамические реакции, действующие на ось блока 3.

Варианты № 1, 11, 21	Варианты № 2, 12, 22
Варианты № 3, 13, 23	Варианты № 4, 14, 24
Варианты № 5, 15, 25	Варианты № 6, 16, 26

Варианты № 7, 17, 27	Варианты № 8, 18, 28

Варианты № 9, 19, 29	Варианты № 10, 20, 30

Исходные данные задания Д4. Динамический расчёт механической системы

Номер варианта задания	P_1 , Н	P_2 , Н	P_3 , Н	F , Н	M , Н·м	α , град	R_2 , м	r_2 , м	R_3 , м	r_3 , м	i_{z2} , м	i_{z3} , м
1	P	P	$2P$	P	$2Pr$	60	$3r$	r	$2r$	r	$2r$	$r\sqrt{2}$
2	$3P$	P	$3P$	$3P$	Pr	30	$2r$	r	$2r$	—	$2r$	—
3	$4P$	$3P$	$4P$	$2P$	$2Pr$	60	$2r$	r	$2r$	r	$2r$	$2r$
4	$2P$	$2P$	$4P$	P	$4Pr$	45	$3r$	—	$3r$	r	—	$r\sqrt{2}$
5	P	$3P$	$3P$	$2P$	$3Pr$	30	$3r$	r	r	—	$2r$	—
6	P	$2P$	$4P$	$4P$	$6Pr$	60	$3r$	—	$3r$	r	—	$r\sqrt{2}$
7	P	$2P$	$3P$	$2P$	$3Pr$	45	$3r$	r	r	—	$r\sqrt{3}$	—
8	$2P$	$3P$	$3P$	P	$3Pr$	30	$2r$	—	$2r$	r	—	$r\sqrt{3}$
9	$3P$	P	$3P$	P	$2Pr$	30	$2r$	r	$2r$	—	$r\sqrt{2}$	—
10	P	P	$3P$	P	$2Pr$	60	$3r$	—	$3r$	r	—	$r\sqrt{3}$
11	P	P	$3P$	$2P$	$3Pr$	30	$3r$	$2r$	$2r$	r	$r\sqrt{2}$	$r\sqrt{2}$
12	$2P$	P	$2P$	$4P$	Pr	60	$3r$	r	$3r$	—	$r\sqrt{3}$	—

Номер варианта задания	P_1 , Н	P_2 , Н	P_3 , Н	F , Н	M , Н·м	α , град	R_2 , м	r_2 , м	R_3 , м	r_3 , м	i_{z2} , м	i_{z3} , м
13	$3P$	P	$3P$	$3P$	$2Pr$	30	$3r$	$2r$	$2r$	r	$2r$	$r\sqrt{2}$
14	$2P$	P	$3P$	$2P$	$4Pr$	60	$2r$	—	$3r$	$2r$	—	$2r$
15	P	$2P$	$4P$	P	$4Pr$	45	$3r$	$2r$	$2r$	—	$r\sqrt{3}$	—
16	P	$3P$	$4P$	$2P$	$3Pr$	30	$2r$	—	$2r$	r	—	$r\sqrt{2}$
17	P	P	$3P$	$2P$	$6Pr$	60	$3r$	r	$3r$	—	$r\sqrt{3}$	—
18	$2P$	$2P$	$3P$	P	$3Pr$	60	$2r$	—	$3r$	r	—	$r\sqrt{2}$
19	$2P$	P	$2P$	$3P$	$4Pr$	30	$3r$	r	$3r$	—	$2r$	—
20	P	P	$3P$	P	$2Pr$	45	$2r$	—	$2r$	r	—	$r\sqrt{3}$
21	$2P$	P	$4P$	$2P$	$4Pr$	60	$2r$	r	$3r$	r	$r\sqrt{2}$	$2r$
22	P	P	$2P$	$5P$	$2Pr$	45	$3r$	$2r$	$2r$	—	$2r$	—
23	$2P$	$2P$	$3P$	$3P$	$2Pr$	60	$3r$	r	$2r$	r	$2r$	$r\sqrt{2}$
24	$4P$	P	$3P$	P	$3Pr$	30	$2r$	—	$3r$	r	—	$r\sqrt{3}$
25	P	$3P$	$2P$	P	$2Pr$	60	$3r$	r	r	—	$r\sqrt{3}$	—
26	P	$3P$	$4P$	$3P$	$3Pr$	45	$2r$	—	$3r$	$2r$	—	$r\sqrt{3}$
27	P	P	$4P$	$2P$	$4Pr$	30	$2r$	r	$2r$	—	$r\sqrt{3}$	—
28	$2P$	$3P$	$3P$	P	$6Pr$	30	$2r$	—	$3r$	$2r$	—	$r\sqrt{2}$
29	$2P$	P	$2P$	$2P$	$2Pr$	45	$2r$	r	r	—	$2r$	—
30	P	P	$4P$	P	$4Pr$	60	$3r$	—	$3r$	$2r$	—	$2r$

Задание Д5. Исследование движения механической системы с применением теоремы об изменении кинетической энергии

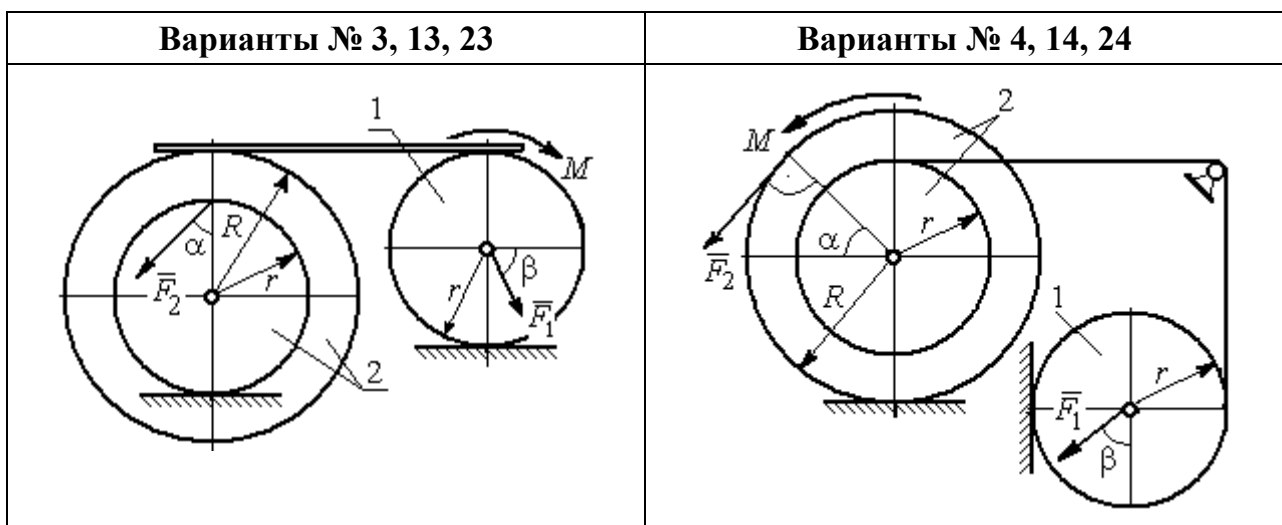
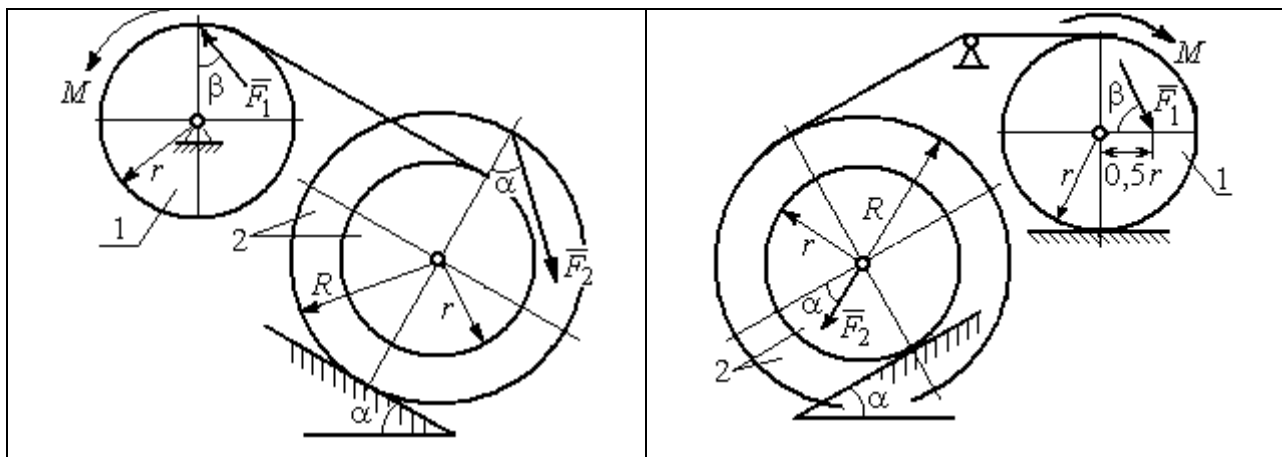
Неизменяемая механическая система состоит из ступенчатого и однородного дисков, соединённых нерастяжимой нитью или невесомым стержнем. Нити и стержни, соединяющие диски, параллельны плоскостям качения дисков. Качение дисков без скольжения. Скольжение между невесомым стержнем и дисками отсутствует.

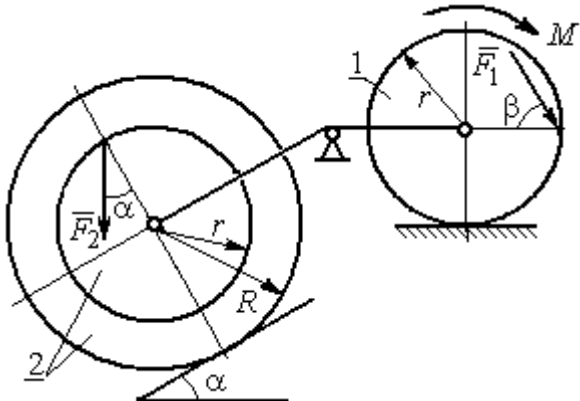
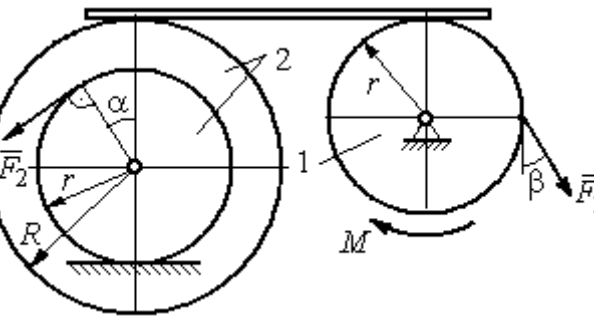
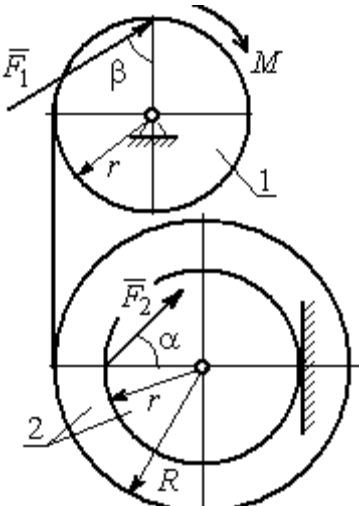
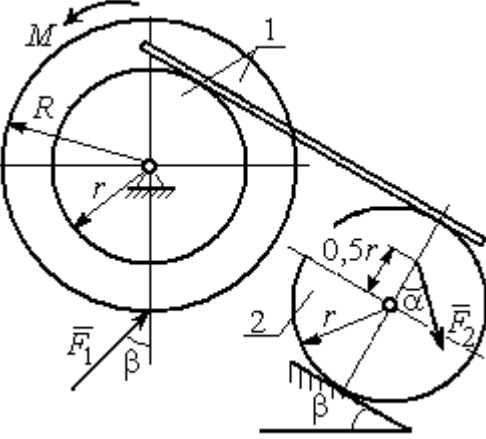
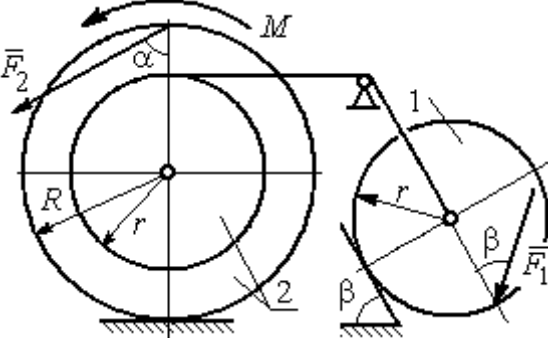
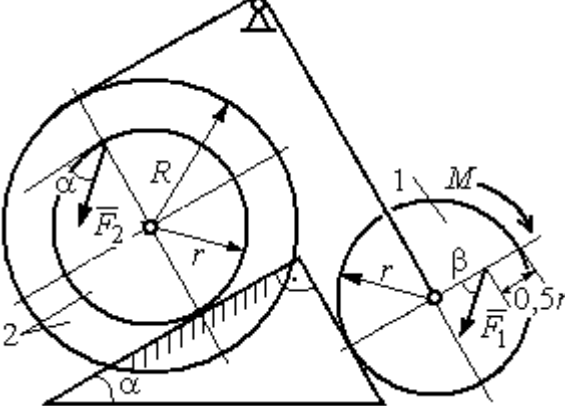
Вес дисков P_1 и P_2 . Система движется в вертикальной плоскости под действием сил тяжести $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, сил $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ и пары сил с моментом M . Направления действия сил $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ и наклон плоскости (если он есть) определяются углами α или β , показанными на схемах механизмов.

Радиус однородного диска r . Радиусы ступеней ступенчатого диска R и r . Радиус инерции ступенчатого диска относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения, равен i_z .

1. Найти ускорение центра масс диска 2.
2. Найти реакцию опоры диска 2 на плоскость (её нормальную составляющую и силу сцепления диска с плоскостью).

Варианты № 1, 11, 21	Варианты № 2, 12, 22



Вариант № 5, 15, 25 	Варианты № 6, 16, 26 
Варианты № 7, 17, 27 	Варианты № 8, 18, 28 
Варианты № 9, 19, 29 	Варианты 10, 20, 30 

Исходные данные задания Д5. Исследование движения механической системы с применением теоремы об изменении кинетической энергии

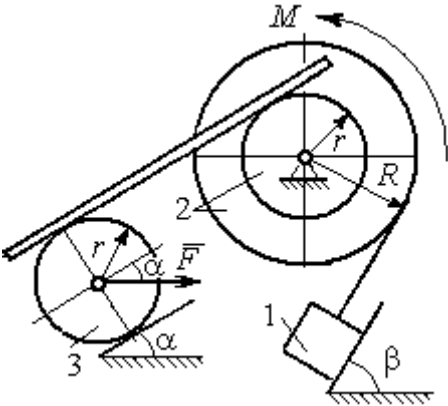
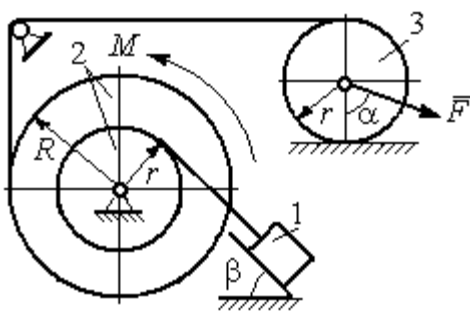
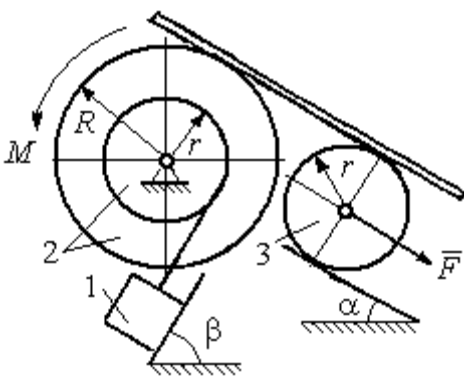
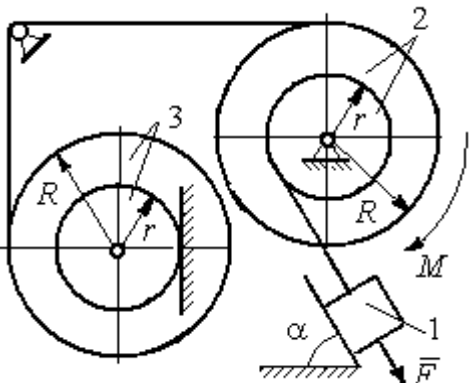
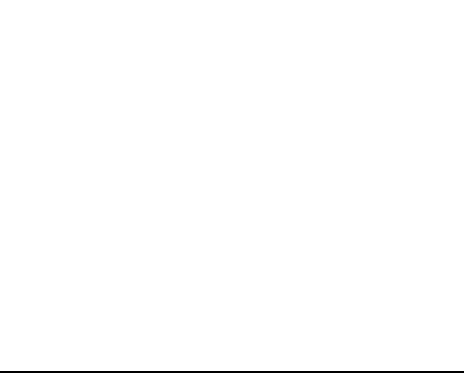
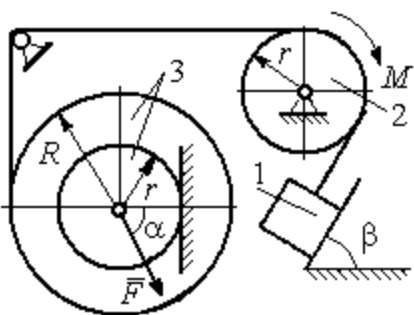
Номер варианта задания	P_1 , Н	P_2 , Н	F_1 , Н	F_2 , Н	M , Н·м	α , град	β , град	R , м	r , м	i_z , м
1	10	20	15	20	25	30	60	0,4	0,3	0,3
2	20	30	10	20	20	60	30	0,6	0,3	0,4
3	10	15	12	20	25	60	60	1,2	0,6	0,8
4	12	25	20	25	35	30	30	1,5	0,5	1,2
5	15	20	10	20	30	60	30	0,8	0,4	0,7
6	18	20	18	22	22	45	60	1,2	0,4	0,9
7	15	25	10	8	20	45	45	0,9	0,6	0,7
8	25	22	10	12	30	45	60	1,0	0,8	0,9
9	12	25	18	10	32	30	30	0,8	0,6	0,7
10	10	15	8	10	28	60	30	1,4	0,7	1,2
11	15	22	20	25	30	60	45	0,6	0,4	0,5
12	20	25	15	40	30	30	60	0,8	0,4	0,6
13	10	20	10	25	30	45	30	1,0	0,5	0,9
14	12	15	18	15	25	30	30	0,9	0,3	0,8
15	20	25	20	20	30	45	60	1,0	0,5	0,8
16	10	15	10	15	16	60	45	1,2	0,4	1,1
17	18	25	12	10	30	30	30	1,5	0,9	1,3
18	25	20	10	15	20	60	60	0,8	0,5	0,7
19	12	25	10	10	32	60	60	1,2	0,9	1,1
20	15	20	8	20	25	30	45	0,8	0,4	0,7
21	10	25	25	15	30	45	30	0,7	0,5	0,6
22	18	20	20	20	35	60	45	1,4	0,7	0,9
23	10	15	10	30	30	30	30	1,4	0,7	0,8
24	10	15	12	20	20	30	30	1,2	0,4	0,8
25	12	18	20	18	30	60	30	1,2	0,6	1,1
26	10	12	12	15	15	30	30	0,9	0,3	0,8
27	15	22	10	12	20	45	60	0,8	0,6	0,7
28	22	20	8	16	8	30	45	0,6	0,2	0,4
29	18	25	10	8	32	60	60	1,2	0,8	1,1
30	20	25	8	20	28	30	30	0,8	0,4	0,6

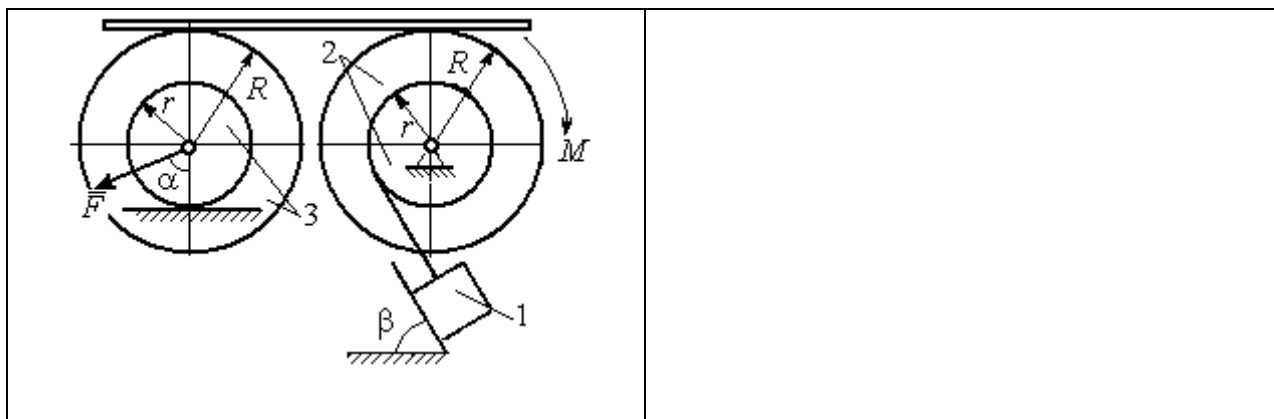
Задание Д6. Исследование механической системы с применением общего уравнения динамики

Механическая система с идеальными связями включает груз и два диска – однородного радиусом R или r и ступенчатого. Ступенчатый диск состоит из двух одноосных цилиндров радиусом R и r . Радиусы дисков указаны на схеме. Тела соединены нерастяжимыми нитями или невесомыми стержнями. Система движется в вертикальной плоскости из состояния покоя под действием сил тяжести, постоянной силы $\vec{F}$, а также пары сил с переменным моментом M . Направление действия силы $\vec{F}$ и наклон плоскости движущихся тел определяются углами α и β . Радиус инерции ступенчатого диска

относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения, равен i_z .

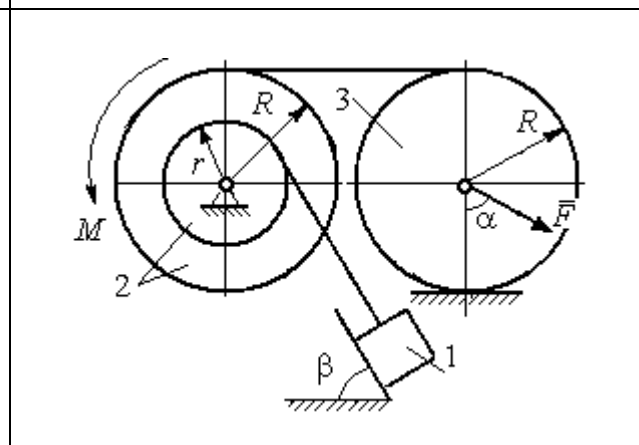
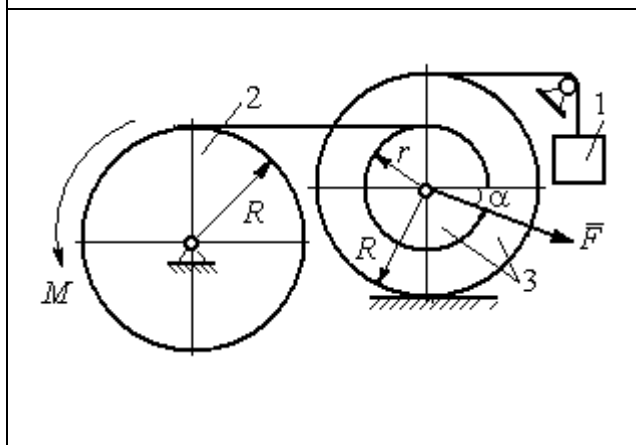
Качение дисков без проскальзывания. Скольжение между невесомым стержнем и дисками отсутствует. Движение грузов по плоскости без трения. Нити и стержни, соединяющие груз и диски, параллельны соответствующим плоскостям, по которым движутся тела. Найти уравнение движения центра масс диска 3. Определить реакцию шарнира диска 2 в момент времени $t = 1$ с.

Варианты № 1, 11, 21	Варианты № 2, 12, 22
	
Варианты 3, 13, 23	Варианты № 4, 14, 24
	
Варианты № 5, 15, 25	Варианты № 6, 16, 26
	



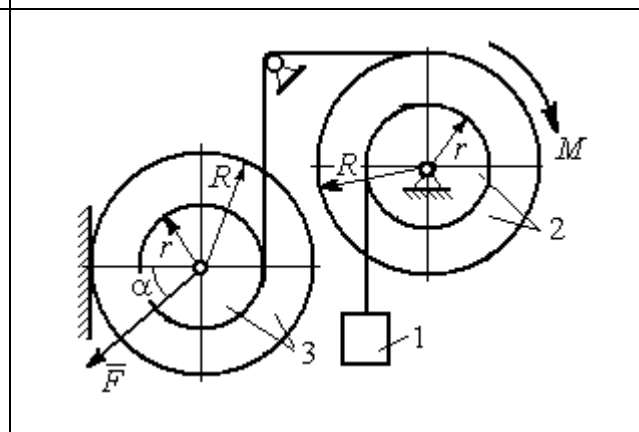
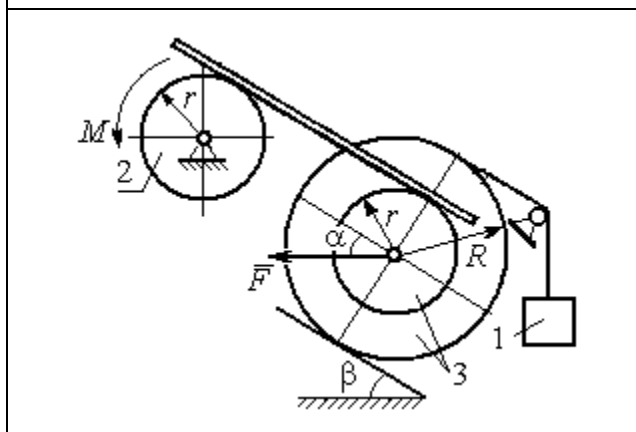
Варианты № 7, 17, 27

Варианты № 8, 18, 28



Варианты № 9, 19, 29

Варианты № 10, 20, 30



Исходные данные задания Д6. Исследование движения механической системы с применением общего уравнения динамики

Номер варианта задания	P_1 , Н	P_2 , Н	P_3 , Н	F , Н	M , Н·м	α , град	β , град	R , м	r , м	i_z , м
1	10	20	8	20	$3(2+t^2)$	30	60	0,6	0,3	0,4
2	10	22	15	15	$4(t+3)$	30	30	0,8	0,4	0,6
3	5	18	10	6	$8(t^2+1)$	90	30	0,4	0,3	0,3

4	5	22	10	5	$14(t^2+t+1)$	30	–	0,6	0,5	0,6
5	5	20	16	9	$3(t^2+4)$	45	60	0,6	0,3	0,5
6	10	16	14	15	$4(5+t)$	60	30	1,0	0,6	0,8
7	6	20	20	8	$9(3t^2+2)$	45	–	0,8	0,6	0,8
8	16	25	15	12	$5(t^2+4)$	30	60	1,2	0,6	0,8
9	5	20	12	8	$4(3+5t)$	60	30	0,6	0,4	0,5
10	6	25	8	10	$5(3t+6)$	30	–	1,0	0,8	0,9
11	4	22	8	15	$2+t^2$	45	45	0,8	0,4	0,6
12	15	18	15	10	$5(t+3)$	30	60	1,0	0,5	0,7
13	6	20	10	4	$5(t^2+2)$	30	60	0,6	0,5	0,4
14	10	25	15	8	$16(t+2)$	60	–	0,8	0,6	0,7
15	8	18	20	10	$6(t+2)$	30	90	1,2	0,6	1,0
16	8	18	12	12	$5(3+t^2)$	90	60	0,8	0,6	0,7
17	5	20	10	10	$2t^2+20$	60	–	0,9	0,6	0,8
18	20	15	20	15	$3(t+4)$	60	30	0,8	0,4	0,7
19	8	20	12	10	$4(3+t)$	45	45	1,2	0,4	0,8
20	12	20	10	6	$6(3t+4)$	45	–	1,0	0,6	0,9
21	15	25	12	12	$6+t^2$	60	60	0,6	0,3	0,5
22	20	22	18	15	$2(2t+9)$	45	45	0,8	0,4	0,6
23	8	24	12	8	$7(3t^2+2)$	30	45	0,8	0,5	0,6
24	12	20	18	10	$6(t+4)$	90	–	0,5	0,3	0,4
25	5	20	12	12	$9(2+t^2)$	60	30	1,4	0,7	1,2
26	10	12	10	8	$6(2+t)$	30	45	1,2	0,8	0,9
27	6	18	16	14	$8(2t^2+3)$	30	–	0,8	0,2	0,6
28	10	20	20	20	$3(t^2+3)$	45	30	0,6	0,3	0,5
29	10	18	8	12	$5(4+t+t^2)$	30	60	1,2	0,8	0,9
30	8	18	10	15	$8(t^2+5)$	60	–	1,0	0,8	0,9

Задание Д7. Исследование механической системы с одной степенью свободы с применением уравнений Лагранжа

Механическая система состоит из трёх тел – бруса 1, блока 2, катка 3 и невесомой пружины жесткостью c . Брус 1, соединяющий каток 3 с блоком 2, расположен параллельно линии качения катка 3. Радиусы ступеней ступенчатого диска и радиус однородного диска указаны на схеме.

Качение катка 3 происходит без проскальзывания. Скольжение между брусом и дисками отсутствует. В задачах, где пружина соединяется с блоком 2, передача движения блоку 2 производится посредством невесомого стержня без скольжения.

Радиус инерции ступенчатого диска относительно оси, проходящей через его центр масс перпендикулярно плоскости движения, равен i_z .

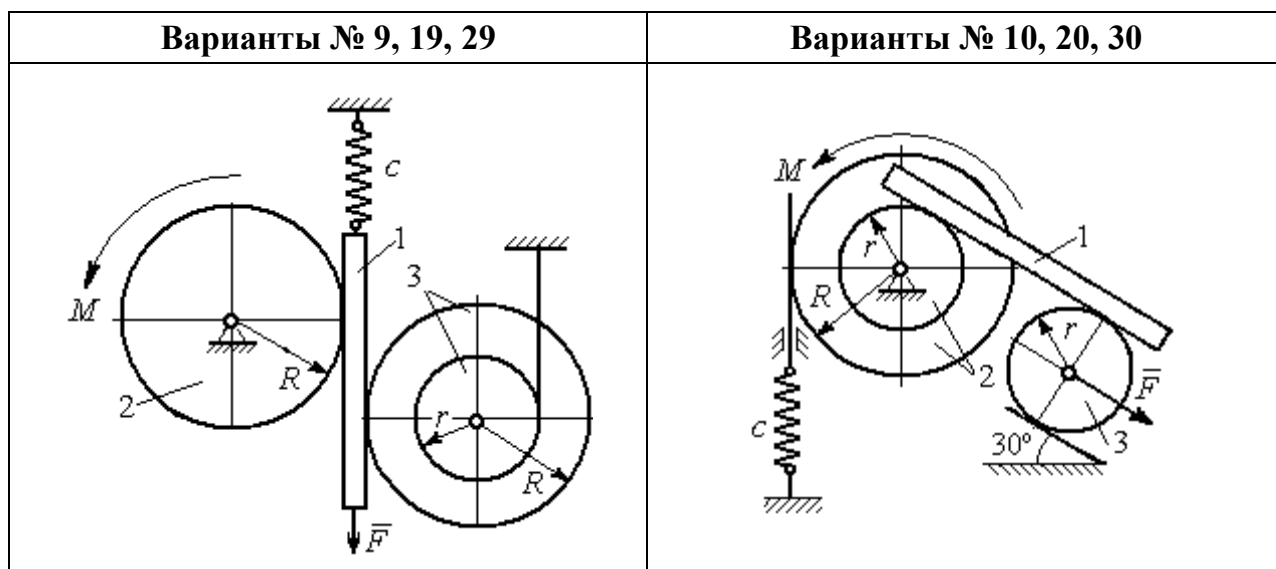
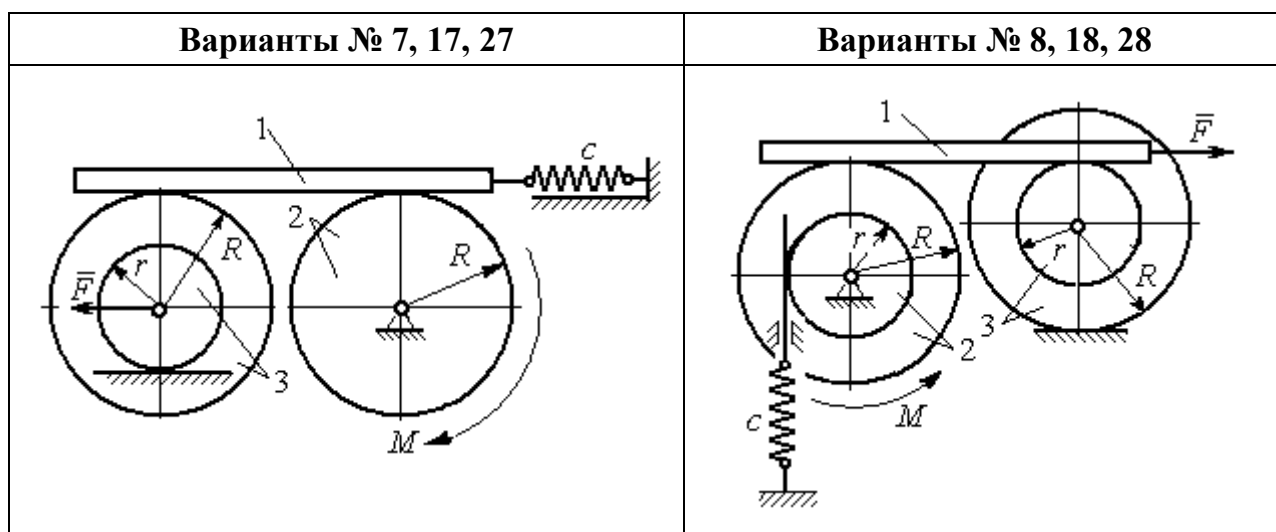
Система движется в вертикальной плоскости под действием сил тяжести $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3$, силы $\vec{F}$ и пары сил с моментом M .

Определить закон движения бруса 1 и закон угловых колебаний блока 2, если в начальный момент пружина находилась в нерастянутом состоянии, а блоку 2 придали угловую скорость ω_{20} , направленную в сторону заданного момента пары сил.

Варианты заданий даны на рис. 6.9, 6.10. Варианты исходных данных в табл. 6.2. Отрицательные значения величин F или M в табл. 6.2 означают, что при заданных

модулях силы или момента направление вектора силы $\vec{F}$ или момента M на схеме следует изменить на противоположные.

Варианты № 1, 11, 21	Варианты № 2, 12, 22
Варианты № 3, 13, 23	Варианты № 4, 14, 24
Варианты № 5, 15, 25	Варианты № 6, 16, 26



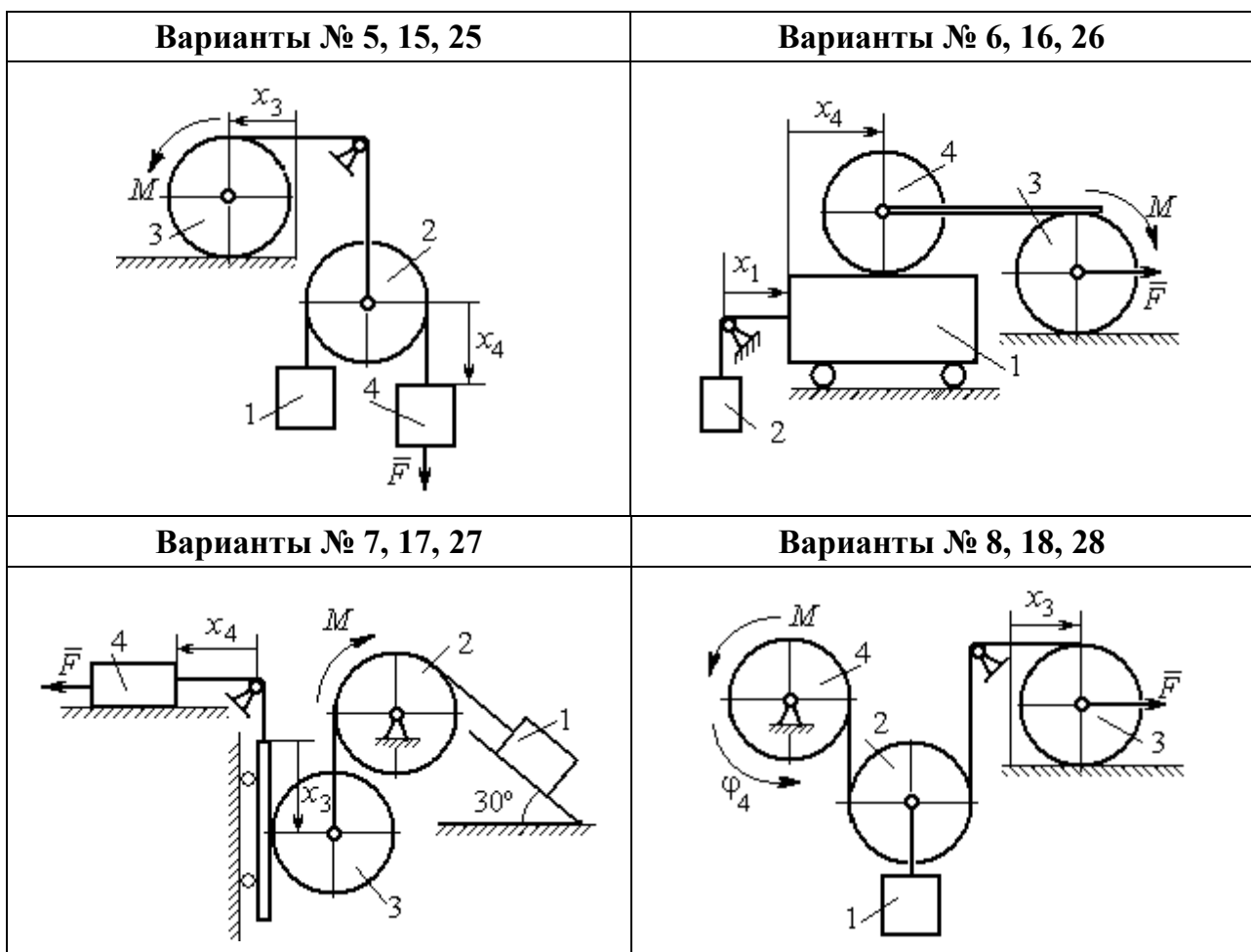
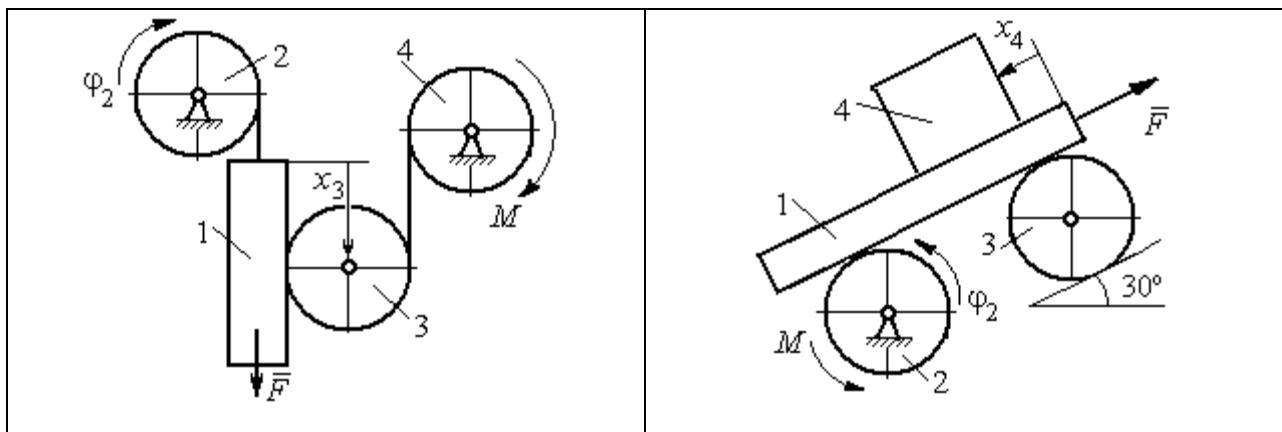
Исходные данные задания Д7. Исследование движения механической системы с одной степенью свободы с применением уравнений Лагранжа

Номер варианта задания	P_1 , Н	P_2 , Н	P_3 , Н	F , Н	M , Н·м	c , Н/м	ω_{20} , рад/с	R , м	r , м	i_z , м
1	8	12	18	15	3	50	0,3	0,6	0,3	0,4
2	10	8	15	12	5	55	0,4	0,8	0,5	0,6
3	5	18	10	8	4	60	0,2	0,5	0,3	—
4	5	20	12	10	6	70	0,5	0,6	0,5	0,6
5	5	8	16	8	8	65	0,2	0,6	0,3	—
6	8	10	14	6	2	50	0,1	1,0	0,6	0,8
7	10	12	15	12	3	65	0,2	0,8	0,6	0,7
8	12	15	15	6	2	50	0,3	1,2	0,6	0,8
9	5	20	12	8	4	75	0,1	0,6	0,4	0,5
10	6	25	8	5	12	60	0,4	1,0	0,8	0,9

Номер варианта задания	P_1 , Н	P_2 , Н	P_3 , Н	F , Н	M , Н·м	c , Н/м	ω_{20} , рад/с	R , м	r , м	i_z , м
11	4	10	12	-10	-2	60	0,2	0,8	0,4	0,6
12	5	8	15	-8	3	50	0,5	1,0	0,5	0,7
13	6	15	8	-12	-4	65	0,4	0,6	0,5	—
14	10	25	10	6	10	55	0,1	0,8	0,6	0,7
15	8	6	20	-10	2	70	0,2	1,2	0,6	—
16	10	12	12	-5	6	60	0,3	0,8	0,6	0,7
17	12	16	12	-6	-2	55	0,4	0,9	0,6	0,8
18	10	20	20	10	4	60	0,1	0,8	0,4	0,7
19	8	20	12	-10	6	65	0,2	1,2	0,4	0,8
20	12	20	10	-3	6	50	0,24	1,0	0,6	0,9
21	5	12	15	12	-3	55	0,3	0,6	0,5	0,55
22	10	15	18	6	-2	65	0,1	0,8	0,4	0,6
23	8	20	12	-8	2	45	0,2	0,8	0,6	—
24	12	20	18	-4	-8	70	0,4	0,5	0,3	0,4
25	6	10	15	-6	-2	60	0,1	1,4	0,7	—
26	8	12	10	10	-3	65	0,2	1,2	0,8	0,9
27	6	18	16	5	-3	70	0,2	0,8	0,2	0,6
28	8	12	12	-6	2	65	0,3	0,6	0,3	0,5
29	10	18	20	-10	4	60	0,2	1,2	0,8	0,9
30	8	18	10	8	6	75	0,1	1,0	0,8	0,9

Задание Д8. Исследование механической системы с двумя степенями свободы
Механическая система, состоящая из четырёх тел, из состояния покоя движется в вертикальной плоскости под действием сил тяжести $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$, $\vec{P}_4$, силы $\vec{F}$ и пары сил с моментом M . Качение тел во всех случаях происходит без проскальзывания, скольжение грузов по поверхностям – без трения. Радиусы дисков одинаковы и равны R . Найти уравнения движения системы в обобщённых координатах.

Варианты № 1, 11, 21	Варианты № 2, 12, 22
Варианты № 3, 13, 23	Варианты № 4, 14, 24



Варианты № 9, 19, 29	Варианты № 10, 20, 30

Исходные данные задания Д8. Исследование движения механической системы с двумя степенями свободы

Номер варианта задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$P_1, \text{ Н}$	P	$2P$	P	$1,5P$	P	$3P$	P	$1,2P$	$3P$	P	$2P$	P	P	$2P$	P
$P_2, \text{ Н}$	$3P$	$3P$	$4P$	$3P$	$2P$	P	$2P$	$3P$	P	$2P$	$3P$	$2P$	$3P$	$4P$	$3P$
$P_3, \text{ Н}$	$2P$	$2P$	$3P$	$2P$	$2P$	$2P$	$3P$	P	$2P$	$3P$	$2P$	$2P$	$2P$	P	$2P$
$P_4, \text{ Н}$	$2P$	P	P	$2P$	$3P$	$3P$	P	P	$2P$	P	P	P	$2P$	$2P$	$2P$
$R, \text{ м}$	$2r$	$1,5r$	$2,5r$	$1,2r$	$2r$	r	$1,5r$	r	$2r$	r	$1,5r$	$1,2r$	$2r$	$2r$	$2r$
$F, \text{ Н}$	P	$2P$	P	$3P$	P	P	$2P$	$4P$	P	$2P$	P	$2P$	$1,5P$	$4P$	$2P$
$M, \text{ Н}\cdot\text{м}$	$2Pr$	$3Pr$	$4Pr$	$3Pr$	$3Pr$	$4Pr$	$2Pr$	$2Pr$	$3Pr$	$2Pr$	$3Pr$	$4Pr$	$3Pr$	$3Pr$	$2Pr$

Номер варианта задания	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
$P_1, \text{ Н}$	$4P$	$1,5P$	P	$2P$	P	P	$1,5P$	$1,5P$	$2P$	P	P	$2P$	$1,2P$	$3P$	$1,2P$
$P_2, \text{ Н}$	$2P$	$2P$	$2P$	$4P$	$3P$	$4P$	$3P$	$4P$	$3P$	$2P$	$2P$	$1,2P$	$2P$	$3P$	$2P$
$P_3, \text{ Н}$	$2P$	$2P$	$3P$	$2P$	$2P$	$3P$	$2P$	$2P$	P	$2P$	$3P$	$2P$	P	P	$3P$
$P_4, \text{ Н}$	$1,5P$	$2P$	$3P$	P	$2P$	$2P$	$2P$	P	$2P$	$3P$	P	P	$2P$	P	$2P$
$R, \text{ м}$	$1,5r$	r	$1,5r$	$2r$	r	$1,2r$	$2r$	$1,5r$	$2r$	r	$1,5r$	$2r$	r	$1,2r$	$2r$
$F, \text{ Н}$	$2P$	$2P$	P	$3P$	$4P$	$2P$	$3P$	$2P$	$3P$	P	$3P$	$1,5P$	$4P$	$2P$	$3P$
$M, \text{ Н}\cdot\text{м}$	$3Pr$	$2Pr$	$4Pr$	Pr	$4Pr$	$4Pr$	$2Pr$	Pr	$4Pr$	$2Pr$	$4Pr$	$2Pr$	$2Pr$	$3Pr$	$2Pr$

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»



УТВЕРЖДАЮ

Проректор по
комплексу

учебно-методическому

С.А.Упоров

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ СТУДЕНТОВ

РАЗВИТИЕ НАВЫКОВ КРИТИЧЕСКОГО МЫШЛЕНИЯ

Специальность

21.05.04 Горное дело

Специализация

Горные машины и оборудование

Одобрена на заседании кафедры

Философии и культурологии

(название кафедры)

Зав. кафедрой

(подпись)

Беляев В. П.

(Фамилия И.О.)

Протокол № 1 от 01.09.2021

(Дата)

Рассмотрена методической комиссией

Горно-механического факультета

(название факультета)

Председатель

(подпись)

Осипов П. А.

(Фамилия И.О.)

Протокол № 2 от 12.10.2021

(Дата)

Екатеринбург

СОДЕРЖАНИЕ

	Введение	3
1	Методические рекомендации по работе с текстом лекций	5
2	Методические рекомендации по подготовке к опросу	8
3	Методические рекомендации по подготовке доклада (презентации)	9
4	Методические рекомендации по написанию эссе	11
5	Методические рекомендации по подготовке к семинарским занятиям	14
6	Методические рекомендации по подготовке к дискуссии	15
7	Методические рекомендации по подготовке к сдаче экзаменов и зачетов	17
	Заключение	20
	Список использованных источников	21

Автор: Гладкова И. В., доцент, к. ф. н.

ВВЕДЕНИЕ

Инициативная самостоятельная работа студента есть неотъемлемая составная часть учебы в вузе. В современном формате высшего образования значительно возрастает роль самостоятельной работы студента. Правильно спланированная и организованная самостоятельная работа обеспечивает достижение высоких результатов в учебе.

Самостоятельная работа студента (СРС) - это планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская работа студентов, выполняемая во внеаудиторное (аудиторное) время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия, при сохранении ведущей роли студентов.

Целью СРС является овладение фундаментальными знаниями, профессиональными умениями и навыками по профилю будущей специальности, опытом творческой, исследовательской деятельности, развитие самостоятельности. Ответственности и организованности, творческого подхода к решению проблем учебного и профессионального уровней. Самостоятельная работа студента – важнейшая составная часть учебного процесса, обязательная для каждого студента, объем которой определяется учебным планом. Методологическую основу СРС составляет деятельностный подход, при котором цели обучения ориентированы на формирование умений решать типовые и нетиповые задачи, т. е. на реальные ситуации, в которых студентам надо проявить знание конкретной дисциплины. Предметно и содержательно СРС определяется государственным образовательным стандартом, действующими учебными планами и образовательными программами различных форм обучения, рабочими программами учебных дисциплин, средствами обеспечения СРС: учебниками, учебными пособиями и методическими руководствами, учебно-программными комплексами и т.д.

Самостоятельная работа студентов может рассматриваться как организационная форма обучения - система педагогических условий, обеспечивающих управление учебной деятельностью студентов по освоению знаний и умений в области учебной и научной деятельности без посторонней помощи.

Самостоятельная работа студентов проводится с целью:

- систематизации и закрепления полученных теоретических знаний и практических умений студентов;
- углубления и расширения теоретических знаний;
- формирования умений использовать нормативную, правовую, справочную документацию и специальную литературу;
- развития познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;
- формирования самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- формирования практических (общеучебных и профессиональных) умений и навыков;
- развития исследовательских умений;
- получения навыков эффективной самостоятельной профессиональной (практической и научно-теоретической) деятельности.

Самостоятельная работа студента - это особым образом организованная деятельность, включающая в свою структуру такие компоненты, как:

- уяснение цели и поставленной учебной задачи;
- четкое и системное планирование самостоятельной работы;
- поиск необходимой учебной и научной информации;
- освоение информации и ее логическая переработка;

- использование методов исследовательской, научно-исследовательской работы для решения поставленных задач;
- выработка собственной позиции по поводу полученной задачи;
- представление, обоснование и защита полученного решения;
- проведение самоанализа и самоконтроля.

В учебном процессе выделяют два вида самостоятельной работы: аудиторная и внеаудиторная.

Аудиторная самостоятельная работа по дисциплине выполняется на учебных занятиях под непосредственным руководством преподавателя и по его заданию: текущие консультации, коллоквиум, прием и разбор домашних заданий и другие.

Внеаудиторная самостоятельная работа - планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская работа студентов, выполняемая во внеаудиторное время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия: подготовка презентаций, составление глоссария, подготовка к практическим занятиям, подготовка рецензий, аннотаций на статью, подготовка к дискуссиям, круглым столам.

СРС может включать следующие формы работ:

- изучение лекционного материала;
- работа с источниками литературы: поиск, подбор и обзор литературы и электронных источников информации по заданной проблеме курса;
- выполнение домашних заданий, выдаваемых на практических занятиях: тестов, докладов, контрольных работ и других форм текущего контроля;
- изучение материала, вынесенного на самостоятельное изучение; подготовка к практическим занятиям;
- подготовка к контрольной работе или коллоквиуму;
- подготовка к зачету, экзамену, другим аттестациям;
- написание реферата, эссе по заданной проблеме;
- выполнение расчетно-графической работы;
- выполнение курсовой работы или проекта;
- анализ научной публикации по определенной преподавателем теме, ее реферирование;
- исследовательская работа и участие в научных студенческих конференциях, семинарах и олимпиадах.

Особенностью организации самостоятельной работы студентов является необходимость не только подготовиться к сдаче зачета /экзамена, но и собрать, обобщить, систематизировать, проанализировать информацию по темам дисциплины.

Технология организации самостоятельной работы студентов включает использование информационных и материально-технических ресурсов образовательного учреждения. Для более эффективного выполнения самостоятельной работы по дисциплине преподаватель рекомендует студентам источники и учебно-методические пособия для работы, характеризует наиболее рациональную методику самостоятельной работы.

Самостоятельная работа может осуществляться индивидуально или группами студентов online и на занятиях в зависимости от цели, объема, конкретной тематики самостоятельной работы, уровня сложности, уровня умений студентов.

Подготовка к самостоятельной работе, не предусмотренная образовательной программой, учебным планом и учебно-методическими материалами, раскрывающими и конкретизирующими их содержание, осуществляется студентами инициативно, с целью реализации собственных учебных и научных интересов.

В качестве форм и методов контроля внеаудиторной самостоятельной работы студентов могут быть использованы обмен информационными файлами, семинарские занятия, тестирование, опрос, доклад, реферат, самоотчеты, контрольные работы, защита творческих работ и электронных презентаций и др.

1. Методические рекомендации по работе с текстом лекций

На лекционных занятиях необходимо конспектировать учебный материал. Обращать внимание на формулировки, определения, раскрывающие содержание тех или иных понятий, научные выводы и практические рекомендации, положительный опыт в ораторском мастерстве. Внимательное слушание и конспектирование лекций предполагает интенсивную умственную деятельность студента, и помогает усвоить учебный материал.

Желательно оставлять в рабочих конспектах поля, на которых делать пометки, дополняющие материал прослушанной лекции, а также подчеркивающие особую важность тех или иных теоретических положений, фиксировать вопросы, вызывающие личный интерес, варианты ответов на них, сомнения, проблемы, спорные положения. Рекомендуется вести записи на одной стороне листа, оставляя вторую сторону для размышлений, разборов, вопросов, ответов на них, для фиксирования деталей темы или связанных с ней фактов, которые припоминаются самим студентом в ходе слушания.

Слушание лекций - сложный вид интеллектуальной деятельности, успех которой обусловлен *умением слушать*, и стремлением воспринимать материал, нужное записывая в тетрадь. Запись лекции помогает сосредоточить внимание на главном, в ходе самой лекции продумать и осмыслить услышанное, осознать план и логику изложения материала преподавателем.

Такая работа нередко вызывает трудности у студентов: некоторые стремятся записывать все дословно, другие пишут отрывочно, хаотично. Чтобы избежать этих ошибок, целесообразно придерживаться ряда правил.

1. После записи ориентирующих и направляющих внимание данных (тема, цель, план лекции, рекомендованная литература) важно попытаться проследить, как они раскрываются в содержании, подкрепляются формулировками, доказательствами, а затем и выводами.

2. Записывать следует основные положения и доказывающие их аргументы, наиболее яркие примеры и факты, поставленные преподавателем вопросы для самостоятельной проработки.

3. Стремиться к четкости записи, ее последовательности, выделяя темы, подтемы, вопросы и подвопросы, используя цифровую и буквенную нумерацию (римские и арабские цифры, большие и малые буквы), красные строки, выделение абзацев, подчеркивание главного и т.д.

Форма записи материала может быть различной - в зависимости от специфики изучаемого предмета. Это может быть стиль учебной программы (назывные предложения), уместны и свои краткие пояснения к записям.

Студентам не следует подробно записывать на лекции «все подряд», но обязательно фиксировать то, что преподаватели диктуют – это базовый конспект, содержащий основные положения лекции: определения, выводы, параметры, критерии, аксиомы, постулаты, парадигмы, концепции, ситуации, а также мысли-маяки (ими часто являются афоризмы, цитаты, остроумные изречения). Запись лекции лучше вести в сжатой форме, короткими и четкими фразами. Каждому студенту полезно выработать свою систему сокращений, в которой он мог бы разобраться легко и безошибочно.

Даже отлично записанная лекция предполагает дальнейшую самостоятельную работу над ней (осмысление ее содержания, логической структуры, выводов). С целью доработки конспекта лекции необходимо в первую очередь прочитать записи, восстановить текст в памяти, а также исправить опiski, расшифровать не принятые ранее сокращения, заполнить пропущенные места, понять текст, вникнуть в его смысл. Далее прочитать материал по рекомендуемой литературе, разрешая в ходе чтения возникшие ранее затруднения, вопросы, а также дополняя и исправляя свои записи. В ходе доработки конспекта углубляются, расширяются и закрепляются знания, а также дополняется, исправляется и совершенствуется конспект. Доработанный конспект и

рекомендуемая литература используется при подготовке к практическому занятию. Знание лекционного материала при подготовке к практическому занятию обязательно.

Особенно важно в процессе самостоятельной работы над лекцией выделить новый понятийный аппарат, уяснить суть новых понятий, при необходимости обратиться к словарям и другим источникам, заодно устранив неточности в записях. Главное - вести конспект аккуратно и регулярно, только в этом случае он сможет стать подспорьем в изучении дисциплины.

Работа над лекцией стимулирует самостоятельный поиск ответов на самые различные вопросы: над какими понятиями следует поработать, какие обобщения сделать, какой дополнительный материал привлечь.

Важным средством, направляющим самообразование, является выполнение различных заданий по тексту лекции, например, составление ее развернутого плана или тезисов; ответы на вопросы проблемного характера, (скажем, об основных тенденциях развития той или иной проблемы); составление проверочных тестов по проблеме, написание по ней реферата, составление графических схем.

По своим задачам лекции могут быть разных жанров: *установочная лекция* вводит в изучение курса, предмета, проблем (что и как изучать), а *обобщающая лекция* позволяет подвести итог (зачем изучать), выделить главное, усвоить законы развития знания, преемственности, новаторства, чтобы применить обобщенный позитивный опыт к решению современных практических задач. Обобщающая лекция ориентирует в истории и современном состоянии научной проблемы.

В процессе освоения материалов обобщающих лекций студенты могут выполнять задания разного уровня. Например: задания *репродуктивного* уровня (составить развернутый план обобщающей лекции, составить тезисы по материалам лекции); задания *продуктивного* уровня (ответить на вопросы проблемного характера, составить опорный конспект по схеме, выявить основные тенденции развития проблемы); задания *творческого* уровня (составить проверочные тесты по теме, защитить реферат и графические темы по данной проблеме). Обращение к ранее изученному материалу не только помогает восстановить в памяти известные положения, выводы, но и приводит разрозненные знания в систему, углубляет и расширяет их. Каждый возврат к старому материалу позволяет найти в нем что-то новое, переосмыслить его с иных позиций, определить для него наиболее подходящее место в уже имеющейся системе знаний.

2. Методические указания по подготовке к опросу

Самостоятельная работа обучающихся включает подготовку к устному или письменному опросу на семинарских занятиях. Для этого обучающийся изучает лекции, основную и дополнительную литературу, публикации, информацию из Интернет-ресурсов. Темы и вопросы к семинарским занятиям, вопросы для самоконтроля приведены в методических указаниях по разделам и доводятся до обучающихся заранее.

Письменный опрос

Письменный опрос является одной из форм текущего контроля успеваемости студента. При изучении материала студент должен убедиться, что хорошо понимает основную терминологию темы, умеет ее использовать в нужном контексте. Желательно составить краткий конспект ответа на предполагаемые вопросы письменной работы, чтобы убедиться в том, что студент владеет материалом и может аргументировано, логично и грамотно письменно изложить ответ на вопрос. Следует обратить особое внимание на написание профессиональных терминов, чтобы избежать грамматических ошибок в работе. При изучении новой для студента терминологии рекомендуется изготовить карточки, которые содержат новый термин и его расшифровку, что значительно облегчит работу над материалом.

Устный опрос

Целью устного собеседования являются обобщение и закрепление изученного курса. Студентам предлагаются для освещения сквозные концептуальные проблемы. При подготовке следует использовать лекционный материал и учебную литературу. Для более глубокого постижения курса и более основательной подготовки рекомендуется познакомиться с указанной дополнительной литературой. Готовясь к семинару, студент должен, прежде всего, ознакомиться с общим планом семинарского занятия. Следует внимательно прочесть свой конспект лекции по изучаемой теме и рекомендуемую к теме семинара литературу. С незнакомыми терминами и понятиями следует ознакомиться в предлагаемом глоссарии, словаре или энциклопедии¹.

Критерии качества устного ответа.

1. Правильность ответа по содержанию.
2. Полнота и глубина ответа.
3. Сознательность ответа (учитывается понимание излагаемого материала).
4. Логика изложения материала (учитывается умение строить целостный, последовательный рассказ, грамотно пользоваться профессиональной терминологией).
5. Рациональность использованных приемов и способов решения поставленной учебной задачи (учитывается умение использовать наиболее прогрессивные и эффективные способы достижения цели).
6. Своевременность и эффективность использования наглядных пособий и технических средств при ответе (учитывается грамотно и с пользой применять наглядность и демонстрационный опыт при устном ответе).
7. Использование дополнительного материала (приветствуется, но не обязательно для всех студентов).
8. Рациональность использования времени, отведенного на задание (не одобряется затянутость выполнения задания, устного ответа во времени, с учетом индивидуальных особенностей студентов)².

¹ Методические рекомендации для студентов [Электронный ресурс]: Режим доступа: http://lesgaft.spb.ru/sites/default/files/u57/metod.rekomendacii_dlya_studentov_21.pdf

² Методические рекомендации для студентов [Электронный ресурс]: http://priab.ru/images/metod_agro/Metod_Inostran_yazyk_35.03.04_Agro_15.01.2016.pdf

Ответ на каждый вопрос из плана семинарского занятия должен быть содержательным и аргументированным. Для этого следует использовать документы, монографическую, учебную и справочную литературу.

Для успешной подготовки к устному опросу, студент должен законспектировать рекомендуемую литературу, внимательно осмыслить лекционный материал и сделать выводы. Объем времени на подготовку к устному опросу зависит от сложности темы и особенностей организации обучающимся своей самостоятельной работы.

3. Методические рекомендации по подготовке доклада (презентации)

Доклад – публичное сообщение по заданной теме, представляющее собой развернутое изложение на определенную тему, вид самостоятельной работы, который используется в учебных и внеаудиторных занятиях и способствует формированию навыков исследовательской работы, освоению методов научного познания, приобретению навыков публичного выступления, расширяет познавательные интересы, приучает критически мыслить.

При подготовке доклада используется дополнительная литература, систематизируется материал. Работа над докладом не только позволяет учащемуся приобрести новые знания, но и способствует формированию важных научно-исследовательских навыков самостоятельной работы с научной литературой, что повышает познавательный интерес к научному познанию.

Приветствуется использование мультимедийных технологий, подготовка докладов-презентаций.

Доклад должен соответствовать следующим требованиям:

- тема доклада должна быть согласованна с преподавателем и соответствовать теме занятия;
- иллюстрации (слайды в презентации) должны быть достаточными, но не чрезмерными;
- материалы, которыми пользуется студент при подготовке доклада-презентации, должны соответствовать научно-методическим требованиям ВУЗа и быть указаны в докладе;
- необходимо соблюдать регламент: 7-10 минут выступления.

Преподаватель может дать тему сразу нескольким студентам одной группы, по принципу: докладчик и оппонент. Студенты могут подготовить два выступления с противоположными точками зрения и устроить дискуссию по проблемной теме. Докладчики и содокладчики во многом определяют содержание, стиль, активность данного занятия, для этого необходимо:

- использовать технические средства;
- знать и хорошо ориентироваться в теме всей презентации (семинара);
- уметь дискутировать и быстро отвечать на вопросы;
- четко выполнять установленный регламент: докладчик - 7-10 мин.; содокладчик - 5 мин.; дискуссия - 10 мин;
- иметь представление о композиционной структуре доклада.

После выступления докладчик и содокладчик, должны ответить на вопросы слушателей.

В подготовке доклада выделяют следующие этапы:

1. Определение цели доклада: информировать, объяснить, обсудить что-то (проблему, решение, ситуацию и т. п.)
2. Подбор литературы, иллюстративных примеров.
3. Составление плана доклада, систематизация материала, композиционное оформление доклада в виде печатного /рукописного текста и электронной презентации.

Общая структура доклада

Построение доклада включает три части: вступление, основную часть и заключение.

Вступление.

Вступление должно содержать:

- название презентации (доклада);
- сообщение основной идеи;
- обоснование актуальности обсуждаемого вопроса;

- современную оценку предмета изложения;
- краткое перечисление рассматриваемых вопросов;
- живую интересную форму изложения;
- акцентирование оригинальности подхода.

Основная часть.

Основная часть состоит из нескольких разделов, постепенно раскрывающих тему. Возможно использование иллюстрации (графики, диаграммы, фотографии, карты, рисунки). Если необходимо, для обоснования темы используется ссылка на источники с доказательствами, взятыми из литературы (цитирование авторов, указание цифр, фактов, определений). Изложение материала должно быть связным, последовательным, доказательным.

Задача основной части - представить достаточно данных для того, чтобы слушатели и заинтересовались темой и захотели ознакомиться с материалами. При этом логическая структура теоретического блока не должны даваться без наглядных пособий, аудио-визуальных и визуальных материалов.

Заключение.

Заключение - это ясное четкое обобщение, в котором подводятся итоги, формулируются главные выводы, подчеркивается значение рассмотренной проблемы, предлагаются самые важные практические рекомендации. Требования к оформлению доклада. Объем машинописного текста доклада должен быть рассчитан на произнесение доклада в течение 7 -10 минут (3-5 машинописных листа текста с докладом).

Доклад оценивается по следующим критериям:

<i>Критерии оценки доклада, сообщения</i>	<i>Количество баллов</i>
Содержательность, информационная насыщенность доклада	2
Наличие аргументов	2
Наличие выводов	2
Наличие презентации доклада	2
Владение профессиональной лексикой	2
Итого:	10

Электронные презентации выполняются в программе MS PowerPoint в виде слайдов в следующем порядке: • титульный лист с заголовком темы и автором исполнения презентации; • план презентации (5-6 пунктов - это максимум); • основная часть (не более 10 слайдов); • заключение (вывод). Общие требования к стилевому оформлению презентации: • дизайн должен быть простым и лаконичным; • основная цель - читаемость, а не субъективная красота; цветовая гамма должна состоять не более чем из двух-трех цветов; • всегда должно быть два типа слайдов: для титульных и для основного текста; • размер шрифта должен быть: 24–54 пункта (заголовок), 18–36 пунктов (обычный текст); • текст должен быть свернут до ключевых слов и фраз. Полные развернутые предложения на слайдах таких презентаций используются только при цитировании; каждый слайд должен иметь заголовок; • все слайды должны быть выдержаны в одном стиле; • на каждом слайде должно быть не более трех иллюстраций; • слайды должны быть пронумерованы с указанием общего количества слайдов

4. Методические рекомендации по написанию эссе

Эссе - это самостоятельная письменная работа на тему, предложенную преподавателем. Цель эссе состоит в развитии навыков самостоятельного творческого мышления и письменного изложения собственных мыслей. Писать эссе чрезвычайно полезно, поскольку это позволяет автору научиться четко и грамотно формулировать мысли, структурировать информацию, использовать основные категории анализа, выделять причинно-следственные связи, иллюстрировать понятия соответствующими примерами, аргументировать свои выводы; овладеть научным стилем речи.

Эссе должно содержать: четкое изложение сути поставленной проблемы, включать самостоятельно проведенный анализ этой проблемы с использованием концепций и аналитического инструментария, рассматриваемого в рамках дисциплины, выводы, обобщающие авторскую позицию по поставленной проблеме. В зависимости от специфики дисциплины формы эссе могут значительно дифференцироваться. В некоторых случаях это может быть анализ имеющихся статистических данных по изучаемой проблеме, анализ материалов из средств массовой информации и использованием изучаемых моделей, подробный разбор предложенной задачи с развернутыми мнениями, подбор и детальный анализ примеров, иллюстрирующих проблему и т.д.

Построение эссе - это ответ на вопрос или раскрытие темы, которое основано на классической системе доказательств.

Структура эссе

1. *Титульный лист* (заполняется по единой форме);
2. *Введение* - суть и обоснование выбора данной темы, состоит из ряда компонентов, связанных логически и стилистически.

На этом этапе очень важно правильно *сформулировать вопрос, на который вы собираетесь найти ответ в ходе своего исследования.*

3. *Основная часть* - теоретические основы выбранной проблемы и изложение основного вопроса.

Данная часть предполагает развитие аргументации и анализа, а также обоснование их, исходя из имеющихся данных, других аргументов и позиций по этому вопросу. В этом заключается основное содержание эссе и это представляет собой главную трудность. Поэтому важное значение имеют подзаголовки, на основе которых осуществляется структурирование аргументации; именно здесь необходимо обосновать (логически, используя данные или строгие рассуждения) предлагаемую аргументацию/анализ. Там, где это необходимо, в качестве аналитического инструмента можно использовать графики, диаграммы и таблицы.

В зависимости от поставленного вопроса анализ проводится на основе следующих категорий:

Причина - следствие, общее - особенное, форма - содержание, часть - целое, постоянство - изменчивость.

В процессе построения эссе необходимо помнить, что один параграф должен содержать только одно утверждение и соответствующее доказательство, подкрепленное графическим и иллюстративным материалом. Следовательно, наполняя содержанием разделы аргументацией (соответствующей подзаголовкам), необходимо в пределах параграфа ограничить себя рассмотрением одной главной мысли.

Хорошо проверенный (и для большинства — совершенно необходимый) способ построения любого эссе - использование подзаголовков для обозначения ключевых моментов аргументированного изложения: это помогает посмотреть на то, что предполагается сделать (и ответить на вопрос, хорош ли замысел). Такой подход поможет следовать точно определенной цели в данном исследовании. Эффективное использование подзаголовков - не только обозначение основных пунктов, которые необходимо осветить.

Их последовательность может также свидетельствовать о наличии или отсутствии логичности в освещении темы.

4. *Заключение* - обобщения и аргументированные выводы по теме с указанием области ее применения и т.д. Подытоживает эссе или еще раз вносит пояснения, подкрепляет смысл и значение изложенного в основной части. Методы, рекомендуемые для составления заключения: повторение, иллюстрация, цитата, впечатляющее утверждение. Заключение может содержать такой очень важный, дополняющий эссе элемент, как указание на применение (импликацию) исследования, не исключая взаимосвязи с другими проблемами.

Структура аппарата доказательств, необходимых для написания эссе

Доказательство - это совокупность логических приемов обоснования истинности какого-либо суждения с помощью других истинных и связанных с ним суждений. Оно связано с убеждением, но не тождественно ему: аргументация или доказательство должны основываться на данных науки и общественно-исторической практики, убеждения же могут быть основаны на предрассудках, неосведомленности людей в вопросах экономики и политики, видимости доказательности. Другими словами, доказательство или аргументация - это рассуждение, использующее факты, истинные суждения, научные данные и убеждающее нас в истинности того, о чем идет речь.

Структура любого доказательства включает в себя три составляющие: тезис, аргументы и выводы или оценочные суждения.

Тезис - это положение (суждение), которое требуется доказать. *Аргументы* - это категории, которыми пользуются при доказательстве истинности тезиса. *Вывод* - это мнение, основанное на анализе фактов. *Оценочные суждения* - это мнения, основанные на наших убеждениях, верованиях или взглядах. *Аргументы* обычно делятся на следующие группы:

1. *Удостоверенные факты* — фактический материал (или статистические данные).
2. *Определения* в процессе аргументации используются как описание понятий, связанных с тезисом.
3. *Законы* науки и ранее доказанные теоремы тоже могут использоваться как аргументы доказательства.

Требования к фактическим данным и другим источникам

При написании эссе чрезвычайно важно то, как используются эмпирические данные и другие источники (особенно качество чтения). Все (фактические) данные соотносятся с конкретным временем и местом, поэтому прежде, чем их использовать, необходимо убедиться в том, что они соответствуют необходимому для исследований времени и месту. Соответствующая спецификация данных по времени и месту — один из способов, который может предотвратить чрезмерное обобщение, результатом которого может, например, стать предположение о том, что все страны по некоторым важным аспектам одинаковы (если вы так полагаете, тогда это должно быть доказано, а не быть голословным утверждением).

Всегда можно избежать чрезмерного обобщения, если помнить, что в рамках эссе используемые данные являются иллюстративным материалом, а не заключительным актом, т.е. они подтверждают аргументы и рассуждения и свидетельствуют о том, что автор умеет использовать данные должным образом. Нельзя забывать также, что данные, касающиеся спорных вопросов, всегда подвергаются сомнению. От автора не ждут определенного или окончательного ответа. Необходимо понять сущность фактического материала, связанного с этим вопросом (соответствующие индикаторы? насколько надежны данные для построения таких индикаторов? к какому заключению можно прийти на основании имеющихся данных и индикаторов относительно причин и следствий? и т.д.), и продемонстрировать это в эссе. Нельзя ссылаться на работы, которые автор эссе не читал сам.

Как подготовить и написать эссе?

Качество любого эссе зависит от трех взаимосвязанных составляющих, таких как:

1. Исходный материал, который будет использован (конспекты прочитанной литературы, лекций, записи результатов дискуссий, собственные соображения и накопленный опыт по данной проблеме).

2. Качество обработки имеющегося исходного материала (его организация, аргументация и доводы).

3. Аргументация (насколько точно она соотносится с поднятыми в эссе проблемами).

Процесс написания эссе можно разбить на несколько стадий: обдумывание - планирование - написание - проверка - правка.

Планирование - определение цели, основных идей, источников информации, сроков окончания и представления работы.

Цель должна определять действия.

Идеи, как и цели, могут быть конкретными и общими, более абстрактными. Мысли, чувства, взгляды и представления могут быть выражены в форме аналогий, ассоциации, предположений, рассуждений, суждений, аргументов, доводов и т.д.

Аналогии - выявление идеи и создание представлений, связь элементов значений.

Ассоциации - отражение взаимосвязей предметов и явлений действительности в форме закономерной связи между нервно - психическими явлениями (в ответ на тот или иной словесный стимул выдать «первую пришедшую в голову» реакцию).

Предположения - утверждение, не подтвержденное никакими доказательствами.

Рассуждения - формулировка и доказательство мнений.

Аргументация - ряд связанных между собой суждений, которые высказываются для того, чтобы убедить читателя (слушателя) в верности (истинности) тезиса, точки зрения, позиции.

Суждение - фраза или предложение, для которого имеет смысл вопрос: истинно или ложно?

Доводы - обоснование того, что заключение верно абсолютно или с какой-либо долей вероятности. В качестве доводов используются факты, ссылки на авторитеты, заведомо истинные суждения (законы, аксиомы и т.п.), доказательства (прямые, косвенные, «от противного», «методом исключения») и т.д.

Перечень, который получится в результате перечисления идей, поможет определить, какие из них нуждаются в особенной аргументации.

Источники. Тема эссе подскажет, где искать нужный материал. Обычно пользуются библиотекой, Интернет-ресурсами, словарями, справочниками. Пересмотр означает редактирование текста с ориентацией на качество и эффективность.

Качество текста складывается из четырех основных компонентов: ясности мысли, внятности, грамотности и корректности.

Мысль - это содержание написанного. Необходимо четко и ясно формулировать идеи, которые хотите выразить, в противном случае вам не удастся донести эти идеи и сведения до окружающих.

Внятность - это доступность текста для понимания. Легче всего ее можно достичь, пользуясь логично и последовательно тщательно выбранными словами, фразами и взаимосвязанными абзацами, раскрывающими тему.

Грамотность отражает соблюдение норм грамматики и правописания. Если в чем-то сомневаетесь, загляните в учебник, справьтесь в словаре или руководстве по стилистике или дайте прочитать написанное человеку, чья манера писать вам нравится.

Корректность — это стиль написанного. Стиль определяется жанром, структурой работы, целями, которые ставит перед собой пишущий, читателями, к которым он обращается.

5. Методические рекомендации по подготовке семинарским занятиям

Семинар представляет собой комплексную форму и завершающее звено в изучении определенных тем, предусмотренных программой учебной дисциплины. Комплексность данной формы занятий определяется тем, что в ходе её проведения сочетаются выступления обучающихся и преподавателя: рассмотрение обсуждаемой проблемы и анализ различных, часто дискуссионных позиций; обсуждение мнений обучающихся и разъяснение (консультация) преподавателя; углубленное изучение теории и приобретение навыков умения ее использовать в практической работе.

По своему назначению семинар, в процессе которого обсуждается та или иная научная проблема, способствует:

- углубленному изучению определенного раздела учебной дисциплины, закреплению знаний;
- отработке методологии и методических приемов познания;
- выработке аналитических способностей, умения обобщения и формулирования выводов;
- приобретению навыков использования научных знаний в практической деятельности;
- выработке умения кратко, аргументированно и ясно излагать обсуждаемые вопросы;
- осуществлению контроля преподавателя за ходом обучения.

Семинары представляет собой *дискуссию* в пределах обсуждаемой темы (проблемы). Дискуссия помогает участникам семинара приобрести более совершенные знания, проникнуть в суть изучаемых проблем. Выработать методологию, овладеть методами анализа социально-экономических процессов. Обсуждение должно носить творческий характер с четкой и убедительной аргументацией.

По своей структуре семинар начинается со вступительного слова преподавателя, в котором кратко излагаются место и значение обсуждаемой темы (проблемы) в данной дисциплине, напоминаются порядок и направления ее обсуждения. Конкретизируется ранее известный обучающимся план проведения занятия. После этого начинается процесс обсуждения вопросов обучающимися. Завершается занятие подведением итогов обсуждения, заключительным словом преподавателя.

Проведение семинарских занятий в рамках учебной группы (20 - 25 человек) позволяет обеспечить активное участие в обсуждении проблемы всех присутствующих.

По ходу обсуждения темы помните, что изучение теории должно быть связано с определением (выработкой) средств, путей применения теоретических положений в практической деятельности, например, при выполнении функций государственного служащего. В то же время важно не свести обсуждение научной проблемы только к пересказу случаев из практики работы, к критике имеющих место недостатков. Дискуссии имеют важное значение: учат дисциплине ума, умению выступать по существу, мыслить логически, выделяя главное, критически оценивать выступления участников семинара.

В процессе проведения семинара обучающиеся могут использовать разнообразные по своей форме и характеру пособия, демонстрируя фактический, в том числе статистический материал, убедительно подтверждающий теоретические выводы и положения. В завершение обсудите результаты работы семинара и сделайте выводы, что хорошо усвоено, а над чем следует дополнительно поработать.

В целях эффективности семинарских занятий необходима обстоятельная подготовка к их проведению. В начале семестра (учебного года) возьмите в библиотеке необходимые методические материалы для своевременной подготовки к семинарам. Готовясь к конкретной теме занятия следует ознакомиться с новыми официальными документами, статьями в периодических журналах, вновь вышедшими монографиями.

6. Методические рекомендации по подготовке к дискуссии

Современная практика предлагает широкий круг типов семинарских занятий. Среди них особое место занимает *семинар-дискуссия*, где в диалоге хорошо усваивается новая информация, видны убеждения студента, обсуждаются противоречия (явные и скрытые) и недостатки. Для обсуждения берутся конкретные актуальные вопросы, с которыми студенты предварительно ознакомлены. Дискуссия является одной из наиболее эффективных технологий группового взаимодействия, обладающей особыми возможностями в обучении, развитии и воспитании будущего специалиста.

Дискуссия (от лат. discussio - рассмотрение, исследование) - способ организации совместной деятельности с целью интенсификации процесса принятия решений в группе посредством обсуждения какого-либо вопроса или проблемы.

Дискуссия обеспечивает активное включение студентов в поиск истины; создает условия для открытого выражения ими своих мыслей, позиций, отношений к обсуждаемой теме и обладает особой возможностью воздействия на установки ее участников в процессе группового взаимодействия. Дискуссию можно рассматривать как *метод интерактивного обучения* и как особую технологию, включающую в себя другие методы и приемы обучения: «мозговой штурм», «анализ ситуаций» и т.д.

Обучающий эффект дискуссии определяется предоставляемой участнику возможностью получить разнообразную информацию от собеседников, продемонстрировать и повысить свою компетентность, проверить и уточнить свои представления и взгляды на обсуждаемую проблему, применить имеющиеся знания в процессе совместного решения учебных и профессиональных задач.

Развивающая функция дискуссии связана со стимулированием творчества обучающихся, развитием их способности к анализу информации и аргументированному, логически выстроенному доказательству своих идей и взглядов, с повышением коммуникативной активности студентов, их эмоциональной включенности в учебный процесс.

Влияние дискуссии на личностное становление студента обусловливается ее целостно - ориентирующей направленностью, созданием благоприятных условий для проявления индивидуальности, самоопределения в существующих точках зрения на определенную проблему, выбора своей позиции; для формирования умения взаимодействовать с другими, слушать и слышать окружающих, уважать чужие убеждения, принимать оппонента, находить точки соприкосновения, соотносить и согласовывать свою позицию с позициями других участников обсуждения.

Безусловно, наличие оппонентов, противоположных точек зрения всегда обостряет дискуссию, повышает ее продуктивность, позволяет создавать с их помощью конструктивный конфликт для более эффективного решения обсуждаемых проблем.

Существует несколько видов дискуссий, использование того или иного типа дискуссии зависит от характера обсуждаемой проблемы и целей дискуссии.

Дискуссия- диалог чаще всего применяется для совместного обсуждения учебных и производственных проблем, решение которых может быть достигнуто путем взаимодополнения, группового взаимодействия по принципу «индивидуальных вкладов» или на основе согласования различных точек зрения, достижения консенсуса.

Дискуссия - спор используется для всестороннего рассмотрения сложных проблем, не имеющих однозначного решения даже в науке, социальной, политической жизни, производственной практике и т.д. Она построена на принципе «позиционного противостояния» и ее цель - не столько решить проблему, сколько побудить участников дискуссии задуматься над проблемой, уточнить и определить свою позицию; научить аргументировано отстаивать свою точку зрения и в то же время осознать право других иметь свой взгляд на эту проблему, быть индивидуальностью.

Условия эффективного проведения дискуссии:

- информированность и подготовленность студентов к дискуссии,
- свободное владение материалом, привлечение различных источников для аргументации отстаиваемых положений;
- правильное употребление понятий, используемых в дискуссии, их единообразное понимание;
- корректность поведения, недопустимость высказываний, задевающих личность оппонента; установление регламента выступления участников;
- полная включенность группы в дискуссию, участие каждого студента в ней.

Подготовка студентов к дискуссии: если тема объявлена заранее, то следует ознакомиться с указанной литературой, необходимыми справочными материалами, продумать свою позицию, четко сформулировать аргументацию, выписать цитаты, мнения специалистов.

В проведении дискуссии выделяется несколько этапов.

Этап 1-й, введение в дискуссию: формулирование проблемы и целей дискуссии; определение значимости проблемы, совместная выработка правил дискуссии; выяснение однозначности понимания темы дискуссии, используемых в ней терминов, понятий.

Этап 2-й, обсуждение проблемы: обмен участниками мнениями по каждому вопросу. Цель этапа - собрать максимум мнений, идей, предложений, соотнося их друг с другом.

Этап 3-й, подведение итогов обсуждения: выработка студентами согласованного мнения и принятие группового решения.

Далее подводятся итоги дискуссии, заслушиваются и защищаются проектные задания. После этого проводится "мозговой штурм" по нерешенным проблемам дискуссии, а также выявляются прикладные аспекты, которые можно рекомендовать для включения в курсовые и дипломные работы или в апробацию на практике.

Семинары-дискуссии проводятся с целью выявления мнения студентов по актуальным и проблемным вопросам.

7. Методические рекомендации по подготовке к сдаче экзаменов и зачетов

Экзамен (зачет) - одна из важнейших частей учебного процесса, имеющая огромное значение.

Во-первых, готовясь к экзамену, студент приводит в систему знания, полученные на лекциях, семинарах, практических и лабораторных занятиях, разбирается в том, что осталось непонятным, и тогда изучаемая им дисциплина может быть воспринята в полном объеме с присущей ей строгостью и логичностью, ее практической направленностью. А это чрезвычайно важно для будущего специалиста.

Во-вторых, каждый хочет быть волевым и сообразительным., выдержанным и целеустремленным, иметь хорошую память, научиться быстро находить наиболее рациональное решение в трудных ситуациях. Очевидно, что все эти качества не только украшают человека, но и делают его наиболее действенным членом коллектива. Подготовка и сдача экзамена помогают студенту глубже усвоить изучаемые дисциплины, приобрести навыки и качества, необходимые хорошему специалисту.

Конечно, успех на экзамене во многом обусловлен тем, насколько систематически и глубоко работал студент в течение семестра. Совершенно очевидно, что серьезно продумать и усвоить содержание изучаемых дисциплин за несколько дней подготовки к экзамену просто невозможно даже для очень способного студента. И, кроме того, хорошо известно, что быстро выученные на память разделы учебной дисциплины так же быстро забываются после сдачи экзамена.

При подготовке к экзамену студенты не только повторяют и дорабатывают материал дисциплины, которую они изучали в течение семестра, они обобщают полученные знания, осмысливают методологию предмета, его систему, выделяют в нем основное и главное, воспроизводят общую картину с тем, чтобы яснее понять связь между отдельными элементами дисциплины. Вся эта обобщающая работа проходит в условиях напряжения воли и сознания, при значительном отвлечении от повседневной жизни, т. е. в условиях, благоприятствующих пониманию и запоминанию.

Подготовка к экзаменам состоит в приведении в порядок своих знаний. Даже самые способные студенты не в состоянии в короткий период зачетно-экзаменационной сессии усвоить материал целого семестра, если они над ним не работали в свое время. Для тех, кто мало занимался в семестре, экзамены принесут мало пользы: что быстро пройдено, то быстро и забудется. И хотя в некоторых случаях студент может «проскочить» через экзаменационный барьер, в его подготовке останется серьезный пробел, трудно восполняемый впоследствии.

Определив назначение и роль экзаменов в процессе обучения, попытаемся на этой основе пояснить, как лучше готовиться к ним.

Экзаменам, как правило, предшествует защита курсовых работ (проектов) и сдача зачетов. К экзаменам допускаются только студенты, защитившие все курсовые работы (проекты) и сдавшие все зачеты. В вузе сдача зачетов организована так, что при систематической работе в течение семестра, своевременной и успешной сдаче всех текущих работ, предусмотренных графиком учебного процесса, большая часть зачетов не вызывает повышенной трудности у студента. Студенты, работавшие в семестре по плану, подходят к экзаменационной сессии без напряжения, без излишней затраты сил в последнюю, «зачетную» неделю.

Подготовку к экзамену следует начинать с первого дня изучения дисциплины. Как правило, на лекциях подчеркиваются наиболее важные и трудные вопросы или разделы дисциплины, требующие внимательного изучения и обдумывания. Нужно эти вопросы выделить и обязательно постараться разобраться в них, не дожидаясь экзамена, проработать их, готовясь к семинарам, практическим или лабораторным занятиям, попробовать самостоятельно решить несколько типовых задач. И если, несмотря на это, часть материала осталась неувоенной, ни в коем случае нельзя успокаиваться, надеясь

на то, что это не попадется на экзамене. Факты говорят об обратном; если те или другие вопросы учебной дисциплины не вошли в экзаменационный билет, преподаватель может их задать (и часто задает) в виде дополнительных вопросов.

Точно такое же отношение должно быть выработано к вопросам и задачам, перечисленным в программе учебной дисциплины, выдаваемой студентам в начале семестра. Обычно эти же вопросы и аналогичные задачи содержатся в экзаменационных билетах. Не следует оставлять без внимания ни одного раздела дисциплины: если не удалось в чем-то разобраться самому, нужно обратиться к товарищам; если и это не помогло выяснить какой-либо вопрос до конца, нужно обязательно задать этот вопрос преподавателю на предэкзаменационной консультации. Чрезвычайно важно приучить себя к умению самостоятельно мыслить, учиться думать, понимать суть дела. Очень полезно после проработки каждого раздела восстановить в памяти содержание изученного материала, кратко записав это на листе бумаги, создать карту памяти (умственную карту), изобразить необходимые схемы и чертежи (логико-графические схемы), например, отобразить последовательность вывода теоремы или формулы. Если этого не сделать, то большая часть материала останется не понятой, а лишь формально заученной, и при первом же вопросе экзаменатора студент убедится в том, насколько поверхностно он усвоил материал.

В период экзаменационной сессии происходит резкое изменение режима работы, отсутствует посещение занятий по расписанию. При всяком изменении режима работы очень важно скорее приспособиться к новым условиям. Поэтому нужно сразу выбрать такой режим работы, который сохранился бы в течение всей сессии, т. е. почти на месяц. Необходимо составить для себя новый распорядок дня, чередуя занятия с отдыхом. Для того чтобы сократить потерю времени на включение в работу, рабочие периоды целесообразно делать длительными, разделив день примерно на три части: с утра до обеда, с обеда до ужина и от ужина до сна.

Каждый рабочий период дня надо заканчивать отдыхом. Наилучший отдых в период экзаменационной сессии - прогулка, кратковременная пробежка или какой-либо неустойчивый физический труд.

При подготовке к экзаменам основное направление дают программа учебной дисциплины и студенческий конспект, которые указывают, что наиболее важно знать и уметь делать. Основной материал должен прорабатываться по учебнику (если такой имеется) и учебным пособиям, так как конспекта далеко недостаточно для изучения дисциплины. Учебник должен быть изучен в течение семестра, а перед экзаменом сосредоточьте внимание на основных, наиболее сложных разделах. Подготовку по каждому разделу следует заканчивать восстановлением по памяти его краткого содержания в логической последовательности.

За один - два дня до экзамена назначается консультация. Если ее правильно использовать, она принесет большую пользу. Во время консультации студент имеет полную возможность получить ответ на нее и ясные ему вопросы. А для этого он должен проработать до консультации все темы дисциплины. Кроме того, преподаватель будет отвечать на вопросы других студентов, что будет для вас повторением и закреплением знаний. И еще очень важное обстоятельство: преподаватель на консультации, как правило, обращает внимание на те вопросы, по которым на предыдущих экзаменах ответы были неудовлетворительными, а также фиксирует внимание на наиболее трудных темах дисциплины. Некоторые студенты не приходят на консультации либо потому, что считают, что у них нет вопросов к преподавателю, либо полагают, что у них и так мало времени и лучше самому прочитать материал в конспекте или в учебнике. Это глубокое заблуждение. Никакая другая работа не сможет принести столь значительного эффекта накануне экзамена, как консультация преподавателя.

Но консультация не может возместить отсутствия длительной работы в течение семестра и помочь за несколько часов освоить материал, требующийся к экзамену. На

консультации студент получает ответы на трудные или оставшиеся неясными вопросы и, следовательно, дорабатывается материал. Консультации рекомендуется посещать, подготовив к ним все вопросы, вызывающие сомнения. Если студент придет на консультацию, не проработав всего материала, польза от такой консультации будет невелика.

Итак, *основные советы* для подготовки к сдаче зачетов и экзаменов состоят в следующем:

- лучшая подготовка к зачетам и экзаменам - равномерная работа в течение всего семестра;
- используйте программы учебных дисциплин - это организует вашу подготовку к зачетам и экзаменам;
- учитывайте, что для полноценного изучения учебной дисциплины необходимо время;
- составляйте планы работы во времени;
- работайте равномерно и ритмично;
- курсовые работы (проекты) желательно защищать за одну - две недели до начала зачетно-экзаменационной сессии;
- все зачеты необходимо сдавать до начала экзаменационной сессии;
- помните, что конспект не заменяет учебник и учебные пособия, а помогает выбрать из него основные вопросы и ответы;
- при подготовке наибольшее внимание и время уделяйте трудным и непонятным вопросам учебной дисциплины;
- грамотно используйте консультации;
- соблюдайте правильный режим труда и отдыха во время сессии, это сохранит работоспособность и даст хорошие результаты;
- учитесь владеть собой на зачете и экзамене;
- учитесь точно и кратко передавать свои мысли, поясняя их, если нужно, логико-графическими схемами.

Очень важным условием для правильного режима работы в период экзаменационной сессии является нормальный сон, иначе в день экзамена не будет чувства бодрости и уверенности.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Методические указания по выполнению самостоятельной работы обучающихся являются неотъемлемой частью процесса обучения в вузе. Правильная организация самостоятельной работы позволяет обучающимся развивать умения и навыки в усвоении и систематизации приобретаемых знаний, обеспечивает высокий уровень успеваемости в период обучения, способствует формированию навыков совершенствования профессионального мастерства. Также внеаудиторное время включает в себя подготовку к аудиторным занятиям и изучение отдельных тем, расширяющих и углубляющих представления обучающихся по разделам изучаемой дисциплины.

Таким образом, обучающийся используя методические указания может в достаточном объеме усвоить и успешно реализовать конкретные знания, умения, навыки и получить опыт при выполнении следующих условий:

- 1) систематическая самостоятельная работа по закреплению полученных знаний и навыков;
- 2) добросовестное выполнение заданий;
- 3) выяснение и уточнение отдельных предпосылок, умозаключений и выводов, содержащихся в учебном курсе;
- 4) сопоставление точек зрения различных авторов по затрагиваемым в учебном курсе проблемам; выявление неточностей и некорректного изложения материала в периодической и специальной литературе;
- 5) периодическое ознакомление с последними теоретическими и практическими достижениями в области управления персоналом;
- 6) проведение собственных научных и практических исследований по одной или нескольким актуальным проблемам для *HR*;
- 7) подготовка научных статей для опубликования в периодической печати, выступление на научно-практических конференциях, участие в работе студенческих научных обществ, круглых столах и диспутах по проблемам управления персоналом.

Контроль результатов внеаудиторной самостоятельной работы студентов осуществляется в пределах времени, отведенного на обязательные учебные занятия по дисциплине

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Долгоруков А. Метод case-study как современная технология профессионально - ориентированного обучения [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://evolkov.net/case/case.study.html>
2. Методические рекомендации по написанию реферата. [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://www.hse.spb.ru/edu/recommendations/method-referat-2005.phtml>
3. Фролова Н. А. Реферирование и аннотирование текстов по специальности (на материале немецкого языка): Учеб. пособие / ВолгГТУ, Волгоград, 2006. - С.5.

